T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKLAŞIMLI YAKIN HALKALAR

AYŞEGÜL KOCAMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2021

T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YAKLAŞIMLI YAKIN HALKALAR

Ayşegül KOCAMAZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Bu tez 07/09/2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ebubekir İNAN
Danışman

Doç. Dr. Murat CANDAN	**Doç. Dr. Mustafa UÇKUN**
Üye	**Üye**

Prof. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKLAŞIMLI YAKIN HALKALAR

Ayşegül KOCAMAZ

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ebubekir İNAN
Yıl : 2021, Sayfa sayısı: 70 + vi

Jüri : Doç. Dr. Murat CANDAN
Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
Doç. Dr. Ebubekir İNAN

Bu tezin birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu tezin amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde, bu tezde kullanılan materyal ve yöntem açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, proksimal relator uzayları, proksimal relator uzayında yaklaşımlı yarı-gruplar, yaklaşımlı gruplar, yaklaşımlı idealler ve yaklaşımlı grup homomorfizmaları ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir.

Beşinci bölümde, proksimal relator uzayında yaklaşımlı halka kavramı incelenmiştir.

Altıncı bölümde, yakın halkalar ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedilmiştir.

Yedinci bölümde, yaklaşımlı yakın halka kavramı tanımlanmış ve bazı özgün sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Proksimal relator uzay; Yaklaşımlı halka; Yakın halka; Yaklaşımlı yakın halka

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATELY NEAR RINGS

Ayşegül KOCAMAZ

Adıyaman University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ebubekir İNAN
Year : 2021, Number of Pages: 70 + vi

Jury : Assoc. Prof. Dr. Murat CANDAN
Assoc. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN
Assoc. Prof. Dr. Ebubekir İNAN

In the first chapter of this thesis, the aim and importance of the thesis are mentioned. In the second chapter, a summary of the literature is presented in accordance with the purpose of this thesis. In the third chapter, the material and method used in this thesis are explained.

In the fourth chapter, some basic informations are given about proximal relator spaces, approximately semi-groups, approximately groups, approximately ideals and approximately group homomorphisms in the proximal relator space.

In the fifth chapter, the concept of approximately ring in the proximal relator space is given.

In the sixth chapter, the basic characteristics of near rings are mentioned.

In the seventh chapter, the concept of approximately near ring is defined, and some original results are presented.

Key Words: Proximal relator space; Approximately ring; Near ring; Approximately near ring

BEYAN

“**Yaklaşımlı Yakın Halkalar**” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve ayrıca, alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Ayşegül KOCAMAZ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana yardım eden, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Sayın Doç. Dr. Ebubekir İNAN'a şükranlarımı sunuyorum. Yine çalışmamızda büyük bir titizlikle ve engin bilgileriyle bize yol açan Sayın Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca kıymetli zamanından ayırıp, her sıkıştığımda bana yardım eden, beni bu süreçte yalnız bırakmayan değerli arkadaşım Mehmet GÜRBÜZCAN'a çok teşekkür ederim.

Çıktığım bu yolda bana daima inanan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

Ayşegül KOCAMAZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{R}$	: Relator
$(X,\mathcal{R})$	: Relator uzay
δ	: Proksimiti bağıntısı
δ_E	: Efremovič proksimiti bağıntısı
φ	: Çıkarım fonksiyonu
$(X,\mathcal{R}_\delta)$	: Proksimal relator uzayı
Φ	: Nesne tanımlaması
δ_Φ	: Tanımsal proksimiti bağıntısı
$Q(A)$	: A nın küme tanımlaması
$\underset{\Phi}{\cap}$	: Tanımsal arakesit
$\Phi^* A$	: A nın tanımsal üst yaklaşımı

1. GİRİŞ

Bu tezin amacı, yaklaşımlı gruplar ve yaklaşımlı halkalar gibi yaklaşımlı cebirsel yapıları incelemek ve bu konu ile ilgili kaynakları dikkate alarak, yeni yaklaşımlı cebirsel yapılar elde etmektir. Bu sebeple yakın halka kavramı göz önünde tutularak özgün bir çalışma olarak yaklaşımlı yakın halka kavramı tanımlanmıştır.

Bu tezin birinci bölümünde, araştırmanın amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu tezin amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, proksimal relator uzayında yaklaşımlı yarı-gruplar, yaklaşımlı gruplar, yaklaşımlı idealler ve yaklaşımlı grup homomorfizmaları ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde ise proksimal relator uzayında yaklaşımlı halka kavramı verilmiş, alt yaklaşımlı cebirsel yapılar ve yaklaşımlı halkalarda kalan sınıflarından bahsedilmiştir.

Altıncı bölümde, yakın halkalar ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedilmiştir. Yedinci bölümde ise yaklaşımlı yakın halka kavramı tanımlanmış ve bazı özgün sonuçlar verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Boştan farklı iki kümenin kartezyen çarpımının herhangi bir alt kümesine *bağıntı* denir. Bağıntı kavramı, üzerinde tanımlı olduğu kümenin elemanları arasında bir bağ kurar. Bağıntı kullanılarak birbiri ile ilişkili olan elemanların özellikleri çok daha kolay bir şekilde incelenebilir. Bir küme üzerinde birden fazla bağıntı tanımlanabilir. X boştan farklı bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlanan bağıntıların kümesine bir *relator* denir.

Proksimiti bağıntıları ilk olarak 1952 yılında Efremovič tarafından daha çok geometrik ve topolojik bazı kavramların oluşturulması için tanımlanmıştır [1]. Proksimiti bağıntılarında temel düşünce iki kümenin veya elemanın yakınlığının belli özellikler dikkate alınarak incelenmesidir. Bu düşünce doğrultusunda yakın (proksimal) kümeler üzerinde birçok topolojik araştırmalar yapılmıştır [2-4].

X kümesi üzerinde tanımlanan proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{R}_\delta$ olmak üzere, $\left(X,\mathcal{R}_\delta\right)$ ikilisi bir *proksimal relator uzayı* olarak adlandırılır [5]. Efremovič proksimiti [1], Lodato proksimiti [3] gibi farklı proksimiti bağıntıları tanımlanmıştır.

2013 te Naimpally ve Peters tarafından tanımsal Efremovič proksimiti, tanımsal Lodato proksimiti bağıntıları tanımlanmıştır [4]. Tanımsal proksimiti bağıntıları, konumu ve özellikleri olan algılanabilir soyut olmayan noktalardan oluşan kümeler üzerinde tanımlanmıştır. Mesela dijital görüntüler piksellerden oluşmaktadır. Her bir piksel, konumu ve renk koduna karşılık gelen çıkarım fonksiyonları ile birlikte soyut olmayan bir nokta olarak dikkate alınabilir. Soyut olmayan her bir elemanın özelliklerini temsil eden reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılarak nesnelerin bilişsel olarak algılanması gerçekleşmiş olur. Böylece elemanların ortak özellikleri gözönünde tutularak tanımsal anlamda yakınlıklarından bahsedilebilir. Tanımsal proksimiti bağıntıları dikkate alınarak bazı araştırmalar yapılmıştır [5-7]. X kümesi üzerinde tanımlanan proksimiti bağıntıları yerine tanımsal proksimiti bağıntıları ele alınırsa $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ ikilisine bir *tanımsal proksimal relator uzayı* denir.

Proksimiti bağıntılar kullanılarak oluşturulan cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar 2017 yılında başlamıştır [8]. Proksimal relator uzayında cebirsel yapılar, temel olarak bu uzay üzerinde tanımlanan ikili işlem ve alt kümelerin proksimiti bağıntısı ile belirlenen tanımsal üst yaklaşımları dikkate alınarak oluşturulur. 2017 de İnan tarafından tanımsal üst yaklaşımın bazı özellikleri, yaklaşımlı (approximately) yarı-gruplar ve yaklaşımlı yarı-gruplarda yaklaşımlı idealler verilmiştir [8]. 2018 ve 2019 da yaklaşımlı gruplar, yaklaşımlı alt gruplar ve yaklaşımlı grup homomorfizmaları İnan tarafından tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili örnekler incelenmiştir [9-10]. 2019 yılında yaklaşımlı gamma yarı-gruplar Uçkun ve İnan tarafından verilmiştir [14]. Ayrıca yaklaşımlı halkaların, yaklaşımlı halkanın yaklaşımlı ideallerinin, yaklaşımlı halka homomorfizmalarının bazı temel özellikleri incelenmiş ve bu kavramlara örnekler verilmiştir [15].

