T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKLAŞIMLI GAMMA YAKIN HALKALAR

MEHMET GÜRBÜZCAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2021

T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YAKLAŞIMLI GAMMA YAKIN HALKALAR

Mehmet GÜRBÜZCAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Bu tez 07/09/2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
Danışman

Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY
Üye

Doç. Dr. Ebubekir İNAN
Üye

Prof. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKLAŞIMLI GAMMA YAKIN HALKALAR

Mehmet GÜRBÜZCAN

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
Yıl : 2021, Sayfa sayısı: 81 + vi

Jüri : Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY
Doç. Dr. Ebubekir İNAN
Doç. Dr. Mustafa UÇKUN

Bu tezin birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmanın amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde, bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntem açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, proksimal relator uzayları ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir.

Beşinci bölümde, yaklaşımlı cebirsel yapılar ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

Altıncı bölümde, yakın halkalar ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedilmiştir.

Yedinci bölümde, gamma halkalar ve yaklaşımlı gamma halkalar ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

Sekizinci bölümde, bir yaklaşımlı gamma halka örneği verilmiş, yaklaşımlı gamma-yakın halka kavramı tanımlanmış ve bazı özgün sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Proksimal relator uzay; Yaklaşımlı grup; Yaklaşımlı halka; Yakın halka; Gamma halka

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATELY GAMMA NEAR RINGS

Mehmet GÜRBÜZCAN

Adıyaman University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN
Year : 2021, Number of Pages: 81 + vi

Jury : Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY
Assoc. Prof. Dr. Ebubekir İNAN
Assoc. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN

In the first chapter of this thesis, the aim and importance of the thesis are mentioned. In the second chapter, a summary of the literature is presented in accordance with the purpose of this thesis. In the third chapter, the material and method used in this thesis are explained.

In the fourth chapter, some basic informations given about proximal relator spaces. In the fifth chapter, some results related to approximately algebraic structures are examined.

In the sixth chapter, the basic characteristics of near rings are mentioned.

In the seventh chapter, some results related to gamma rings and approximately gamma rings are examined.

In the eighth chapter, an example of an approximately gamma ring is given, the concept of approximately gamma-near ring is also defined, and some original results are presented.

Key Words: Proximal relator space; Approximately group; Approximately ring; Near ring; Gamma ring

BEYAN

"**Yaklaşımlı Gamma Yakın Halkalar**" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve ayrıca, alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mehmet GÜRBÜZCAN

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen ve bu tezi hazırlarken bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım. Bu tezde verilen orijinal sonuçların kontrol edilmesinde desteğini ve teknik yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ebubekir İNAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet GÜRBÜZCAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{O}$	: Algılanabilen nesnelerin kümesi
X	: Boştan farklı bir küme
$\mathcal{R}$	: Relator
$\left(X,\mathcal{R}\right)$	: Relator uzay
δ_E	: Efremovič proksimiti bağıntısı
δ_L	: Lodato proksimiti bağıntısı
δ_Φ	: Tanımsal Efremovič proksimiti bağıntısı
$\left(X,\mathcal{R}_\delta\right)$	: Proksimal relator uzay
φ	: Çıkarım fonksiyonu
$Q(A)$	: A nın küme tanımlaması
$cl_\Phi(a)$	: a noktasının tanımsal kapanışı
$\Phi_* A$	: A nın tanımsal alt yaklaşımı
$\Phi^* A$	: A nın tanımsal üst yaklaşımı
G	: Yaklaşımlı grup
R	: Yaklaşımlı halka
Γ	: Toplamsal yaklaşımlı grup
M	: Yaklaşımlı Γ-halka
N	: Yakın-halka
A	: Yaklaşımlı Γ-yakın halka
c_ℓ	: Sol zayıf eşdeğerlik bağıntısı
c_r	: Sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısı
$A/_\omega K$	: Yaklaşımlı bölüm Γ-yakın halkası

1. GİRİŞ

Yaklaşımlı cebirsel yapılar teorisi, görüntü analizi veya sınıflandırma problemleri gibi diğer akademik araştırma konuları için etkili çalışma imkânı sunan önemli bir teoridir.

Bu tezin amacı, yaklaşımlı gruplar ve yaklaşımlı halkalar gibi yaklaşımlı cebirsel yapıları incelemek ve bu konu ile ilgili kaynakları dikkate alarak, yeni yaklaşımlı cebirsel yapılar elde etmektir. Bu sebeple birinci aşamada gamma halka kavramı ele alınarak genelleştirilen yaklaşımlı gamma halkalar araştırılmış ve ikinci aşamada yakın-halka kavramı göz önünde tutularak proksimal relator uzayında yaklaşımlı gamma halka kavramını genelleştirmek hedeflenmiştir.

Bu tezin birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu tezin amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde, bu tezde kullanılan materyal ve yöntem açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, proksimal relator uzayları ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde, yaklaşımlı cebirsel yapılar ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir. Altıncı bölümde, yakın halkalar ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedilmiştir. Yedinci bölümde, gamma halkalar ve yaklaşımlı gamma halkalar ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir. Sekizinci bölümde, bir yaklaşımlı gamma halka örneği verilmiş, yaklaşımlı gamma-yakın halka kavramı tanımlanmış ve bazı özgün sonuçlar sunulmuştur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Klasik bağıntı kavramı kullanılarak, birbiri ile ilişkili olan elemanların özellikleri çok daha kolay bir şekilde incelenebilir. Bir küme üzerinde birden fazla bağıntı tanımlanabilir. X boştan farklı bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlanan bağıntıların kümesine bir *relator* denir.

Proksimiti bağıntısı ilk olarak 1952 yılında Efremovič tarafından daha çok geometrik ve topolojik bazı kavramların belirlenmesi için tanımlanmıştır [1]. Proksimiti bağıntısında temel düşünce iki elemanın veya iki kümenin yakınlığının belli özellikler dikkate alınarak incelenmesidir. Bu düşünce doğrultusunda yakın (proksimal) kümeler üzerinde birçok topolojik araştırmalar yapılmıştır [2-4].

X kümesi üzerinde tanımlanan proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{R}_{\delta}$ olmak üzere, $\left(X, \mathcal{R}_{\delta}\right)$ ikilisi bir *proksimal relator uzayı* olarak adlandırılır [5]. Efremovič proksimiti [1], Lodato proksimiti [3] gibi farklı proksimiti bağıntıları tanımlanmıştır.

2013 te Naimpally ve Peters tarafından tanımsal Efremovič proksimiti, tanımsal Lodato proksimiti bağıntıları tanımlanmıştır [4]. Tanımsal proksimiti bağıntıları, konumu ve özellikleri olan algılanabilir soyut olmayan noktalardan oluşan kümeler üzerinde tanımlanmıştır. Mesela dijital görüntüler piksellerden oluşmaktadır. Her bir piksel, konumu ve renk koduna karşılık gelen çıkarım fonksiyonları ile birlikte soyut olmayan bir nokta olarak dikkate alınabilir. Soyut olmayan her bir elemanın özelliklerini temsil eden reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılarak nesnelerin bilişsel olarak algılanması gerçekleşmiş olur. Böylece elemanların ortak özellikleri göz önünde tutularak tanımsal anlamda yakınlıklarından bahsedilebilir. Tanımsal proksimiti bağıntıları dikkate alınarak bazı araştırmalar yapılmıştır [5-7]. X kümesi üzerinde tanımlanan proksimiti bağıntıları yerine tanımsal proksimiti bağıntıları ele alınırsa $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}\right)$ ikilisine bir *tanımsal proksimal relator uzayı* denir.

Proksimiti bağıntılar kullanılarak oluşturulan cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar 2017 yılında başlamıştır [8]. Proksimal relator uzayında cebirsel yapılar, temel olarak bu uzay üzerinde tanımlanan ikili işlem ve alt kümelerin proksimiti bağıntısı ile belirlenen tanımsal üst yaklaşımları dikkate alınarak oluşturulur. 2017 de İnan tarafından tanımsal üst yaklaşımın bazı özellikleri, yaklaşımlı (approximately) yarı-gruplar ve yaklaşımlı yarı-gruplarda idealler verilmiştir [8]. 2018 ve 2019 da yaklaşımlı gruplar, alt yaklaşımlı gruplar ve yaklaşımlı grup homomorfizmaları İnan tarafından tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili örnekler incelenmiştir [9,10]. 2019 yılında yaklaşımlı gamma yarı-gruplar Uçkun ve İnan tarafından verilmiştir [11]. Ayrıca yaklaşımlı halkaların, yaklaşımlı halkanın ideallerinin ve yaklaşımlı halka homomorfizmalarının bazı temel özellikleri araştırılmış ve örnekler verilmiştir [12].

Yakın-halkalar ile ilgili ilk çalışma, 1905 yılında Dickson [13,14] tarafından aksiyomatik olarak verilmiştir. Dickson tarafından bir taraflı dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığı gösterilmiş ve bu tür cisimler yakın-cisim olarak adlandırılmıştır. Yakın-halka kavramı ilk defa 1936 yılında Zassenhaus [15] tarafından kullanılmış ve bütün sonlu yakın-cisimler belirlenmiştir.

Nobusawa [16], halka kavramından daha genel olan gamma halka kavramını tanımlamıştır. Daha sonra Barnes, Nobusawa anlamında gamma halkanın tanımındaki koşulları biraz zayıflatmış ve gamma halka kavramını yeniden tanımlamıştır [17]. Birçok matematikçi gamma halkasının yapısını incelemeye devam etmiş ve halka teorisindeki sonuçlar ile ilgili olarak bazı genelleştirmeler elde etmiştir [18,19].

Uçkun [20], yaklaşımlı halka kavramından daha genel olan yaklaşımlı gamma halka kavramını tanımlamıştır. Ayrıca yaklaşımlı gamma ideallerin, yaklaşımlı zayıf kalan sınıfların yaklaşımlı gamma halkasının ve yaklaşımlı gamma homomorfizmaların bazı temel özelliklerini araştırmıştır.

Bu tezde yaklaşımlı gamma halkalar incelenmiş ve yakın-halka kavramı göz önünde tutularak proksimal relator uzayında yaklaşımlı gamma halka kavramı genelleştirilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Yakın halkalar, gamma halkalar ve yaklaşımlı halkalar ile ilgili olarak temin ettiğimiz kitaplar ve makaleler, mevcut bilimsel yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Tez çalışmamızın amacına uygun olarak veriler bir araya getirilmiş ve özgün sonuçlar elde edilmiştir.

4. TEMEL KAVRAMLAR

4.1 Proksimal Relator Uzay

Proksimiti bağıntısı ilk olarak 1952 yılında Efremovič tarafından tanımlanmıştır [1]. Proksimiti bağıntılarının ele alınmasındaki temel düşünce, iki elemanın veya iki kümenin yakınlığının incelenmesi olmuştur. Bu düşünce doğrultusunda yakın (proksimal) kümeler üzerinde birçok araştırma yapılmıştır. Bu bölümde Efremovič proksimiti, Lodato proksimiti ve tanımsal proksimiti bağıntıları dikkate alınmış ve bazı temel özellikler verilmiştir [2-5].

Tanım 4.1.1 X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde tanımlanan bağıntıların ailesine bir relator denir ve $\mathcal{R}$ ile gösterilir. $(X,\mathcal{R})$ ikilisine de bir relator uzay denir.

Tanım 4.1.2 δ, $P(X)$ üzerinde tanımlanan bir bağıntı olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa δ bağıntısına bir Efremovič proksimiti bağıntısı denir:

(1) $A\delta B \Rightarrow B\delta A$,

(2) $A\delta B \Rightarrow A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$,

(3) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A\delta B$,

(4) $A\delta(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta B$ veya $A\delta C$,

(5) $\{x\}\delta\{y\} \Leftrightarrow x = y$,

(6) $A\underline{\delta}B \Rightarrow \exists E \subseteq X$ öyle ki $A\underline{\delta}E$ ve $E^c\underline{\delta}B$ (Efremovič aksiyomu).

Bu bağıntı δ_E ile gösterilir.

Tanım 4.1.3 δ, $P(X)$ üzerinde tanımlanan bir bağıntı olsun. δ, Tanım 4.1.2 deki $(1)-(5)$ özellikleri ile birlikte

$$A\delta B \text{ ve } \forall b \in B,\ \{b\}\,\delta C \Rightarrow A\delta C \text{ (Lodato aksiyomu)}$$

özelliğini de sağlarsa δ ya bir Lodato proksimiti bağıntısı denir ve δ_L ile gösterilir.

Tanım 4.1.4 X üzerinde tanımlanan proksimiti bağıntılarının bir ailesi $\mathcal{R}_\delta$ olmak üzere, $(X, \mathcal{R}_\delta)$ ikilisine bir proksimal relator uzay denir.

Bu çalışmada soyut noktalar yerine, konumu ve özelliği olan soyut olmayan noktalar kullanılmıştır.

Tanım 4.1.5 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi olsun. Soyut olmayan noktaların özelliğini temsil eden

$$\varphi : X \to \mathbb{R}$$

dönüşümüne bir çıkarım fonksiyonu denir. $x \in X$ için $\varphi(x)$, x elemanının ayırt edici özelliğini temsil eder.

Tanım 4.1.6 $x \in X$ olsun. φ_i ler X deki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden dönüşümler olmak üzere,

$$\Phi : X \to \mathbb{R}^n$$

$\Phi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ $(n \in \mathbb{N})$ şeklinde tanımlanan Φ dönüşümüne x elemanının bir nesne tanımlaması denir.

Çıkarım fonksiyonları belirlendikten sonra bir δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı tanımlanabilir.

Tanım 4.1.7 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A \subseteq X$ olsun.

$$Q(A) = \{\Phi(a) \mid a \in A\}$$

kümesine, A nın küme tanımlaması denir.

Tanım 4.1.8 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A,B\subseteq X$ olsun.

$$A\underset{\Phi}{\cap}B=\{x\in A\cup B \mid \Phi(x)\in Q(A) \ ve\ \Phi(x)\in Q(B)\}$$

kümesine, A ile B nin tanımsal arakesiti denir.

Tanım 4.1.9 δ_Φ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlarsa δ_Φ ye bir tanımsal Efremovič proksimiti bağıntısı denir:

(1) $A\delta_\Phi B\Rightarrow B\delta_\Phi A$,

(2) $A\delta_\Phi B\Rightarrow A\neq\varnothing$ ve $B\neq\varnothing$,

(3) $A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow A\delta_\Phi B$,

(4) $A\delta_\Phi(B\cup C)\Leftrightarrow A\delta_\Phi B$ veya $A\delta_\Phi C$,

(5) $\{x\}\,\delta_\Phi\,\{y\}\Rightarrow\Phi(x)=\Phi(y)$,

(6) $A\underline{\delta}_\Phi B\Rightarrow\exists E\subseteq X$ öyle ki $A\underline{\delta}_\Phi E$ ve $E^c\underline{\delta}_\Phi B$ (Efremovič aksiyomu).

Tanım 4.1.10 X üzerinde tanımlanan tanımsal proksimiti bağıntılarının bir ailesi $\mathcal{R}_{\delta_\Phi}$ olmak üzere, $(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ ikilisine bir tanımsal proksimal relator uzay denir.

Tanım 4.1.11 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A,B\subseteq X$ olsun.

(1) $Q(A)\cap Q(B)\neq\varnothing$ ise A ve B tanımsal yakındır denir ve $A\delta_\Phi B$ ile gösterilir.

(2) $Q(A)\cap Q(B)=\varnothing$ ise A ve B tanımsal uzaktır denir ve $A\underline{\delta}_\Phi B$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.12 X boştan farklı bir küme, $A\subseteq X$ ve $\Phi:X\to\mathbb{R}^n$ bir nesne tanımlaması olsun.

$$cl_{\Phi}(a) = \{x \in X \mid \Phi(a) = \Phi(x)\}$$

kümesine, $a \in A$ noktasının tanımsal kapanışı denir.

Tanım 4.1.13 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\Phi^* A = \{x \in X \mid x\delta_\Phi A\}$$

kümesine, A nın tanımsal üst yaklaşımı denir.

Tanım 4.1.14 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\Phi_* A = \{a \in A \mid cl_\Phi(a) \subseteq A\}$$

kümesine, A nın tanımsal alt yaklaşımı denir.

Tanım 4.1.15 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\xi_\Phi(A) = \{B \in \mathrm{P}(X) \mid A\delta_\Phi B\}$$

kümesine, A nın tanımsal yakınlık ailesi denir.

Lemma 4.1.16 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda

(i) $Q(A \cap B) = Q(A) \cap Q(B)$,

(ii) $Q(A \cup B) = Q(A) \cup Q(B)$

dir.

Teorem 4.1.17 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) $\Phi_* A \subseteq A \subseteq \Phi^* A$,

(ii) $\Phi^*(A \cup B) = (\Phi^* A) \cup (\Phi^* B)$,

(iii) $\Phi_*(A \cap B) = (\Phi_* A) \cap (\Phi_* B)$,

(iv) $A \subseteq B$ ise $\Phi_* A \subseteq \Phi_* B$,

(v) $A \subseteq B$ ise $\Phi^* A \subseteq \Phi^* B$,

(vi) $\Phi_*(A \cup B) \supseteq (\Phi_* A) \cup (\Phi_* B)$,

(vii) $\Phi^*(A \cap B) \subseteq (\Phi^* A) \cap (\Phi^* B)$.

