



Geliştirilen tabakalı sonlu elemanla silindirik eğilmeli kompozit plakların lineer statik analizi

Kazım Ahmet HAŞİM *

İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul/Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada kompozit plakların silindirik eğilme durumuna ait lineer statik analizlerinde kullanılmak üzere düzlem dışı kayma gerilme dağılımını daha gerçekçi olarak elde edebilen bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir. Tabaka kalınlığı doğrultusunda sürekli ve türevlenebilir tek bir düzlem içi yer değiştirme alanı belirlenmesi esasına dayanan sonlu eleman modelleri tabakalar arası düzlem dışı kayma gerilmelerinin eşitliğini sağlayamayarak, düzlem dışı kayma gerilme dağılımını gerçekçi olarak verememektedir. Bu zafiyeti gidermek amacıyla geliştirilen sonlu elemanda; her bir tabakanın bağımsız olarak ele alınmasıyla, düzlem içi yer değiştirme alanlarında görülen zig-zag etkisi dikkate alınmıştır. Her iki doğrultuda kübik (dört noktalı), toplamda on iki düğüm noktalı; tabaka kalınlığı doğrultusunda her bir tabakada üst, orta ve alt düğüm noktaları olmak üzere üç düğüm noktasına sahip sonlu eleman ile tabakalı kompozit plakların silindirik eğilme hali incelenmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürde yer alan üç boyutlu elastisite çözümleri ile karşılaştırılarak gösterilmiştir

Anahtar Kelimeler: Tabakalı kompozit, sonlu eleman, silindirik eğilme, zig-zag

Linear static analysis of the laminated composite plates for cylindrical bending case by new layerwise finite element

ABSTRACT

This article is about the linear static analysis of laminated composite plates for cylindrical bending case by a new layerwise finite element. Finite elements, based on the assumption that the in-plane displacement fields are continuous functions of the thickness coordinate, results in all transverse stresses are discontinuous at layer interfaces contrary to the actual transverse stress state. To consider zig-zag effect of the in-plane displacement fields and overcome the discontinuity of transverse stress state at layer interfaces, a new layerwise finite element which has four nodes (cubic) per side in plan and three nodes (quadratic) in the thickness direction is developed. The linear static analysis results, relating to the cylindrical deflection of laminated composite plates, obtained by the new layerwise finite element, compared with the three dimensional elasticity solutions in the literature.

Keywords: Laminated composite, finite element, cylindrical bending, zig-zag

1. Giriş

Kompozit malzemeler iki veya daha fazla sayıda malzemenin birlikte daha iyi mühendislik özellikleri sergileyebilmeleri amacıyla bir araya getirilmesi sonucu oluşurlar. Kompozit malzeme oluşturulması ile malzemenin rijitliği, mukavemeti, korozyon dayanımı, termal özellikler ve yorulma ömrü gibi birçok özellik geliştirilebilmektedir. Birçok mühendislik özelliğinin bu şekilde geliştirilebilmesi nedeniyle geçtiğimiz yirmi sene içerisinde birçok mühendislik alanında (uçak, makina,

* e-posta : hasim@itu.edu.tr (KA Hasim)

inşaat v.b) kompozit malzemenin kullanımında artış gözlenmiş ve buna paralel olarak kompozit malzemeden üretilmiş yapı elemanlarının (tabakalı kompozit plak ve kabuklar) analizi ve tasarımı üzerine yapılan çalışmalar ve yayınlar hız kazanmıştır. Bu bölümde konu benzerliği ve kronoloji dikkate alınarak tek tabakalı plak teorilerinden çok tabakalı plak teorilerine geçişe kadar yapılmış çalışmalar açıklanmıştır.

Plak teorisinde yapılmış ilk çalışmalar Kirchhoff [1] ve Love [2] tarafından yapılmışlardır. Bu çalışmalarda başlangıçta plak eksenine dik ve düzlem olan kesitlerin şekildeğiştirdikten sonra da plak eksenine dik ve düzlem kaldıkları kabulü yapılmış; kayma (γ_{xz}, γ_{yz}) ve enine normal şekildeğiştirmenin (ϵ_{zz}) plak kalınlığının fazla olmaması nedeniyle ihmal edilebileceği belirtilmiştir. Benzer şekilde Cauchy [3] ve Poisson [4] birinci grup olarak adlandırılan ince plak üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır.

Daha sonra yapılmış çalışmalarda Reissner [5] ve sonrasında Mindlin [6] kayma deformasyonlarının yaptığı işleri de dikkate alarak kalın plak teorisini ortaya koymuşlardır.

Kirchoff-Love ince plak teorisinin tabakalı plaklara genişletilmesi klasik tabaka teorisi (CLT) olarak isimlendirilmiştir [7]. Reissner-Mindlin kalın plak teorisinin ise tabakalı kompozit plaklara genişletilmesi Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi (FSDT) olarak isimlendirilmiştir [8]. Bu teoride kullanılan sabit kayma gerilmesi kabulü nedeniyle ortaya çıkan; gerçekte ise üst ve alt sınırlarda kayma gerilmelerinin bulunmayacak olma çelişkisi, kayma düzeltme katsayıları ile giderilmiştir.

Daha sonraki çalışmalar kayma düzeltme katsayıları gerektirmeyecek ve tabaka kalınlığı doğrultusunda parabolik kayma gerilme dağılımını sağlayacak daha yüksek mertebeden deplasman alanı belirlemeleri üzerine kurulmuş ve bu çalışmalar üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi (TSDT) veya yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi (HOT) adıyla literatüre geçmiştir [9]. Reddy [10]; CLT, FSDT ve HOT teorilerinde tabaka sayısından (N_1) bağımsız olarak deplasman ve/veya gerilme alanları belirlenmesi sebebiyle bu teorileri eşdeğer tek tabaka teorisi (ESLT) olarak isimlendirmiştir.

