

KESİR DERECELİ TEMEL TRANSFER FONKSİYON YAPILARI İÇİN YAKLAŞIK ANALİTİK ZAMAN CEVABI MODELİ

Ali YÜCE*

Tarsus Üniversitesi, Mersin Tarsus OSB Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Elektronik ve Otomasyon Bölümü, 33100, Mersin, Türkiye

Geliş Tarihi/Received Date: 17.09.2021 Kabul Tarihi/Accepted Date: 17.03.2022 DOI: 10.54365/adyumbd.996786

ÖZET

Bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler zor ve karmaşık hesaplamalar içeren kesirli matematik alanına olan ilgiyi arttırmıştır. Özellikle, gerçek sistemleri modellemedeki başarısı nedeniyle kontrol sistemleri alanında çokça yararlanılmaktadır. Pek çok çalışma yapılmasına rağmen karmaşık ve zor matematiği nedeniyle literatürde hala çözümsüz durumlar bulunmaktadır. Kontrol sistemleri alanında kullanımında karşılaşılan en büyük zorluk analitik çözüm eksikliğidir. Bu eksikliklerden biri kesir dereceli bir transfer fonksiyon için analitik zaman cevabı hesaplamasıdır. Bu nedenle, bu çalışmada bazı temel kesir dereceli transfer fonksiyon yapıları için yaklaşık analitik zaman cevabı fonksiyonları yani yaklaşık ters Laplace dönüşümlerini elde edebileceğimiz bir çözüm önerisi sunulmuştur. Bu temel çözümler, gelecekte büyük ve karmaşık kesir dereceli transfer fonksiyonların çözümünde temel taşı olacaktır. Çalışmada kesir dereceli transfer fonksiyonların hesaplamalarındaki başarısı sebebiyle Grunwald-Letnikov (GL) nümerik hesaplama metodu kullanılmıştır. Ayrıca, eğri uydurma hesaplamalarında ise en küçük kareler metodu kullanılmıştır. Sonuçlar örnek hesaplamalar ile desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesir dereceli transfer fonksiyon; Zaman cevapları, Ters Laplace dönüşümü; Grunwald-Letnikov; Eğri uydurma

APPROXIMATE ANALYTICAL TIME RESPONSE MODEL FOR BASIC TRANSFER FUNCTION STRUCTURES WITH FRACTIONAL ORDER

ABSTRACT

Advances in computer technologies have increased the interest in fractional mathematics, which includes difficult and complex calculations. In particular, it is widely used in the field of control systems due to its success in modeling real systems. Although many studies have been carried out, there are still unresolved situations in literature due to complex and difficult mathematics. The biggest difficulty encountered in its use in the field of control systems is the lack of analytical solutions. One of these shortcomings is the analytical time response calculation for a fractional transfer function. Therefore, In this study, a solution proposal is presented for some basic fractional transfer function structures, where we can obtain the approximate analytical time response functions, that is, the approximate inverse Laplace transforms. These fundamental solutions will be the cornerstone of solving large and complex fractional order transfer functions in future. Grunwald-Letnikov (GL) numerical calculation method was used in the study due to its success in the calculation of fractional transfer functions. In addition, the least squares method was used in curve fitting calculations. The results are supported by example calculations.

Keywords: Fractional order transfer function; Time responses, Inverse Laplace transform; Grunwald-Letnikov; Curve fitting

1. Giriş

İlk olarak Leibniz ve L'Hospital arasında 1695 yılında gerçekleşen bir mektuplaşmayla ismi duyulan kesirli matematik alanı [1], bir diferansiyel denklemde türev dereceleri tamsayı olmayan durumları inceler. Zor ve karmaşık bir matematiğinin olması geçmişte fazla ilgi duyulmamasına neden

* e-posta: aliyuce@tarsus.edu.tr ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4642-6272> (Sorumlu Yazar),

olmuştur. Ancak günümüzde bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler bu alana olan ilgiyi son zamanlarda arttırmıştır. Kesir dereceli sistemlere viskoelastik malzemeler, elektromanyetik işlemler, uzun transmisyon hatları, dielektrik polarizasyon, biyomühendislik problemleri ve kaos gibi pek çok uygulama alanında rastlamak mümkündür [2-8]. Endüstride kesirli matematiğin başlıca tercih edilme sebebi gerçek sistemleri modellemede klasik matematiğe göre daha başarılı olmasıdır [9, 10]. Bu yeteneği sayesinde kontrol mühendisliği alanında oldukça ilgi duyulan çalışma alanlarından biri olmuştur. Manabe, kesir dereceli kontrol alanının öncü araştırmacılarından biridir [11, 12].

Bir kesir dereceli transfer fonksiyon, tamsayı dereceli olmayan bir diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü alınarak elde edilir. Kesir dereceli transfer fonksiyonlar üzerinde zaman cevabı analizleri, kararlılık analizleri, kök-yer eğrisi analizi, kontrolör tasarımları v.b. gibi pek çok kontrol sistemi hesaplamaları, tamsayı dereceli transfer fonksiyonlara göre oldukça zor, karmaşık ve hatta bazı durumlarda henüz imkansızdır. Bu tip transfer fonksiyonlarda analitik olarak sadece frekans cevabı analizleri yapılmaktadır [13]. Zaman cevabı analizleri için herhangi bir analitik çözüm yöntemi bulunmamaktadır. Kesir dereceli transfer fonksiyonlar üzerinde yapılan hesaplamalar için geliştirilmiş Oustaloup, Matsuda, Charef, Carlson, SBL, M-SBL gibi tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri [14-19] ve GL, IFTM, FSM, Mittag-Leffler gibi nümerik yöntemler [20-22] kullanılmaktadır. Ancak bunlar analitik bir fonksiyon vermemektedirler.