Tanım 4.1.18 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $(A, \cdot)$ ve $(Q(A), \cdot)$ birer grupoid ve Φ bir nesne tanımlaması olmak üzere, her $a, b \in A$ için $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$ ise Φ ye A dan $Q(A)$ ya bir tanımsal homomorfizma denir.

Lemma 4.1.19 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. A ve B, X üzerinde tanımlanan "$\cdot$" ikili işlemi ile birer grupoid ve $Q(A), Q(B)$ de $Q(X)$ de tanımlanan "$\cdot$" ikili işlemi ile birer grupoid olsun. Bu durumda Φ bir tanımsal homomorfizma ise

$$Q(A)Q(B) = Q(AB)$$

dir.

Teorem 4.1.20 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $A, B \subseteq X$ ve Φ bir tanımsal homomorfizma olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) $(\Phi^* A)(\Phi^* B) = \Phi^*(AB)$,

(ii) $(\Phi_* A)(\Phi_* B) \subseteq \Phi_*(AB)$.

5. YAKLAŞIMLI CEBİRSEL YAPILAR

5.1 Yaklaşımlı Gruplar

İnan, 2017 yılında yaklaşımlı yarı-grup kavramını [8], 2019 yılında yaklaşımlı grup kavramını [9] ve 2018 yılında da alt yaklaşımlı grup kavramını [10] tanımlamış ve bu yaklaşımlı cebirsel yapılar ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu bölümde yukarıda belirtilen İnan'ın tanımladığı yaklaşımlı cebirsel yapılar ve bazı temel özellikler verilmiştir.

Tanım 5.1.1 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı, $G \subseteq X$ ve "$\cdot$", X üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in \Phi^* G$ ise G ye bir yaklaşımlı grupoid denir.

G, $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ de "$\cdot$" ikili işlemi ile bir yaklaşımlı grupoid, $x \in G$ ve $A, B \subseteq G$ olsun. $Q(A), Q(B) \subseteq Q(G)$ kümeleri de $Q(X)$ deki "$\cdot$" ikili işlemi ile birer yaklaşımlı grupoid olsun. Bu durumda $x \cdot A,\ A \cdot x,\ A \cdot B \subseteq \Phi^* G \subseteq X$ ve $Q(A) \cdot Q(B)$ alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$x \cdot A = xA = \left\{ xa \mid a \in A \right\},$$

$$A \cdot x = Ax = \left\{ ax \mid a \in A \right\},$$

$$A \cdot B = AB = \left\{ ab \mid a \in A, b \in B \right\},$$

$$Q(A) \cdot Q(B) = Q(A)Q(B) = \left\{ \Phi(a)\Phi(b) \mid a \in A, b \in B \right\}.$$

Tanım 5.1.2 $\left(X, \mathcal{R}_\delta\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve "$\cdot$", X üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa $S \subseteq X$ ye bir yaklaşımlı yarı-grup denir:

(AY_1) Her $x \cdot y \in S$ için $x \cdot y \in \Phi^* S$ dir.

(AY_2) Her $x, y, z \in S$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $\Phi^* S$ de sağlanır.

Bir yaklaşımlı yarı-grup birimli (yani her $x \in S$ için $x \cdot e_s = e_s \cdot x = x$ olacak biçimde bir $e_s \in \Phi^* S$ varsa) ise S ye bir yaklaşımlı monoid denir.

Tanım 5.1.3 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $S \subseteq X$ bir yaklaşımlı yarı-grup ve $T \subseteq S$ olsun. O zaman $TT \subseteq \Phi^* T$ ise T ye S nin bir alt yaklaşımlı yarı-grubu denir.

Teorem 5.1.4 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda S, X de bir yarı-grup ise S bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

Teorem 5.1.5 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $S \subseteq X$ bir yarı-grup olsun. A, S nin bir alt yarı-grubu ise $\Phi_* A$, S nin bir alt yarı-grubudur.

Tanım 5.1.6 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve "$\cdot$", X üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa $G \subseteq X$ ye bir yaklaşımlı grup denir:

(AG_1) Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in \Phi^* G$,

(AG_2) Her $x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $\Phi^* G$ de sağlanır,

(AG_3) Her $x \in G$ için $x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$ olacak biçimde bir $e_G \in \Phi^* G$ vardır (e_G ye G nin yaklaşımlı birim elemanı denir),

(AG_4) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak biçimde bir $y \in G$ vardır (y ye x in G deki tersi denir ve x^{-1} ile gösterilir).

Lemma 5.1.7 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup olsun. Bu durumda

(i) G nin bir ve yalnız bir yaklaşımlı birim elemanı vardır.

(ii) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak biçimde bir ve bir tek $y \in G$ vardır.

(iii) Her $x \in G$ için $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$ dir.

(iv) Her $x, y \in G$ için $\left(x \cdot y\right)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ dir.

Teorem 5.1.8 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $G \subseteq X$ bir toplamsal yaklaşımlı grup olsun. Bu durumda her $x, y, z \in G$ için $x + z = y + z$ veya $z + x = z + y$ ise $x = y$ dir.

Tanım 5.1.9 G bir yaklaşımlı grup ve $H \subseteq G$ olsun. H, G deki işleme göre bir yaklaşımlı grup ise H ye G nin bir alt yaklaşımlı grubu denir.

G nin aşikâr alt yaklaşımlı grubu sadece bir tane olup, o da G nin kendisidir. Ayrıca $\{e_G\}$, G nin bir aşikâr alt yaklaşımlı grubudur gerek ve yeter koşul, $e_G \in G$ dir.

Teorem 5.1.10 G bir yaklaşımlı grup, $H \subseteq G$ ve $\Phi^* H$ bir grupoid olsun. H nin G nin bir alt yaklaşımlı grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olmasıdır.

Teorem 5.1.11 G bir yaklaşımlı grup, H_1 ile H_2, G nin iki alt yaklaşımlı grubu ve $\Phi^* H_1$, $\Phi^* H_2$ birer grupoid olsun. O zaman

$$\left(\Phi^* H_1\right) \cap \left(\Phi^* H_2\right) = \Phi^* \left(H_1 \cap H_2\right)$$

ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yaklaşımlı grubudur.

Sonuç 5.1.12 Tanımsal proksimal relator uzayında, her grup bir yaklaşımlı gruptur.

Tanım 5.1.13 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay olmak üzere, X kümesi üzerinde tanımlanan bir bağıntı yansımalı ve simetrik ise bu bağıntıya zayıf eşdeğerlik bağıntısı denir.

$\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G\subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $x,y\in G$ ve e_G de G nin yaklaşımlı birim elemanı olmak üzere, G nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "ρ_ℓ" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x\,\rho_\ell\, y :\Leftrightarrow x^{-1}\cdot y\in H\cup\{e_G\}.$$

Teorem 5.1.14 G bir yaklaşımlı grup olmak üzere, "ρ_ℓ" bağıntısı G üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x\in G$ için "ρ_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımlı grubunda belirttiği sınıflar:

$$\begin{aligned}
\overline{x}&=\left\{y\in G\mid y\rho_\ell x\right\}\\
&=\left\{y\in G\mid y^{-1}\cdot x\in H\cup\{e_G\}\right\}\\
&=\left\{y\in G\mid y^{-1}\cdot x\in H\ veya\ y^{-1}\cdot x\in\{e_G\}\right\}\\
&=\left\{y\in G\mid x\in y\cdot H\ veya\ y^{-1}\cdot x=e_G\right\}\\
&=\left\{y\in G\mid x\in y\cdot H\ veya\ x=y\right\}\\
&=\left\{x\cdot h^{-1}\mid h^{-1}\in H,\, x\in G,\, x\cdot h^{-1}\in G\right\}\cup\{x\}\quad \left(h^{-1}=h'\right)\\
&=\left\{x\cdot h'\mid h'\in H,\, x\in G,\, x\cdot h'\in G\right\}\cup\{x\}
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 5.1.15 "ρ_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımlı grubunda belirttiği sınıfa bir yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıf denir. Herhangi bir x elemanı için bir yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı $x\cdot H$ ile gösterilir ve

$$x \cdot H = \{x \cdot h \mid h \in H, x \in G, x \cdot h \in G\} \cup \{x\}$$

dir.

$\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H de G nin alt yaklaşımlı grubu olsun. $x, y \in G$ ve e_G, G nin yaklaşımlı birim elemanı olmak üzere, G nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "ρ_r" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \, \rho_r \, y :\Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H \cup \{e_G\}$$

dir.

Teorem 5.1.16 G bir yaklaşımlı grup olmak üzere, "ρ_r" bağıntısı G üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in G$ için "ρ_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımlı grubunda belirttiği sınıflar:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \{y \in G \mid y \rho_r x\} \\
&= \{y \in G \mid y \cdot x^{-1} \in H \cup \{e_G\}\} \\
&= \{y \in G \mid y \cdot x^{-1} \in H \ veya \ y \cdot x^{-1} \in \{e_G\}\} \\
&= \{y \in G \mid y \in H \cdot x \ veya \ y \cdot x^{-1} = e_G\} \\
&= \{y \in G \mid y \in H \cdot x \ veya \ x = y\} \\
&= \{h \cdot x \mid h \in H, x \in G, h \cdot x \in G\} \cup \{x\}
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 5.1.17 "ρ_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımlı grubunda belirttiği sınıfa bir yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıf denir. Herhangi bir x elemanı için bir yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfı $H \cdot x$ ile gösterilir ve

$$H \cdot x = \left\{ h \cdot x \;\middle|\; h \in H,\, x \in G,\, h \cdot x \in G \right\} \cup \{x\}$$

dir.

Genel olarak, bir yaklaşımlı grubun ikili işlemi her zaman değişme özelliğini sağlamayabilir. Bu nedenle "ρ_ℓ" ve "ρ_r" zayıf eşdeğerlik bağıntıları farklı olabilir. Sonuç olarak, yaklaşımlı sol zayıf ve yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfları da farklı olabilir.

$x \in G$ olmak üzere, bundan sonraki kısımlarda G nin H ile belirlenen tüm yaklaşımlı sol (sağ) zayıf kalan sınıfları için $x \cdot H \left(H \cdot x \right)$ gösterimi yerine $xH \left(Hx \right)$ kullanılmıştır.

Teorem 5.1.18 Yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfları ile yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıflarının sayıları aynıdır.

Tanım 5.1.19 G bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olmak üzere, yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların sayısına (veya yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfların sayısına) H nin G deki indeksi denir ve $\left[G : H \right]$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.20 G bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $x, y \in G$ için xH ile yH, sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği iki yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x \cdot y \in \Phi^* G$ elemanı tarafından belirlenen, iki yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfının çarpımı

$$\left(x \cdot y \right) H = \left\{ \left(x \cdot y \right) \cdot h \;\middle|\; h \in H,\, x \cdot y \in \Phi^* G,\, \left(x \cdot y \right) \cdot h \in G \right\} \cup \{ x \cdot y \}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$xH \circ yH = (x \cdot y)H$$

ile gösterilir.

$G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup, H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. O zaman

$$G/_{\rho_\ell} = \{xH \mid x \in G\},$$

G nin H tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Bu durumda G nin yerine Φ^*G dikkate alınırsa

$$(\Phi^*G)/_{\rho_\ell} = \{xH \mid x \in \Phi^*G\}$$

dir. O zaman

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H, x \in \Phi^*G, x \cdot h \in G\} \cup \{x\}$$

dir.

Tanım 5.1.21 $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $G/_{\rho_\ell}$, G nin H tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi, $A \in P(X)$ ve $\xi_\Phi(A)$ bir tanımsal proksimal ailesi olsun. Bu durumda

$$\Phi^*\left(G/_{\rho_\ell}\right) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \underset{\Phi}{\cap} G/_{\rho_\ell} \neq \emptyset} \xi_\Phi(A)$$

kümesine, $G/_{\rho_\ell}$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 5.1.22 G bir yaklaşımlı grup, H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve $G/_{\rho_\ell}$, G nin H tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda $(\Phi^*G)/_{\rho_\ell} \subseteq \Phi^*\left(G/_{\rho_\ell}\right)$ ise $G/_{\rho_\ell}$, her $x, y \in G$ için $xH \circ yH = (x \cdot y)H$ şeklinde tanımlanan "$\circ$" ikili işlemine göre bir yaklaşımlı gruptur.

Tanım 5.1.23 G bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $G/_{\rho_\ell}$ yaklaşımlı grubuna G nin H tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı grubu denir ve $G/_{\rho} H$ ile gösterilir.

Sonuç 5.1.24 G bir toplamsal yaklaşımlı grup, H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve $G/_{\rho_\ell}$, G nin H tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda $\left(\Phi^* G\right)/_{\rho_\ell} \subseteq \Phi^*\left(G/_{\rho_\ell}\right)$ ise o zaman $G/_{\rho_\ell}$, her $x, y \in G$ için

$$xH \oplus yH = \left(x+y\right)H$$

şeklinde tanımlanan "$\oplus$" ikili işlemine göre bir toplamsal yaklaşımlı gruptur.

Tanım 5.1.25 G bir yaklaşımlı grup ve N de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda her $x \in G$ için $xN = Nx$ ise N ye G nin bir normal alt yaklaşımlı grubu denir.

Teorem 5.1.26 G bir yaklaşımlı grup ve N de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. O zaman

(i) N nin G yaklaşımlı grubunun bir normal alt yaklaşımlı grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in G$ için $xNx^{-1} = N$ olmasıdır.

(ii) N nin G yaklaşımlı grubunun bir normal alt yaklaşımlı grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in G$ ve her $n \in N$ için $x \cdot n \cdot x^{-1} \in N$ olmasıdır.

$\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ ve $\left(Y, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ iki tanımsal proksimal relator uzay ve "$\cdot$", "$\circ$" sırasıyla X ve Y üzerindeki ikili işlemler olsun.

Tanım 5.1.27 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ iki yaklaşımlı grup ve $\Phi^* G$, $\Phi^* H$ birer grupoid olmak üzere, χ $\Phi^* G$ den $\Phi^* H$ üzerine bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in G$ için

$\chi(x \cdot y) = \chi(x) \circ \chi(y)$ ise χ ye bir yaklaşımlı grup epimorfizması denir. Ayrıca G, H ye yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $G \simeq H$ ile gösterilir.

Bu bölümde χ , Φ^*G den Φ^*H ye bir yaklaşımlı epimorfizma olarak dikkate alınmıştır.

Teorem 5.1.28 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde iki yaklaşımlı grup olmak üzere, $(G,\cdot)$ değişmeli ise $(H,\cdot)$ de değişmelidir.

Teorem 5.1.29 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde iki yaklaşımlı grup, Φ^*G ile Φ^*H birer grupoid ve $\Phi^*\left(\chi(G)\right) = \Phi^*H$ olsun. Bu durumda $\chi(G)$ de bir yaklaşımlı gruptur.

Teorem 5.1.30 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde iki yaklaşımlı grup olsun. e_G ve e_H sırasıyla G ve H nin yaklaşımlı birim elemanı olsun. Bu durumda her $x \in \Phi^*G$ için $\chi(e_G) = e_H$ ve $\chi\left(x^{-1}\right) = \chi(x)^{-1}$ dir.

Tanım 5.1.31 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde iki yaklaşımlı grup olsun. $Ker\chi = \{x \in G \mid \chi(x) = e_H\}$ kümesine χ nin çekirdeği denir. Burada e_H H nin yaklaşımlı birim elemanıdır.

Teorem 5.1.32 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde iki yaklaşımlı grup olsun. O zaman $\Phi^*Ker\chi$ bir grupoid ise $Ker\chi$, G nin bir normal alt yaklaşımlı grubudur.

Teorem 5.1.33 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde iki yaklaşımlı grup olsun. G' ile N sırasıyla G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve bir normal alt yaklaşımlı grubu ve Φ^*G' bir grupoid olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

(i) $\chi\left(\Phi^*G'\right) = \Phi^*\chi(G')$ ise $\chi(G')$, H nin bir alt yaklaşımlı grubudur.

(ii) $\chi(G')=H$ ve $\chi(\Phi^* N)=\Phi^*\chi(N)$ ise $\chi(N)$, H nin bir normal alt yaklaşımlı grubudur.

Teorem 5.1.34 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde iki yaklaşımlı grup ve H' ile N' de sırasıyla H nin bir alt yaklaşımlı grubu ve bir normal alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda G', H' nün ters görüntüsü ve $\Phi^* G'$ bir grupoid olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\chi(\Phi^* G')=\Phi^* H'$ ise G', G nin bir alt yaklaşımlı grubudur.

(ii) $\chi(G)=H$ ve N , N' nün ters görüntüsü olmak üzere, $\chi(\Phi^* N)=\Phi^* N'$ ise N , G nin bir normal alt yaklaşımlı grubudur.

Teorem 5.1.35 $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H , G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda her $x \in G$ için

$$\Pi(x)=xH$$

ile tanımlı

$$\Pi : \Phi^* G \to \Phi^*\left(G/_{\rho} H\right)$$

dönüşümü bir yaklaşımlı grup homomorfizmasıdır.

Tanım 5.1.36 Teorem 5.1.35 te verilen Π ye bir yaklaşımlı kanonik (doğal) grup homomorfizması denir.