Yakın halkalar ile ilgili ilk çalışma, 1905 yılında Dickson [11,12] tarafından aksiyomatik olarak verilmiştir. Dickson tarafından bir taraflı dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığı gösterilmiş ve bu tür cisimler yakın cisim olarak adlandırılmıştır. Yakın halka kavramı ilk defa 1936 yılında Zassenhaus [13] tarafından kullanılmış ve bütün sonlu yakın cisimler belirlenmiştir [16].

Yaklaşımlı cebirsel yapıların, görüntü analizi veya sınıflandırma problemleri gibi diğer araştırma konuları için etkili çalışma imkânı sağlaması beklenmektedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Yakın halkalar ve yaklaşımlı halkaları ile ilgili olarak temin ettiğimiz kitaplar ve makaleler, mevcut bilimsel yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Tez çalışmamızın amacına uygun olarak veriler bir araya getirilmiş ve özgün sonuçlar elde edilmiştir.

4. TEMEL KAVRAMLAR

4.1 Proksimal Relator Uzay

Tanım 4.1.1 X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde tanımlanan bağıntıların ailesine bir relator denir ve $\mathcal{R}$ ile gösterilir. $(X,\mathcal{R})$ $\left(veya\, X(\mathcal{R})\right)$ ikilisine de bir relator uzay denir.

Bu çalışma boyunca, Efremovič proksimiti δ ve tanımsal proksimiti δ_Φ bağıntıları dikkate alınmıştır [1]. Burada proksimiti (proximity) kavramı iki kümenin yakınlığı anlamında kullanılmıştır.

Tanım 4.1.2 δ, $P(X)$ üzerinde tanımlanan bir bağıntı olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa δ bağıntısına Efremovič proksimiti bağıntısı denir:

(1) $A\delta B \Rightarrow B\delta A$

(2) $A\delta B \Rightarrow A \neq \varnothing$ ve $B \neq \varnothing$

(3) $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A\delta B$

(4) $A\delta(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta B$ veya $A\delta C$

(5) $\{x\}\delta\{y\} \Leftrightarrow x = y$

(6) $A\underline{\delta}B \Rightarrow \exists E \subseteq X$ öyle ki $A\underline{\delta}E$ ve $E^c\underline{\delta}B.$ (Efremovič aksiyomu)

Tanım 4.1.3 δ, $P(X)$ üzerinde tanımlanan bir bağıntı olsun. δ, Tanım 4.1.2 deki $(1)-(5)$ özellikleri ile birlikte

$A\delta B$ ve $\forall b \in B,\ \{b\}\delta C \Rightarrow A\delta C$ (Lodato Aksiyomu)

özelliğini sağlıyor ise δ ya Lodato proksimiti bağıntısı denir ve δ_L ile gösterilir.

Tanım 4.1.4 X üzerinde tanımlanan proksimiti bağıntılarının bir ailesi $\mathcal{R}_\delta$ olmak üzere, $(X, \mathcal{R}_\delta)$ ikilisine proksimal relator uzay denir.

Bu çalışmada soyut noktalar yerine konumu ve özelliği olan soyut olmayan noktalar kullanılmıştır [2].

Tanım 4.1.5 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi olsun. Soyut olmayan noktaların özelliğini temsil eden

$$\varphi : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna çıkarım fonksiyonu denir. $x \in X$ olmak üzere $\varphi(x)$, x elemanının ayırt edici özelliğini temsil eder.

Tanım 4.1.6 $x \in X$ olsun. φ_i fonksiyonları X deki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden fonksiyonlar olmak üzere

$$\Phi : X \to \mathbb{R}^n$$

$\Phi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ $(n \in N)$ şeklinde tanımlanan Φ fonksiyonuna x elemanının bir nesne tanımlaması denir.

Çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi belirlendikten sonra bir δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı tanımlanabilir.

Tanım 4.1.7 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A \subseteq X$ olsun.

$$Q(A) = \{\Phi(a) | a \in A\}$$

kümesine A nın küme tanımlaması denir.

Tanım 4.1.8 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A, B \subseteq X$ olsun.

$$A \underset{\Phi}{\cap} B = \{x \in A \cup B \mid \Phi(x) \in Q(A) \text{ ve } \Phi(x) \in Q(B)\}$$

kümesine A ile B kümelerinin tanımsal arakesiti denir.

Tanım 4.1.9 δ_{Φ} bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise δ_{Φ} bağıntısına tanımsal Efremovič proksimiti bağıntısı denir:

(1) $A\delta_{\Phi}B \Rightarrow B\delta_{\Phi}A$

(2) $A\delta_{\Phi}B \Rightarrow A \neq \varnothing$ ve $B \neq \varnothing$ $(veya\ \varnothing\delta_{\Phi}A)$

(3) $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A\delta_{\Phi}B$

(4) $A\delta_{\Phi}(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta_{\Phi}B$ veya $A\delta_{\Phi}C$

(5) $\{x\}\delta_{\Phi}\{y\} \Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(y)$

(6) $A\underline{\delta}_{\Phi}B \Rightarrow \exists E \subseteq X$ öyle ki $A\underline{\delta}_{\Phi}E$ ve $E^{c}\underline{\delta}_{\Phi}B$ (Efremovič aksiyomu)

Tanım 4.1.10 X üzerinde tanımlanan tanımsal proksimiti bağıntılarının bir ailesi $\mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}$ olmak üzere $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}\right)$ ikilisine tanımsal proksimal relator uzay denir.

Tanım 4.1.11 X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A, B \subseteq X$ olsun.

$Q(A) \cap Q(B) \neq \varnothing$ ise $A,$ B ye tanımsal yakındır denir ve $A\delta_{\Phi}B$ ile gösterilir.

$Q(A) \cap Q(B) = \varnothing$ ise $A,$ B ye tanımsal uzaktır denir ve $A\underline{\delta}_{\Phi}B$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.12 X boştan farklı bir küme, $A \subseteq X$ ve $\Phi : X \to \mathbb{R}$ bir nesne tanımlaması olsun.

$$cI_{\Phi}(a) = \{x \in X \mid \Phi(a) = \Phi(x)\}$$

kümesine $a \in A$ noktasının tanımsal kapanışı denir.

Tanım 4.1.13 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$\Phi^{*}A=\left\{x\in X\,\middle|\,x\delta_{\Phi}A\right\}$$

kümesine A nın tanımsal üst yaklaşımı denir.

Tanım 4.1.14 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A\subseteq X$ olsun.

$$\Phi_{*}A=\left\{a\in A\,\middle|\,cI_{\Phi}\left(a\right)\subseteq A\right\}$$

kümesine A nın tanımsal alt yaklaşımı denir.

Tanım 4.1.15 X boştan farklı soyut olmayan noktalardan oluşan bir küme ve $A\subseteq X$ olsun.

$$\xi_{\Phi}\left(A\right)=\left\{B\in \mathrm{P}\left(X\right)\,\middle|\,A\delta_{\Phi}B\right\}$$

kümesine A nın tanımsal yakınlık ailesi denir ve $\xi_{\Phi}\left(A\right)$ ile gösterilir.

Lemma 4.1.16 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A,B\subseteq X$ olsun. Bu durumda

(i) $Q\left(A\cap B\right)=Q\left(A\right)\cap Q\left(B\right)$

(ii) $Q\left(A\cup B\right)=Q\left(A\right)\cup Q\left(B\right)$

dir.

Teorem 4.1.17 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A,B\subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) $\left(\Phi_{*}A\right)\subseteq A\subseteq\left(\Phi^{*}A\right)$

(ii) $\Phi^{*}\left(A\cup B\right)=\left(\Phi^{*}A\right)\cup\left(\Phi^{*}B\right)$

(iii) $\Phi_{*}\left(A\cap B\right)=\left(\Phi_{*}A\right)\cap\left(\Phi_{*}B\right)$

(iv) $A \subseteq B$ ise $(\Phi_* A) \subseteq (\Phi_* B)$

(v) $A \subseteq B$, ise $(\Phi^* A) \subseteq (\Phi^* B)$

(vi) $\Phi_*(A \cup B) \supseteq (\Phi_* A) \cup (\Phi_* B)$

(vii) $\Phi^*(A \cap B) \subseteq (\Phi^* A) \cap (\Phi^* B)$

Tanım 4.1.18 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $(A, \cdot)$ ve $(Q(A), \cdot)$ birer grupoid ve Φ bir nesne tanımlaması olmak üzere, her $a, b \in A$ için $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$ ise Φ ye A dan $Q(A)$ ya bir tanımsal homomorfizma denir.

Lemma 4.1.19 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. A ve B, X üzerinde tanımlanan "$\cdot$" ikili işlemi ile birer grupoid ve $Q(A), Q(B)$ de $Q(X)$ de tanımlanan "$\cdot$" ikili işlemi ile birer grupoid olsun. Bu durumda $\Phi : X \to \mathbb{R}$ bir tanımsal homomorfizma ise

$$Q(A)Q(B) = Q(AB)$$

dir.