Son yıllarda, Yüce ve Tan [23-25] tarafından kesir dereceli transfer fonksiyonların yaklaşık analitik zaman cevabı hesaplamaları üzerine temel bazı çalışmalar sunulmuştur. Bunlar $1/s^\alpha$ ve $1/(s^\alpha + 1)$, $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$ transfer fonksiyon yapılarının yaklaşık analitik zaman denklemlerini hesaplayan çalışmalardır. Bu çalışmada, yukarıda belirtilen çalışmaların devamı niteliğinde temel kesir dereceli transfer fonksiyon yapıları için daha standart, daha az terimli ve türevlenebilir bir analitik denklem modeli kullanılarak daha başarılı yaklaşık zaman cevabı ya da başka bir ifadeyle ters Laplace dönüşümü hesaplaması yapılmıştır.

Bu çalışma şu şekilde organize edilmiştir; Bölüm 2’de kesir dereceli transfer fonksiyonlar ve onların temel formları açıklanmıştır. Bölüm 3’de önerilen yöntemin metodolojisi ve uygulaması örnekler ile anlatılmıştır. Sonuçlar ise Bölüm 4’te verilmiştir.

2. Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonlar

Kesir dereceli diferansiyel denklemler klasik diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş biçimleridir. Liouville-Riemann, Grünwald-Letnikov ve Caputo gibi birçok matematikçi kesir dereceli hesaplamalar konusunda katkılar sağlamışlardır. Bunlardan Caputo’nun sunduğu kesir dereceli diferansiyel denklem tanımı (1) gibi ifade edilir [1, 26, 27].

$$L\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha L\{y(t)\} - \sum_{i=0}^{[\alpha]-1} s^{\alpha-i-1} \frac{d^i y}{dt^i}(0) \quad (1)$$

Burada $D^\alpha y(t) = d^\alpha y(t) / dt^\alpha$, $y(t)$ ’nin Caputo türevini belirtir, $\alpha \in R_+$ rasyonel bir sayıdır. $[\alpha]$, α ’nın tam sayı kısmını belirtir ve L ise, Laplace dönüşümü operatörüdür.

Grünwald-Letnikov tarafından geliştirilen kesir dereceli türevin matematiksel tanımı ise (2)’de verilmiştir [1, 26, 28, 29].

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2)$$

Denklem (2)'de h adım aralığını, $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ ise binomial açılımın katsayılarını ifade eder [28, 29]. Kesir dereceli transfer fonksiyonların birim basamak cevapları GL nümerik hesaplama metodu ile kesine yakın olarak çizdirilebilir [30]. Bu nedenle çalışmada zaman cevapları GL nümerik hesaplama metodu ile çizdirilmiştir ve kıyaslanmıştır.

Bir $r(t)$ girişli ve $y(t)$ çıkışlı kesir dereceli kontrol sistemi, (3)'te verilen kesir dereceli diferansiyel denklem formu ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) &= b_m D^{\beta_m} r(t) \\ + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} r(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} r(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Denklem (3)'ü transfer fonksiyon biçiminde (4) gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \\ \{\alpha_i, \beta_j\} &\in R_+ \\ \{a_i, b_j\} &\in R \\ \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n, \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_m, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ ve } j = 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

Denklem (4) biçiminde ifade edilen transfer fonksiyonlar, kesir dereceli transfer fonksiyonlar (KDTF) olarak isimlendirilirler.

3. Metodoloji ve Örnekler

Bilindiği gibi bir sistemin modeli o sistemin diferansiyel denkleminin Laplace dönüşümü alınarak elde edilmektedir. Dolayısıyla sistemin zaman domenindeki davranışını izlemek için sistem modelinin ters Laplace dönüşümünü alırız. Böylece sistemin zaman domeninde davranışını tespit ederiz. Ancak kesir dereceli diferansiyel denklemden elde edilmiş bir kesir dereceli transfer fonksiyonunun analitik olarak ters Laplace dönüşümünün alınması şu an için mümkün değildir. Bu çalışmada (7-9)'da verilen kesir dereceli temel transfer fonksiyonların yaklaşık zaman cevabı fonksiyonlarının bilinmesi gelecekte karmaşık yapıları kesir dereceli transfer fonksiyonların yaklaşık ters Laplace dönüşümleri veya başka bir ifadeyle zaman fonksiyonlarının hesaplamasına kolaylık sağlayacaktır.

Kesir dereceli bir transfer fonksiyon uygun koşullarda (5-6)'da ifade edildiği gibi temel transfer fonksiyonlara ayrıştırılabilir.

$$G(s) = \frac{d_0}{c_0 s^{\alpha_0}} + \frac{d_1}{c_1 s^{\alpha_1} + c_2} + \frac{c_3 + id_2}{s^{\alpha_2} + p + iq} + \frac{c_3 - id_2}{s^{\alpha_2} + p - iq} \quad (5)$$

$$\{c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2, p, q\} \in R, \quad \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} \in R_+$$

$$G(s) = G_{m1}(s) + G_{m2}(s) + G_{m3}(s) \quad (6)$$

$$G_{m1}(s) = \frac{d_0}{c_0 s^{\alpha_0}} \quad (7)$$

$$G_{m2}(s) = \frac{d_1}{c_1 s^{\alpha_1} + c_2} \quad (8)$$

$$G_{m3}(s) = \frac{c_3 + id_2}{s^{\alpha_2} + p + iq} + \frac{c_3 - id_2}{s^{\alpha_2} + p - iq} = \frac{2c_3 s^{\alpha_2} + 2c_3 p + 2d_2 q}{s^{2\alpha_2} + 2ps^{\alpha_2} + p^2 + q^2} \quad (9)$$