Tanım 5.1.37 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ iki yaklaşımlı grup ve G', G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$\chi : \Phi^* G \to \Phi^* H$$

bir dönüşüm ve

$$\chi_{G'} = \chi\big|_{G'} : G' \to \Phi^* H$$

bir kısıtlanmış dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in G'$ için

$$\chi(x \cdot y) = \chi_{G'}(x \cdot y) = \chi_{G'}(x) \cdot \chi_{G'}(y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$$

ise χ dönüşümüne bir kısıtlanmış yaklaşımlı grup homomorfizması denir. Ayrıca, G, H ye kısıtlanmış yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $G \simeq_r H$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.38 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ iki yaklaşımlı grup ve χ, $\Phi^* G$ den $\Phi^* H$ ye bir yaklaşımlı grup homomorfizması olsun. $\left(\Phi^* Ker\chi, \cdot\right)$ bir grupoid ve $\left(\Phi^* G\right)\big/_{\rho_\ell}$, $\Phi^* G$ nin $Ker\chi$ tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$\left(\Phi^* G\right)\big/_{\rho_\ell} \subseteq \Phi^*\left(G\big/_\rho Ker\chi\right)$$

ve

$$\Phi^* \chi(G) = \chi\left(\Phi^* G\right)$$

ise

$$G /_\rho Ker\chi \simeq_r \chi(G)$$

dir.

5.2 Yaklaşımlı Halkalar

2019 yılında İnan [12], yaklaşımlı halka kavramını tanımlamış ve bu yaklaşımlı cebirsel yapı ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu bölümde İnan'ın tanımladığı yaklaşımlı halka cebirsel yapısı ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 5.2.1 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı, "$+$" ve "$\cdot$" X üzerinde iki ikili işlem olsun. $R\subseteq X$ olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanırsa R ye bir yaklaşımlı halka denir:

(AR_1) R, "$+$" ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli yaklaşımlı gruptur.

(AR_2) R, "$\cdot$" ikili işlemi ile birlikte bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

(AR_3) Her $x,y,z\in R$ için

$$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$$

ve

$$(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$$

özellikleri Φ^*R de sağlanır. Ayrıca,

(AR_4) Her $x,y\in R$ için $x\cdot y=y\cdot x$ ise R ye değişmeli yaklaşımlı halka denir.

(AR_5) Her $x\in R$ için $1_R\cdot x=x\cdot 1_R=x$ olacak biçimde bir $1_R\in\Phi^*R$ elemanı varsa R ye birimli yaklaşımlı halka denir.

R deki elemanların sonlu tane toplamı veya çarpımı her zaman Φ^*R ye ait olmayabilir, yani her $x\in R$ ve bazı $n\in\mathbb{Z}^+$ için $nx\in\Phi^*R$ veya $x^n\in\Phi^*R$ olduğu kesin olarak söylenemez. $\left(\Phi^*R,+\right)$ ve $\left(\Phi^*R,\cdot\right)$ birer grupoid ise o zaman her $x\in R$ ve her $n\in\mathbb{Z}$ için $nx\in\Phi^*R$ veya her $x\in R$ ve her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $x^n\in\Phi^*R$ olur. R bir birimli yaklaşımlı halka ve $x\in R$ olmak üzere, $y\cdot x=1_R$ ($x\cdot z=1_R$) olacak şekilde bir $y \in \Phi^* R$ $\left(z \in \Phi^* R\right)$ varsa x elemanına sol (sağ) tersinirdir denir. y (z) elemanına x in sol (sağ) tersi denir. $x \in R$ hem sol ve hem de sağ tersinir ise x elemanına yaklaşımlı tersinirdir denir.

Tanım 5.2.2 R bir yaklaşımlı halka olmak üzere, $\left(R \setminus \{0_R\}, \cdot\right)$ bir değişmeli yaklaşımlı grup ise R ye bir yaklaşımlı cisim denir.

Lemma 5.2.3 Tanımsal proksimal relator uzayında, her halka bir yaklaşımlı halkadır.

Lemma 5.2.4 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve $0_R \in R$ olsun. Bu durumda her $x, y \in R$ için $0_R \cdot x$, $x \cdot 0_R \in R$ olmak üzere,

(i) $x \cdot 0_R = 0_R \cdot x = 0_R$,

(ii) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

(iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

dir.

Tanım 5.2.5 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S, R deki "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile bir yaklaşımlı halka ise S ye R nin bir alt yaklaşımlı halkası denir.

Teorem 5.2.6 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ yaklaşımlı halka ve $\left(\Phi^* S, +\right)$, $\left(\Phi^* S, \cdot\right)$ iki grupoid olsun. Bu durumda S nin R yaklaşımlı halkasının bir alt yaklaşımlı halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in S$ için $-x \in S$ olmasıdır.

Teorem 5.2.7 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S_1 ile S_2, R nin iki alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda $\Phi^* S_1$ ile $\Phi^* S_2$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere,

$$\left(\Phi^{*}S_{1}\right)\cap\left(\Phi^{*}S_{2}\right)=\Phi^{*}\left(S_{1}\cap S_{2}\right)$$

ise $S_1 \cap S_2$, R nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

Sonuç 5.2.8 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve $\{S_i \mid i\in\Delta\}$ ailesi de R nin alt yaklaşımlı halkalarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda $\Phi^* S_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i\in\Delta}\left(\Phi^{*}S_{i}\right)=\Phi^{*}\left(\bigcap_{i\in\Delta}S_{i}\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta} S_i$, R nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

Tanım 5.2.9 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve I, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x,y\in I$ ve her $r\in R$ için $x+y\in\Phi^* I$, $-x\in I$ ve $r\cdot x\in\Phi^* I$ $\left(x\cdot r\in\Phi^* I\right)$ ise I ya R nin bir sol (sağ) yaklaşımlı ideali denir. Ayrıca, I hem sol hem de sağ yaklaşımlı ideali ise I ya R nin bir yaklaşımlı ideali denir.

Uyarı 5.2.10 R yaklaşımlı halkasının sadece bir tane aşikâr yaklaşımlı ideali vardır. Bu aşikâr yaklaşımlı ideali de R nin kendisidir. Ayrıca, $\{0_R\}$ nin R nin aşikâr yaklaşımlı ideali olması için gerek ve yeter koşul, $0_R \in R$ olmasıdır.

Lemma 5.2.11 Her yaklaşımlı ideal, R nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

Teorem 5.2.12 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, R bir yaklaşımlı halka, I_1 ile I_2, R nin iki yaklaşımlı ideali olsun. Bu durumda $\Phi^* I_1$ ile $\Phi^* I_2$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere,

$$\left(\Phi^{*}I_{1}\right)\cap\left(\Phi^{*}I_{2}\right)=\Phi^{*}\left(I_{1}\cap I_{2}\right)$$

ise $I_1\cap I_2$, R nin bir yaklaşımlı idealidir.

Sonuç 5.2.13 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, R bir yaklaşımlı halka ve $\{I_i \mid i \in \Delta\}$ ailesi de R nin yaklaşımlı ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda $\Phi^* I_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i\in\Delta}\left(\Phi^* I_i\right) = \Phi^*\left(\bigcap_{i\in\Delta} I_i\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta} I_i$, R nin bir yaklaşımlı idealidir.

Tanım 5.2.14 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay olmak üzere, X kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı yansımalı ve simetrik ise o zaman bu bağıntıya zayıf eşdeğerlik bağıntısı denir.

$R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S de R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda $x, y \in R$ olmak üzere, R nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "ρ_ℓ" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \,\rho_\ell\, y :\Leftrightarrow (-x) + y \in S \cup \{0_R\}.$$

Teorem 5.2.15 R bir yaklaşımlı halka ve S de R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. O zaman "ρ_ℓ" bağıntısı R de bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in R$ için "ρ_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yaklaşımlı halkasında belirttiği sınıflar:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_\ell &= \{y \in R \mid x \,\rho_\ell\, y\} \\
&= \{y \in R \mid (-x) + y \in S \cup \{0_R\}\} \\
&= \{y \in R \mid (-x) + y \in S \ veya\ (-x) + y \in \{0_R\}\} \\
&= \{y \in R \mid y \in x + S \ veya\ (-x) + y = 0_R\}
\end{aligned}$$

$$=\{y\in R \mid y\in x+S \ veya \ y=x\}$$

$$=\{x+s \mid s\in S, x\in R, x+s\in R\}\cup\{x\}$$

dir.

Tanım 5.2.16 R bir yaklaşımlı halka olmak üzere, "ρ_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıfa bir yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıf denir.

Herhangi bir $x\in R$ için bir yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı $x+S$ ile gösterilir ve

$$x+S=\{x+s \mid s\in S, x\in R, x+s\in R\}\cup\{x\}$$

kümesidir.

$R\subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S de R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda $x,y\in R$ olmak üzere, R nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "ρ_r" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x\ \rho_r\ y :\Leftrightarrow x+(-y)\in S\cup\{0_R\}.$$

Teorem 5.2.17 R bir yaklaşımlı halka ve S de R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. O zaman "ρ_r" bağıntısı R de bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x\in R$ için "ρ_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yaklaşımlı halkasında belirttiği sınıflar:

$$\tilde{x}_r=\{y\in R \mid y\ \rho_r\ x\}$$

$$=\{y\in R \mid y+(-x)\in S\cup\{0_R\}\}$$

$$=\{y\in R \mid y+(-x)\in S \ veya \ y+(-x)\in\{0_R\}\}$$

$$=\{y\in R \mid y\in S+x \ veya \ y+(-x)=0_R\}$$

$$= \{ y \in R \mid y \in S + x \text{ veya } x = y \}$$

$$= \{ s + x \mid s \in S, x \in R, s + x \in R \} \cup \{ x \}$$

dir.

Tanım 5.2.18 R bir yaklaşımlı halka olmak üzere, "ρ_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıfa bir yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıf denir.

Herhangi bir $x \in R$ için bir yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfı $S + x$ ile gösterilir ve

$$S + x = \{ s + x \mid s \in S, x \in R, s + x \in R \} \cup \{ x \}$$

kümesidir.

Burada $\tilde{x}_\ell = x + S$ ve $\tilde{x}_r = S + x$ dir. $(R, +)$ bir değişmeli yaklaşımlı grup olduğundan $\tilde{x}_\ell = \tilde{x}_r$ olur. Bu durumda $\tilde{x}_\ell$ ve $\tilde{x}_r$ notasyonları yerine sadece $\tilde{x}$ kullanılır. O zaman R bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olmak üzere,

$$R/_\rho = \{ x + S \mid x \in R \}$$

kümesi, R nin S ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada R yerine $\Phi^* R$ alınırsa,

$$(\Phi^* R)/_\rho = \{ x + S \mid x \in \Phi^* R \}$$

elde edilir. Bu durumda

$$x + S = \{ x + s \mid s \in S, x \in \Phi^* R, x + s \in R \} \cup \{ x \}$$

olur.

Tanım 5.2.19 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R\subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. $x,y\in R$ olmak üzere, $x+S$ ile $y+S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği iki yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x+y\in\Phi^*R$ elemanının belirlediği yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı

$$(x+y)+S=\left\{(x+y)+s \mid s\in S, x+y\in\Phi^*R,\ (x+y)+s\in R\right\}\cup\{x+y\}$$

ile tanımlıdır. Buna yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(x+S)\oplus(y+S)=(x+y)+S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 5.2.20 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R\subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. $x,y\in R$ olmak üzere, $x+S$ ile $y+S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği iki yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x\cdot y\in\Phi^*R$ elemanının belirlediği yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı

$$(x\cdot y)+S=\left\{(x\cdot y)+s \mid s\in S, x\cdot y\in\Phi^*R,(x\cdot y)+s\in R\right\}\cup\{x\cdot y\}$$

ile tanımlıdır. Buna yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının çarpımı denir ve

$$(x+S)\odot(y+S)=(x\cdot y)+S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 5.2.21 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R\subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. $R/_\rho$, R nin S ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$ da $A\in P(X)$ kümesinin tanımsal yaklaşımlı ailesi olmak üzere,

$$\Phi^*\left(R/_\rho\right)=\bigcup_{\xi_\Phi(A)\cap_\Phi R/_\rho\neq\varnothing}\xi_\Phi(A)$$

kümesine $R/_{\rho}$ nun üst yaklaşımı denir.

Teorem 5.2.22 $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda $R/_{\rho}$, R nin S ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$\left(\Phi^{*}R\right)/_{\rho} \subseteq \Phi^{*}\left(R/_{\rho}\right)$$

ise $R/_{\rho}$, her $x, y \in R$ için

$$\left(x+S\right) \oplus \left(y+S\right) = \left(x+y\right)+S$$

ve

$$\left(x+S\right) \odot \left(y+S\right) = \left(x \cdot y\right)+S$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yaklaşımlı halkadır.

Tanım 5.2.23 $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. $R/_{\rho}$ yaklaşımlı halkasına R nin S ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı halkası denir ve $R/_{\rho}S$ ile gösterilir.

Tanım 5.2.24 $\left(X, \delta_{\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1, R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka olsun. $\Phi^{*}R_1$ ile $\Phi^{*}R_2$ de "+" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere, her $x, y \in R_1$ için

$$\psi\left(x+y\right) = \psi\left(x\right)+\psi\left(y\right)$$

ve

$$\psi\left(x \cdot y\right) = \psi\left(x\right) \cdot \psi\left(y\right)$$

koşullarını sağlayan $\psi : \Phi^{*}R_1 \rightarrow \Phi^{*}R_2$ dönüşümüne bir yaklaşımlı halka homomorfizması denir.

ψ, $\Phi^{*}R_1$ den $\Phi^{*}R_2$ ye bir yaklaşımlı halka homomorfizması olmak üzere

(1) ψ birebir ise ψ ye bir yaklaşımlı halka monomorfizması,

(2) ψ örten ise ψ ye bir yaklaşımlı halka epimorfizması,

(3) ψ birebir ve örten ise ψ ye bir yaklaşımlı halka izomorfizması

denir.

Ayrıca, ψ bir yaklaşımlı epimorfizma ise R_1, R_2 ye yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $R_1 \simeq R_2$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.25 $R_1, R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve $\psi : \Phi^* R_1 \to \Phi^* R_2$ bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(i) $0_{R_2} \in \Phi^* R_2$, R_2 nin yaklaşımlı sıfır elemanı olmak üzere, $\psi\left(0_{R_1}\right) = 0_{R_2}$ dir.

(ii) Her $x \in R_1$ için $\psi(-x) = -\psi(x)$ dir.

Teorem 5.2.26 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, R_1, $R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve ψ, $\Phi^* R_1$ den $\Phi^* R_2$ ye bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun. S, R_1 in bir alt yaklaşımlı halkası ve $\Phi^* S$ bir grupoid olmak üzere, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i) $\psi\left(\Phi^* S\right) = \Phi^* \psi(S)$ ise $\psi(S) = \left\{\psi(x) \mid x \in S\right\}$, R_2 nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

(ii) S değişmeli ve $\psi\left(\Phi^* S\right) = \Phi^* \psi(S)$ ise $\psi(S)$, R_2 nin bir değişmeli alt yaklaşımlı halkasıdır.

Tanım 5.2.27 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1, R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve ψ, $\Phi^* R_1$ den $\Phi^* R_2$ ye bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun.

$$Ker\psi = \left\{ x \in R_1 \mid \psi\left(x\right) = 0_{R_2} \right\}$$

kümesine ψ nin çekirdeği denir.

Teorem 5.2.28 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, R_1, $R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve ψ , $\Phi^* R_1$ den $\Phi^* R_2$ ye bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun. $\Phi^* Ker\psi$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte bir grupoid olsun. O zaman $Ker\psi$, R_1 in bir yaklaşımlı idealidir.

Teorem 5.2.29 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S , R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. $\Phi^* R$ ile $\Phi^*\left(R/_\rho S\right)$ de "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olsun. Bu durumda her $x \in R$ için

$$\Pi\left(x\right) = x + S$$

ile tanımlı

$$\Pi : \Phi^* R \to \Phi^*\left(R/_\rho S\right)$$

dönüşümü bir yaklaşımlı halka homomorfizmasıdır.

Tanım 5.2.30 Teorem 5.2.29 da verilen Π ye bir yaklaşımlı kanonik (doğal) halka homomorfizması denir.

Tanım 5.2.31 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1, R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve S , R_1 in boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$\chi : \Phi^* R_1 \to \Phi^* R_2$$

bir dönüşüm ve

$$\chi_S = \chi\big|_S : S \to \Phi^* R_2$$

bir kısıtlanmış dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in S$ için

$$\chi(x+y)=\chi_S(x+y)=\chi_S(x)+\chi_S(y)=\chi(x)+\chi(y)$$

ve

$$\chi(x\cdot y)=\chi_S(x\cdot y)=\chi_S(x)\cdot\chi_S(y)=\chi(x)\cdot\chi(y)$$

ise χ dönüşümüne bir kısıtlanmış yaklaşımlı halka homomorfizması denir. Ayrıca, χ örten ise R_1, R_2 ye kısıtlanmış yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $R_1 \simeq_r R_2$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.32 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1, R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve χ , $\Phi^* R_1$ den $\Phi^* R_2$ ye bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun. $\left(\Phi^* Ker\chi,+\right)$ ile $\left(\Phi^* Ker\chi,\cdot\right)$ birer grupoid ve $\left(\Phi^* R_1\right)/_\rho$, $\Phi^* R_1$ in $Ker\chi$ tarafından belirlenen yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$\left(\Phi^* R_1\right)/_\rho \subseteq \Phi^*\left(R_1/_\rho\, Ker\chi\right)$$

ve

$$\Phi^*\chi(R_1)=\chi\left(\Phi^* R_1\right)$$

ise

$$R_1/_\rho\, Ker\chi \simeq_r \chi(R_1)$$

dir.