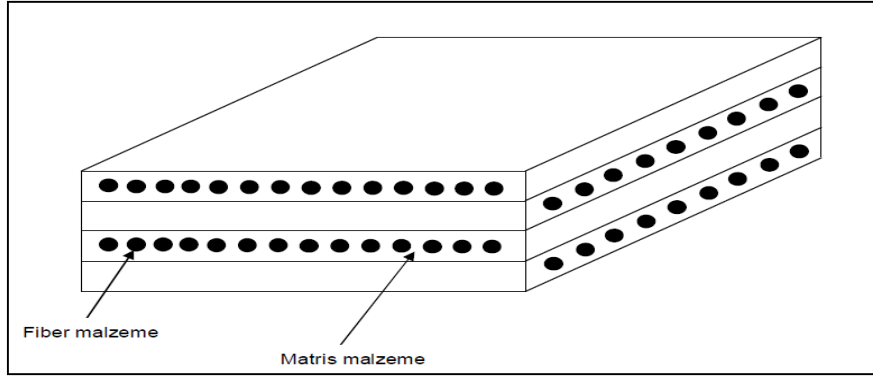
Eşdeğer tek tabaka teorileri her ne kadar tabakalanmanın en üst ve en alt noktalarında kayma gerilmelerini sıfırlayacak bir deplasman alanı üzerine kurulmuş olsa da; bu teorilere ait sonuçlar incelendiğinde; farklı malzemelerden oluşan iki tabaka arasındaki geçişlerde düzlemsiz kayma gerilmelerinin birbirine eşit olması gerekirken, ilgili noktalarda sıçrama yaptıkları gözlemlenmiştir. Eşdeğer tek tabaka teorilerinde görülen bu tabakalar arası gerilme süreksizliğinin nedeni olarak, tüm plak kalınlığı boyunca tek bir deplasman alanı alınmasından kaynaklı tabakalar arası geçiş sınırlarında deplasman birinci türevinin sürekliliğinin korunması (C^1 sürekliliği) gösterilmiştir.

Kalın tabakalanmanın söz konusu olduğu ve kayma gerilmelerinin önem kazandığı sistemlerde bu teorilere dayalı sonlu elemanlar yeterli olamamakta; tabakalar arası kayma gerilmeleri eşitliğinin sağlandığı, gerçekçi düzlem dışı kayma gerilme dağılımını verecek sonlu elemana ihtiyaç duyulması nedeniyle yeni bir sonlu eleman (Genson) geliştirilmiştir. Geliştirilen bu sonlu elemanla tabakalı kompozit silindirik eğilmeli plakların lineer statik analizleri gerçekleştirilmiş ve literatürde yer alan üç boyutlu elastisite çözümleri [11] ile karşılaştırılmıştır.

2. Tabakalı Kompozit Plak Denklemleri

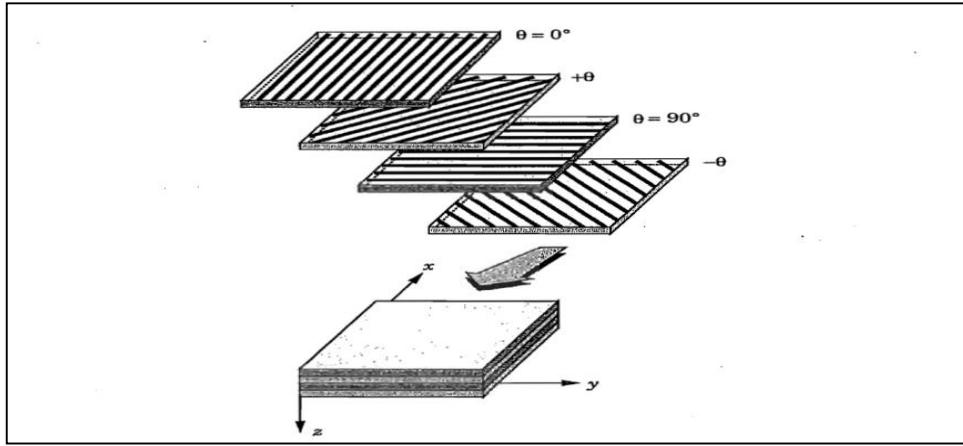
2.1. Gerilme Şekildeğiştirme İlişkisi

Tabakalı kompozit plaklar Şekil 1'den görüldüğü üzere fiber ve matris malzemelerin birleşiminden oluşturulurlar.



Şekil 1. Tabakalı kompozit plaklarda fiber ve matris malzeme.

Tabakalı kompozit plaklar Şekil 2.'den görüleceği üzere farklı malzemelerden oluşabilmekte ve her bir katmanda farklı fiber doğrultularına sahip olabilmektedir.



Şekil 2. Farklı fiber doğrultularına sahip katmanlardan oluşan kompozit plak [10].

Tabaka kalınlığı doğrultusunda farklı mekanik özelliklere sahip katmanların birleşmesi bu plakların düzlem dışı kayma deformasyonlarına karşı tek tabaka plaklara göre daha hassas olmalarına sebep olmaktadır. L ve T alt indisleri sırasıyla fiber ve fibere dik enine doğrultu olmak üzere, tabakalı kompozit plaklarda düzlem dışı kayma modüllerinin enine doğrultudaki elastisite modülüne oranları $G_{LT}/E_T \approx G_{TT}/E_T = 1/10 \sim 1/200$ mertebelerinde olmaktadır.

Kompozit plakların E_1 (boyuna doğrultu elastisite modülü), E_2 (enine doğrultu elastisite modülü), G_{13} , G_{23} (kayma modülleri); fiber ve matris elemanların malzeme özelliklerinin birleşiminden;

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad , \quad \nu_{12} = V_f \nu_f + V_m \nu_m \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \quad , \quad G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} \quad (2)$$

olarak elde edilirler. Ortotrop davranış gösteren bir k. tabakada, lokal (malzeme) eksen takımında gerilme-şekil değiştirme ilişkileri;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k ; \quad \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^k \quad (3)$$

şekindedir. (3) denkleminde yer alan Q malzeme sabitleri matrisi terimleri (1) ve (2) denklemleri yardımıyla mühendislik sabitleri cinsinden;

$$Q_{11}^k = \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad Q_{12}^k = \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad Q_{22}^k = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \quad (4)$$

$$Q_{66}^k = G_{12}^k, \quad Q_{44}^k = G_{23}^k, \quad Q_{55}^k = G_{13}^k \quad (5)$$

olarak belirlenirler. (3) denkleminde yer alan şekil değiştirmelerin yer değiştirmeler ile lineer ilişkisini Von Karman [12];