Teorem 4.1.20 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. $\Phi : X \to \mathbb{R}$ bir tanımsal homomorfizma ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $(\Phi^* A)(\Phi^* B) = \Phi^*(AB)$

(ii) $(\Phi_* A)(\Phi_* B) \subseteq \Phi_*(AB)$

4.2 Yaklaşımlı Gruplar

İnan, 2017 yılında yaklaşımlı yarı-grup kavramını [8], 2019 yılında yaklaşımlı grup kavramını [9] ve 2018 yılında da alt yaklaşımlı grup kavramını [10] tanımlamış ve bu yaklaşımlı cebirsel yapılar ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu bölümde yukarıda belirtilen İnan'ın tanımladığı yaklaşımlı gruplar ve bazı temel özellikler verilmiştir.

Tanım 4.2.1 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı, "$\cdot$", X üzerinde tanımlı bir ikili işlem ve $G \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in \Phi^* G$ ise G ye proksimal relator uzayında yaklaşımlı grupoid denir.

G, $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ de "$\cdot$" ikili işlemi ile bir yaklaşımlı grupoid, $g \in G$ ve $A, B \in G$ olsun. $Q(A), Q(B) \subseteq Q(G)$ kümeleri de $Q(X)$ deki "$\cdot$" ikili işlemi ile birer yaklaşımlı grupoid olsun. Bu durumda $g \cdot A,\ A \cdot g,\ A \cdot B \subseteq \Phi^* G \subseteq X$ ve $Q(A) \cdot Q(B)$ alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$g \cdot A = gA = \left\{ ga \mid a \in A \right\},$$

$$A \cdot g = Ag = \left\{ ag \mid a \in A \right\},$$

$$A \cdot B = AB = \left\{ ab \mid a \in A, b \in B \right\},$$

$$Q(A) \cdot Q(B) = Q(A)Q(B) = \left\{ \Phi(a)\Phi(b) \mid a \in A, b \in B \right\}.$$

Tanım 4.2.2 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve "$\cdot$", X üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $S \subseteq X$ ye proksimal relator uzayında bir yaklaşımlı yarı-grup denir:

(AY_1) Her $x \cdot y \in S$ için $x \cdot y \in \Phi^* S$ dir.

(AY_2) Her $x, y, z \in S$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $\Phi^* S$ de sağlanır.

Bir yaklaşımlı yarı-grup birimli (yani her $x \in S$ için $x \cdot e_s = e_s \cdot x = x$ olacak biçimde bir $e_s \ \Phi^* S$ varsa) ise S ye bir yaklaşımlı monoid denir.

Tanım 4.2.3 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $S \subseteq X$ yaklaşımlı yarı-grup ve $T \subseteq S$ olsun. O zaman $TT \subseteq \Phi^* T$ ise T ye S nin bir alt yaklaşımlı yarı-grubu denir.

Tanım 4.2.4 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, S bir yaklaşımlı yarı-grup ve $\varnothing \neq \mathrm{I} \subseteq S$ olsun.

(1) $\Phi^*\mathrm{I}$, S nin bir sol ideali, yani $S\left(\Phi^*\mathrm{I}\right) \subseteq \Phi^*\mathrm{I}$ ise I ya S nin bir yaklaşımlı sol ideali denir.

(2) $\Phi^*\mathrm{I}$, S nin bir sağ ideali, yani $\left(\Phi^* I\right) S \subseteq \Phi^* I$ ise I ya S nin bir yaklaşımlı sağ ideali denir.

(3) $\Phi^*\mathrm{I}$, S nin bir bi ideali, yani $\left(\Phi^* I\right) S \left(\Phi^* I\right) \subseteq \Phi^* I$ ise I ya S nin bir yaklaşımlı bi-ideali denir.

Teorem 4.2.5 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ tanımsal proksimal relator uzay ve $\varnothing \neq S \subseteq X$ olsun. Bu durumda

(i) S, X üzerinde bir yarı-grup ise S bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

(ii) I, S yaklaşımlı yarı-grubunun bir sol ideali (sağ ideali, bi-ideali) ise I, S nin bir yaklaşımlı sol ideali (sağ ideali, bi-ideali) dir.

Teorem 4.2.6 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $S \subseteq X$ bir yarı-grup olsun.

(i) A, S nin bir alt yarı-grubu ise $\Phi_* A$, S nin bir alt yarı-grubudur.

(ii) I, S nin bir sol ideali (sağ ideali, bi-ideali) ise $\Phi_* I$, $\Phi_* S$ nin bir sol ideali (sağ ideali, bi-ideali) dir.

Teorem 4.2.7 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $S\subseteq X$ bir yarı-grup olsun. I, S nin bir bi-ideali ise I, S nin bir yaklaşımlı bi-idealidir.

Teorem 4.2.8 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $S\subseteq X$ olsun. I, S nin bir bi-ideali ise $\Phi_* I$, $\Phi_* S$ nin bir bi-idealidir.

Teorem 4.2.9 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $S\subseteq X$ olsun. I ve J sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere

$$\Phi^*(IJ)\subseteq\left(\Phi^* I\right)\cap\left(\Phi^* J\right)$$

dir.

Teorem 4.2.10 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $S\subseteq X$ olsun. I ve J sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere

$$\Phi_*(IJ)\subseteq\left(\Phi_* I\right)\cap\left(\Phi_* J\right)$$

dir.

Tanım 4.2.11 $\left(X,\mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve "$\cdot$", X üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $G\subseteq X$ ye proksimal relator uzayında bir yaklaşımlı grup denir:

(AG_1) Her $x,y\in G$ için $x\cdot y\in\Phi^* G$,

(AG_2) Her $x,y,z\in G$ için $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ özelliği $\Phi^* G$ de sağlanır,

(AG_3) Her $x\in G$ için $x\cdot e_G=e_G\cdot x=x$ olacak biçimde bir $e_G\in\Phi^* G$ vardır (e_G ye G nin yaklaşımlı birim elemanı denir),

(AG_4) Her $x\in G$ için $x\cdot y=y\cdot x=e$ olacak biçimde bir $y\in G$ vardır (y ye x in tersi denir ve x^{-1} ile gösterilir).

Lemma 4.2.12 $\left(X, \mathcal{R}_{S_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup olsun. Bu durumda,

(i) G nin bir ve yalnız bir yaklaşımlı birim elemanı vardır.

(ii) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e$ olacak biçimde bir ve bir tek $y \in G$ vardır (y ye x in G deki yaklaşımlı tersi denir ve x^{-1} ile gösterilir).

(iii) Her $x \in G$ için $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$ dir.

(iv) Her $x, y \in G$ için $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ dir.

Teorem 4.2.13 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $G \subseteq X$ bir toplamsal yaklaşımlı grup olsun. Bu durumda her $x, y, z \in G$ için $x + z = y + z$ veya $z + x = z + y$ ise $x = y$ dir.

Tanım 4.2.14 G bir yaklaşımlı grup ve $H \subseteq G$ olsun. H, G deki işleme göre bir yaklaşımlı grup ise H ye, G nin alt yaklaşımlı grubu denir.

G nin aşikâr alt yaklaşımlı grubu sadece bir tane olup, o da G nin kendisidir. Ayrıca $\{e\}$, G nin bir aşikâr alt yaklaşımlı grubudur, gerek ve yeter koşul $e \in G$ dir.

Teorem 4.2.15 G bir yaklaşımlı grup, $H \subseteq G$ ve $\Phi^* H$ bir grupoid olsun. H nin G yaklaşımlı grubunun bir alt yaklaşımlı grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ dir.

Teorem 4.2.16 G yaklaşımlı grup, H_1 ile H_2, G nin iki alt yaklaşımlı grubu ve $\Phi^* H_1$, $\Phi^* H_2$ birer grupoid olsun. O zaman

$$\left(\Phi^* H_1\right) \cap \left(\Phi^* H_2\right) = \Phi^* \left(H_1 \cap H_2\right)$$

ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yaklaşımlı grubudur.

Sonuç 4.2.17 Tanımsal proksimal relator uzayında, her grup bir yaklaşımlı gruptur.

Tanım 4.2.18 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay olmak üzere X kümesi üzerinde tanımlanan bir bağıntı yansımalı ve simetrik ise bu bağıntıya zayıf eşdeğerlik bağıntısı denir.