6. YAKIN HALKALAR

6.1 Temel Bilgiler

Halka kavramının genelleştirilmiş bir hali olan yakın-halka kavramının halkadan farkı, halkada birinci işlemin değişmeli olması gerekirken yakın-halkada birinci işlemin değişmeli olmasının gerekmemesidir. Ayrıca, halkada ikinci işlemin birinci işlem üzerine soldan ve sağdan dağılmalı olması gerekirken yakın-halkada ikinci işlemin birinci işlem üzerine sadece bir taraftan dağılma özelliğine sahip olmasıdır.

Yakın-halkalar ile ilgili ilk çalışma, 1905 yılında Dickson [13,14] tarafından aksiyomatik olarak verilmiştir. Dickson tarafından bir taraflı dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığı gösterilmiş ve bu tür cisimler yakın-cisim olarak adlandırılmıştır. Yakın-halka kavramı ilk defa 1936 yılında Zassenhaus [15] tarafından kullanılmış ve bütün sonlu yakın-cisimler belirlenmiştir. Halkalar teorisindeki bazı temel teoremler yakın-halkalar için de ifade edilebilir.

Yakın-halka teorisi ile ilgili çalışan matematikçilerin göz önüne aldığı en temel kaynak, Pilz'in [21] Near-Rings adlı kitabı olup, bu bölümde yer alan bütün bilgiler bu kitaptan alınmıştır.

Tanım 6.1.1 Boş olmayan bir N kümesi üzerinde $"+"$ ve $"\cdot"$ ikili işlemleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanırsa N ye bir yakın-halka denir:

(i) $(N,+)$ bir gruptur (değişmeli olması gerekmez).

(ii) $(N,\cdot)$ bir yarı-gruptur.

(iii) Her $n_1, n_2, n_3 \in N$ için $(n_1 + n_2)\cdot n_3 = n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3$ tür.

Not 6.1.2 Yukarıdaki tanım dikkate alındığında, (iii) den dolayı yakın-halka kavramı yerine sağ yakın-halka kavramı kullanılabilir. Ayrıca, (iii) nin yerine her $n_1, n_2, n_3 \in N$ için $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$ özelliği yazılırsa, bu durumda sol yakın-halka kavramı tanımlanır. Bu bölüm boyunca sağ yakın-halka kavramı kullanılmıştır.

Not 6.1.3 Genellikle $(N,+)$ grubunun etkisiz elemanı, $(N,+,\cdot)$ yakın-halkasının sıfırı olarak tanımlanır. Ayrıca, bütün yakın-halkaların kümesi $\mathcal{N}$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.4

1) $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M(\Gamma)$ da Γ dan Γ ya olan tüm dönüşümlerin kümesi olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır.

2) $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M_0(\Gamma)=\{f\in M(\Gamma) \mid f(0_\Gamma)=0_\Gamma\}$ olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_0(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır.

3) $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M_c(\Gamma)=\{f\in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit}\}$ olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_c(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır.

4) $(\Gamma,+)$ bir grup ve

$$M_c^0(\Gamma)=\left\{ f_\delta\in M(\Gamma) \;\middle|\; f_\delta(\gamma)=\begin{cases} 0_\Gamma & , \quad \gamma=0_\Gamma \\ \delta & , \quad \gamma\neq 0_\Gamma \end{cases}, \delta\in\Gamma \right\}$$

olsun. O halde dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_c^0(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır.

Lemma 6.1.5 N yakın-halkası için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $n\in N$ için $0_N\cdot n=0_N$ dir.

(2) Her $n,n'\in N$ için $(-n)\cdot n'=-(n\cdot n')$ dür.

Not 6.1.6 N bir yakın-halka olmak üzere, her $n, n' \in N$ için $n \cdot 0_N = 0_N$ ve $n \cdot (-n') = -(n \cdot n')$ eşitlikleri sağlanmayabilir. Örneğin, Örnek 6.1.4 te verilen $(M(\Gamma), +, \circ)$ yakın-halkası dikkate alınırsa, her $f \in M(\Gamma)$ için $f \circ \theta = \theta$ olabilmesi için $f(0_\Gamma) = 0_\Gamma$ koşulu sağlanmalıdır ve ayrıca, her $f_1, f_2 \in M(\Gamma)$ için $f_1 \circ (-f_2) = -(f_1 \circ f_2)$ olabilmesi için f_1 tek fonksiyon olmalıdır.

Tanım 6.1.7 N bir yakın-halka olsun. O zaman $N_0 = \{n \in N \mid n \cdot 0_N = 0_N\}$ kümesine N nin sıfır-simetrik kısmı ve $N_c = \{n \in N \mid n \cdot 0_N = n\}$ kümesine de N nin sabit kısmı denir.

Not 6.1.8 N_0 ve N_c, N üzerinde tanımlanan "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerine göre birer yakın-halkadır. Ayrıca, $N = N_0$ ise N ye sıfır-simetrik yakın-halka ve $N = N_c$ ise N ye sabit yakın-halka denir. Ayrıca, bütün sıfır-simetrik yakın-halkaların kümesi $\mathcal{N}_0$ ve bütün sabit yakın-halkaların kümesi de $\mathcal{N}_c$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.9 $(M(\Gamma))_0 = M_0(\Gamma)$ ve $(M(\Gamma))_c = M_c(\Gamma)$ dir. Gerçekten,

$$(M(\Gamma))_0 = \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ \theta = \theta\} = \{f \in M(\Gamma) \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma\} = M_0(\Gamma)$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c = \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ \theta = f\} &= \{f \in M(\Gamma) \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = f(0_\Gamma)\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \ sabit\} \\ &= M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır.

Not 6.1.10 Halka teorisinde kullandığımız etkisiz (birim) eleman, tersinir eleman, kısaltılabilir eleman, sıfır-bölen, idempotent eleman ve nilpotent eleman kavramları, yakın-halka teorisinde benzer şekilde tanımlanabilir.

Her $n, n' \in N$ için $d \cdot (n + n') = d \cdot n + d \cdot n'$ ise d elemanına distribütif (dağılmalı) eleman denir. Ayrıca, bütün birimli yakın-halkaların kümesi $\mathcal{N}_1$ ve bütün distribütif elemanların kümesi de N_d ile gösterilir.

Tanım 6.1.11 N bir yakın-halka olsun. O zaman

(i) $(N,+)$ abel ise N ye abel yakın-halka denir.

(ii) $(N,\cdot)$ değişmeli ise N ye değişmeli yakın-halka denir.

(iii) $N = N_d$ ise N ye distribütif yakın-halka denir.

(iv) N , 0_N nin sıfırdan farklı bölenlerine sahip değilse N ye tam yakın-halka denir.

(v) $(N - \{0_N\},\cdot)$ bir grup ise N ye yakın-cisim denir.

Örnek 6.1.12

1) $(\Gamma,+)$ bir abel grup ise $(M(\Gamma),+)$ bir abel gruptur. Böylece $M(\Gamma)$ bir abel yakın-halkadır.

2) $(\Gamma,+)$ bir grup olmak üzere, Γ da her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $\alpha * \beta = \alpha$ şeklinde tanımlanan "$*$" işlemi dikkate alınırsa $(\Gamma,+,*)$ bir tam yakın-halkadır.

3) $\mathbb{Z}_2$ *mod* 2 kalan sınıflarının kümesi olmak üzere, $(\mathbb{Z}_2,+)$ bir gruptur. Ayrıca, $\mathbb{Z}_2$ de her $\overline{a} \in \mathbb{Z}_2$ için $\overline{0} \cdot \overline{a} = \overline{0}$ ve $\overline{1} \cdot \overline{a} = \overline{1}$ şeklinde tanımlanan "$\cdot$" işlemi dikkate alınırsa $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ bir yakın-cisimdir.

6.2 Alt Yapılar

Tanım 6.2.1 N bir yakın-halka ve $(M,+)$, $(N,+)$ nın bir alt grubu olsun. Bu durumda $M \cdot M \subseteq M$ ise M ye N nin bir alt yakın-halkası denir.

Örnek 6.2.2 N_0 ve N_c, N yakın-halkasının birer alt yakın-halkasıdır. Gerçekten,

- $(N_0,+)$, $(N,+)$ grubunun bir alt grubudur: Her $x,y\in N_0$ için

$$(x-y)\cdot 0_N = x\cdot 0_N - y\cdot 0_N = 0_N - 0_N = 0_N$$

olduğundan $x-y\in N_0$ dır.

- $N_0\cdot N_0 \subseteq N_0$ dır: Her $x,y\in N_0$ için

$$(x\cdot y)\cdot 0_N = x\cdot(y\cdot 0_N) = x\cdot 0_N = 0_N$$

olup, $x\cdot y\in N_0$ dır.

Böylece N_0, N nin bir alt yakın-halkasıdır. Benzer şekilde N_c nin de N nin bir alt yakın-halkası olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 6.2.3 N bir yakın-halka ve I, $(N,+)$ nın bir normal alt grubu olsun. Bu durumda

(i) $I\cdot N\subseteq I$,

(ii) Her $n,n'\in N$ ve her $a\in I$ için $n\cdot(n'+a)-n\cdot n'\in I$

koşulu sağlanıyorsa I ya N nin ideali denir ve $I\lhd N$ ile gösterilir.

Ayrıca, sadece (i) koşulunu sağlayan I ya N nin sağ ideali denir $(I\lhd_r N)$ ve sadece (ii) koşulunu sağlayan I ya N nin sol ideali denir $(I\lhd_\ell N)$.

Örnek 6.2.4 N bir yakın-halka olsun. Bu durumda $\{0_N\}$ ile N, N nin idealleri olup, bu ideallere triviyal ideal denir.

Not 6.2.5 N bir yakın-halka ve I da N nin bir ideali olsun. O zaman $n,n'\in N$ olmak üzere,

$$n \equiv n' \left(\operatorname{mod} I\right) \quad :\Leftrightarrow \quad n - n' \in I$$

şeklinde tanımlanan "$\equiv$" bağıntısı bir kongrüans bağıntısıdır. Bu durumda "$\equiv$" bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan, bu bağıntıya göre denklik (kalan) sınıfları $n \in N$ için $\overline{n} = n + I = \left\{ n' \mid n \equiv n' \left(\operatorname{mod} I\right) \right\}$ şeklindedir. Bütün denklik (kalan) sınıflarının kümesi $N/I = \left\{ \overline{n} \mid n \in N \right\}$ ile gösterilir.

Teorem 6.2.6 N bir yakın-halka ve I da N nin bir ideali olsun. O zaman N/I üzerinde, N deki "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerine paralel olmak üzere,

$$\left(m+I\right)+\left(n+I\right)=\left(m+n\right)+I \text{ ve } \left(m+I\right)\cdot\left(n+I\right)=\left(m\cdot n\right)+I$$

şeklinde tanımlanan "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerine göre N/I bir yakın-halkadır.

Tanım 6.2.7 Yukarıda belirtilen $\left(N/I,+,\cdot\right)$ yakın-halkasına, N yakın-halkasının I idealine göre bölüm yakın-halkası denir.

7. YAKLAŞIMLI GAMMA HALKALAR

7.1 Gamma Halkalar

Tanım 7.1.1 [17] M ve Γ toplamsal değişmeli gruplar olmak üzere,

$$\_ : M \times \Gamma \times M \to M$$
$$(a, \alpha, b) \mapsto a\alpha b$$

işlemi dikkate alınsın. Her $a, b, c \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

(Γ_1) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$,

(Γ_2) $a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$,

(Γ_3) $a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b$,

(Γ_4) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

şartları sağlanırsa M ye (*Barnes anlamında*) bir Γ-halka denir.

Tanım 7.1.2 [17] M bir Γ-halka ve U , M nin toplamsal bir alt grubu olsun. Bu durumda

$$M\Gamma U \subseteq U \ (U\Gamma M \subseteq U)$$

ise U ya M nin bir sol (sağ) ideali denir.

U, M nin hem sol hem de sağ ideali ise U ya kısaca M nin bir ideali denir.

Tanım 7.1.3 [17] M ve N birer Γ-halka olsun. Bu durumda her $a, b \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için

$$\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b) \text{ ve } \theta(a\alpha b) = \theta(a)\alpha\theta(b)$$

koşullarını sağlayan $\theta : M \to N$ dönüşümüne bir Γ-homomorfizması denir.

Tanım 7.1.4 [22] Aşağıdaki koşulları sağlayan $(M,+,\Gamma)$ üçlüsüne bir Γ-yakın halka denir:

(1) $(M,+)$ bir gruptur (değişmeli olması gerekmez).

(2) Γ, her $\gamma \in \Gamma$ için $(M,+,\gamma)$ bir (sağ) yakın-halka olacak biçimde M üzerinde tanımlı ikili işlemlerin boştan farklı bir kümesidir.

(3) Her $a,b,c \in M$ ve her $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$ dir.

7.2 Yaklaşımlı Gamma Halkalar

2019 yılında Uçkun [20], yaklaşımlı Γ-halka kavramını tanımlamış ve bu yaklaşımlı cebirsel yapı ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu bölümde Uçkun'un tanımladığı yaklaşımlı Γ-halka cebirsel yapısı ve bazı temel özellikler verilmiştir.

Tanım 7.2.1 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $M,\Gamma \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$M = \{a,b,c,...\},\ \Gamma = \{\alpha,\beta,\gamma,...\} \subseteq X$$

iki toplamsal değişmeli yaklaşımlı gruplar olmak üzere, aşağıdaki koşullar sağlanırsa M ye bir yaklaşımlı Γ-halka denir:

$(A\Gamma_1)$ $a\alpha b \in \Phi^* M$,

$(A\Gamma_2)$ $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c,\ a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b,\ a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

özellikleri $\Phi^* M$ de sağlanır,

$(A\Gamma_3)$ $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$ özelliği $\Phi^* M$ de sağlanır.

Ayrıca, her $a,b \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b = b\alpha a$ ise M ye değişmeli yaklaşımlı Γ- halka denir.

Tanım 7.2.2 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $M, \Gamma \subseteq X$ olsun. M bir yaklaşımlı Γ-halka, $K \subseteq M$ olmak üzere, K bir toplamsal değişmeli yaklaşımlı grup ve $\left(A\Gamma_1\right)-\left(A\Gamma_3\right)$ koşulları sağlanırsa, K ya M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası denir.

Teorem 7.2.3 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $M, \Gamma \subseteq X$ olsun. M bir yaklaşımlı Γ-halka, $K \subseteq M$ ve $\Phi^* K$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ-grupoid olmak üzere, K nın M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $k \in K$ için $-k \in K$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. Bu durumda Tanım 7.2.2 den K bir yaklaşımlı Γ-halkadır. Böylece her $k \in K$ için $-k \in K$ dır.

$(\Leftarrow)$ Hipotezden $K \subseteq M$ ve $\left(\Phi^* K, +\right)$ bir grupoid olduğundan Teorem 5.1.10 gereğince $(K, +)$ bir değişmeli yaklaşımlı gruptur. $K \subseteq M$ ve $\Phi^* K$ bir Γ-grupoid olduğundan birleşme özelliği $\Phi^* K$ da sağlanır. Her $a, b, c \in K$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$a+b,\ a\alpha c,\ b\alpha c,\ a\alpha c + b\alpha c \in \Phi^* K$$

dır. M bir yaklaşımlı Γ-halka olduğundan

$$(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$$

özelliği $\Phi^* K$ da sağlanır. Benzer olarak,

$$a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b \text{ ve } a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$$

özellikleri de $\Phi^* K$ da sağlanır.

Böylece K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkasıdır.

Lemma 7.2.4 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $0_M \in M$, M nin toplamsal yaklaşımlı etkisiz elemanı olsun. Bu durumda her $a,b \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için

$$0_M \alpha b, a0_\Gamma b, a\alpha 0_M \in M$$

ise

$$0_M \alpha b = a0_\Gamma b = a\alpha 0_M = 0_M$$

dir.

İspat. Tanım 7.2.1 $(A\Gamma_2)$ den,

$$0_M \alpha b = (0_M + 0_M)\alpha b$$

$$= (0_M \alpha b) + (0_M \alpha b)$$

dir. $0_M \in M$ nin tekliğinden $0_M \alpha b = 0_M$ olur. Benzer şekilde, her $a, b \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $a0_\Gamma b = a\alpha 0_M = 0_M$ dir.

Ayrıca,

$$a\alpha(-b) = (-a)\alpha b = -(a\alpha b) \text{ ve } (-a)\alpha(-b) = a\alpha b$$

eşitlikleri genel olarak sağlanmaz. Fakat her $a,b \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b$, a $\alpha(-b), (-a)\alpha b \in M$ ise

$$a\alpha(-b) = (-a)\alpha b = -(a\alpha b) \text{ ve } (-a)\alpha(-b) = a\alpha b$$

dir.