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

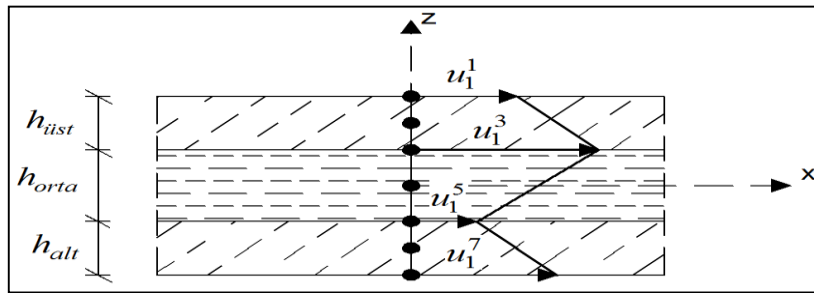
olarak ifade etmiştir. Her tabaka için (3) denkleminde verilen gerilme şekil değiştirme ilişkilerinin global plak koordinatlarında elde edilmesi gerekmektedir. Plak x eksenini ile malzeme eksenini arasında ağı olması durumunda (3) denkleminde gsterilen gerilme-şekil değiştirme ilişkisi;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{54} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}_i \quad (7)$$

şeklinde elde edilir.

2.2. Tabakalı Kompozit Plaklarda Zig-Zag Etkisi

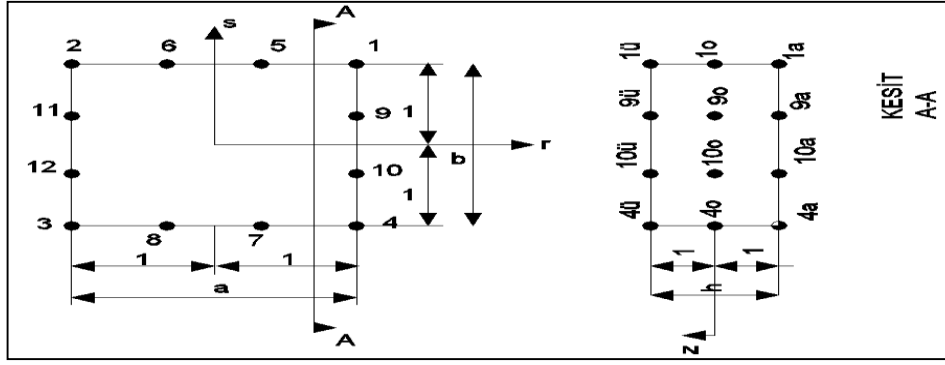
Enine normal doğrultudaki süreksiz malzeme özellikleri, deplasman alanının $u=(u, v, w)$ (kalın karakterler matris gösterimini temsil etmekte) kalınlık doğrultusunda ani değişimine ve birinci türevinde süreksizliğe neden olmaktadır. şekil 3.'de x eksenini doğrultusunda düzlemiçi yer değiştirme alanının (u) plak kalınlığı doğrultusunda değişimine bakıldığında, düzlemiçi yer değiştirme alanının tabaka geğişlerinde gürülen birinci türevindeki süreksizliği literatürde zig-zag etkisi adıyla bilinmektedir.



şekil 3. Tabakalı kompozit plaklarda düzlemiçi deplasman alanının kalınlık doğrultusunda değişimi (Zig-zag etkisi).

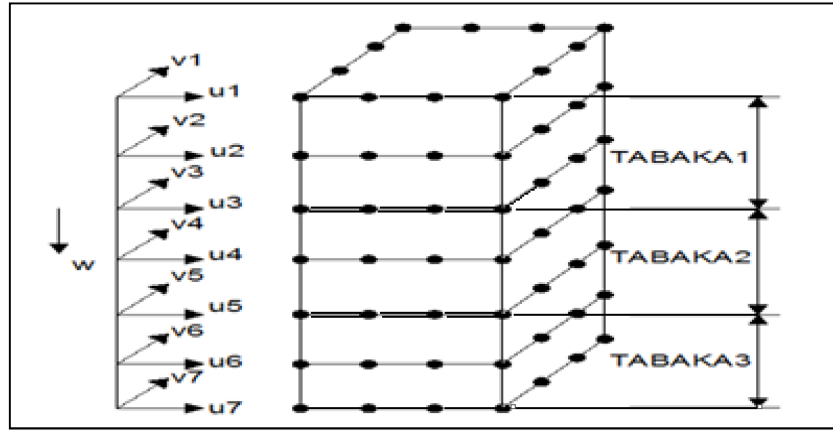
3. Geliştirilen Tabakalı Sonlu Eleman Formülasyonu

Önceki bölümde ele alınan zig-zag etkisini ve doğru düzlem dışı kayma gerilme dağılımını elde edebilmek amacıyla düzlemde r ve s doğrultularının her birinde kübik (dört noktalı) toplamda planda on iki düğüm noktalı; tabaka kalınlığı doğrultusunda ise her bir tabakada üst, orta ve alt düğüm noktaları olmak üzere üç düğüm noktasından oluşan şekil 4.deki sonlu eleman geliştirilmiştir.



Şekil 4. Geliştirilen tabakalı sonlu eleman ve düğüm noktası numaraları.

Şekil 5.'de yer alan üç tabakalı sonlu elemandan görüleceği üzere; sonlu elemanın r - s düzlemindeki on iki düğüm noktasının her birinde u ve v düzlem içi yer değiştirmeleri ile w çökme yer değiştirmesi bilinmeyen olarak alınmış; tabaka kalınlığı doğrultusundaki orta ve alt düzlem düğüm noktalarında da u ve v düzlem içi yer değiştirmeleri bilinmeyen olarak seçilmiştir. Üç tabakalı sonlu eleman örneği için toplam düğüm noktası yer değiştirme bilinmeyen sayısı $15 \times 12 = 180$ olarak belirlenmiştir.