Denklem (7)'de verilen kesir dereceli transfer fonksiyon formu için analitik kesin çözüm zaten mevcuttur [31]. Bu nedenle bu çalışmada (8) ve (9) ele alınmıştır. Denklem (7-9)'da belirtilen transfer fonksiyonlar, pek çok sistemin kesir dereceli temel transfer fonksiyon formlarını oluşturabilirler. Denklem (10)'da verilen kesir dereceli transfer fonksiyon (5)'te verilen temel transfer fonksiyonlara ayrıştırılmaya örnek olarak verilebilir. Kesir dereceli bir transfer fonksiyonun (5)'te ifade edilen temel transfer fonksiyon yapılarına ayrıştırılması çalışmaları ayrıca devam etmektedir.

$$G(s) = \frac{1}{1.1376s^{1.8} + 0.0946s^{1.5} + 1.006s^{0.6} + 2.3909s^{0.3}} \quad (10)$$

Burada, $\lambda = s^{0.3}$ değişken değiştirmesi yapıldığında $\lambda^2 = s^{0.6}$, $\lambda^3 = s^{0.9}$, $\lambda^4 = s^{1.2}$, $\lambda^5 = s^{1.5}$ ve $\lambda^6 = s^{1.8}$ olarak ifade edilir. Böylece $G(\lambda)$, (11)'deki gibi yazılır.

$$G(\lambda) = \frac{1}{1.1376\lambda^6 + 0.0946\lambda^5 + 1.006\lambda^2 + 2.3909\lambda} \quad (11)$$

Denklem (11), basit kesirlere ayrıştırılarak (12) biçiminde yazılır. Bu denklemde karmaşık kökler ortadan kaldırılıp s dönüşümü yapıldığı zaman (13) denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi denklem (13), bu çalışmada tanımladığımız kesir dereceli temel transfer fonksiyonları barındıran yapıya dönüştürülmüştür. Bu temel tranfer fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerinin elde edilmesi için önerilen metot aşağıda anlatılmaktadır.

$$G(\lambda) = \frac{-0.0614 + 0.0127i}{\lambda - 0.9588 - 0.7789i} + \frac{-0.0614 - 0.0127i}{\lambda - 0.9588 + 0.7789i} + \frac{-0.0840 + 0.0365i}{\lambda + 0.4755 - 1.0421i} + \frac{-0.0840 - 0.0365i}{\lambda + 0.4755 + 1.0421i} + \frac{-0.1275}{\lambda + 1.0497} + \frac{0.4183}{\lambda} \quad (12)$$

$$G(s) = \frac{-0.1228s^{0.3} + 0.09796}{s^{0.6} - 1.918s^{0.3} + 1.526} - \frac{0.168s^{0.3} + 0.156}{s^{0.6} + 0.951s^{0.3} + 1.312} - \frac{0.1275}{s^{0.3} + 1.0497} + \frac{0.4183}{s^{0.3}} \quad (13)$$

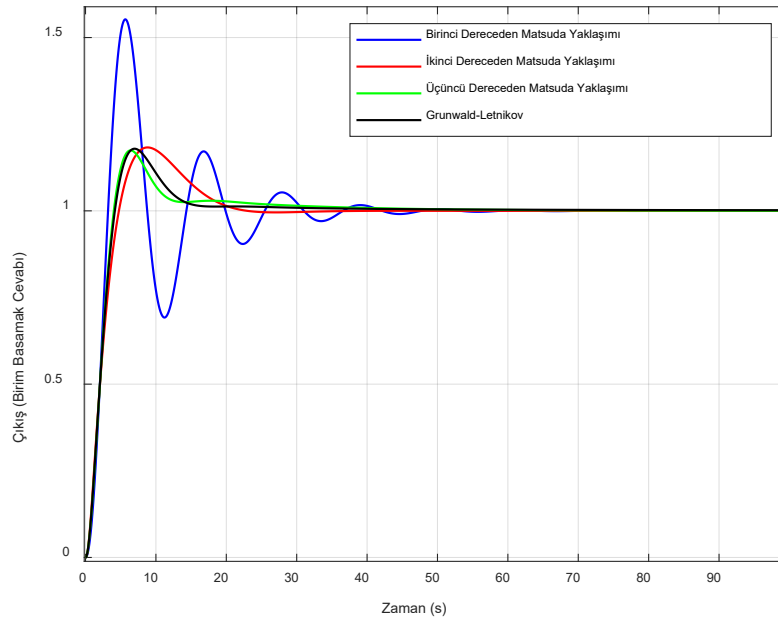
Kesir dereceli transfer fonksiyonlar üzerinde frekans cevabı analizleri dışında doğrudan analitik hesaplama yapılamadığı bilinmektedir [16]. Ancak zaman cevabı analizleri, kök-yer eğrisi analizleri, durum-uzay matris hesaplamaları v.b. pek çok işlem doğrudan gerçekleştirilememektedir. Bu nedenle zaman cevabı analizi ve diğer kontrol sistemleri hesaplarının yapılabilmesi için tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerine başvurulur. Böylece elde edilen tamsayı dereceli transfer fonksiyon üzerinden analitik hesaplamalar yaklaşık olarak yapılabilir. Ancak yüksek doğrulukta transfer fonksiyonlar elde edebilmek için yüksek dereceli yaklaşımlar kullanmak gerekmektedir. Örneğin (14)'te verilen kesir dereceli bir transfer fonksiyonunda $s^{0.3}$ 'ün sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü dereceden Matsuda yaklaşımlarının kullanılması sonucunda $G(s)$ 'in tamsayı dereceli eşdeğerleri (15-17)'de verilmiştir.