Tanım 7.2.5 M bir yaklaşımlı Γ-halka ve $U \subseteq M$ olsun. Bu durumda U, M nin bir toplamsal alt yaklaşımlı grubu ve

$$M\Gamma U = \{a\alpha u \mid a \in M, \alpha \in \Gamma, u \in U\} \subseteq \Phi^* U \quad (U\Gamma M \subseteq \Phi^* U)$$

ise U ya M nin bir sol (sağ) yaklaşımlı Γ-ideali denir. Ayrıca, U hem sol hem de sağ yaklaşımlı Γ-ideali ise o zaman U ya M nin bir yaklaşımlı Γ-ideali denir.

Uyarı 7.2.6 (X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzayında M nin her yaklaşımlı Γ-ideali, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkasıdır.

U ve V, M nin iki sol yaklaşımlı Γ-ideali olsun. O zaman

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

kümesine U ile V nin toplamı denir.

Lemma 7.2.7 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $K, L \subseteq M$ olsun. Bu durumda Φ bir tanımsal homomorfizma ise

(i) Her $k \in K$ ve her $l \in L$ için $cl_\Phi(k) + cl_\Phi(l) = cl_\Phi(k + l)$,

(ii) $Q(K + L) = Q(K) + Q(L)$

dir.

İspat. $\boldsymbol{(i)}$ Φ bir tanımsal homomorfizma olduğundan,

$$cl_\Phi(k) + cl_\Phi(l) = \{a \in M \mid \Phi(k) = \Phi(a)\} + \{b \in M \mid \Phi(l) = \Phi(b)\}$$

$$= \{a + b \mid \Phi(k) = \Phi(a), \Phi(l) = \Phi(b)\}$$

$$= \{a + b \mid \Phi(k) + \Phi(l) = \Phi(a) + \Phi(b)\}$$

$$= \{a + b \mid \Phi(k + l) = \Phi(a + b)\}$$

$$= \{c \mid \Phi(k + l) = \Phi(c), c = a + b\}$$

$$= cl_{\Phi}(k+l)$$

olur.

$(\boldsymbol{ii})$ Φ bir tanımsal homomorfizma olduğundan,

$$Q(K+L) = \{\Phi(k+l) \mid k \in K, l \in L\}$$

$$= \{\Phi(k) + \Phi(l) \mid k \in K, l \in L\}$$

$$= \{\Phi(k) \mid k \in K\} + \{\Phi(l) \mid l \in L\}$$

$$= Q(K) + Q(L)$$

dir.

Lemma 7.2.8 (X, δ_{Φ}) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $K, L \subseteq M$ olsun. O halde Φ bir tanımsal monomorfizma ise o zaman

$$(\Phi^* K) + (\Phi^* L) = \Phi^*(K+L)$$

dir.

Teorem 7.2.9 (X, δ_{Φ}) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $K, L \subseteq M$ olsun. Bu durumda $\Phi : X \to \mathbb{R}$ bir tanımsal homomorfizma ise

(i) $(\Phi_* K) + (\Phi_* L) \subseteq \Phi_*(K+L)$,

(ii) $(\Phi^* K) + (\Phi^* L) \subseteq \Phi^*(K+L)$

dir.

İspat. $(\boldsymbol{i})$ $x \in (\Phi_* K) + (\Phi_* L)$ olsun. Bu durumda $x = k + l$ olacak biçimde $k \in \Phi_* K$ ve $l \in \Phi_* L$ vardır. O zaman $cl_{\Phi}(k) \subseteq K$ ve $cl_{\Phi}(l) \subseteq L$ dir. Lemma 7.2.7 (i) den

$$cl_{\Phi}(k)+cl_{\Phi}(l)=cl_{\Phi}(k+l)\subseteq K+L$$

dir. Böylece $x=k+l\in\Phi_{*}(K+L)$ dir. Bu nedenle

$$(\Phi_{*}K)+(\Phi_{*}L)\subseteq\Phi_{*}(K+L)$$

olur.

$(\boldsymbol{ii})$ $x\in(\Phi^{*}K)+(\Phi^{*}L)$ olsun. Bu durumda $x=k+l$ olacak biçimde $k\in\Phi^{*}K$ ve $l\in\Phi^{*}L$ vardır. Böylece $\Phi(k)\in Q(K)$ ve $\Phi(l)\in Q(L)$ dir. Dolayısıyla

$$\Phi(k)+\Phi(l)\in Q(K)+Q(L)$$

olup, Lemma 7.2.7 (ii) den $\Phi(k+l)\in Q(K+L)$ dir. Sonuç olarak,

$$(\Phi^{*}K)+(\Phi^{*}L)\subseteq\Phi^{*}(K+L)$$

dir.

Teorem 7.2.10 (X,δ_{Φ}) bir tanımsal proksimiti uzay, $M\subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $U,V\subseteq M$ olsun. U ile V, M nin iki sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-ideali ve Φ bir tanımsal homomorfizma ise $U+V$ de M nin bir sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-idealidir.

İspat. U ile V , M nin iki sol yaklaşımlı Γ-ideali olduğundan, $M\Gamma U\subseteq\Phi^{*}U$ ve $M\Gamma V\subseteq\Phi^{*}V$ dir. O zaman Teorem 7.2.9 (ii) den

$$M\Gamma(U+V)=\{a\alpha(u+v)\mid a\in M,\alpha\in\Gamma,u\in U,v\in V\}$$

$$=\{a\alpha u+a\alpha v\mid a\in M,\alpha\in\Gamma,u\in U,v\in V\}$$

$$=\{a\alpha u\mid a\in M,\alpha\in\Gamma,u\in U\}+\{a\alpha v\mid a\in M,\alpha\in\Gamma,v\in V\}$$

$$= M\Gamma U + M\Gamma V$$

$$\subseteq \left(\Phi^{*}U\right) + \left(\Phi^{*}V\right)$$

$$\subseteq \Phi^{*}\left(U + V\right)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $M\Gamma\left(U+V\right) \subseteq \Phi^{*}\left(U+V\right)$, yani $U+V$ M nin bir sol yaklaşımlı Γ-idealidir. Diğer durumlar da benzer şekilde ispatlanabilir.

Sonuç 7.2.11 $\left(X, \delta_{\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $U_i \subseteq M$ $\left(1 \le i \le n, n \ge 2\right)$ olsun. Bu durumda U_i ler M nin birer sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-idealleri, Φ bir tanımsal homomorfizma, $\Phi^{*}U_i$ ler birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid ise $\sum_{1 \le i \le n} U_i$ de M nin bir sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-idealidir.

Teorem 7.2.12 $\left(X, \delta_{\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $U, V \subseteq M$ olsun. Bu durumda U ile V, M nin iki sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-ideali ve

$$\left(\Phi^{*}U\right) \cap \left(\Phi^{*}V\right) = \Phi^{*}\left(U \cap V\right)$$

ise $U \cap V$ de M nin bir sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-idealidir.

İspat. U ile V, M nin iki sol yaklaşımlı Γ-ideali olduğundan, $M\Gamma U \subseteq \Phi^{*}U$ ve $M\Gamma V \subseteq \Phi^{*}V$ dir. O zaman

$$M\Gamma\left(U \cap V\right) = \left\{a\alpha x \mid a \in M, \alpha \in \Gamma, x \in U \cap V\right\}$$

$$= \left\{a\alpha x \mid a \in M, \alpha \in \Gamma, x \in U \ ve \ x \in V\right\}$$

$$= \{a\alpha x \mid a \in M, \alpha \in \Gamma, x \in U\} \cap \{a\alpha x \mid a \in M, \alpha \in \Gamma, x \in V\}$$

$$= M\Gamma U \cap M\Gamma V$$

$$\subseteq (\Phi^* U) \cap (\Phi^* V)$$

$$= \Phi^*(U \cap V)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $M\Gamma(U \cap V) \subseteq \Phi^*(U \cap V)$, yani $U \cap V$ M nin bir sol yaklaşımlı Γ-idealidir. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç 7.2.13 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve $U_i \subseteq M$ $(1 \le i \le n, n \ge 2)$ olsun. Bu durumda U_i ler M nin birer sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-ideali ve

$$\bigcap_{1 \le i \le n} \Phi^* U_i = \Phi^*\left(\bigcap_{1 \le i \le n} U_i\right)$$

ise $\bigcap_{1 \le i \le n} U_i$ M nin bir sol (sağ, iki taraflı) yaklaşımlı Γ-idealidir.

7.3 Yaklaşımlı Zayıf Kalan Sınıflarının Yaklaşımlı Gamma Halkası

M bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. Bu durumda $a, b \in M$ olmak üzere, M nin elemanları arasında aşağıdaki gibi "ω_ℓ" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a\, \omega_\ell\, b :\Leftrightarrow (-a) + b \in K \cup \{0_M\}.$$

Teorem 7.3.1 M bir yaklaşımlı Γ-halka olmak üzere, "ω_ℓ" bağıntısı M üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. M bir yaklaşımlı Γ -halka olduğundan, her $a \in M$ için $-a \in M$ dir. $(-a)+a=0_M$ olduğundan $a\,\omega_\ell\, a$ olur. Her $a,b \in M$ için $a\,\omega_\ell\, b$ ise $(-a)+b \in K \cup \{0_M\}$, yani $(-a)+b \in K$ veya $(-a)+b \in \{0_M\}$ olur. $(-a)+b \in K$ ise K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olduğundan

$$-\left(\left(-a\right)+b\right)=\left(-b\right)+a \in K$$

dır. Böylece $b\,\omega_\ell\, a$ bulunur. Ayrıca, $(-a)+b \in \{0_M\}$ ise $(-a)+b=0_M$ dir. Buradan

$$\left(-b\right)+a=-\left(\left(-a\right)+b\right)=-0_M=0_M$$

ve böylece $b\,\omega_\ell\, a$ olur. Sonuç olarak, "ω_ℓ" bağıntısı M üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $a \in M$ için "ω_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının M yaklaşımlı Γ-halkada belirttiği sınıflar:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_\ell &= \left\{b \in M \;\middle|\; a\,\omega_\ell\, b\right\}\\
&= \left\{b \in M \;\middle|\; \left(-a\right)+b \in K \cup \{0_M\}\right\}\\
&= \left\{b \in M \;\middle|\; \left(-a\right)+b \in K \; veya \; \left(-a\right)+b \in \{0_M\}\right\}\\
&= \left\{b \in M \;\middle|\; b \in a+K \; veya \; \left(-a\right)+b = 0_M\right\}\\
&= \left\{b \in M \;\middle|\; b \in a+K \; veya \; b=a\right\}\\
&= \left\{a+k \;\middle|\; k \in K, a \in M, a+k \in M\right\} \cup \{a\}
\end{aligned}$$

dır.

Tanım 7.3.2 M bir yaklaşımlı Γ -halka olmak üzere, "ω_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının M de belirttiği sınıfa bir yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıf denir.

Herhangi bir $a \in M$ için bir yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı $a+K$ ile gösterilir ve

$$a+K=\{a+k \mid k \in K, a \in M, a+k \in M\} \cup \{a\}$$

kümesidir.

M bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. Bu durumda $a, b \in M$ olmak üzere, M nin elemanları arasında aşağıdaki gibi "ω_r" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a\, \omega_r\, b :\Leftrightarrow a+(-b) \in K \cup \{0_M\}.$$

Teorem 7.3.3 M bir yaklaşımlı Γ-halka olmak üzere, "ω_r" bağıntısı M üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. M bir yaklaşımlı Γ-halka olduğundan, her $a \in M$ için $-a \in M$ dir. $a+(-a)=0_M$ olduğundan $a\, \omega_r\, a$ olur. Her $a, b \in M$ için $a\, \omega_r\, b$ ise $a+(-b) \in K \cup \{0_M\}$, yani $a+(-b) \in K$ veya $a+(-b) \in \{0_M\}$ olur. $a+(-b) \in K$ ise K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olduğundan $-(a+(-b))=b+(-a) \in K$ dır. Böylece $b\, \omega_r\, a$ bulunur. Ayrıca, $a+(-b) \in \{0_M\}$ ise $a+(-b)=0_M$ dir. Buradan

$$b+(-a)=-(a+(-b))=-0_M=0_M$$

elde edilir ki, $b\, \omega_r\, a$ olur. Sonuç olarak, "ω_r" bağıntısı M üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $a \in M$ için "ω_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının M yaklaşımlı Γ-halkada belirttiği sınıflar:

$$\tilde{a}_r=\{b \in M \mid b\, \omega_r\, a\}$$

$$=\{b \in M \mid b+(-a) \in K \cup \{0_M\}\}$$

$$=\left\{b\in M \mid b+(-a)\in K \; veya \; b+(-a)\in\{0_M\}\right\}$$

$$=\left\{b\in M \mid b\in K+a \; veya \; b+(-a)=0_M\right\}$$

$$=\left\{b\in M \mid b\in K+a \; veya \; a=b\right\}$$

$$=\left\{k+a \mid k\in K, a\in M, k+a\in M\right\}\cup\{a\}$$

dır.

Tanım 7.3.4 M bir yaklaşımlı Γ-halka olmak üzere, "ω_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının M de belirttiği sınıfa bir yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfı denir. Herhangi bir $a\in M$ için bir yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfı $K+a$ ile gösterilir ve

$$K+a=\left\{k+a \mid k\in K, a\in M, k+a\in M\right\}\cup\{a\}$$

kümesidir.

Burada $\tilde{a}_\ell=a+K$ ve $\tilde{a}_r=K+a$ dır. $(M,+)$ bir değişmeli yaklaşımlı grup olduğundan $\tilde{a}_\ell=\tilde{a}_r$ olur. Bu durumda $\tilde{a}_\ell$ ve $\tilde{a}_r$ notasyonları yerine sadece $\tilde{a}$ kullanılır. O zaman M bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olmak üzere,

$$M/_{\omega}=\left\{a+K \mid a\in M\right\}$$

kümesi, M nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada M yerine Φ^*M alınırsa,

$$\left(\Phi^*M\right)/_{\omega}=\left\{a+K \mid a\in\Phi^*M\right\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$a+K=\left\{a+k \mid k\in K, a\in\Phi^*M, a+k\in M\right\}\cup\{a\}$$

olur.

Tanım 7.3.5 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ -halkası olsun. $a,b\in M$ olmak üzere, $a+K$ ile $b+K$ sırasıyla a ve b elemanlarının temsil ettiği yaklaşımlı zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $a+b\in\Phi^*M$ elemanının temsil ettiği yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı

$$(a+b)+K=\left\{(a+b)+k \;\middle|\; k\in K, a+b\in\Phi^*M, (a+b)+k\in M\right\}\cup\{a+b\}$$

ile tanımlıdır. Buna yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(a+K)\oplus(b+K)=(a+b)+K$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 7.3.6 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. $a,b\in M$ olmak üzere, $a+K$ ile $b+K$ sırasıyla a ve b elemanlarının temsil ettiği yaklaşımlı zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $a\alpha b\in\Phi^*M$ elemanının temsil ettiği yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı

$$(a\alpha b)+K=\left\{(a\alpha b)+k \;\middle|\; k\in K, a\alpha b\in\Phi^*M, (a\alpha b)+k\in M\right\}\cup\{a\alpha b\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(a+K)\alpha(b+K)=(a\alpha b)+K$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 7.3.7 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. $M/_\omega$, M nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$ da $A\in P(X)$ kümesinin tanımsal yaklaşımlı ailesi olmak üzere,

$$\Phi^*\left(M/_{\omega}\right)=\bigcup_{\xi_\Phi(A)\underset{\Phi}{\cap} M/_{\omega}\neq\varnothing}\xi_\Phi\left(A\right)$$

kümesine $M/_{\omega}$ nın üst yaklaşımı denir.

Teorem 7.3.8 $M\subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. Bu durumda $M/_{\omega}$, M nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere, $\left(\Phi^*M\right)/_{\omega}\subseteq\Phi^*\left(M/_{\omega}\right)$ ise $M/_{\omega}$, her $a,b\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için

$$\left(a+K\right)\oplus\left(b+K\right)=\left(a+b\right)+K$$

ve

$$\left(a+K\right)\alpha\left(b+K\right)=\left(a\alpha b\right)+K$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yaklaşımlı Γ-halkadır.

İspat. $\left(\Phi^*M\right)/_{\omega}\subseteq\Phi^*\left(M/_{\omega}\right)$ olsun. M bir yaklaşımlı Γ-halka olduğundan ve Sonuç 5.1.24 ten $\left(M/_{\omega},\oplus\right)$, M nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının değişmeli yaklaşımlı grubudur.

$\left(\boldsymbol{A\Gamma_1}\right)$ M bir yaklaşımlı Γ-halka olduğundan, her $a,b\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için $a\alpha b\in\Phi^*M$ dir. O zaman her $\left(a+K\right),\left(b+K\right)\in\Phi^*M/_{\omega}$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için

$$\left(a+K\right)\alpha\left(b+K\right)=\left(a\alpha b\right)+K\in\left(\Phi^*M\right)/_{\omega}$$

dır. Hipotezden $\left(a+K\right)\alpha\left(b+K\right)\in\Phi^*\left(M/_{\omega}\right)$ olur.