Şekil 5. Üç tabakadan oluşan sonlu eleman düğüm noktası serbestlikleri.

Sonlu elemanın x - y düzleminde Reddy[13] tarafından verilen Lagrange kübik şekil fonksiyonları; r , s lokal koordinat eksen takımı ve a düğüm noktası numaralarını göstermek üzere;

$$N_a = \frac{1}{32} (1 + r_a r)(1 + s_a s)[9(r^2 + s^2) - 10] ; \quad (a = 1,4,9,12)$$

$$N_a = \frac{9}{32} (1 + 9r_a r)(1 + s_a s)(1 - r^2) \quad ; \quad (a = 2,3,10,11)$$

$$N_a = \frac{9}{32} (1 + 9s_a s)(1 + r_a r)(1 - s^2) ; \quad (a = 5,6,7,8) \quad (8)$$

şeklindedir. r ve s 'ye bağlı fonksiyonlar birbirinden ayrıştırılarak yazılacak olursa (8) denklemi;

$$N_1(r, s) = T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s)$$

$$N_4(r, s) = T_1(r)L_2(s) + L_1(r)T_2(s) - L_1(r)L_2(s)$$

$$\begin{aligned}
N_9(r, s) &= T_2(r)L_1(s) + L_2(r)T_1(s) - L_2(r)L_1(s) \\
N_{12}(r, s) &= T_1(r)L_1(s) + L_1(r)T_1(s) - L_1(r)L_1(s) \\
N_{11}(r, s) &= S_1(r)L_1(s) \quad ; \quad N_{10}(r, s) = S_2(r)L_1(s) \\
N_3(r, s) &= S_1(r)L_2(s) \quad ; \quad N_2(r, s) = S_2(r)L_2(s) \\
N_8(r, s) &= S_1(s)L_1(r) \quad ; \quad N_6(r, s) = S_2(s)L_1(r) \\
N_7(r, s) &= S_1(s)L_2(r) \quad ; \quad N_5(r, s) = S_2(s)L_2(r)
\end{aligned} \tag{9}$$

halini alır. (9) denkleminde T_i, L_i, S_i ($i=1,2$) fonksiyonları;

$$\begin{aligned}
T_1(r) &= \frac{-1}{16}(1 - 9r^2)(1 + r) \quad ; \quad T_2(r) = \frac{-1}{16}(1 - 9r^2)(1 - r) \\
T_1(s) &= \frac{-1}{16}(1 - 9s^2)(1 + s) \quad ; \quad T_2(s) = \frac{-1}{16}(1 - 9s^2)(1 - s) \\
S_1(r) &= \frac{9}{16}(1 - r^2)(1 + 3r) \quad ; \quad S_2(r) = \frac{9}{16}(1 - r^2)(1 - 3r) \\
S_1(s) &= \frac{9}{16}(1 - s^2)(1 + 3s) \quad ; \quad S_2(s) = \frac{9}{16}(1 - s^2)(1 - 3s) \\
L_1(r) &= \frac{1}{2}(1 + r) \quad ; \quad L_2(r) = \frac{1}{2}(1 - r)
\end{aligned} \tag{10}$$

şeklindedir. Plak kalınlığı doğrultusundaki kuadratik şekil fonksiyonları ise ζ kalınlık doğrultusundaki lokal eksen takımını göstermek üzere;

$$\begin{aligned}
\psi_{\bar{u}}(\zeta) &= \frac{1}{2} \zeta (1 + \zeta) \\
\psi_a(\zeta) &= \frac{-1}{2} \zeta (1 - \zeta) \\
\psi_o(\zeta) &= (1 - \zeta^2)
\end{aligned} \tag{11}$$

şeklindedir. Düzlem içi deplasman alanları (u, v) ve çökme deplasman alanı (w) (9-11) denklemlerini kullanarak tanımlanacak olursa;

$$\begin{aligned}
u(r, s, \zeta) &= \sum_{I=1}^3 \sum_{i=1}^{12} u_{i,I} N_i(r, s) \psi_I(\zeta) \\
v(r, s, \zeta) &= \sum_{I=1}^3 \sum_{i=1}^{12} v_{i,I} N_i(r, s) \psi_I(\zeta) \\
w(r, s) &= \sum_{i=1}^{12} w_i N_i(r, s)
\end{aligned} \tag{12}$$

(12) denkleminde; i indisi köşe veya kenar düğüm noktalarını; $I=1,2,3$ ise kalınlık doğrultusunda sırasıyla üst, orta ve alt düzlemdeki düğüm noktalarını göstermektedir. Virtüel iş teoremi uyarınca iç kuvvetler ile dış kuvvetlerin işlerinin eşitliği yazılırsa;

$$\int \int \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz = \int \int q_w(x, y) \delta w dx dy \quad (13)$$

(13) denkleminde eşitliğin sol tarafında yer alan tabii durum gerilmeleri, (i) birim durumlarının; virtüel şekil değiştirmeleri ise (j) birim durumlarının lineer kombinasyonu biçiminde ifade edilmesiyle; birinci mertebe rijitlik matrisi terimi (k_{ij});

$$k_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (\sigma_{xi} \delta \varepsilon_{xj} + \sigma_{yi} \delta \varepsilon_{yj} + \tau_{xyi} \delta \gamma_{xyj} + \tau_{xzi} \delta \gamma_{xzj} + \tau_{yzi} \delta \gamma_{yzj}) dx dy dz \quad (14)$$

olarak yazılmış; Şekil 2.'deki gibi tabakalardaki fiberlerin global x eksenine θ açısı yaptığı kabulü altında; (6) ve (7) denklemlerinin (14) denkleminde yerine konulmasıyla birinci mertebe rijitlik matrisi k_{ij} ;

$$\begin{aligned} k_{ij} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(Q_{11} \frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial x} + Q_{12} \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right. \\ & + Q_{16} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial x} + Q_{12} \frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \\ & + Q_{22} \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + Q_{26} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \\ & + Q_{16} \frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \\ & + Q_{26} \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \\ & + Q_{66} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \\ & + Q_{44} \left(\frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \\ & + Q_{45} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \\ & + Q_{54} \left(\frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) + \\ & \left. + Q_{55} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \right) dx dy dz \quad (15) \end{aligned}$$