$\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H, G nin alt yaklaşımlı grup olsun. $x, y \in G$ ve e, G nin birim elemanı olmak üzere G nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "ρ_l" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \rho_l y :\Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H \cup \{e_X\}$$

Teorem 4.2.19 G bir yaklaşımlı grup olmak üzere, "ρ_l" bağıntısı G üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanım 4.2.20 "ρ_l" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımlı grubunda belirttiği sınıflara yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı denir. Herhangi bir x elemanı için bir yaklaşımlı sol kalan sınıfı $x \cdot H$ ile gösterilir ve

$$x \cdot H = \left\{x \cdot h \,\middle|\, h \in H,\, x \in G,\, x \cdot h \in G\right\} \cup \{x\}$$

dir.

$\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı bir grup ve H, G nin alt yaklaşımlı grubu olsun. $x, y \in G$ ve e, G nin birim elemanı olmak üzere G nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "ρ_r" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \rho_r y :\Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H \cup \{e_X\}$$

dir.

Teorem 4.2.21 G bir yaklaşımlı grup olmak üzere, "ρ_r" bağıntısı G üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanım 4.2.22 “ ρ_r ” sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımlı grubunda belirttiği sınıflara yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıf denir. Herhangi bir x elemanı için bir yaklaşımlı sağ kalan sınıfı $H \cdot x$ ile gösterilir ve

$$H \cdot x = \{ h \cdot x | h \in H, \mathrm{x} \in G, h \cdot x \in G \} \cup \{ x \}$$

dir.

Genel olarak, yaklaşımlı grubun ikili işlemi her zaman değişme özelliğini sağlamayabilir. Bu nedenle “ ρ_r ” ve “ ρ_l ” zayıf eşdeğerlik bağıntıları farklı olabilir. Sonuç olarak, yaklaşımlı sağ zayıf ve yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfları da farklı olabilir.

$x \in G$ olmak üzere, bundan sonraki kısımlarında G nin H ile belirlenen tüm yaklaşımlı sağ (sol) zayıf kalan sınıfları için $H \cdot x \left(x \cdot H \right)$ gösterimi yerine $Hx \left(xH \right)$ kullanılmıştır.

Teorem 4.2.23 Yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfları ile yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının sayıları aynıdır.

Tanım 4.2.24 G bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olmak üzere, yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfların sayısına (veya yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların sayısına) H nin G deki indeksi denir ve $\left[G : H \right]$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.25 $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $x, y \in G$ için xH ve yH, sırasıyla x ve y elemanlarının belirlendiği iki yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x \cdot y \in \Phi^* G$ elemanı tarafından belirlenen, iki yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfının çarpımı

$$\left(x \cdot y \right) H = \left\{ \left(x \cdot y \right) \cdot h \middle| h \in H, x \cdot y \in \Phi^* G, \left(x \cdot y \right) \cdot h \in G \right\} \cup \left\{ x \cdot y \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$xH \circ yH = \left(x \cdot y \right) H$$

ile gösterilir.

$G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup, H de bir G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. O zaman

$$G/_{\rho_\ell} = \{ xH \mid x \in G \}$$

H tarafından belirlenen G nin tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesidir. Bu durumda, G nin yerine $\Phi^* G$ dikkate alınırsa

$$\left(\Phi^* G\right)/_{\rho_\ell} = \{ xH \mid x \in \Phi^* G \}$$

dir.

O zaman $xH = \{ x \cdot h \mid h \in H,\, x \in \Phi^* G,\, x \cdot h \in G \} \cup \{x\}$ olur.

Tanım 4.2.26 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $G/_{\rho_\ell}$, H tarafından belirlenen G nin tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesi, $A \in P(X)$ ve $\xi_\Phi(A)$, A nın bir proksimal ailesi olsun. Bu durumda

$$\Phi^*\left(G/_{\rho_\ell}\right) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \underset{\Phi}{\cap} G/_{\rho_\ell} \neq \varnothing} \xi_\Phi(A)$$

kümesine, $G/_{\rho_\ell}$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 4.2.27 G bir yaklaşımlı grup, H, G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve $G/_{\rho_\ell}$ de H tarafından belirlenen G nin tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesi olsun. Bu durumda $\left(\Phi^* G\right)/_{\rho_\ell} \subseteq \Phi^*\left(G/_{\rho_\ell}\right)$ ise $G/_{\rho_\ell}$, her $x, y \in G$ için $xH \circ yH = (x \cdot y)H$ şeklinde tanımlanan "$\circ$" ikili işlemine göre yaklaşımlı gruptur.

Tanım 4.2.28 G bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $G/_{\rho_\ell}$, yaklaşımlı grubuna H tarafından belirlenen G nin tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı grubu denir ve $G/_{\rho} H$ ile gösterilir.

Sonuç 4.2.29 G bir toplamsal yaklaşımlı grup, H, G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve $G/_{\rho_l}$ de G nin H tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesi olsun. Bu durumda $\left(\Phi^* G\right)/_{\rho_l} \subseteq \Phi^*\left(G/_{\rho_l}\right)$ ise o zaman $G/_{\rho_l}$, her $x, y \in G$ için

$$xH \oplus yH = \left(x+y\right)H$$

şeklinde tanımlanan "$\oplus$" ikili işlemine göre bir toplamsal yaklaşımlı gruptur.

Tanım 4.2.30 G bir yaklaşımlı grup N de bir alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda her $g \in G$ için $g \cdot N = N \cdot g$ ise N ye G bir normal alt yaklaşımlı grubu denir.

Teorem 4.2.31 G bir yaklaşımlı grup ve $N \subseteq G$ alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda:

(i) N nin G yaklaşımlı grubunun bir normal alt yaklaşımlı grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ olmasıdır.

(ii) N nin G bir normal alt yaklaşımlı grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $g \in G$ ve $n \in N$ için $g \cdot n \cdot g^{-1} \in N$ olmasıdır.

4.3 Yaklaşımlı Grup Homomorfizmaları

$\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ ve $\left(Y, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ tanımsal proksimal relator uzayları ve "$\cdot$", "$\circ$" sırasıyla X ve Y üzerindeki ikili işlemler olsun.

Tanım 4.3.1 $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı gruplar ve $\Phi^* G$, $\Phi^* H$ birer grupoid olmak üzere χ, $\Phi^* G$ den $\Phi^* H$ üzerine dönüşüm olsun. Her $x, y \in G$ için $\chi\left(x \cdot y\right) = \chi\left(x\right) \circ \chi\left(y\right)$ ise χ ye bir yaklaşımlı grup epimorfizması denir ve ayrıca, G, H ye homomorfiktir denir ve $G \simeq H$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, yaklaşımlı yarı-grup veya yaklaşımlı monoid homomorfizmalarından bahsedilebilir. Bu bölümde χ, $\Phi^* G$ den $\Phi^* H$ ye bir yaklaşımlı epimorfizma olarak dikkate alınacaktır.

Teorem 4.3.2 G ve H, yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar olmak üzere $(G,\cdot)$ değişmeli ise $(H,\cdot)$ de değişimlidir.

Teorem 4.3.3 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar, $\Phi^* G$ bir grupoid ve $\Phi^*\left(\chi(G)\right) = \Phi^* H$ olsun. Bu durumda $\chi(G)$ de bir yaklaşımlı gruptur.

Teorem 4.3.4 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar olsun. e ve e' sırasıyla G ve H nin yaklaşımlı birim elemanı olsun. Bu durumda her $x \in \Phi^* G$ için $\chi(e) = e'$ ve $\chi\left(x^{-1}\right) = \chi(x)^{-1}$ dir.

Tanım 4.3.5 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar olsun. $Ker\chi = \left\{x \in G \middle| \chi(x) = e'\right\}$ kümesine χ nin çekirdeği denir. Burada e', H nin yaklaşımlı birim elemandır.

Teorem 4.3.6 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ yaklaşımlı gruplar olsun. O zaman $\Phi^* Ker\chi$ bir grupoid ise $Ker\chi$, G nin bir normal alt yaklaşımlı grubudur.

Teorem 4.3.7 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar olsun. G' ve N sırasıyla G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve normal alt yaklaşımlı grubu ve $\Phi^* G'$ bir grupoid olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

(i) $\chi\left(\Phi^* G'\right) = \Phi^* \chi(G')$ ise $\chi(G')$, H nin bir alt yaklaşımlı grubudur.

(ii) $\chi(G') = H$ ve $\chi\left(\Phi^* N\right) = \Phi^* \chi(N)$ ise $\chi(N)$, H nin bir normal alt yaklaşımlı grubudur.

Teorem 4.3.8 $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar, H' ve N' sırasıyla H nin bir alt yaklaşımlı grubu ve normal alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda G' nın H' nün ters görüntüsü ve $\Phi^{*}G'$ bir grupoid olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\chi\left(\Phi^{*}G'\right)=\Phi^{*}H'$ ise G', G nin alt yaklaşımlı grubudur.