$\left(\boldsymbol{A\Gamma_2}\right)$ M bir yaklaşımlı Γ-halka olduğundan, dağılma özellikleri Φ^*M de sağlanır. Tanım 7.3.5 ve Tanım 7.3.6 dan her $\left(a+K\right),\left(b+K\right),\left(c+K\right)\in M/_{\omega}$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için $\left(\left(a+b\right)\alpha c\right)+K\in\left(\Phi^*M\right)/_{\omega}$ olmak üzere,

$$\left(\left(a+K\right)\oplus\left(b+K\right)\right)\alpha\left(c+K\right)=\left(\left(a+b\right)+K\right)\alpha\left(c+K\right)$$

$$=\left(\left(a+b\right)\alpha c\right)+K$$

$$=\left(\left(a\alpha c\right)+\left(b\alpha c\right)\right)+K$$

$$=\left(\left(a\alpha c\right)+K\right)\oplus\left(\left(b\alpha c\right)+K\right)$$

$$=\left(\left(a+K\right)\alpha\left(c+K\right)\right)\oplus\left(\left(b+K\right)\alpha\left(c+K\right)\right)$$

dır. Böylece hipotezden sağdan dağılma özelliği $\Phi^*\left(M/_{\omega}\right)$ da sağlanır. Benzer şekilde her $\left(a+K\right),\left(b+K\right),\left(c+K\right)\in M/_{\omega}$ ve her $\alpha,\beta\in\Gamma$ için

$$\left(a+K\right)\left(\alpha+\beta\right)\left(b+K\right)=\left(\left(a+K\right)\alpha\left(b+K\right)\right)\oplus\left(\left(a+K\right)\beta\left(b+K\right)\right)$$

ve

$$\left(a+K\right)\alpha\left(\left(b+K\right)\oplus\left(c+K\right)\right)=\left(\left(a+K\right)\alpha\left(b+K\right)\right)\oplus\left(\left(a+K\right)\alpha\left(c+K\right)\right)$$

olduğu gösterilebilir.

$\left(\boldsymbol{A\Gamma_3}\right)$ M bir yaklaşımlı Γ-halka olduğundan, birleşme özelliği Φ^*M de sağlanır. O zaman $\left(a+K\right),\left(b+K\right),\left(\mathrm{c}+K\right)\in M/_{\omega}$ ve her $\alpha,\beta\in\Gamma$ için $\left(\left(a\alpha b\right)\beta c\right)+K$ $\in\left(\Phi^*M\right)\big/_{\omega}$ olmak üzere,

$$\left(\left(a+K\right)\alpha\left(b+K\right)\right)\beta\left(c+K\right)=\left(\left(a\alpha b\right)+K\right)\beta\left(c+K\right)$$

$$=\left(\left(a\alpha b\right)\beta c\right)+K$$

$$=\left(a\alpha\left(b\beta c\right)\right)+K$$

$$=\left(a+K\right)\alpha\left(\left(b\beta c\right)+K\right)$$

$$=(a+K)\alpha((b+K)\beta(c+K))$$

dır. Bu durumda hipotezden $\Phi^*\left(M/_{\omega}\right)$ da birleşme özelliği sağlanır. Sonuç olarak, $M/_{\omega}$ bir yaklaşımlı Γ-halkadır.

Tanım 7.3.9 M bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. $M/_{\omega}$ yaklaşımlı Γ-halkasına M nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı Γ-halkası veya kısaca yaklaşımlı bölüm Γ-halkası denir ve $M/_{\omega}K$ ile gösterilir.

7.4 Yaklaşımlı Gamma Homomorfizmalar

Tanım 7.4.1 (X,δ_{Φ}) bir tanımsal proksimiti uzay, $M,N\subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka ve Φ^*M ile Φ^*N de birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid olmak üzere, her $a,b\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için

$$\Theta(a+b)=\Theta(a)+\Theta(b),$$

$$\Theta(a\alpha b)=\Theta(a)\alpha\Theta(b)$$

koşullarını sağlayan $\Theta:\Phi^*M\to\Phi^*N$ dönüşümüne bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma denir.

Θ, Φ^*M den Φ^*N ye bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma olmak üzere

(1) Θ birebir ise Θ ya bir yaklaşımlı Γ-monomorfizma,

(2) Θ örten ise Θ ya bir yaklaşımlı Γ-epimorfizma,

(3) Θ birebir ve örten ise Θ ya bir yaklaşımlı Γ-izomorfizma denir.

Ayrıca, Θ bir yaklaşımlı Γ-epimorfizma ise M, N ye yaklaşımlı Γ-homomorfiktir denir ve $M\simeq_{\Gamma}N$ ile gösterilir.

Teorem 7.4.2 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M,N\subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka ve Θ, Φ^*M den Φ^*N ye bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlanır:

(i) $0_N\in\Phi^*N$, N nin bir toplamsal yaklaşımlı birim elemanı olmak üzere, $\Theta(0_M)=0_N$ dir.

(ii) Her $a\in M$ için $\Theta(-a)=-\Theta(a)$ dır.

İspat. $(\boldsymbol{i})$ Θ bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma olduğundan

$$\Theta(0_M)+\Theta(0_M)=\Theta(0_M+0_M)=\Theta(0_M)$$

dir. Böylece Lemma 5.1.7 (*i*) dikkate alınırsa $\Theta(0_M)=0_N$ olur.

$(\boldsymbol{ii})$ $a\in M$ olsun. O zaman (*i*) den

$$\Theta(a)+\Theta(-a)=\Theta(a+(-a))=\Theta(0_M)=0_N$$

dir. Benzer olarak, her $a\in M$ için $\Theta(-a)+\Theta(a)=0_N$ dir. Lemma 5.1.7 (*ii*) den $\Theta(a)$ nın toplama işlemine göre tersi tek türlü belirli olduğundan, her $a\in M$ için $\Theta(-a)=-\Theta(a)$ dır.

Teorem 7.4.3 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M,N\subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka, Θ dönüşümü Φ^*M den Φ^*N ye bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma, $K\subseteq M$ ve Φ^*K bir toplamsal grupoid olsun. K, M nin bir (değişmeli) alt yaklaşımlı Γ-halkası ve $\Theta(\Phi^*K)=\Phi^*\Theta(K)$ ise $\Theta(K)=\{\Theta(k)\mid k\in K\}$, N nin bir (değişmeli) alt yaklaşımlı Γ-halkasıdır.

İspat. K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. Bu durumda $0_K\in\Phi^*K$ ve $0_N\in\Phi^*N$ olmak üzere, Teorem 7.4.2 (*i*) den $\Theta(0_K)=0_N$ dir. Böylece

$$0_N = \Theta(0_K) \in \Theta(\Phi^* K) = \Phi^* \Theta(K)$$

olur. O halde $\Theta(K) \neq \varnothing$ dir.

$k \in K$ olmak üzere, $\Theta(k) \in \Theta(K)$ dır. K , M nin bir alt yaklaşımlı Γ -halkası olduğundan, her $k \in K$ için $-k \in K$ dır. Böylece Teorem 7.4.2 (*ii*) den, her $\Theta(k) \in \Theta(K)$ için

$$-\Theta(k) = \Theta(-k) \in \Theta(K)$$

olur.

Sonuç olarak, Teorem 7.2.3 ten $\Theta(K)$, N nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkasıdır.

K bir değişmeli alt yaklaşımlı Γ -halka olsun. Böylece $\Theta(k), \Theta(l) \in \Theta(K)$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için

$$\Theta(k)\alpha\Theta(l) = \Theta(k\alpha l) = \Theta(l\alpha k) = \Theta(l)\alpha\Theta(k)$$

dır. O zaman $\Phi^* K$, N nin bir değişmeli alt yaklaşımlı Γ-halkasıdır.

Tanım 7.4.4 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M, N \subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka ve Θ , $\Phi^* M$ den $\Phi^* N$ ye bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma olsun.

$$Ker\Theta = \{x \in M \mid \Theta(x) = 0_N\}$$

kümesine Θ nın çekirdeği denir.

Teorem 7.4.5 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M, N \subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka, Θ dönüşümü $\Phi^* M$ den $\Phi^* N$ ye bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma, $\Phi^* Ker\Theta$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ -grupoid olsun. Bu durumda $Ker\Theta$, M nin bir yaklaşımlı Γ-idealidir.

İspat. $x \in Ker\Theta$ olsun. O zaman

$$\Theta(-x) = -\Theta(x) = -0_N = 0_N$$

olduğundan $-x \in Ker\Theta$ dır. Böylece Teorem 5.1.10 dan $Ker\Theta$, M nin bir toplamsal alt yaklaşımlı grubudur. $z \in M\Gamma(Ker\Theta)$ olsun. Bu durumda $a \in M$, $\alpha \in \Gamma$, $x \in Ker\Theta$ olmak üzere, $z = a\alpha x$ dir. Lemma 7.2.4 ten

$$\Theta(z) = \Theta(a\alpha x) = \Theta(a)\alpha\Theta(x) = \Theta(a)\alpha 0_N = 0_N$$

dir. O halde $z \in Ker\Theta$ olup, $Ker\Theta \subseteq \Phi^* Ker\Theta$ olduğundan $z \in \Phi^* Ker\Theta$ dır. Bu nedenle $M\Gamma(Ker\Theta) \subseteq \Phi^* Ker\Theta$ ve dolayısıyla $Ker\Theta$, M nin bir sol yaklaşımlı Γ-idealidir. Benzer şekilde $(Ker\Theta)\Gamma M \subseteq \Phi^* Ker\Theta$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $Ker\Theta$, M nin bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir. Sonuç olarak $Ker\Theta$, M nin bir yaklaşımlı Γ-idealidir.

Sonuç 7.4.6 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M, N \subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka, Θ dönüşümü $\Phi^* M$ den $\Phi^* N$ ye bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma, $\Phi^* Ker\Theta$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ-grupoid olsun. O zaman $Ker\Theta$, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkasıdır.

Teorem 7.4.7 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, M bir yaklaşımlı Γ-halka ve K, M nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkası olsun. $\Phi^* M$, $\Phi^*(M/_\omega K)$ birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid olsun. Bu durumda her $a \in M$ için $\Pi(a) = a + K$ ile tanımlı

$$\Pi : \Phi^* M \to \Phi^*(M/_\omega K)$$

dönüşümü bir yaklaşımlı Γ-homomorfizmadır.

İspat. Π nin tanımı ve Tanım 7.3.5 ile Tanım 7.3.6 dikkate alınırsa, her $a, b \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için

$$\Pi(a+b) = (a+b) + K = (a+K) \oplus (b+K) = \Pi(a) \oplus \Pi(b),$$

$$\Pi(a\alpha b)=(a\alpha b)+K=(a+K)\alpha(b+K)=\Pi(a)\alpha\Pi(b)$$

olur. Böylece Tanım 7.4.1 den Π bir yaklaşımlı Γ-homomorfizmadır.

Tanım 7.4.8 Teorem 7.4.7 de verilen Π ye bir yaklaşımlı kanonik (doğal) Γ-homomorfizma denir.

Tanım 7.4.9 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M,N\subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka ve $K\subseteq M$ olsun. Φ^*M, Φ^*K, Φ^*N birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid olsun. Bu durumda

$$\tau:\Phi^*M\to\Phi^*N$$

bir dönüşüm ve

$$\tau_K=\tau|_K:K\to\Phi^*N$$

bir kısıtlanmış dönüşüm olmak üzere, her $a,b\in K$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için

$$\tau(a+b)=\tau_K(a+b)=\tau_K(a)+\tau_K(b)=\tau(a)+\tau(b)$$

ve

$$\tau(a\alpha b)=\tau_K(a\alpha b)=\tau_K(a)\alpha\tau_K(b)=\tau(a)\alpha\tau(b)$$

ise τ dönüşümüne bir kısıtlanmış yaklaşımlı Γ-homomorfizma denir. Ayrıca, τ örten ise M, N ye kısıtlanmış yaklaşımlı Γ-homomorfiktir denir ve $M\simeq_r N$ şeklinde gösterilir.

Teorem 7.4.10 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $M,N\subseteq X$ iki yaklaşımlı Γ-halka ve τ, Φ^*M den Φ^*N ye bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma olsun. $\Phi^*Ker\tau$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ-grupoid ve $\left(\Phi^*M\right)/_\omega$, Φ^*M nin $Ker\tau$ tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda $\left(\Phi^*M\right)/_\omega\subseteq\Phi^*\left(M/_\omega Ker\tau\right)$ ve $\Phi^*\tau(M)=\tau\left(\Phi^*M\right)$ ise $M/_\omega Ker\tau\simeq_r\tau(M)$ dir.

İspat. $\Phi^* Ker\tau$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ-grupoid olduğundan, Sonuç 7.4.6 dikkate alınırsa $Ker\tau$, M nin bir alt yaklaşımlı Γ -halkasıdır. $Ker\tau$ bir alt yaklaşımlı Γ-halka ve

$$\left(\Phi^* M\right)\Big/_{\omega} \subseteq \Phi^*\left(M/_{\omega} Ker\tau\right)$$

olduğundan, Teorem 7.3.8 gereğince $M/_{\omega} Ker\tau$, M nin $Ker\tau$ tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı Γ-halkasıdır. Ayrıca, Teorem 7.4.3 ten $\Phi^*\tau(M) = \tau(\Phi^* M)$ olduğu dikkate alınırsa $\tau(M)$, N nin bir alt yaklaşımlı Γ-halkasıdır.

$$\mu : \Phi^*\left(M/_{\omega} Ker\tau\right) \to \Phi^*\tau(M)$$

$$K \mapsto \mu(K) = \begin{cases} \mu_{M/_{\omega} Ker\tau}(K) & , \quad K \in \left(\Phi^* M\right)\Big/_{\omega} \\ 0_{\tau(M)} & , \quad K \notin \left(\Phi^* M\right)\Big/_{\omega} \end{cases}$$

dönüşümü tanımlanabilir. Burada her $a + Ker\tau \in M/_{\omega} Ker\tau$ için

$$\mu_{M/_{\omega} Ker\tau} = \mu \mid_{M/_{\omega} Ker\tau} : M/_{\omega} Ker\tau \to \Phi^*\tau(M)$$

$$a + Ker\tau \mapsto \mu \mid_{M/_{\omega} Ker\tau}(a + Ker\tau) = \tau(a)$$

dır.

$$a + Ker\tau = \{a + x \mid x \in Ker\tau, \mathrm{a} + x \in M\} \cup \{a\},$$

$$b + Ker\tau = \{b + y \mid y \in Ker\tau, b + y \in M\} \cup \{b\}$$

ve τ bir yaklaşımlı Γ-homomorfizma olduğundan,

$$a + Ker\tau = b + Ker\tau \Rightarrow a \in b + Ker\tau$$

$$\Rightarrow a \in \{b + y \mid y \in Ker\tau, b + y \in M\} \text{ veya } a \in \{b\}$$

$$\Rightarrow a = b + y\left(y \in Ker\tau, b + y \in M\right) \text{ veya } a = b$$

$$\Rightarrow (-b) + a = ((-b) + b) + y(y \in Ker\tau) \text{ veya } \tau(a) = \tau(b)$$

$$\Rightarrow (-b) + a = y(y \in Ker\tau)$$

$$\Rightarrow (-b) + a \in Ker\tau$$

$$\Rightarrow \tau((-b) + a) = 0_N$$

$$\Rightarrow \tau(-b) + \tau(a) = 0_N$$

$$\Rightarrow -\tau(b) + \tau(a) = 0_N$$

$$\Rightarrow \tau(a) = \tau(b)$$

dir. Böylece $\mu_{M/_{\omega}Ker\tau}$ iyi tanımlıdır.

Kabul edelim ki, $K, L \in \Phi^*\left(M/_{\omega} Ker\tau\right)$ için $K = L$ olsun. Bu durumda $\mu_{M/_{\omega}Ker\tau}$ iyi tanımlı olduğundan

$$\mu(K) = \begin{cases} \mu_{M/_{\omega} Ker\tau}(K) & , \quad K \in \left(\Phi^* M\right)/_{\omega} \\ 0_{\tau(M)} & , \quad K \notin \left(\Phi^* M\right)/_{\omega} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu_{M/_{\omega} Ker\tau}(L) & , \quad L \in \left(\Phi^* M\right)/_{\omega} \\ 0_{\tau(M)} & , \quad L \notin \left(\Phi^* M\right)/_{\omega} \end{cases}$$

$$= \mu(L)$$

olur. Böylece μ de iyi tanımlıdır.

Her $a + Ker\tau, b + Ker\tau \in M/_{\omega} Ker\tau \subseteq \Phi^*\left(M/_{\omega} Ker\tau\right)$ için

$$\begin{aligned}
\mu\big((a+Ker\tau)\oplus(b+Ker\tau)\big) &= \mu_{M/_{\omega}Ker\tau}\big((a+Ker\tau)\oplus(b+Ker\tau)\big) \\
&= \mu_{M/_{\omega}Ker\tau}\big((a+b)+Ker\tau\big) \\
&= \tau(a+b) \\
&= \tau(a)+\tau(b) \\
&= \mu_{M/_{\omega}Ker\tau}(a+Ker\tau)+\mu_{M/_{\omega}Ker\tau}(b+Ker\tau) \\
&= \mu(a+Ker\tau)+\mu(b+Ker\tau)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mu\big((a+Ker\tau)\alpha(b+Ker\tau)\big) &= \mu_{M/_{\omega}Ker\tau}\big((a+Ker\tau)\alpha(b+Ker\tau)\big) \\
&= \mu_{M/_{\omega}Ker\tau}\big((a\alpha b)+Ker\tau\big) \\
&= \tau(a\alpha b) \\
&= \tau(a)\alpha\tau(b) \\
&= \mu_{M/_{\omega}Ker\tau}(a+Ker\tau)\alpha\mu_{M/_{\omega}Ker\tau}(b+Ker\tau) \\
&= \mu(a+Ker\tau)\alpha\mu(b+Ker\tau)
\end{aligned}$$

dur.