$$G(s) = \frac{1}{s^{2.3} + 3s^{1.3} + 1} \quad (14)$$

$$G_{M1}(s) = \frac{s^2 + 8.271s + 17.1}{4.136s^4 + 30.51s^3 + 59.45s^2 + 20.68s + 17.1} \quad (15)$$

$$G_{M2}(s) = \frac{s^4 + 54.56s^3 + 753.9s^2 + 261.7s + 23}{4.796s^6 + 172.5s^5 + 1244s^4 + 2517s^3 + 1233s^2 + 276.1s + 23} \quad (16)$$

$$G_{M3}(s) = \frac{s^6 + 130s^5 + 4443s^4 + 14050s^3 + 12380s^2 + 1193s + 30.54}{5.526s^8 + 483.8s^7 + 9084s^6 + 39090s^5 + 59870s^4 + 37560s^3 + 13780s^2 + 1210s + 30.54} \quad (17)$$



Şekil 1. Matsuda metodu ve GL ile hesaplanan birim basamak cevapları

Kesir dereceli bir transfer fonksiyonun zaman cevabı ayrıca nümerik olarak çizdirilebilmektedir. Nümerik yöntemlerden biri olan GL metodu kesine yakın sonuçlar vermektedir [20]. Burada tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerinin zaman cevabı analizindeki başarısının tespiti için GL metodu ile kıyaslama yapılmıştır. Denklem (15-17)'nin birim basamak cevapları ve GL nümerik yöntem ile hesaplanmış birim basamak cevabı Şekil 1'de üst üste çizdirilmiştir. Görüldüğü gibi üçüncü dereceden yaklaşım ile elde edilmiş olan $G_{M3}(s)$ 'in birim basamak cevabı, GL ile çizdirilmiş birim basamak cevabına en fazla yaklaşan sonuçtur. Bu durum yüksek dereceden yaklaşımların daha düşük hataya sahip olduklarını ve kesine yakın sonuçlar verdiklerini kanıtlamaktadır. Bu bilgiden yola çıkarak önerilen yöntem için daha az sayıda fonksiyon ile daha yüksek dereceden yaklaşımı temsil edebilecek ve aynı zamanda analitik türevlenebilen (18) zaman fonksiyonu modeli belirlenmiştir. Burada $f_{step}(t)$,

eğri uydurma yapılacak birim basamak cevabı fonksiyonudur. Denklem (18) ile kararlı yapıdaki sistem modellerinin birim basamak cevapları ifade edilebilir.

$$f_{step}(t) = ut^v + e^{-\beta_0 t^{\gamma_0}} - e^{-\beta_1 t^{\gamma_1}} + \dots - e^{-\beta_k t^{\gamma_k}} \quad (18)$$

$$F_{step}(s) = \frac{uv!}{s^{v+1}} + \frac{1}{(s + \beta_0)} - \frac{1}{(s + \beta_1)} + \dots - \frac{1}{(s + \beta_k)}, \gamma_i = 1, \quad (19)$$

$$i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$$

Denklem (18)'de $\gamma_i = 1$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ olsaydı fonksiyonun Laplace dönüşümü (19)'daki gibi hesaplanırdı. Ancak $\gamma_i \neq 1$ durumunda $f_{step}(t)$ fonksiyonunun analitik Laplace dönüşümü hesaplanamaz. $f_{step}(t)$, bu genel biçimiyle v ve $\gamma_i \neq 1$ 'ya bağlı olarak yüksek dereceden tam sayı dereceli transfer fonksiyonları temsil eder. Bu haliyle $f_{step}(t)$, kesir dereceli transfer fonksiyonların zaman cevaplarına daha iyi uyum sağlayacaktır. Fonksiyonun bilinmeyen reel parametreleri u, v, β_i ve γ_i en küçük kareler metodu kullanan eğri uydurma işlemi sonucunda tespit edilir. Böylece $G(s)$ kesir dereceli transfer fonksiyonunun birim basamak cevabını temsil eden zaman fonksiyonu $f_{step}(t)$ hesaplanmış olur. Aynı zamanda (20-21)'deki gibi $f_{step}(t)$ fonksiyonunun türevi alınarak $G(s)$ kesir dereceli transfer fonksiyonunun birim darbe cevabı $g(t)$ hesaplanabilir.

$$g(t) = \frac{df_{step}(t)}{dt} \quad (20)$$

$$g(t) = uvt^{(v-1)} - \beta_0 \gamma_0 t^{(\gamma_0-1)} e^{-\beta_0 t^{\gamma_0}} + \beta_1 \gamma_1 t^{(\gamma_1-1)} e^{-\beta_1 t^{\gamma_1}} \quad (21)$$

$$- \dots + \beta_k \gamma_k t^{(\gamma_k-1)} e^{-\beta_k t^{\gamma_k}}$$

$$g(t) \approx L^{-1}[G(s)] \quad (22)$$

Denklem (22)'de görüldüğü gibi $g(t)$, kesir dereceli $G(s)$ transfer fonksiyonunun yaklaşık ters Laplace dönüşümü olarak düşünülebilir. Denklem (8) biçimindeki kesir dereceli transfer fonksiyonlar için ilk iki terimli $f_{step}(t)$, (9) biçimindeki kesir dereceli transfer fonksiyonlar için ise ilk üç terimli $f_{step}(t)$ zaman fonksiyonu hesaplamalar için yeterli olmaktadır. Önerilen yöntem ile (8-9)'da verilen kesir dereceli transfer fonksiyon yapıları için birim darbe ve birim basamak cevaplarının zaman denklemleri yani yaklaşık ters Laplace dönüşümleri hesaplanabilmektedir. Bir diğer söylem ile sistemin kesir dereceli diferansiyel denkleminin yaklaşık olarak çözümü elde edilmektedir.