(ii) $\chi(G)=H$ ve N, N' nün ters görüntüsü olmak üzere, $\chi\left(\Phi^{*}N'\right)=\Phi^{*}N'$ ise bu durumda N, G nin bir normal alt yaklaşımlı grubudur.

Teorem 4.3.9 $G\subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H, G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda her $x\in\Phi^{*}G$ için

$$\Pi(x)=xH$$

ile tanımlı

$$\Pi:\Phi^{*}G\to\Phi^{*}\left(G/_{\rho}H\right)$$

dönüşümü bir yaklaşımlı grup homomorfizmasıdır.

Tanım 4.3.10 $G\subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H, G nin bir alt yaklaşımlı grubu olmak üzere, her $x\in\Phi^{*}G$ için

$$\Pi(x)=xH$$

ile tanımlanan

$$\Pi:\Phi^{*}G\to\Phi^{*}\left(G/_{\rho}H\right)$$

yaklaşımlı grup homomorfizmasına bir kanonik (doğal) yaklaşımlı grup homomorfizması denir.

Tanım 4.3.11 $G\subseteq X$ ve $H\subseteq Y$ iki yaklaşımlı grup ve G', G nin boştan farklı alt kümesi olsun.

$$\chi:\Phi^{*}G\to\Phi^{*}H$$

bir dönüşüm ve

$$\chi_{G'}=\chi\big|_{G'}:G'\to\Phi^{*}H$$

bir kısıtlanmış dönüşüm olmak üzere, her $x,y\in G'$ için

$$\chi(x\cdot y)=\chi_{G'}(x\cdot y)=\chi_{G'}(x)\cdot\chi_{G'}(y)=\chi(x)\cdot\chi(y)$$

ise χ dönüşümüne bir kısıtlanmış yaklaşımlı grup homomorfizması denir. Ayrıca, G, H ye kısıtlanmış yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $G\simeq_r H$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.3.12 $G\subseteq X$ ve $H\subseteq Y$ iki yaklaşımlı grup ve χ, Φ^*G den Φ^*H ye bir yaklaşımlı epimorfizma olsun. $(\Phi^*Ker\chi,\cdot)$ bir grupoid ve $(\Phi^*G)/_{\rho_\ell}$, Φ^*G nin $Ker\chi$ tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesi olmak üzere

$$(\Phi^*G)\big/_{\rho_\ell}\subseteq\Phi^*\left(G\big/_{\rho_\ell}Ker\chi\right)$$

ve

$$\Phi^*\chi(G)=\chi(\Phi^*G)$$

ise

$$G/_{\rho}Ker\chi\simeq_r\chi(G)$$

dir.

5. YAKLAŞIMLI HALKALAR

5.1. Yaklaşımlı Halkalar

Bu bölümde İnan tarafından 2019 da tanımlanan yaklaşımlı halkalar ve bazı temel özellikler verilmiştir [15].

Tanım 5.1.1 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı, "$+$" ve "$\cdot$", X üzerinde birer ikili işlem olsun. $R \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa R ye bir yaklaşımlı halka denir:

(AR_1) R, "$+$" ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli yaklaşımlı gruptur.

(AR_2) R, "$\cdot$" ikili işlemi ile birlikte bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

(AR_3) Her $x, y, z \in R$ için

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

ve

$$(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

özellikleri $\Phi^* R$ de sağlanır. Ayrıca,

(AR_4) Her $x, y \in R$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise R değişmeli yaklaşımlı halkadır.

(AR_5) Her $x \in R$ için $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ olacak biçimde bir $1_R \in \Phi^* R$ elemanı varsa, R ye birimli yaklaşımlı halka denir.

Bu koşullar $\Phi^* R$ de sağlanır. R deki elemanların sonlu tane toplamı veya çarpımı her zaman $\Phi^* R$ ye ait olmayabilir. Yani her $x \in R$ ve bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ için $nx \in \Phi^* R$ veya $x^n \in \Phi^* R$ olduğu kesin olarak söylenemez. $\left(\Phi^* R, +\right)$ ve $\left(\Phi^* R, \cdot\right)$ grupoid ise bu durumda her $x \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \in \Phi^* R$ veya her $n \in \mathbb{Z}$ için $nx \in \Phi^* R$ olur.

R bir birimli yaklaşımlı halka ve $x \in R$ olmak üzere, $y \cdot x = 1_R$ ($x \cdot z = 1_R$) olacak şekilde bir $y \in \Phi^* R$ $\left(z \in \Phi^* R\right)$ varsa x elemanına sol (sağ) tersinirdir denir. y (z) elemanına x elemanının sol (sağ) yaklaşımlı tersi denir. $x \in R$ hem sol ve hem de sağ tersinir ise elemanına tersinirdir denir.

Tanım 5.1.2 R bir yaklaşımlı halka olmak üzere, $\left(R \setminus \{0\}, \cdot\right)$ bir değişmeli yaklaşımlı grup ise R ye yaklaşımlı cisim denir.

Lemma 5.1.3 Tanımsal proksimal relator uzayında, her halka bir yaklaşımlı halkadır.

Lemma 5.1.4 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve $0_R \in R$ olsun. Bu durumda her $x, y \in R$ için $0_R \cdot x, x \cdot 0_R \in R$ olmak üzere,

(i) $x \cdot 0_R = 0_R \cdot x = 0_R$,

(ii) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

(iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

dir.

5.2 Alt Yaklaşımlı Cebirsel Yapılar

Tanım 5.2.1 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S, R deki "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile bir yaklaşımlı halka ise S ye R nin alt yaklaşımlı halkası denir.

Teorem 5.2.2 $\left(X, \delta_\Phi\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ yaklaşımlı halka ve $\left(\Phi^* S, +\right)$, $\left(\Phi^* S, \cdot\right)$ iki grupoid olsun. Bu durumda S nin R yaklaşımlı halkasının bir alt yaklaşımlı halkası olması için gerek ve yeter koşul her $x \in S$ için $-x \in S$ olmasıdır.

Teorem 5.2.3 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S_1 ve S_2, R nin iki alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda $\Phi^* S_1$ ve $\Phi^* S_2$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere

$$\left(\Phi^* S_1\right) \cap \left(\Phi^* S_2\right) = \Phi^* \left(S_1 \cap S_2\right)$$

ise $S_1 \cap S_2$, R nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

Sonuç 5.2.4 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve $\{S_i \mid i \in \Delta\}$ ailesi de R nin alt yaklaşımlı halkalarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda $\Phi^* S_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere

$$\bigcap_{i \in \Delta} \left(\Phi^* S\right) = \Phi^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} S_i\right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} S_i$, R nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

Tanım 5.2.5 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ bir yaklaşık halka ve I, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in I$ ve $r \in R$ için $x + y \in \Phi^* I$, $-x \in I$ ve $r \cdot x \in \Phi^* I \left(x \cdot r \in \Phi^* I\right)$ ise I ya R nin bir sol (sağ) yaklaşımlı ideali denir.

I hem sol hem de sağ yaklaşımlı ideali ise I ya R nin yaklaşımlı ideali denir.

Uyarı 5.2.6 R yaklaşımlı halkasının sadece bir tane aşikâr yaklaşımlı ideali vardır. Bu aşikâr yaklaşımlı ideali de R nin kendisidir. Ayrıca $\{0_R\}$ nin R nin aşikâr yaklaşımlı ideali olması için gerek yeter şart, $0_R \in R$ olmasıdır.

Lemma 5.2.7 Her yaklaşımlı ideal, R nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

Teorem 5.2.8 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, R bir yaklaşımlı halka, I_1 ve I_2, R nin iki yaklaşımlı ideali olsun. Bu durumda $\Phi^* I_1$ ve $\Phi^* I_2$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere

$$\left(\Phi^{*}I_{1}\right)\cap\left(\Phi^{*}I_{2}\right)=\Phi^{*}\left(I_{1}\cap I_{2}\right)$$

ise $I_1 \cap I_2$, R nin bir yaklaşımlı idealidir.

Sonuç 5.2.9 (X,δ_{Φ}) bir tanımsal proksimiti uzay, R bir yaklaşımlı halka ve $\{I_i | i \in \Delta\}$ ailesi de R nin yaklaşımlı ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda $\Phi^{*}I_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere

$$\bigcap_{i\in\Delta}\left(\Phi^{*}I\right)=\Phi^{*}\left(\bigcap_{i\in\Delta}I_{i}\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta} I_i$, R nin bir yaklaşımlı idealidir.

5.3 Yaklaşımlı Zayıf Kalan Sınıfları

Tanım 5.3.1 Boştan farklı $R \subseteq X$ kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı yansıyan ve simetrik ise bu bağıntıya zayıf eşdeğerlik bağıntısı denir.