deplasman alanları cinsinden yazılmıştır. Herhangi bir birim deplasman alanı durumu, örneğin $i=1, j=1$ durumunda; (12) denkleminde gözönüne alınarak (15) denkleminde, şekil fonksiyonları cinsinden;

$$\begin{aligned}
k_{11} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\overline{Q_{11}} \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \right. \\
& + \overline{Q_{16}} \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\
& + \overline{Q_{16}} \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) + \overline{Q_{66}} \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\
& \left. + \overline{Q_{55}} N_1(r,s) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz} N_1(r,s) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz} \right] dx dy dz \quad (16)
\end{aligned}$$

olarak bulunmuştur. Lokal (r,s) eksen takımında yazılı şekilfonksiyonlarının global x,y eksenlerine göre türevlerinin alınabilmesi için;

$$[J]_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_{m=12}}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_{m=12}}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{m=12} & y_{m=12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Jakobyen matrisi olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]_{xy}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ilişkisinden yararlanılmıştır. (17) denkleminin $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dr ds$ integrasyonu için nümerik integrasyon tekniklerinden Gauss Kuadratur yöntemi kullanılarak ; 4x4 örnek nokta sayısı alınmıştır. $\int_{-1}^1 d\zeta$ integrasyonu için ise Çizelge 1. den yararlanılmıştır.

Çizelge 1. $\int_{-h/2}^{h/2} XY dz = \int_{-1}^1 XY \frac{h}{2} d\zeta$ integralleri çarpım tablosu.

X-Y	$\psi_{\bar{u}}(\zeta)$	$\psi_a(\zeta)$	$\psi_o(\zeta)$	$\psi'_{\bar{u}}(\zeta)$	$\psi'_a(\zeta)$	$\psi'_o(\zeta)$
$\psi_{\bar{u}}(\zeta)$	$\frac{2h}{15}$	$-\frac{h}{30}$	$\frac{h}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$
$\psi_a(\zeta)$		$\frac{2h}{15}$	$\frac{h}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\psi_o(\zeta)$			$\frac{8h}{15}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
$\psi'_{\bar{u}}(\zeta)$				$\frac{7}{3h}$	$\frac{1}{3h}$	$-\frac{8}{3h}$
$\psi'_a(\zeta)$					$\frac{7}{3h}$	$-\frac{8}{3h}$

4. Sayısal Uygulamalar

Literatürde Pagano [11] tarafından üç boyutlu elastisite çözümü gerçekleştirilen üç tabakalı [90/0/90]; $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ sinüzoidal yük etkisindeki basit mesnetli, tabakalı kompozit plâğın silindirik eğilme problemi için Şekil 6.'da görüldüğü üzere; sistemin yarısı, geliştirilen tabakalı sonlu eleman ile iki parçaya bölünerek incelenmiştir. L ve T altındisleri sırasıyla boyuna ve enine doğrultuyu göstermek üzere elastisite (E), kayma modülleri (G) ile Poisson oranı (ν);

$$E_L = 25 \times 10^6 \text{psi} = 172250 [\text{Mpa}] \quad ; \quad E_T = 10^6 \text{psi} = 6890 [\text{Mpa}]$$

$$G_{LT} = 0.5 \times 10^6 \text{psi} = 3445 [\text{Mpa}] \quad ; \quad G_{TT} = 0.2 \times 10^6 \text{psi} = 1378 [\text{Mpa}]$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25 \quad (19)$$

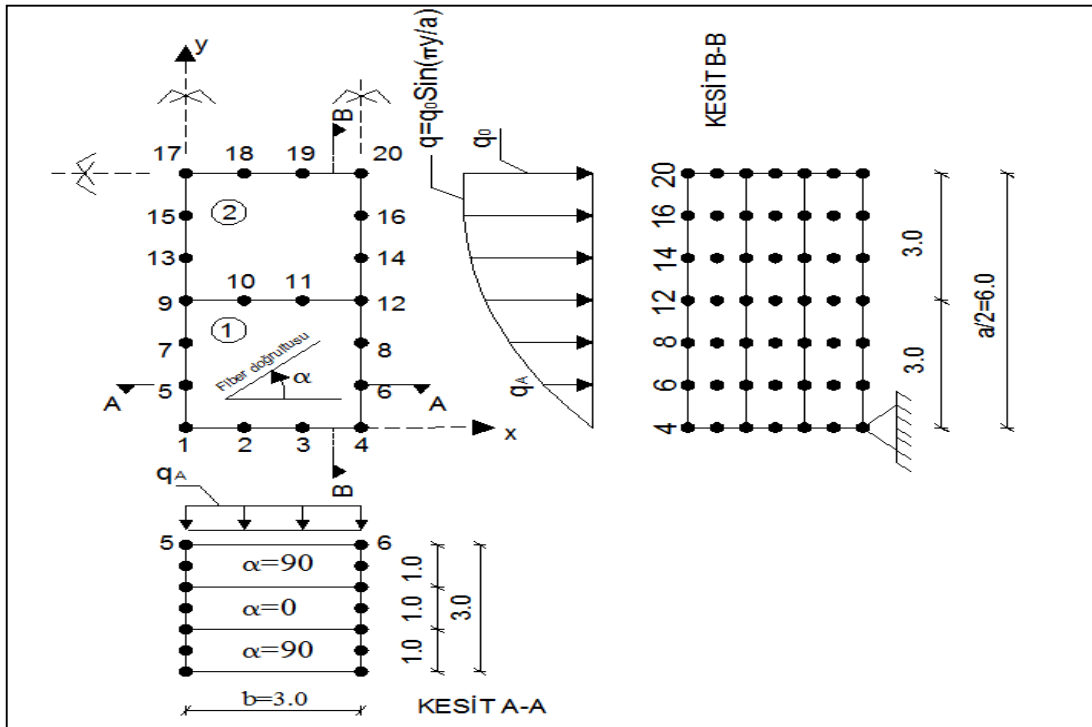
olarak alınmıştır. $\bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{w}$ sırasıyla boyutsuz normal gerilme, kayma gerilmesi ve plak düzlemine dik yerdeğiştirme olmak üzere boyutsuzlandırma;