Önerilen metodun işlem basamakları:

Basamak 1: GL Metodu kullanılarak kesir dereceli transfer fonksiyonun birim basamak cevabının kesine yakın çizdirilmesi

Basamak 2: Denklem (8) formundaki transfer fonksiyon için ilk iki terimli $f_{step}(t)$ fonksiyonu belirlenmesi, Denklem (9) formundaki transfer fonksiyon için ilk üç terimli $f_{step}(t)$ fonksiyonu belirlenmesi

Basamak 3: En küçük kareler eğri uydurma yöntemi ile $f_{step}(t)$ 'nin birim basamak fonksiyonu eğrisine uydurma işleminin yapılması

Basamak 4: $f_{step}(t)$ fonksiyonundaki bilinmeyen parametrelerin elde edilmesi ve fonksiyonun yazılması

Basamak 5: $g(t) = \frac{df_{step}(t)}{dt}$ denklemi ile birim darbe cevabı fonksiyonuna geçiş yapılması

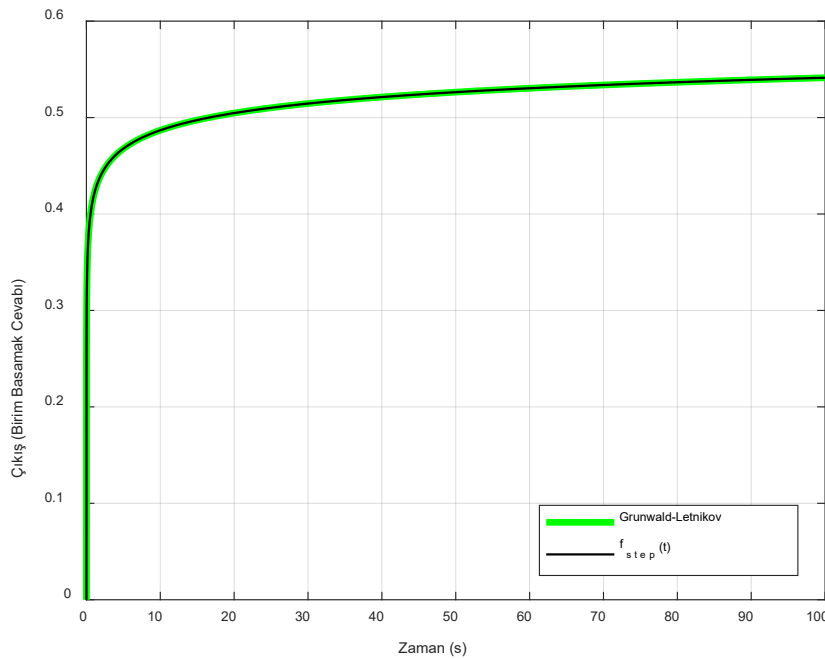
Önerilen yöntemin geçerliliği aşağıdaki örnekler üzerinde incelenmiştir.

Örnek 1: Denklem (23)'te verilen kesir dereceli temel transfer fonksiyonun zaman fonksiyonunu elde edelim;

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.2} + 1.5} \quad (23)$$

Denklem (23)'te verilen kesir dereceli transfer fonksiyon, (8)'de verilen yapıdadır. Belirtildiği gibi bu formdaki transfer fonksiyonlar için $f_{step}(t)$ zaman fonksiyonunda ilk iki terim kullanılması yeterlidir. Önerilen yöntem ile $f_{step}(t)$ katsayıları $\alpha_1 = 0.2$ için $u = -0.127$, $v = 0.0513$, $\beta_0 = 0.6047$ ve $\gamma_0 = -0.1165$ olarak hesaplanmıştır. Böylece (23)'ün birim basamak cevabının yaklaşık zaman fonksiyonu ya da başka bir deyişle yaklaşık ters Laplace dönüşümü (24)'teki gibi elde edilir. Denklem (23)'ün GL kullanılarak ve yaklaşık olarak hesaplanan $f_{step}(t)$ fonksiyonu ile çizdirilmiş birim basamak cevapları Şekil 2'de verilmiştir.

$$f_{step}(t) = -0.127t^{0.0513} + e^{-0.6047t - 0.1165} \quad (24)$$



Şekil 2. Denklem (23)'ün önerilen ve GL metodu kullanılarak çizdirilmiş birim basamak cevabı

Şekil 2’de $f_{step}(t)$ ve GL ile çizdirilmiş birim basamak cevaplarının birbirini çok iyi takip ettikleri görülmektedir. Bu iki eğri arasındaki ortalama karesel hata 7.6717×10^{-5} olarak hesaplanmıştır. Bu sonuçlar hesaplanan yaklaşık birim basamak cevabı fonksiyonunun oldukça başarılı olduğunu göstermektedir.

Denklem (23)’te ayrıca $\alpha_1 \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$ değerleri için $f_{step}(t)$ bilinmeyen parametreleri Tablo 1’de sunulmuştur. Tablo 1 incelendiğinde en büyük karesel hata değerinin $\alpha_1 = 0.9$ için 0.0072 olduğu görülmektedir. Bu hata değeri hesaplamalar için kabul edilebilir aralıklardadır. Ayrıca geliştirilen yazılım ile $0 < \alpha_1 < 1$ aralığındaki tüm değerler için $f_{step}(t)$ fonksiyonu hesaplanabilmektedir.