$R \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S de R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda $x, y \in R$ olmak üzere, R nin elemanları arasında

$$x\rho_{\ell}y :\Leftrightarrow -x+y\in S\cup\{0_{R}\}$$

bağıntısı tanımlanabilir.

Teorem 5.3.2 R bir yaklaşımlı halka ve S de R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. O zaman "ρ_ℓ" bağıntısı R üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in R$ için "ρ_ℓ" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yaklaşımlı grubunda belirttiği sınıf:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\ell} &= \left\{y\in R \mid y\rho_{\ell}x\right\}\\ &= \left\{y\in R \mid (-x)+y\in S\cup\{0_{R}\}\right\}\end{aligned}$$

$$= \{ y \in R | (-x) + y \in S \ veya \ (-x) + y \in \{0_R\} \}$$

$$= \{ y \in R | y \in x + S \ ve (-x) + y = 0_R \}$$

$$= \{ y \in R | y \in x + S \ veya \ y = x \}$$

$$= \{ y \in R | y \in x + S \ veya \ y = x \}$$

ile belirlidir.

Benzer olarak $x, y \in R$ olmak üzere, R yaklaşımlı halkasının elemanları arasında

$$x \rho_r y :\Leftrightarrow y + (-x) \in S \cup \{0_R\}$$

bağıntısı tanımlanabilir.

Teorem 5.3.3 R bir yaklaşımlı halka ve S de R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. O zaman " ρ_r " bağıntısı R üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in R$ için " ρ_r " sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yaklaşımlı halkasında belirttiği sınıf:

$$\tilde{x}_r = \{ y \in R | y \rho_r x \}$$

$$= \{ y \in R | y + (-x) \in S \cup \{0_R\} \}$$

$$= \{ y \in R | y \in S + x \ veya \ x = y \}$$

$$= \{ y \in R | y \in S + x \ veya \ x = y \}$$

$$= \{ s + x | s \in S, x \in R, s + x \in R \} \cup \{x\}$$

ile belirlenir.

Tanım 5.3.4 " ρ_ℓ " bağıntısı ile belirlenen kalan sınıfına yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıf denir ve $x \in R$ için $\tilde{x}_\ell$ ile gösterilir. Benzer şekilde, " ρ_r " bağıntısı ile belirlenen kalan sınıfına yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıf denir ve $x \in R$ için $\tilde{x}_r$ ile gösterilir.

Kolayca görülebilir ki $\tilde{x}_\ell = x + S$ ve $\tilde{x}_r = S + x$ dir. $(R,+)$ değişmeli yaklaşımlı grup olduğundan $\tilde{x}_\ell = \tilde{x}_r$ dir. Bu durumda $\tilde{x}_\ell$ ve $\tilde{x}_r$ notasyonları yerine sadece $\tilde{x}$ kullanılır.

R nin S ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi

$$R/_{\rho} = \{x + S \mid x \in R\}$$

dir. Burada R yaklaşımlı halkası yerine $\Phi^* R$ alınırsa

$$\left(\Phi^* R\right)/_{\rho} = \{x + S \mid x \in \Phi^* R\}$$

elde edilir.

Tanım 5.3.5 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ yaklaşımlı halka ve S, R nin bir yaklaşımlı alt halkası olsun. $x, y \in R$ olmak üzere $x + S$ ve $y + S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x + y \in \Phi^* R$ elemanının belirlediği yaklaşımlı sol kalan sınıfı

$$(x+y)+S = \{(x+y)+s \mid s \in S, x+y \in \Phi^* R, \ (x+y)+s \in R\} \cup \{x+y\}$$

ile tanımlıdır. Buna yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(x+S) \oplus (y+S) = (x+y)+S$$

ile gösterilir.

Tanım 5.3.6 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R \subseteq X$ yaklaşımlı halka ve S, R nin bir yaklaşımlı alt halkası olsun. $x, y \in R$ olmak üzere $x + S$ ve $y + S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x \cdot y \in \Phi^* R$ elemanının belirlediği yaklaşımlı zayıf kalan sınıfı

$$(x \cdot y)+S = \{(x \cdot y)+s \mid s \in S, x \cdot y \in \Phi^* R, (x \cdot y)+s \in R\} \cup \{x \cdot y\}$$

ile tanımlıdır. Buna yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının çarpımı denir ve

$$\left(x+S\right)\odot\left(y+S\right)=\left(x\cdot y\right)+S$$

ile gösterilir.

Tanım 5.3.7 $\left(X,\delta_{\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimiti uzay, $R\subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. $R/_{\rho}$, R nin S ile belirlenen bütün yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_{\Phi}\left(A\right)$, $A\in P\left(X\right)$ kümesinin yaklaşımlı küme ailesi olmak üzere

$$\Phi^{*}\left(R/_{\rho}\right)=\bigcup_{\xi_{\Phi}(A)\cap_{\Phi} R/_{\rho}\neq\varnothing}\xi_{\Phi}\left(A\right)$$

kümesine $R/_{\rho}$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 5.3.8 $R\subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası ve R nin $R/_{\rho}$, R nin S ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda

$$\left(\Phi^{*}R\right)/\rho\subseteq\Phi^{*}\left(R/\rho\right)$$

ise $R/_{\rho}$, her $x,y\in R$ için

$$\left(x+S\right)\oplus\left(y+S\right)=\left(x+y\right)+S,$$

$$\left(x+S\right)\odot\left(y+S\right)=\left(x\cdot y\right)+S$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yaklaşımlı halkadır.

Tanım 5.3.9 $R\subseteq X$ yaklaşımlı halka ve S, R nin bir yaklaşımlı alt halkası olsun. $R/_{\rho}$ yaklaşımlı halkasına R nin S ile belirlenen tüm yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı halkası denir ve $R/_{\rho}S$ şeklinde gösterilir.

Tanım 5.3.10 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay ve $R_1, R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka olsun. Her $x, y \in R_1$ için

$$\psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y)$$

ve

$$\psi(x\cdot y)=\psi(x)\cdot\psi(y)$$

olacak şekilde bir

$$\psi:\Phi^* R_1 \to \Phi^* R_2$$

fonksiyonu varsa ψ ye yaklaşımlı halka homomorfizması denir. ψ, $\Phi^* R_1$ den $\Phi^* R_2$ ye tanımlı bir yaklaşımlı halka homomorfizması olmak üzere,

(1) ψ birebir ise ψ ye yaklaşımlı halka monomorfizması,

(2) ψ örten ise ψ ye yaklaşımlı halka epimorfizması,

(3) ψ birebir ve örten ise ψ ye yaklaşımlı halka izomorfizması

denir.

Ayrıca, ψ bir yaklaşımlı epimorfizma ise R_1 ile R_2 yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $R_1 \simeq_n R_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.3.11 $R_1, R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve $\psi:\Phi^* R_1 \to \Phi^* R_2$ bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(i) $0_{R_2} \in \Phi^* R_2$, R_2 nin yaklaşımlı sıfır elemanı olmak üzere, $\psi\left(0_{R_1}\right)=0_{R_2}$ dir.

(ii) Her $x \in R_1$ için $\psi(-x)=-\psi(x)$ dir.

Teorem 5.3.12 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1,R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve ψ, Φ^*R_1 den Φ^*R_2 ye tanımlı bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun. S, R_1 in alt yaklaşımlı halkası ve Φ^*S grupoid olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\psi\left(\Phi^*S\right)=\Phi^*\psi(S)$ ise $\psi(S)=\left\{\psi(x) \mid x\in S\right\}$, R_2 nin bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

(ii) S değişmeli ve $\psi\left(\Phi^*S\right)=\Phi^*\psi(S)$ ise $\psi(S)$, R_2 nin değişmeli bir alt yaklaşımlı halkasıdır.

Tanım 5.3.13 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1,R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve ψ, Φ^*R_1 den Φ^*R_2 ye tanımlı bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun.

$$Ker\psi=\left\{x\in R_1 \mid \psi(x)=0_{R_2}\right\}$$

kümesine ψ yaklaşımlı halka homomorfizmasının çekirdeği denir.

Teorem 5.3.14 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1,R_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı halka ve ψ, Φ^*R_1 den Φ^*R_2 ye tanımlı bir yaklaşımlı halka homomorfizması olsun. $\Phi^*Ker\psi$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte bir grupoid olmak üzere, $Ker\psi$, R_1 in yaklaşımlı idealidir.