$$\bar{\sigma}_{yy}\left(y = \frac{a}{2}, z\right) = \frac{\sigma_{yy}\left(y = \frac{a}{2}, z\right)}{q_0} \quad (20)$$

$$\bar{\tau}_{yz}(y = 0, z) = \frac{\tau_{yz}(y = 0, z)}{q_0} \quad (21)$$

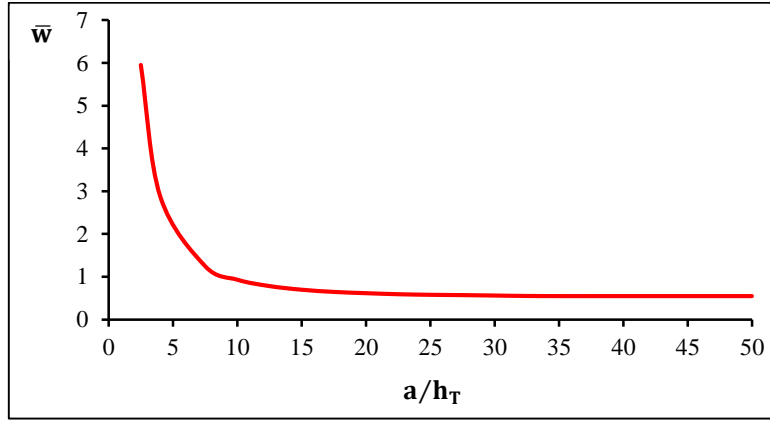
$$\bar{w}\left(y = \frac{a}{2}, z = 0\right) = \frac{100E_T h_T^3 w\left(y = \frac{a}{2}, z = 0\right)}{q_0 a^4} \quad (22)$$

olarak tanımlanmıştır.



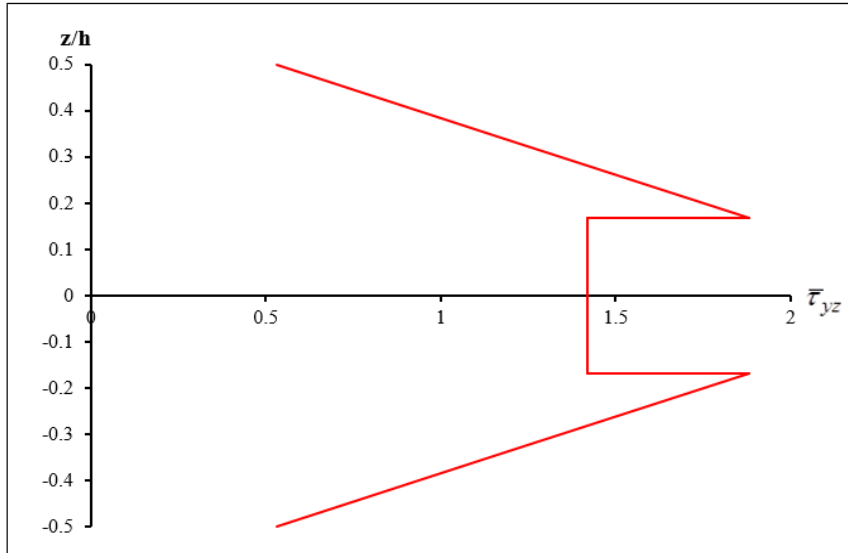
Şekil 6. Sinüzoidal yük altında, üç tabakalı [90/0/90], basit mesnetli kompozit plak.

Şekil 6.'da düğüm noktası numaraları verilen tabakalı kompozit plağın sınır şartları olarak; $x=0$ ve $x=b$ ekseninde x eksenine doğrultusundaki düğüm noktası düzlemiçi yerdeğiştirmeleri $u=0$ olarak alınmış; $y=a/2$ ekseninde yer alan 17-20 no'lu düğüm noktalarının y doğrultusundaki düzlemiçi yerdeğiştirme değerleri ise simetri nedeniyle $v=0$ olarak tanımlanmıştır. 1-4 no'lu düğüm noktaları ise basit mesnetlenmenin söz konusu olduğu; plak düzlemine dik yerdeğiştirme (w) nin tutulu olduğu yerlerdir. Şekil 7.'de geliştirilen sonlu eleman kullanılarak elde edilen; plak açıklığı (a) ; toplam tabaka kalınlığı (h_T) olmak üzere çeşitli a/h_T değerleri için boyutsuz orta nokta deplasman $\bar{w}(0, \frac{a}{2}, 0)$ değerlerini gösteren grafik görülmektedir.

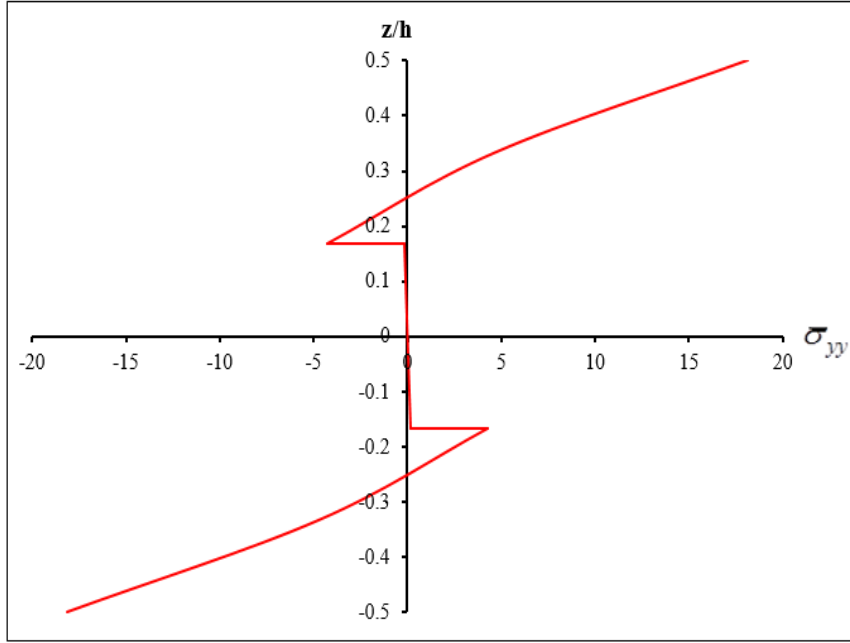


Şekil 7. Çeşitli a/h_T değerleri için önerilen yöntem ile tabakalı plak ortasında elde edilen boyutsuz deplasman değerleri.