Çizelge 1. $\alpha_1 \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$ değerleri için $f_{step}(t)$ parametreleri ve hata miktarı.

α_1	u	v	β_0	γ_0	Ortalama Karesel Hata (RMSE)
0.1	-0.0709	0.0482	0.7335	-0.0552	8.8769×10^{-5}
0.2	-0.127	0.0513	0.6047	-0.1165	7.6717×10^{-5}
0.3	-0.1095	0.0947	0.6174	-0.1738	9.9743×10^{-5}
0.4	-0.1258	0.1066	0.5667	-0.2361	4.6232×10^{-5}
0.5	-0.1496	0.1047	0.5040	-0.3032	0.0012
0.6	-0.1747	0.0970	0.4414	-0.3760	0.0022
0.7	-0.1987	0.0871	0.3832	-0.4563	0.0036
0.8	-0.2204	0.0768	0.3310	-0.5470	0.0052
0.9	-0.2388	0.0672	0.2853	-0.6521	0.0072

Denklem (23)’ün birim darbe cevabı $g(t)$ ’yi hesaplamak için (20-21) kullanılır. Yani $f_{step}(t)$ ’nin analitik yöntemler ile türevi alındığı zaman $g(t)$ fonksiyonu (25) gibi hesaplanmış olur. Aynı şekilde GL metodu ve $g(t)$ fonksiyonu kullanılarak çizdirilen birim darbe cevapları Şekil 3’te sunulmuştur. Her iki eğri birbiri ile başarılı biçimde örtüşmektedir. Burada $g(t)$ zaman fonksiyonu, (23)’te verilen kesir dereceli transfer fonksiyonun yaklaşık birim darbe cevabı fonksiyonu ya da başka bir ifadeyle yaklaşık ters Laplace dönüşümüdür.

$$g(t) = -0.0065t^{-0.9487} + 0.0704t^{-1.1165}e^{-0.6047t} - 0.1165 \quad (25)$$

Örnek 2: Denklem (26)’da verilen kesir dereceli temel transfer fonksiyonun zaman fonksiyonunu elde edelim;

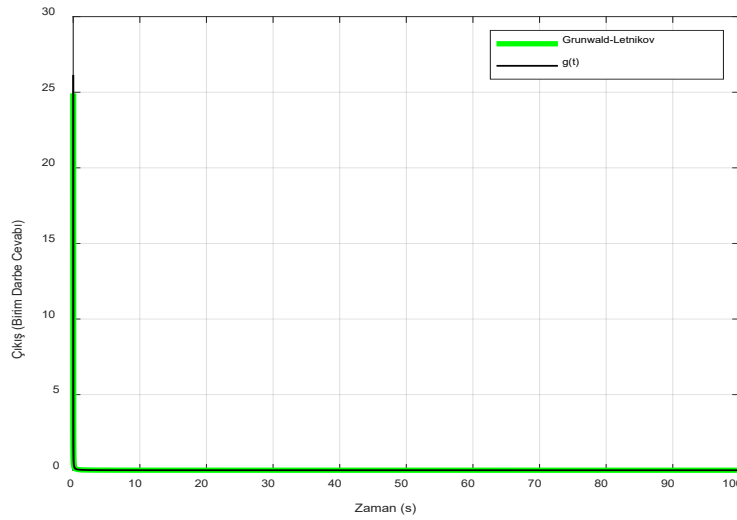
$$G(s) = \frac{0.8s^{0.3} + 0.26}{s^{0.6} + 0.75s^{0.3} + 1.42} \quad (26)$$

Denklem (26)’da verilen kesir dereceli transfer fonksiyon, (9)’da verilen yapıdadır. Bu formdaki transfer fonksiyonlar için $f_{step}(t)$ zaman fonksiyonunda ilk üç terim kullanılması gereklidir. Verilen

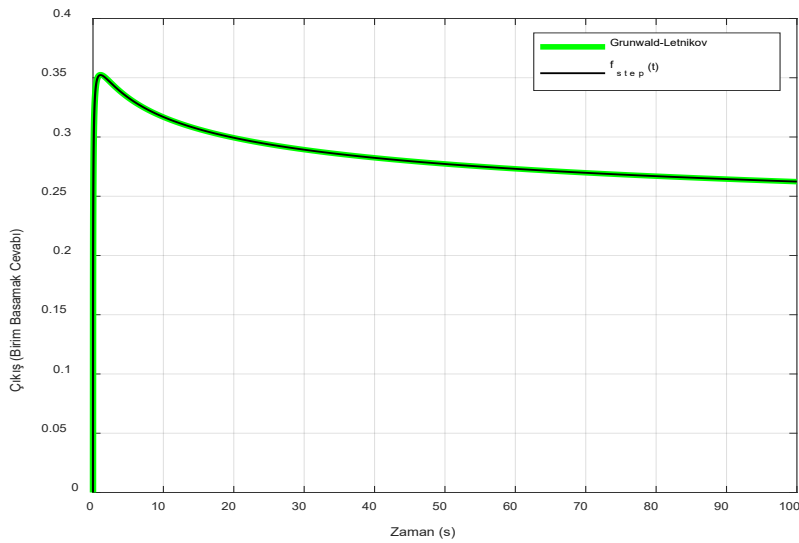
kesir dereceli transfer fonksiyonunda $\alpha_2 = 0.3$ 'tür. Önerilen yöntem ile $f_{step}(t)$ fonksiyonunun katsayıları $u = 0.1964$, $v = 0.0022$, $\beta_0 = 1.6051$, $\gamma_0 = 0.1169$, $\beta_1 = 3.1005$ ve $\gamma_1 = 0.2757$ olarak hesaplanmıştır. Böylece (26)'nın yaklaşık birim basamak cevabı fonksiyonu (27)'deki gibi elde edilir.