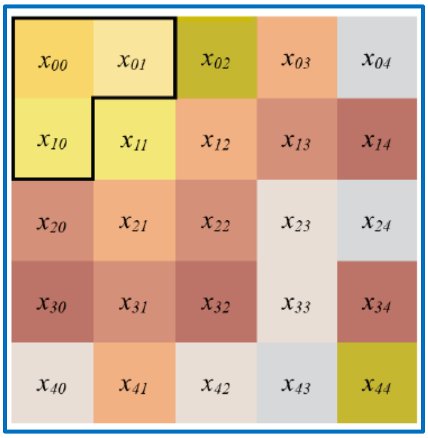
Bu durumda Tanım 7.4.9 dan μ bir kısıtlanmış yaklaşımlı Γ-homomorfizmadır.

Böylece $M/_{\omega} Ker\tau \simeq_r \tau(M)$ dir.

8. BULGULAR ve TARTIŞMA

8.1 Yaklaşımlı Gamma Halka Örneği

Örnek 8.1.1 X , δ_{Φ} tanımsal proksimiti bağıntısı ile birlikte, Şekil 8.1 de olduğu gibi 25 pikselden oluşan bir dijital görüntü olsun.



Şekil 8.1 X dijital görüntü ve $M \subseteq X$

Bir x_{ij} pikseli, X dijital görüntüsünde (i,j) (*satır ve sütun*) konumundaki bir elemandır. φ, her bir pikselin RGB (Red, Green, Blue) kodunu temsil eden bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere, φ nin aldığı değerler Tablo 8.1 deki gibidir:

Tablo 8.1 X deki piksellerin RGB kodları

	x_{00}	x_{01}	x_{02}	x_{03}	x_{04}	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{20}	x_{21}
R	255	255	204	245	215	251	251	245	217	192	217	245
G	218	230	186	177	215	235	235	177	144	117	144	177
B	102	153	14	131	215	115	115	131	121	104	121	131

	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{40}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}
R	217	234	215	192	217	192	234	192	234	245	234	215	204
G	144	221	215	117	144	117	221	117	221	177	221	215	186
B	121	212	215	104	121	104	212	104	212	131	212	215	14

$i+m \equiv p \pmod 2$ ve $j+n \equiv r \pmod 2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_1 : X \times X &\to X \\ \left(x_{ij}, x_{mn}\right) &\mapsto x_{ij} +_1 x_{mn} = x_{pr} \end{aligned}$$

X üzerinde bir ikili işlem (*birinci toplama*) ve $M = \{x_{00}, x_{01}, x_{10}\} \subseteq X$ bir alt dijital görüntü olsun. Bu durumda Tanım 4.1.13 ten M nin $\Phi^* M = \left\{x_{ij} \in X \,\middle|\, x_{ij} \delta_\Phi M\right\}$ tanımsal üst yaklaşımı bulunabilir. O zaman

$$Q(M) = \left\{\varphi\left(x_{ij}\right) \middle| x_{ij} \in M\right\}$$

olmak üzere, $x_{ij} \in X$ için $Q\left(\left\{x_{ij}\right\}\right) \cap Q(M) \neq \varnothing$ dir. Tablo 8.1 den

$$\begin{aligned} Q(M) &= \{\varphi(x_{00}), \varphi(x_{01}), \varphi(x_{10})\} \\ &= \{(255, 218, 102), (255, 230, 153), (251, 235, 115)\} \end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla $\Phi^* M = \{x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11}\}$ dir. Sonuç olarak, Tanım 5.1.6 dan M, $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ de bir toplamsal değişmeli yaklaşımlı gruptur. Ayrıca $i+m \equiv s \pmod 4$ ve $j+n \equiv t \pmod 4$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_2 : X \times X &\to X \\ \left(x_{ij}, x_{mn}\right) &\mapsto x_{ij} +_2 x_{mn} = x_{st} \end{aligned}$$

X üzerinde bir ikili işlem (*ikinci toplama*) ve $\Gamma = \{x_{00}, x_{02}\} \subseteq X$ bir alt dijital görüntü olsun.

Tanım 4.1.13 ten Γ nın $\Phi^* \Gamma = \left\{x_{ij} \in X \,\middle|\, x_{ij} \delta_\Phi \Gamma\right\}$ tanımsal üst yaklaşımı belirlenebilir. O zaman

$$Q(\Gamma) = \left\{\varphi\left(x_{ij}\right) \middle| x_{ij} \in \Gamma\right\}$$

olmak üzere, $x_{ij} \in X$ için $Q(\{x_{ij}\}) \cap Q(\Gamma) \neq \varnothing$ dir. Tablo 8.1 den

$$\begin{aligned} Q(\Gamma) &= \{\varphi(x_{00}), \varphi(x_{02})\} \\ &= \{(255,218,102),(204,186,14)\} \end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla $\Phi^*\Gamma = \{x_{00}, x_{02}, x_{44}\}$ tür. Sonuç olarak, Tanım 5.1.6 dan Γ, $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ de bir toplamsal değişmeli yaklaşımlı gruptur. Ayrıca $u = \min\{i,k,m\}$ ve $v = \min\{j,l,n\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \_ : X \times \Gamma \times X &\to X \\ (x_{ij}, x_{kl}, x_{mn}) &\mapsto x_{ij}\, x_{kl}\, x_{mn} = x_{uv} \end{aligned}$$

X üzerinde bir işlem olsun. Bu durumda her $a,b,c \in M$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için

$(A\Gamma_1)$ $a\gamma b \in \Phi^* M$,

$(A\Gamma_2)$ $(a+b)\gamma c = a\gamma c + b\gamma c,\ a(\beta+\gamma)b = a\beta b + a\gamma b,\ a\gamma(b+c) = a\gamma b + a\gamma c$

özellikleri $\Phi^* M$ de sağlanır,

$(A\Gamma_3)$ $(a\beta b)\gamma c = a\beta(b\gamma c)$ özelliği $\Phi^* M$ de sağlanır.

Sonuç olarak, Tanım 7.2.1 den M bir yaklaşımlı Γ -halkadır.

8.2 Yaklaşımlı Gamma Yakın Halkalar

Bu bölümde yaklaşımlı gamma yakın halka kavramı tanımlanmış ve ilgili örneklere yer verilmiştir. Ayrıca alt yaklaşımlı gamma yakın halka, yaklaşımlı gamma ideal, sağ (sol) zayıf eşdeğerlik bağıntısı, yakın sağ (sol) zayıf kalan sınıfı ve yaklaşımlı bölüm gamma yakın halka kavramları tanımlanarak, bu kavramlar ile alakalı bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Aksi belirtilmedikçe, bu bölüm boyunca $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ veya kısaca X bir tanımsal proksimal relator uzay olarak dikkate alınmıştır.

Tanım 8.2.1 $A,\Gamma \subseteq X$, $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ de birer toplamsal yaklaşımlı grup olsun. $\_ : X\times\Gamma\times X \to X$ işlemi ile birlikte, her $a,b,c\in A$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için aşağıdaki koşullar sağlanırsa A ya tanımsal proksimal relator uzayında bir yaklaşımlı Γ -yakın halka veya kısaca bir yaklaşımlı Γ -yakın halka denir:

$(A\Gamma N_1)$ $a\gamma b\in\Phi^* A$,

$(A\Gamma N_2)$ $(a+b)\gamma c = a\gamma c + b\gamma c$ özelliği $\Phi^* A$ da sağlanır,

$(A\Gamma N_3)$ $(a\beta b)\gamma c = a\beta(b\gamma c)$ özelliği $\Phi^* A$ da sağlanır.

Ayrıca, her $a,b\in A$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için $a\gamma b = b\gamma a$ ise A ya bir değişmeli yaklaşımlı Γ -yakın halka denir.

Örnek 8.2.2 Örnek 8.1.1 deki Şekil 8.1 de olduğu gibi 25 pikselden oluşan X dijital görüntüsü dikkate alınsın. Ayrıca $i+m\equiv p\left(\bmod 2\right)$ ve $j+n\equiv r\left(\bmod 2\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_1 &: X\times X\to X \\ &\left(x_{ij},x_{mn}\right)\mapsto x_{ij}+_1 x_{mn} = x_{pr} \end{aligned}$$

X üzerinde bir ikili işlem (*birinci toplama*) ve $A=\left\{x_{00},x_{01},x_{10}\right\}\subseteq X$ bir alt dijital görüntü olsun.

Tanım 4.1.13 ten $\Phi^* A=\left\{x_{00},x_{01},x_{10},x_{11}\right\}$ elde edilir. Sonuç olarak, Tanım 5.1.6 dan A bir toplamsal yaklaşımlı gruptur. Ayrıca $i+m\equiv s\left(\bmod 4\right)$ ve $j+n\equiv t\left(\bmod 4\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_2 &: X\times X\to X \\ &\left(x_{ij},x_{mn}\right)\mapsto x_{ij}+_2 x_{mn} = x_{st} \end{aligned}$$

X üzerinde bir ikili işlem (*ikinci toplama*) ve $\Gamma=\left\{x_{00},x_{02}\right\}\subseteq X$ bir alt dijital görüntü olsun.

Tanım 4.1.13 ten $\Phi^*\Gamma = \{x_{00}, x_{02}, x_{44}\}$ olur. Sonuç olarak, Tanım 5.1.6 dan Γ bir toplamsal yaklaşımlı gruptur. Ayrıca,

$$\_ : X \times \Gamma \times X \to X$$
$$\left(x_{ij}, x_{kl}, x_{mn}\right) \mapsto x_{ij}\, x_{kl}\, x_{mn} = x_{ij}$$

X üzerinde bir işlem olsun. Bu durumda her $a,b,c \in A$ ve her $\beta,\gamma \in \Gamma$ için

$(A\Gamma N_1)$ $a\gamma b \in \Phi^* A$,

$(A\Gamma N_2)$ $(a+b)\gamma c = a\gamma c + b\gamma c$ özelliği $\Phi^* A$ da sağlanır,

$(A\Gamma N_3)$ $(a\beta b)\gamma c = a\beta(b\gamma c)$ özelliği $\Phi^* A$ da sağlanır.

O halde A bir yaklaşımlı Γ-yakın halkadır.

Fakat $x_{01}x_{02}(x_{01}+x_{01}) \neq x_{01}x_{02}x_{01} + x_{01}x_{02}x_{01}$ olduğundan $a\gamma(b+c) = a\gamma b + a\gamma c$ özelliği $\Phi^* A$ da sağlanmaz. Dolayısıyla A bir sağ yaklaşımlı Γ-yakın halkadır.

Teorem 8.2.3 Proksimal relator uzayındaki her Γ-yakın halka bir yaklaşımlı Γ-yakın halkadır.

İspat. $A \subseteq X$ bir Γ-yakın halka olsun. $A \subseteq \Phi^* A$ olduğundan $(A\Gamma N_1)-(A\Gamma N_3)$ özellikleri $\Phi^* A$ sağlanır. Böylece A bir yaklaşımlı Γ- yakın halkadır.

Teorem 8.2.4 Her yaklaşımlı Γ-halka bir yaklaşımlı Γ- yakın halkadır.

İspat. $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-halka olsun. Yaklaşımlı Γ-halka tanımından, A nın bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olduğu kolayca anlaşılmaktadır.

Tanım 8.2.5 $A,\Gamma \subseteq X$, A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve $K \subseteq A$ olsun. K bir toplamsal yaklaşımlı grup ve $(A\Gamma N_1)-(A\Gamma N_3)$ özellikleri sağlanıyorsa, K ya A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası denir.

Teorem 8.2.6 $A,\Gamma \subseteq X$, A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka, $K \subseteq A$, $\Phi^* K$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ-grupoid olsun. Bu durumda K nın A yaklaşımlı Γ-

yakın halkasının bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $k \in K$ için $-k \in K$ olmasıdır.

İspat. Teorem 5.1.10 dan açıktır.

Lemma 8.2.7 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve $0_A \in A$, A nın toplamsal yaklaşımlı etkisiz elemanı olsun. $0_A \gamma a \in A$ ve $(-a)\gamma b \in A$ ise her $a, b \in A$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

(i) $0_A \gamma a = 0_A$,

(ii) $(-a)\gamma b = -(a\gamma b)$

dir.

İspat. $(\boldsymbol{i})$ Her $a \in A$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için Tanım 8.2.1 $(A\Gamma N_2)$ den,

$$0_A \gamma a = (0_A + 0_A)\gamma a = 0_A \gamma a + 0_A \gamma a$$

dir. O zaman Lemma 5.1.7 (*i*) den yaklaşımlı etkisiz elemanın tekliğinden, $0_A \gamma a = 0_A$ dır.

$(\boldsymbol{ii})$ (*i*) den her $b \in A$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $0_A \gamma b = 0_A$ dır. Bu durumda

$$0_A = 0_A \gamma b = ((-a) + a)\gamma b = (-a)\gamma b + a\gamma b$$

dir. Lemma 5.1.7 (*ii*) den ters elemanın tekliğinden,

$$(-a)\gamma b = -(a\gamma b)$$

olur.

Tanım 8.2.8 A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve $I \subseteq A$ olsun. Bu durumda I, A nın bir toplamsal alt yaklaşımlı grubu olmak üzere, her $a, b \in A$, her $x \in I$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki koşullar sağlanırsa I ya A nın bir yaklaşımlı Γ-ideali denir:

(1) $I\Gamma A = \{x\gamma a \mid x \in I, \gamma \in \Gamma, a \in A\} \subseteq \Phi^* I$,

(2) $a\gamma(b+x)-a\gamma b\in\Phi^{*}I$.

Bu durumda (1) sağlanırsa I ya A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-ideali denir. Ayrıca, (2) sağlanırsa I ya A nın bir sol yaklaşımlı Γ-ideali denir.

Örnek 8.2.9 Örnek 8.2.2 den $A=\{x_{00},x_{01},x_{10}\}$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olmak üzere, $I=A$ olsun. I, A nın bir toplamsal alt yaklaşımlı grubu, $I\subseteq\Phi^{*}I$ ve Örnek 8.2.2 deki $\_:X\times\Gamma\times X\to X$ işleminin tanımına göre $I\Gamma A=I$ olduğundan I, A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir. Ayrıca, her $a,b\in A$, her $x\in I$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için $a\gamma(b+x)-a\gamma b\in\Phi^{*}I$ olduğundan I, A nın bir sol yaklaşımlı Γ-idealidir. Dolayısıyla I, A nın bir yaklaşımlı Γ-idealidir.

Not 8.2.10 $(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ de A nın her yaklaşımlı Γ-ideali, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkasıdır.

Tanım 8.2.11 I ve J, A nın iki sol yaklaşımlı Γ-ideali olsun. Bu durumda

$$I+J=\{x+y \mid x\in I, y\in J\}$$

kümesine I ile J nin toplamı denir.

Aşağıdaki sonuçlar yaklaşımlı Γ-halkada olduğu gibi, yaklaşımlı Γ-yakın halkada da geçerlidir [20].

Lemma 8.2.12 $A\subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve $K,L\subseteq A$ olsun. Bu durumda Φ bir tanımsal homomorfizma ise her $k\in K$ ve her $l\in L$ için

(i) $cl_\Phi(k)+cl_\Phi(l)=cl_\Phi(k+l)$,

(ii) $Q(K+L)=Q(K)+Q(L)$

dir.

Lemma 8.2.13 $A\subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve $K,L\subseteq A$ olsun. Bu durumda Φ bir tanımsal monomorfizma ise

$$\Phi^* K + \Phi^* L = \Phi^*\left(K + L\right)$$

dir.

Teorem 8.2.14 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve $K, L \subseteq A$ olsun. Bu durumda Φ bir tanımsal homomorfizma ise

(i) $\Phi_* K + \Phi_* L \subseteq \Phi_*\left(K + L\right)$,

(ii) $\Phi^* K + \Phi^* L \subseteq \Phi^*\left(K + L\right)$

dir.

Teorem 8.2.15 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka, $I, J \subseteq A$ ve $\Phi^* I$, $\Phi^* J$ birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid olsun. I ile J, A nın iki sağ yaklaşımlı Γ-ideali ve Φ bir tanımsal homomorfizma ise $I + J$ de A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir.

İspat. I ve J, A nın iki sağ yaklaşımlı Γ-ideali olduğundan $I\Gamma A \subseteq \Phi^* I$ ve $J\Gamma A \subseteq \Phi^* J$ dir. O zaman Teorem 8.2.14 (*ii*) den

$$\begin{aligned}
\left(I + J\right)\Gamma A &= \left\{\left(x + y\right)\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, x \in I, y \in J\right\} \\
&= \left\{x\gamma a + y\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, x \in I, y \in J\right\} \\
&= \left\{x\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, x \in I\right\} + \left\{y\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, y \in J\right\} \\
&= I\Gamma A + J\Gamma A \\
&\subseteq \Phi^* I + \Phi^* J \\
&\subseteq \Phi^*\left(I + J\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\left(I + J\right)\Gamma A \subseteq \Phi^*\left(I + J\right)$ dir. Sonuç olarak, $I + J$ de A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir.