Şekil 8. ve Şekil 9.'da $a/h_T=4.0$ olmak üzere sırasıyla tabakalı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz kayma gerilmesi $\bar{\tau}_{yz}(0,0,z)$ ve boyutsuz normal gerilme $\bar{\sigma}_{yy}(0, \frac{a}{2}, z)$ değerlerinin plak kalınlığı boyunca değişimi görülmektedir.

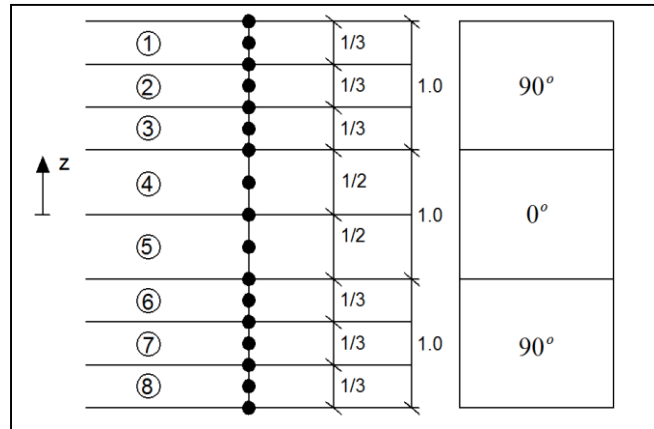


Şekil 8. Tabakalı sonlu eleman ile $a/h=4$ için elde edilen boyutsuz kayma gerilmesi.



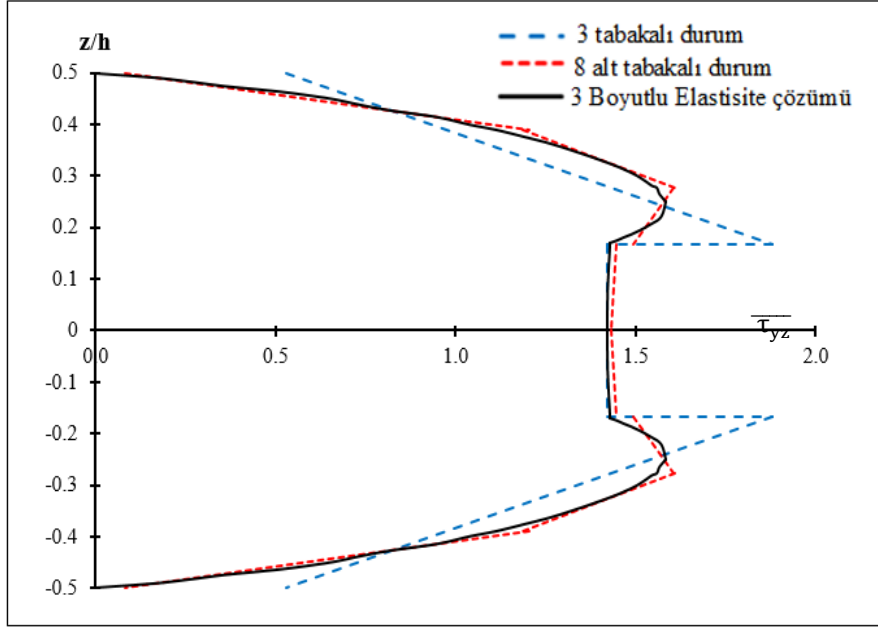
Şekil 9. Tabakalı sonlu eleman ile $a/h=4$ için elde edilen boyutsuz normal gerilme.

Pagano[11]; aynı problemin üç boyutlu elastisite çözümleri sonucunda ($a/h=4$) için elde ettiği boyutsuzlaştırılmış kayma gerilmesi $\overline{\tau_{xz}}(0,0,z)$ ve boyutsuzlaştırılmış normal gerilme $\overline{\sigma_{xx}}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right)$ değerlerinin kalınlık boyunca değişimini, klasik plak teorisi kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırmıştır. Pagano'nun boyutsuzlaştırılmış normal gerilme grafiği incelendiğinde; beklendiği üzere üst tabakadan orta tabakaya geçişte; normal gerilmenin $E_L/E_T = 25$ oranında azalarak sıçrama yaptığı görülmektedir. Pagano çözümlerinin, geliştirilen tabakalı sonlu eleman çözümleri ile karşılaştırılmasında; geliştirilen tabakalı sonlu eleman sonuçlarının elastisite çözümü değerlerine özellikle $\overline{\sigma_{yy}}$ boyutsuz normal gerilmeler bakımından çok yakın olduğu görülmektedir. Ancak; Şekil 8.'de görülen boyutsuz kayma gerilmesinin üst ve alt sınırlarda $\overline{\tau_{yz}}(z = \pm 0.5h) = 0$ olma koşulu ile tabakalar arası kayma gerilmelerinin birbirine eşit olma şartı $\overline{\tau_{yz}^{(90)}}(z = \pm 0.167h) = \overline{\tau_{yz}^{(0)}}(z = \pm 0.167h)$ tam sağlanamamıştır. Boyutsuz kayma gerilmesinin z doğrultusu boyunca değişimindeki hassasiyeti arttırmak amacıyla Şekil 10.'da görüldüğü üzere aynı problem 90 derece tabakalar üç; 0 derece tabaka da iki alt tabakaya ayrılmak üzere kalınlık doğrultusunda toplam sekiz alt tabakaya bölünerek yeniden incelenmiştir.