$$f_{step}(t) = 0.1964t^{0.0022} + e^{-1.6051t^{0.1169}} - e^{-3.1005t^{0.2757}} \quad (27)$$

Denklem (26)'nın GL ve yaklaşık olarak hesaplanan $f_{step}(t)$ fonksiyonu kullanılarak üst üste çizdirilmiş birim basamak cevapları Şekil 4'te verilmiştir. Şekil 4 incelendiğinde, bu örnekte de önerilen yöntem ile hesaplanan birim basamak cevabının, GL metodu ile hesaplanan birim basamak cevabına oldukça yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca bu başarılı hesaplama iki eğri arasındaki ortalama karesel hatanın 7.2005×10^{-5} gibi oldukça küçük bir değer olmasından anlaşılmaktadır.



Şekil 3. Denklem (23)'ün önerilen ve GL metodu kullanılarak çizdirilmiş birim darbe cevabı



Şekil 4. Denklem (26)'nın önerilen ve GL metodu kullanılarak çizdirilmiş birim basamak cevabı

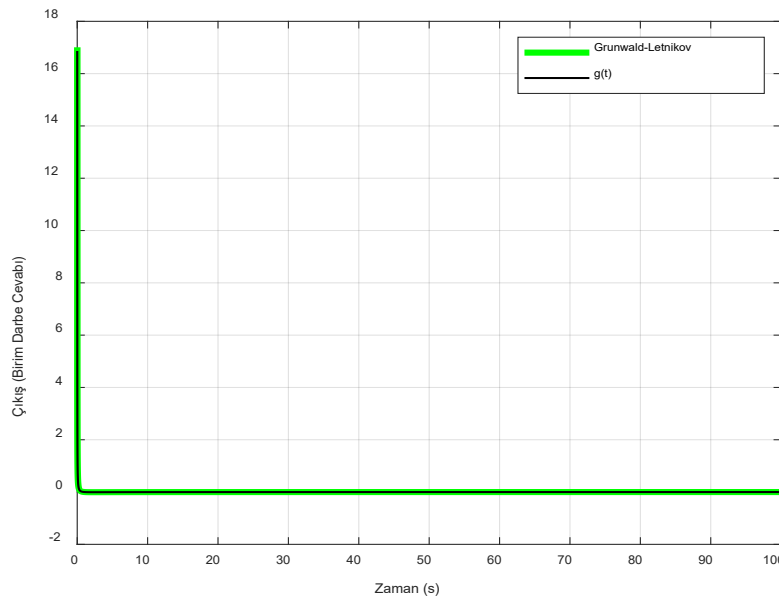
Yapılan hesaplamaların genel doğruluğunu gösterebilmek için bu örnekte $\alpha_2 \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$ değerleri için $f_{step}(t)$ katsayıları ve ortalama karesel hataları hesaplanmıştır. Hesaplanan katsayı ve hata miktarları Çizelge 2’de verilmiştir. Çizelge 2’den hata değerlerinin $7.8929 \times 10^{-5} - 0.0063$ aralığında olduğu görülmektedir. Önerilen yöntem ile (8-9)’da belirtilen kesir dereceli transfer fonksiyon formları için oldukça düşük hata değerlerinde yaklaşık zaman fonksiyonları hesaplanabildiği her iki örnekten elde edilen sonuçlar ile ortaya koyulmuştur.

Çizelge 2. $\alpha_2 \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$ değerleri için $f_{step}(t)$ parametreleri ve hata miktarı.

α_2	u	v	β_0	γ_0	β_1	γ_1	Ortalama Karesel Hata (RMSE)
0.1	0.2914	0.0027	1.9993	0.0805	2.4169	0.1112	7.8929×10^{-5}
0.2	0.1744	0.0025	1.5466	0.0639	3.1302	0.1752	6.2353×10^{-5}
0.3	0.1964	0.0022	1.6051	0.1169	3.1005	0.2757	7.2005×10^{-5}
0.4	0.2032	0.0020	1.5795	0.1819	3.0928	0.3936	3.4933×10^{-4}
0.5	0.2010	0.0018	1.5134	0.2520	3.1759	0.5359	0.0010
0.6	0.1965	0.0016	1.4217	0.3358	3.2574	0.7116	0.0024
0.7	0.1919	0.0015	1.2675	0.4708	3.1058	0.9491	0.0042
0.8	0.1879	0.0013	0.9208	0.8439	2.2234	1.3488	0.0056
0.9	0.1843	0.0012	0.1085	2.5965	0.5187	1.3259	0.0063

Denklem (26)’nın birim darbe cevabı $g(t)$, $f_{step}(t)$ fonksiyonunun türevi alınarak (28) gibi hesaplanır. GL metodu ve $g(t)$ fonksiyonu ile çizdirilen birim darbe cevabı Şekil 5’te verilmiştir. Birim basamak cevabındaki çok düşük hataya sahip başarılı hesaplamalar, birim darbe cevabı eğrilerinin de birbirlerini başarılı bir şekilde takip etmesinden anlaşılmaktadır.

$$g(t) = 4.3208 \times 10^{-4} t^{-0.9978} - 0.1876 t^{-0.8831} e^{-1.6051 t^{0.1169}} + 0.8548 t^{-0.7243} e^{-3.1005 t^{0.2757}} \quad (28)$$



Şekil 5. Denklem (26)’nın önerilen ve GL metodu kullanılarak çizdirilmiş birim darbe cevabı