Teorem 5.3.15 (X,δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay ve S, R nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda her $x\in\Phi^*R$ için

$$\Pi(x)=x+S$$

ile tanımlı

$$\Pi:\Phi^*R\to\Phi^*\left(R/_\rho S\right)$$

fonksiyonu bir yaklaşımlı halka homomorfizmasıdır.

Tanım 5.3.16 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay ve S, R_1 in bir alt yaklaşımlı halkası olsun. Bu durumda her $x \in \Phi^* R$ için

$$\Pi(x) = x + S$$

ile tanımlı

$$\Pi : \Phi^* R \to \Phi^* \left(R/_\rho\, S \right)$$

yaklaşımlı halka homomorfizmasına doğal yaklaşımlı homomorfizma denir.

Tanım 5.3.17 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay, $R_1, R_2 \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka ve S, R_1 in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\chi : \Phi^* R_1 \to \Phi^* R_2$$

bir fonksiyon ve

$$\chi_S = \chi\big|_S : S \to \Phi^* R_2$$

kısıtlanmış fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in S$ için

$$\chi(x+y) = \chi_S(x+y) = \chi_S(x) + \chi_S(y) = \chi(x) + \chi(y)$$

ve

$$\chi(x \cdot y) = \chi_S(x \cdot y) = \chi_S(x) \cdot \chi_S(y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$$

ise χ fonksiyonuna kısıtlanmış yaklaşımlı halka homomorfizması denir. O zaman R_1, R_2 ye kısıtlanmış yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $R_1 \simeq_r R_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.3.18 (X, δ_Φ) bir tanımsal proksimiti uzay ve χ, $\Phi^* R_1$ dan $\Phi^* R_2$ ye tanımlı bir yaklaşımlı halka homomorfizma olsun. $(\Phi^* Ker\chi, +)$ ve $(\Phi^* Ker\chi, \cdot)$ birer grupoid ve $\left(\Phi^* R_1\right)/_\rho$, $\Phi^*(R_1)$ in $Ker\chi$ tarafından belirlenen yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$\left(\Phi^* R_1\right)/_\rho \subseteq \Phi^* \left(R_1/_\rho\, Kerx \right)$$

ve

$$\Phi^{*}\chi\left(R_{1}\right)=\chi\left(\Phi^{*}R_{1}\right)$$

ise

$$R_{1}/_{\rho}\,Ker\chi\simeq_{r}\chi\left(R_{1}\right)$$

dir.

6. YAKIN HALKALAR

6.1 Temel Bilgiler

Halka kavramının genelleştirilmiş bir hali olan yakın halka kavramının halkadan farkı, halkada birinci işlemin değişmeli olması gerekirken yakın halkada birinci işlemin değişmeli olmasının gerekmemesidir. Ayrıca, halkada ikinci işlemin birinci işlem üzerine soldan ve sağdan dağılmalı olması gerekirken yakın halkada ikinci işlemin birinci işlem üzerine sadece bir taraftan dağılma özelliğine sahip olması yeterlidir.

Yakın halkalar ile ilgili ilk çalışma, 1905 yılında *Dickson* [11,12] tarafından aksiyomatik olarak verilmiştir. *Dickson* tarafından bir taraflı dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığı gösterilmiş ve bu tür cisimler yakın cisim olarak adlandırılmıştır. Yakın halka kavramı ilk defa 1936 yılında *Zassenhaus* [13] tarafından kullanılmış ve bütün sonlu yakın cisimler belirlenmiştir. Halkalar teorisindeki bazı temel teoremler yakın halkalar için de ifade edilebilir.

Yakın halka teorisi ile ilgili çalışan matematikçilerin göz önüne aldığı en temel kaynak, *Pilz*'in [16] *Near-Rings* adlı kitabı olup, bu bölümde yer alan bütün bilgiler bu kitaptan alınmıştır.

Tanım 6.1.1 [16] Boş olmayan bir M kümesi üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanırsa M ye bir *yakın halka* denir:

(i) $(M,+)$ bir gruptur (değişmeli olması gerekmez).

(ii) $(M,\cdot)$ bir yarı gruptur.

(iii) Her $n_1, n_2, n_3 \in M$ için $(n_1+n_2)\cdot n_3 = n_1\cdot n_3 + n_2\cdot n_3$ tür.

Not 6.1.2 Yukarıdaki tanım dikkate alındığında, (iii) den dolayı yakın halka kavramı yerine *sağ yakın halka* kavramı kullanılabilir. Ayrıca, (iii) nin yerine her $n_1, n_2, n_3 \in M$ için $n_1\cdot(n_2+n_3) = n_1\cdot n_2 + n_1\cdot n_3$ özelliği yazılırsa, bu durumda sol yakın halka kavramı tanımlanır. Bu çalışma boyunca *sağ yakın halka* kavramı kullanılacaktır.

Not 6.1.3 Genellikle $(M,+)$ grubunun etkisiz elemanı, $(M,+,\cdot)$ yakın halkasının sıfırı olarak tanımlanır. Ayrıca, bütün yakın halkaların kümesi $\mathcal{M}$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.4 [16] $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M(\Gamma)$ da Γ dan Γ ya olan tüm dönüşümlerin kümesi olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın halkadır. Gerçekten,

- $(M(\Gamma),+)$ **bir gruptur:** Her $f_1, f_2 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \in \Gamma$$

olduğundan, $M(\Gamma)$ kümesinde "$+$" işlemine göre kapalılık özelliği sağlanır.

Her $f_1, f_2, f_3 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}((f_1+f_2)+f_3)(x) &= (f_1+f_2)(x)+f_3(x)\\ &= (f_1(x)+f_2(x))+f_3(x)\\ &= f_1(x)+(f_2(x)+f_3(x))\\ &= f_1(x)+(f_2+f_3)(x)\\ &= (f_1+(f_2+f_3))(x)\end{aligned}$$

dir. Bu durumda $(f_1+f_2)+f_3 = f_1+(f_2+f_3)$ olur ve dolayısıyla $M(\Gamma)$ kümesinde "$+$" işlemine göre birleşme özelliği geçerlidir.

Her $x \in \Gamma$ için $\theta(x) = 0_\Gamma$ şeklinde tanımlanan $\theta : \Gamma \to \Gamma$ dönüşümü göz önüne alınırsa, her $f \in M(\Gamma)$ için $f+\theta = \theta + f = f$ dir. O zaman θ, $M(\Gamma)$ nın "$+$" işlemine göre etkisiz elemanıdır.

Her $x \in \Gamma$ için $(-f)(x) = -f(x)$ şeklinde tanımlanan $-f : \Gamma \to \Gamma$ dönüşümü dikkate alınırsa, her $f \in M(\Gamma)$ için $f + (-f) = (-f) + f = \theta$ dır. Bu durumda $-f$, $f \in M(\Gamma)$ nın "$+$" işlemine göre tersidir, yani "$+$" işlemine göre ters eleman özelliği sağlanır.

- $(M(\Gamma), \circ)$ **bir yarı-gruptur:** Her $f_1, f_2 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) \in \Gamma$$

olduğundan, $M(\Gamma)$ kümesinde "$\circ$" işlemine göre kapalılık özelliği geçerlidir.

Her $f_1, f_2, f_3 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$((f_1 \circ f_2) \circ f_3)(x) = (f_1 \circ (f_2 \circ f_3))(x)$$

olup, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$ tür. O halde $M(\Gamma)$ kümesinde "$\circ$" işlemine göre birleşme özelliği sağlanır.

- Her $f_1, f_2, f_3 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}((f_1 + f_2) \circ f_3)(x) &= (f_1 + f_2)(f_3(x)) \\ &= f_1(f_3(x)) + f_2(f_3(x)) \\ &= (f_1 \circ f_3)(x) + (f_2 \circ f_3)(x) \\ &= ((f_1 \circ f_3) + (f_2 \circ f_3))(x)\end{aligned}$$

dir. O zaman $(f_1 + f_2) \circ f_3 = (f_1 \circ f_3) + (f_2 \circ f_3)$ olur, yani sağdan dağılma özelliği geçerlidir.

Not 6.1.5 Yukarıda verilen $(M(\Gamma), +, \circ)$ cebirsel yapısı bir yakın halka olmasına rağmen, bu cebirsel yapı için soldan dağılma özelliği sağlanmadığından $M(\Gamma)$ bir halka değildir.

Yakın halkalar ile ilgili farklı örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 6.1.6 [16]

(1) $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M_0(\Gamma)=\{f\in M(\Gamma) \mid f(0_\Gamma)=0_\Gamma\}$ olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_0(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın halkadır.

(2) $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M_c(\Gamma)=\{f\in M(\Gamma) \mid f \ sabit\}$ olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_c(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın halkadır.