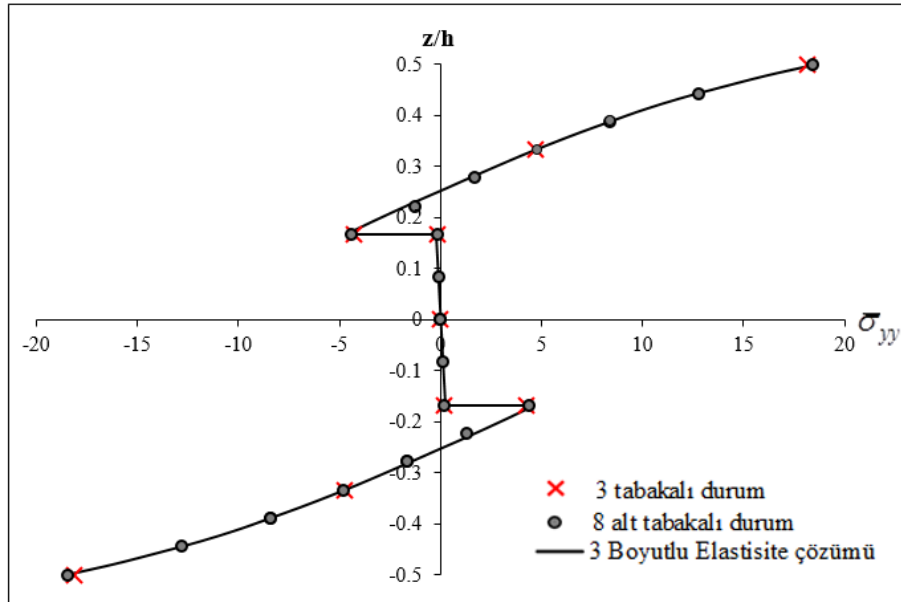


Şekil 10. [90/0/90] tabakalanmanın 8 alt tabakaya ayrılması.

Şekil 11. ve Şekil 12.'de sırasıyla [90/0/90] derece tabakalanmanın sekiz alt tabakaya bölünerek incelenmesi sonucunda boyutsuz kayma gerilmesi ($\overline{\tau_{yz}}$) ve normal gerilme ($\overline{\sigma_{yy}}$) değerlerinin tabaka kalınlığı boyunca değişimi görülmektedir. Şekil 11'de kırmızı grafik; 8 alt tabakaya bölünerek elde edilen değerleri, mavi grafik Şekil 8.'de daha önce verilen, üç tabakalanma ile elde edilen değerleri; siyah grafik ise Pagano tarafından elde edilen üç boyutlu elastisite çözümlerini göstermektedir. Şekil 12.'de ise kırmızı çarpı, gri daire ve sürekli çizgi kullanılarak sırasıyla; üç tabakalanma, sekiz alt tabakalanma ve Pagano'ya ait boyutsuz normal gerilme değerleri temsil edilmiştir.



Şekil 11. [90/0/90] tabakalı plakta boyutsuz kayma gerilmesinin ($\overline{\tau_{yz}}$) kalınlık boyunca değişimlerinin karşılaştırılması.



Şekil 12. [90/0/90] tabakalı plakta boyutsuz normal gerilmenin ($\overline{\sigma_{yy}}$) kalınlık boyunca değişimlerinin karşılaştırılması.

Sonuçlar karşılaştırıldığında tabaka kalınlığı doğrultunda daha sık tabakalanma alınmasıyla; $\overline{\tau_{yz}}(z = \pm 0.5h) = 0.079964 \cong 0$ değerine yaklaşıldığı ve tabakalar arası kayma gerilmelerinde sıçramaların büyük ölçüde giderildiği; boyutsuz normal gerilme ($\overline{\sigma_{yy}}$) yönünden ise tabakalanma sayısını arttırmanın sonuçları çok fazla etkilemediği görülmektedir.

5. Sonuç

Sonuç olarak; düzlemde her iki dik doğrultuda dört noktalı, toplamda oniki düğüm noktalı, tabaka kalınlığı doğrultusunda her bir tabakada üst, orta ve alt düğüm noktaları olmak üzere üç düğüm noktalı ve en fazla onbeş tabaka ve bir düğüm noktasında maksimum altmış üç serbestliğe sahip olabilecek kapasitede geliştirilen sonlu eleman ile tabakalı kompozit plakaların silindirik eğilme hali incelendiğinde; elde edilen sonuçların, literatürde yer alan üç boyutlu elastisite çözümleriyle örtüştüğü görülmüştür. Bu çalışmada önerilen sonlu eleman modeli ile tabakalar arası kayma gerilmelerindeki sıçramalar giderilerek gerçekçi düzlem dışı kayma gerilme dağılımı elde edilmektedir. Tabakaların kalınlık doğrultusunda daha fazla sayıda sonlu eleman ile modellenmesinin boyutsuz normal gerilme değerlerini pek fazla değiştirmedeği görülmüştür.

Kaynaklar

- [1] Kirchhoff G. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. Angew Math 1850; 40:51-88.
- [2] Love AEH. The Mathematical Theory of Elasticity. 4th Edition. Cambridge: Cambridge Univ Press; 1927.
- [3] Cauchy AL. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide. Exercices de Mathématique 1828; 3:328-355.
- [4] Poisson SD. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps elastique. Mem. Acad. Sci 1829, 8:357.
- [5] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. ASME J. Appl. Mech 1945; 12:69-76.
- [6] Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. ASME J. Appl. Mech 1951; 18:1031-1036.
- [7] Jones RM. Mechanics of Composite Materials. New York: Mc Graw Hill; 1975.
- [8] Whitney J. The effects of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. J. Compos. Mater 1969; 3:534-547.
- [9] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A higher order theory of plate deformation, Part 2: Laminated plates. ASME J. Appl. Mech. 1977; 44:669-676.
- [10] Reddy JN. Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis. Boca Raton FL: CRC Press, 1997.
- [11] Pagano N.J. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. Journal of Composite Materials. 1969; 3:398-411.
- [12] Von Karman T. Festigkeitsprobleme in Maschinenbau. Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften. 1910; 4:311-385.
- [13] Reddy JN. An Introduction to the Finite Element Method. NY: Mc Graw Hill; 2005.