Sonuç 8.2.16 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve $I_i \subseteq A$ $\left(1 \le i \le n, n \ge 2\right)$ olsun. Bu durumda I_i ler A nın birer sağ yaklaşımlı Γ-ideali, Φ bir tanımsal homomorfizma ve $\Phi^* I_i$ ler de birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid ise $\sum_{1\le i\le n} I_i$ de A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir.

Teorem 8.2.17 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka, $I, J \subseteq A$ ve $\Phi^* I$, $\Phi^* J$ birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid olsun. Bu durumda I ile J, A nın iki sağ yaklaşımlı Γ-ideali ve

$$\Phi^* I \cap \Phi^* J = \Phi^*\left(I \cap J\right)$$

ise $I \cap J$ de A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir.

İspat. I ve J, A nın iki sağ yaklaşımlı Γ-ideali olduğundan $I\Gamma A \subseteq \Phi^* I$ ve $J\Gamma A \subseteq \Phi^* J$ dir. O zaman

$$\begin{aligned}
\left(I \cap J\right)\Gamma A &= \left\{x\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, x \in I \cap J\right\} \\
&= \left\{x\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, x \in I, x \in J\right\} \\
&= \left\{x\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, x \in I\right\} \cap \left\{x\gamma a \mid a \in A, \gamma \in \Gamma, x \in J\right\} \\
&= I\Gamma A \cap J\Gamma A \\
&\subseteq \Phi^* I \cap \Phi^* J \\
&= \Phi^*\left(I \cap J\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\left(I \cap J\right)\Gamma A \subseteq \Phi^*\left(I \cap J\right)$, yani $I \cap J$ de A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir.

Sonuç 8.2.18 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka, $I_i \subseteq A$ $\left(1 \le i \le n, n \ge 2\right)$ ve $\Phi^* I_i$ ler birer toplamsal grupoid ve Γ-grupoid olsun. Bu durumda I_i ler A nın birer sağ yaklaşımlı Γ-ideali ve

$$\bigcap_{1\le i\le n} \Phi^* I_i = \Phi^*\left(\bigcap_{1\le i\le n} I_i\right)$$

ise $\bigcap_{1\le i\le n} I_i$, A nın bir sağ yaklaşımlı Γ-idealidir.

A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olsun. Bu durumda $a,b \in A$ olmak üzere, K nın elemanları arasında aşağıdaki gibi "c_r" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a\, c_r\, b :\Leftrightarrow a+(-b) \in K \cup \{0_A\}.$$

Teorem 8.2.19 A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olsun. "c_r" bağıntısı, A üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $(A,+)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan, her $a \in A$ için $-a \in A$ dır. $a+(-a)=0_A \in K \cup \{0_A\}$ olduğundan $a\, c_r\, a$ olur. Her $a,b \in A$ için $a\, c_r\, b$ ise $a+(-b) \in K \cup \{0_A\}$, yani $a+(-b) \in K$ veya $a+(-b) \in \{0_A\}$ olur. $a+(-b) \in K$ ise $(K,+)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan

$$-(a+(-b)) = b+(-a) \in K$$

dır. Böylece $b\, c_r\, a$ bulunur. Ayrıca, $a+(-b) \in \{0_A\}$ ise $a+(-b)=0_A$ dır. Buradan

$$b+(-a) = -(a+(-b)) = -0_A = 0_A$$

elde edilir ki, $b\, c_r\, a$ olur. Sonuç olarak, "c_r" bağıntısı A üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $a \in A$ için "c_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının A yaklaşımlı Γ-yakın halkasında belirttiği sınıflar:

$$\tilde{a}_r = \{k+a \mid k \in K, a \in A, k+a \in A\} \cup \{a\}$$

dır.

Tanım 8.2.20 A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olmak üzere, "c_r" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının A da belirttiği sınıfa bir yakın sağ zayıf kalan sınıfı denir.

A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olsun. Bu durumda $a,b \in A$ olmak üzere, K nın elemanları arasında aşağıdaki gibi "c_ℓ"bağıntısı tanımlanabilir:

$$a\,c_\ell\,b :\Leftrightarrow (-a)+b \in K \cup \{0_A\}.$$

Teorem 8.2.21 A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olsun. "c_ℓ" bağıntısı, A üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $(A,+)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan, her $a \in A$ için $-a \in A$ dır. $(-a)+a = 0_A \in K \cup \{0_A\}$ olduğundan $a c_\ell a$ olur. Her $a,b \in A$ için $a c_\ell b$ ise $(-a)+b \in K \cup \{0_A\}$, yani $(-a)+b \in K$ veya $(-a)+b \in \{0_A\}$ olur. $(-a)+b \in K$ ise $(K,+)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan

$$-((-a)+b) = (-b)+a \in K$$

dır. Böylece $b c_\ell a$ bulunur. Ayrıca, $(-a)+b \in \{0_A\}$ ise $(-a)+b = 0_A$ dır. Buradan

$$(-b)+a = -((-a)+b) = -0_A = 0_A$$

elde edilir ki, $b c_\ell a$ olur. Sonuç olarak, "c_ℓ" bağıntısı A üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $a \in A$ için "c_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının A yaklaşımlı Γ-yakın halkasında belirttiği sınıflar:

$$\tilde{a}_\ell = \{a+k \mid k \in K, a \in A, a+k \in A\} \cup \{a\}$$

dır.

Tanım 8.2.22 A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olmak üzere, "c_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının A da belirttiği sınıfa bir yakın sol zayıf kalan sınıfı denir.

$\tilde{a}_r = K + a$ ve $\tilde{a}_\ell = a + K$ ile gösterilir. $(A,+)$ her zaman değişmeli yaklaşımlı grup olmayabilir. $(A,+)$ bir değişmeli yaklaşımlı grup ise $\tilde{a}_r = \tilde{a}_\ell$ olur. Aksi takdirde $\tilde{a}_r \neq \tilde{a}_\ell$ dir. O zaman A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olmak üzere,

$$A/_{c_\ell} = \{a + K \mid a \in A\}$$

kümesi A nın K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada A yerine $\Phi^* A$ alınırsa,

$$(\Phi^* A)/_{c_\ell} = \{a + K \mid a \in \Phi^* A\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$a + K = \{a + k \mid k \in K, a \in \Phi^* A, a + k \in A\} \cup \{a\}$$

olur.

Tanım 8.2.23 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olsun. $a, b \in A$ olmak üzere, $a + K$ ile $b + K$ sırasıyla a ve b elemanlarının temsil ettiği yakın sol zayıf kalan sınıfları olsun. Bu durumda $a + b \in \Phi^* A$ elemanının temsil ettiği yakın sol zayıf kalan sınıfı

$$(a+b) + K = \{(a+b) + k \mid k \in K, a + b \in \Phi^* A, (a+b) + k \in A\} \cup \{a + b\}$$

ile tanımlıdır. Buna yakın sol zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(a + K) \oplus (b + K) = (a + b) + K$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 8.2.24 $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olsun. $a, b \in A$ olmak üzere, $a + K$ ile $b + K$ sırasıyla a ve b elemanlarının temsil ettiği yakın sol zayıf kalan sınıfları olsun. Bu durumda $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere, $a\gamma b \in \Phi^* A$ elemanının temsil ettiği yakın sol zayıf kalan sınıfı

$$(a\gamma b)+K=\left\{(a\gamma b)+k \;\middle|\; k\in K,\, a\gamma b\in \Phi^{*}A,\, (a\gamma b)+k\in A\right\}\cup\{a\gamma b\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(a+K)\gamma(b+K)=a\gamma b+K$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 8.2.25 $A\subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olsun. $A/_{c_\ell}$, A nın K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(S)$ de $S\in P(X)$ kümesinin tanımsal yaklaşımlı ailesi olmak üzere,

$$\Phi^{*}\left(A/_{c_\ell}\right)=\bigcup_{\xi_\Phi(S)\underset{\Phi}{\cap} A/_{c_\ell}\neq\varnothing}\xi_\Phi(S)$$

kümesine $A/_{c_\ell}$ nin tanımsal üst yaklaşımı denir.

Teorem 8.2.26 $A\subseteq X$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olsun. Bu durumda $A/_{c_\ell}$, A nın K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere, $\left(\Phi^{*}A\right)/_{c_\ell}\subseteq\Phi^{*}\left(A/_{c_\ell}\right)$ ise her $a,b\in A$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için $A/_{c_\ell}$,

$$(a+K)\oplus(b+K)=(a+b)+K$$

ve

$$(a+K)\gamma(b+K)=a\gamma b+K$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yaklaşımlı Γ-yakın halkadır.

İspat. $\left(\Phi^{*}A\right)/_{c_\ell}\subseteq\Phi^{*}\left(A/_{c_\ell}\right)$ olsun. A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olduğundan ve Teorem 5.1.22 den $\left(A/_{c_\ell},\oplus\right)$, A nın K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının bir yaklaşımlı grubudur.

$\left(\boldsymbol{A\Gamma N_1}\right)$ A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olduğundan, her $a,b \in A$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b \in \Phi^* A$ dır. O zaman her $a+K, b+K \in A/_{c_\ell}$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$(a+K)\gamma(b+K) = a\gamma b + K \in \left(\Phi^* A\right)/_{c_\ell}$$

olur. Hipotezden $(a+K)\gamma(b+K) \in \Phi^*\left(A/_{c_\ell}\right)$ olur.

$\left(\boldsymbol{A\Gamma N_2}\right)$ A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olduğundan, her $a,b,c \in A$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için sağdan dağılma özelliği $\Phi^* A$ da sağlanır. Tanım 8.2.23 ve Tanım 8.2.24 ten, her $a+K, b+K, c+K \in A/_{c_\ell}$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $(a+b)\gamma c + K \in \left(\Phi^* A\right)/_{c_\ell}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left((a+K)\oplus(b+K)\right)\gamma(c+K) &= \left((a+b)+K\right)\gamma(c+K)\\ &= (a+b)\gamma c + K\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left((a+K)\gamma(c+K)\right)\oplus\left((b+K)\gamma(c+K)\right) &= \left((a\gamma c)+K\right)\oplus\left((b\gamma c)+K\right)\\ &= \left((a\gamma c)+(b\gamma c)\right)+K\\ &= (a+b)\gamma c + K\end{aligned}$$

dır. Hipotezden $(a+b)\gamma c + K \in \Phi^*\left(A/_{c_\ell}\right)$ olup, bu durumda

$$\left((a+K)\oplus(b+K)\right)\gamma(c+K) = \left((a+K)\gamma(c+K)\right)\oplus\left((b+K)\gamma(c+K)\right)$$

özelliği $\Phi^*\left(A/_{c_\ell}\right)$ de sağlanır.

$\left(\boldsymbol{A\Gamma N_3}\right)$ A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka olduğundan, her $a,b,c \in A$ ve her $\beta,\gamma \in \Gamma$ için birleşme özelliği $\Phi^* A$ da sağlanır. O zaman

$$\begin{aligned}\left((a+K)\beta(b+K)\right)\gamma(c+K) &= (a\beta b + K)\gamma(c+K)\\ &= (a\beta b)\gamma c + K\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(a+K)\beta\left((b+K)\gamma(c+K)\right) &= (a+K)\beta(b\gamma c+K)\\ &= a\beta(b\gamma c)+K\\ &= (a\beta b)\gamma c+K\end{aligned}$$

olur. Burada $(a\beta b)\gamma c+K \in \left(\Phi^* A\right)\big/_{c_\ell}$ dir. Böylece

$$\left((a+K)\beta(b+K)\right)\gamma(c+K) = (a+K)\beta\left((b+K)\gamma(c+K)\right)$$

özelliği $\left(\Phi^* A\right)\big/_{c_\ell}$ de sağlanır. Bu durumda hipotezden birleşme özelliği $\Phi^*\left(A\big/_{c_\ell}\right)$ de sağlanır. Sonuç olarak, $A\big/_{c_\ell}$ bir yaklaşımlı Γ-yakın halkadır.

Tanım 8.2.27 A bir yaklaşımlı Γ-yakın halka ve K, A nın bir alt yaklaşımlı Γ-yakın halkası olsun. $A\big/_{c_\ell}$ yaklaşımlı Γ-yakın halkasına, A nın K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı Γ-yakın halkası veya kısaca bir yaklaşımlı bölüm Γ-yakın halkası denir ve $A\big/_{\omega} K$ ile gösterilir.

9. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Günümüz matematik ve mühendislik dünyasında yaklaşımlı cebirsel yapılar teorisi, görüntü analizi veya sınıflandırma problemleri gibi diğer akademik araştırma konuları için etkili çalışma imkânı sunan önemli bir teoridir.

Lisansüstü seviyede araştırmalar yapmak ve yeni sonuçlar elde etmek amacıyla, yaklaşımlı (approximately) cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda yaklaşımlı gamma yakın halka kavramı tanımlanmış ve ilgili örneklere yer verilmiştir. Ayrıca alt yaklaşımlı gamma yakın halka, yaklaşımlı gamma ideal, sağ (sol) zayıf eşdeğerlik bağıntısı, yakın sağ (sol) zayıf kalan sınıfı ve yaklaşımlı bölüm gamma yakın halka kavramları tanımlanarak, bu kavramlar ile alakalı bazı özgün sonuçlar elde edilmiştir.

Bu yüksek lisans tezi ile literatüre yeni bir kaynak kazandırılmıştır. Böylece bu tezin genç matematikçilerin yaklaşımlı cebirsel yapılar teorisine ilgisini artıracağı ve yeni araştırmalar ile bu teorinin daha da zenginleştirileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] V.A. Efremovič, “The geometry of proximity I”, *Matematicheski Sbornik (N.S.)*, vol. 31, no. 73(1), pp. 189-200, 1952.

[2] M.M. Kovăr, “A new causal topology and why the universe is co-compact”, arXiv:1112.0817 [math-ph], pp. 1-15, 2011.

[3] M. Lodato, “On topologically induced generalized proximity relations”, Ph.D. Thesis, Rutgers University, 1962.

[4] S.A. Naimpally and J.F. Peters, *Topology with applications: Topological spaces via near and far*, World Scientific, Singapore, 2013.

[5] J.F. Peters, “Proximal relator spaces”, *Filomat*, vol. 30, no. 2, pp. 469-472, 2016.

[6] J.F. Peters, M.A. Öztürk and M. Uçkun, “Exactness of proximal groupoid homomorphisms”, *Adıyaman University Journal of Science*, vol. 5, no. 1, pp. 1-13, 2015.

[7] J.F. Peters, E. İnan and M.A. Öztürk, “Spatial and descriptive isometries in proximity spaces”, *General Mathematics Notes*, vol. 21, no. 2, pp. 125-134, 2014.

[8] E. İnan, “Approximately semigroups and ideals: An algebraic view of digital images”, *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, vol. 17, pp. 479-487, 2017.

[9] E. İnan, “Approximately groups in proximal relator spaces”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, vol. 68, no. 1, pp. 572-582, 2019.

[10] E. İnan, “Approximately subgroups in proximal relator spaces”, *Adıyaman University Journal of Science*, vol. 8, no. 1, pp. 24-41, 2018.

[11] M. Uçkun and E. İnan, “Approximately gamma-semigroups in proximal relator spaces”, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 30, no. 4, pp. 299-311, 2019.

[12] E. İnan, “Approximately rings in proximal relator spaces”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 6, pp. 2941-2953, 2019.

[13] L. E. Dickson, "Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, pp. 198-204, 1905.

[14] L. E. Dickson, "On Finite Algebras", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, pp. 358-393, 1905.

[15] H. Zassenhaus, "Über Endliche Fastkörper", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 11, pp. 187-220, 1935/1936.

[16] N. Nobusawa, "On a generalization of the ring theory", *Osaka Journal of Mathematics*, vol. 1, pp. 81-89, 1964.

[17] W.E. Barnes, "On the Γ-rings of Nobusawa", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 18, pp. 411-422, 1966.

[18] S. Kyuno, "On prime gamma rings", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 75, no. 1, pp. 185-190, 1978.

[19] J. Luh, "On the theory of simple Γ-rings", *Michigan Mathematical Journal*, vol. 16, pp. 65-75, 1969.

[20] M. Uçkun, "Approximately gamma-rings in proximal relator spaces", *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, vol. 68, no. 2, pp. 1780-1796, 2019.

[21] G. Pilz, *Near-rings: The Theory and Its Applications*, 2nd ed., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983.

[22] Bh. Satyanarayana, "Contributions to near-ring theory", Ph.D. Thesis, Nagarjuna University, India, 1984.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mehmet GÜRBÜZCAN

Doğum Yeri : Adıyaman

Doğum Tarihi : 22 Ekim 1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mehmet.gurbuzcan002@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi	2014
Lise	Fen Bilimleri	Adıyaman Lisesi	2005

Yayınlar

[1] M. Uçkun and M. Gürbüzcan, “Approximately Gamma-Near Rings”, (submitted) 2020.