4. Sonuçlar

Bu çalışmada kesir dereceli kontrol sistemlerinde bazı temel transfer fonksiyon yapıları için zaman cevabı fonksiyonlarını yaklaşık olarak hesaplayabilen bir çözüm önerilmiştir. Bazı temel kesir dereceli transfer fonksiyon yapıları ve onların yaklaşık zaman cevabı fonksiyonları açıklanmıştır. Önerilen yöntemin uygulaması örneklerle gösterilmiştir. Hesaplanan yaklaşık zaman cevabı fonksiyonları ile birim basamak ve darbe cevapları çizdirilmiştir. Bu zaman cevapları GL metodu ile kıyaslanmıştır. Hata miktarları sadece birim basamak cevapları üzerinden hesaplanmıştır. Önerilen yöntem ile GL metodu hesaplamaları arasındaki hata miktarlarının oldukça düşüktür. Yöntem yüksek doğrulukta sonuçlar vermektedir. Bu yöntemle hesaplanan zaman fonksiyonları, verilen kesir dereceli transfer fonksiyonların yaklaşık ters Laplace dönüşümleridir. Kesir dereceli bir diferansiyel denkleme yaklaşık olarak çözüm sunmaktadır. Ayrıca bu çalışma daha karmaşık yapıdaki kesir dereceli transfer fonksiyonların yaklaşık zaman cevaplarının hesaplanması için bir temel niteliğindedir.

Kaynaklar

- [1] Monje CA, Chen Y, Vinagre BM *et al.* Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications. London: Springer-Verlag London; 2010.
- [2] Bagley RL, Calico R. Fractional order state equations for the control of viscoelasticallydamped structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 1991; 14:304-311.
- [3] Skaar SB, Michel A, Miller R. Stability of viscoelastic control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1988; 33:348-357.
- [4] Ichise M, Nagayanagi Y, Kojima T. An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes. *Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry* 1971; 33:253-265.
- [5] Hartley TT, Lorenzo CF. Dynamics and control of initialized fractional-order systems. *Nonlinear Dynamics* 2002; 29:201-233.
- [6] Sun H, Abdelwahab A, Onaral B. Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1984; 29:441-444.
- [7] Magin RL. Fractional calculus in bioengineering. *Critical Reviews™ in Biomedical Engineering* 2004; 32:1-104.
- [8] Hartley TT, Lorenzo CF, Qammer HK. Chaos in a fractional order Chua's system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 1995; 42:485-490.
- [9] Nonnenmacher T, Glöckle W. A fractional model for mechanical stress relaxation. *Philosophical magazine letters* 1991; 64:89-93.
- [10] Westerlund S, Ekstam L. Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 1994; 1:826-839.
- [11] Manabe S. The non-integer integral and its application to control systems. *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan* 1960; 80:589-597.
- [12] Manabe S. The System Design by the Use of a Model Consisting of a Saturation and Non-Integrals. *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan* 1962; 82:1731-1739.
- [13] Yeroglu C, Tan N. Development of a toolbox for frequency response analysis of fractional order control systems. In: *European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD 2009) Antalya, Turkey; 2009.*
- [14] Carlsson G, Halijak C. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process. *IEEE Transactions on Circuit Theory* 1964; 11:210-213.
- [15] Charef A, Sun H, Tsao Y, Onaral B. Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1992; 37:1465-1470.
- [16] Das S. *Functional fractional calculus for system identification and controls.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; 2008.
- [17] Matsuda K, Fujii H. H~ Optimized Wave-Absorbing Control: Analytical and Experimental Results. *Journal of Guidance Control and Dynamics* 1993; 16:1146-1146.

- [18] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, Nanot FM. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 2000; 47:25-39.
- [19] Valério D, da Costa JS. Time domain implementations of non-integer order controllers. In: *Proceedings of Control'2002 Portuguese Conference on Automatic Control*, Portugal; 2002.
- [20] Atherton DP, Tan N, Yüce A. Methods for computing the time response of fractional-order systems. *IET Control Theory & Applications* 2014; 9:817-830.
- [21] Podlubny I. *Fractional differential equations*. USA: Academic press; 1998.
- [22] Polubny I. Fractional-order systems and $PI\lambda D\mu$ controller. *IEEE Trans. Automatic Control* 1999; 44:208-214.
- [23] Yüce A, Tan N. Derivation of Analytical Inverse Laplace Transform for Fractional Order Integrator. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics* 2017; 6:303-314.
- [24] Yüce A, Tan N. Inverse Laplace Transforms of the Fractional Order Transfer Functions. In: *11th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO)*, Bursa, Turkey; 2019.
- [25] Yüce A, Tan N. On the approximate inverse Laplace transform of the transfer function with a single fractional order. *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 2020; 0.
- [26] Caponetto R, Dongola G, Fortuna L, Petráš I. *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*. World Scientific; 2010.
- [27] Petras I. Stability of fractional-order systems with rational orders: a survey. *Fractional Calculus & Applied Analysis* 2009; 12:269–298.
- [28] Chen Y, Petráš I, Xue D. Fractional order control: a tutorial. In: *Proceedings of the 2009 conference on American Control Conference*, St. Louis, Missouri, USA; 2009.
- [29] Matusů R. Application of fractional order calculus to control theory. *International Journal of Mathematical models and methods in applied sciences* 2011; 5:1162-1169.
- [30] Xue D, Chen Y, Atherton DP. *Linear feedback control: analysis and design with MATLAB*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2007.
- [31] Chen Y, Petras I, Vinagre B. A list of Laplace and inverse Laplace transforms related to fractional order calculus. In: [Online] http://ivopetras.tripod.com/foc_laplace.pdf. 2001.