(3) $(\Gamma,+)$ bir grup ve

$$M_c^0(\Gamma)=\left\{ f_\delta\in M(\Gamma) \;\middle|\; f_\delta(\gamma)=\begin{cases}0_\Gamma & , \quad \gamma=0_\Gamma\\ \delta & , \quad \gamma\neq 0_\Gamma\end{cases}, \delta\in\Gamma \right\}$$

olsun. O halde dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_c^0(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın halkadır.

Lemma 6.1.7 [16] M yakın halkası için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $n\in M$ için $0_M\cdot n=0_M$ dir.

(2) Her $n,n'\in M$ için $(-n)\cdot n'=-(n\cdot n')$ dür.

Not 6.1.8 M bir yakın halka olmak üzere, her $n,n'\in M$ için $n\cdot 0_M=0_M$ ve $n\cdot(-n')=-(n\cdot n')$ eşitlikleri sağlanmayabilir. Örneğin, Örnek 6.1.4 te verilen $(M(\Gamma),+,\circ)$ yakın halkası dikkate alınırsa, her $f\in M(\Gamma)$ için $f\circ\theta=\theta$ olabilmesi için $f(0_\Gamma)=0_\Gamma$ koşulu sağlanmalıdır ve ayrıca, her $f_1,f_2\in M(\Gamma)$ için $f_1\circ(-f_2)=-(f_1\circ f_2)$ olabilmesi için f_1 tek fonksiyon olmalıdır.

Tanım 6.1.9 [16] M bir yakın halka olsun. O zaman $M_0 = \{n \in M \mid n \cdot 0_M = 0_M\}$ kümesine M nin *sıfır simetrik kısmı* ve $M_c = \{n \in M \mid n \cdot 0_M = n\}$ kümesine de M nin *sabit kısmı* denir.

Not 6.1.10 M_0 ve M_c, M üzerinde tanımlanan "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerine göre birer yakın halkadır. Ayrıca, $M = M_0$ ise M ye *sıfır simetrik yakın halka* ve $M = M_c$ ise M ye *sabit yakın halka* denir. Ayrıca, bütün sıfır-simetrik yakın halkaların kümesi $\mathcal{M}_0$ ve bütün sabit yakın halkaların kümesi de $\mathcal{M}_c$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.11 [16] $(M(\Gamma))_0 = M_0(\Gamma)$ ve $(M(\Gamma))_c = M_c(\Gamma)$ dir. Gerçekten,

$$(M(\Gamma))_0 = \{ f \in M(\Gamma) \mid f \circ \theta = \theta \} = \{ f \in M(\Gamma) \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma \} = M_0(\Gamma)$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c = \{ f \in M(\Gamma) \mid f \circ \theta = f \} &= \{ f \in M(\Gamma) \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ f(\gamma) = f(0_\Gamma) \} \\ &= \{ f \in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit} \} \\ &= M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır.

Not 6.1.12 Halka teorisinde kullandığımız etkisiz (birim) eleman, tersinir eleman, kısaltılabilir eleman, sıfır bölen, idempotent eleman ve nilpotent eleman kavramları, yakın halka teorisinde benzer şekilde tanımlanabilir.

Her $n, n' \in M$ için $d \cdot (n + n') = d \cdot n + d \cdot n'$ ise d elemanına *distribütif* (*dağılmalı*) *eleman* denir. Ayrıca, bütün birimli yakın halkaların kümesi $\mathcal{M}_1$ ve bütün distribütif elemanların kümesi de M_d ile gösterilir.

Teorem 6.1.13 [16] M bir yakın halka ve $e \in M$ bir idempotent eleman olsun. Bu durumda her $n \in M$ için $n = x + y$ olacak biçimde tek türlü belirlenen $x \in \left\{ n \in M \mid n \cdot e = 0_M \right\}$ ve $y \in M$ elemanları vardır.

Sonuç 6.1.14 [16] M bir yakın halka olsun. Bu durumda her $n \in M$ için $n = n_0 + n_c$ olacak biçimde tek türlü belirlenen $n_0 \in M_0$ ve $n_c \in M_c$ elemanları vardır, yani $(M,+) = (M_0,+) \oplus (M_c,+)$ dır.

Tanım 6.1.15 [16] M bir yakın halka olsun. O zaman

(i) $(M,+)$ abel ise M ye *abel yakın halka* denir.

(ii) $(M,\cdot)$ değişmeli ise M ye *değişmeli yakın halka* denir.

(iii) $M = M_d$ ise M ye *distribütif yakın halka* denir.

(iv) M , 0_M nin sıfırdan farklı bölenlerine sahip değilse M ye *tam yakın halka* denir.

(v) $\left(M - \{0_M\}, \cdot\right)$ bir grup ise M ye *yakın cisim* denir.

Örnek 6.1.16

(1) $(\Gamma,+)$ bir abel grup ise $(M(\Gamma),+)$ bir abel gruptur. Böylece $M(\Gamma)$ bir abel yakın halkadır.

(2) $(\Gamma,+)$ bir grup olmak üzere, Γ da her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $\alpha * \beta = \alpha$ şeklinde tanımlanan "$*$" işlemi dikkate alınırsa $(\Gamma,+,*)$ bir tam yakın halkadır.

(3) $\mathbb{Z}_2$ *mod* 2 kalan sınıflarının kümesi olmak üzere, $(\mathbb{Z}_2,+)$ bir gruptur. Ayrıca, $\mathbb{Z}_2$ de her $\overline{a} \in \mathbb{Z}_2$ için $\overline{0} \cdot \overline{a} = \overline{0}$ ve $\overline{1} \cdot \overline{a} = \overline{1}$ şeklinde tanımlanan "$\cdot$" işlemi dikkate alınırsa $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ bir yakın cisimdir.

6.2 N-Gruplar

Halka teorisindeki modül kavramına, yakın halka teorisinde karşılık gelen M -grup kavramını göz önüne alacağız.

Tanım 6.2.1 [16] $(\Gamma,+)$ bir grup ve M bir yakın halka olsun. Bu durumda

$$\mu : M \times \Gamma \to \Gamma \quad , \quad \mu((n,\gamma)) = n\gamma$$

şeklinde tanımlanan dış çarpımı dikkate alındığında, aşağıdaki özellikler sağlanırsa (Γ,μ) ikilisine bir M *-grup* (veya M de bir *yakın modül*) denir:

Her $\gamma \in \Gamma$ ve her $n, n' \in M$ için

$$(n+n')\gamma = n\gamma + n'\gamma \quad \text{ve} \quad (n \cdot n')\gamma = n(n'\gamma).$$

M -grup kavramı kısaca ${}_M\Gamma$ ile gösterilir. Ayrıca, bütün M -grupların kümesi ${}_M\mathcal{G}$ ile gösterilir.

Örnek 6.2.2 [16]

(1) $(M,+,\cdot)$ bir yakın halka ise M bir M -gruptur.

(2) R bir halka ve M de bir (sol) R -modül ise M bir R -gruptur.

(3) $(\Gamma,+)$ bir grup olsun. O zaman Γ,

$$\mu : M(\Gamma) \times \Gamma \to \Gamma \quad , \quad \mu((f,\gamma)) = f(\gamma)$$

şeklinde tanımlanan dış çarpımı ile bir $M(\Gamma)$ -gruptur.

Tanım 6.2.3 [16] $\mathcal{M}_1$ ve ${}_M\Gamma \in {}_M\mathcal{G}$ olmak üzere, her $\gamma \in \Gamma$ için $1\gamma = \gamma$ ise ${}_M\Gamma$ ya bir *üniter* (*birimsel*) M *-grup* denir.

Lemma 6.2.4 [16] M bir yakın halka ve Γ bir M -grup olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $\gamma \in \Gamma$ için $0_M \gamma = 0_\Gamma$ dır.

(2) Her $\gamma \in \Gamma$ ve her $n \in M$ için $(-n)\gamma = -n\gamma$ dır.

(3) Her $n \in M_0$ için $n0_\Gamma = 0_\Gamma$ dır.

(4) Her $\gamma \in \Gamma$ ve her $n \in M_c$ için $n\gamma = n0_\Gamma$ dır.

6.3 Alt Yapılar

Tanım 6.3.1 [16] M bir yakın halka ve $(P,+)$, $(M,+)$ nın bir alt grubu olsun. Bu durumda $P \cdot P \subseteq P$ ise P ye M nin bir *alt yakın halkası* denir.

Örnek 6.3.2 [16] M_0 ve M_c, M yakın halkasının birer alt yakın halkasıdır. Gerçekten,

- $(M_0,+)$, $(M,+)$ grubunun bir alt grubudur: Her $x, y \in M_0$ için

$$(x-y)\cdot 0_M = x\cdot 0_M - y\cdot 0_M = 0_M - 0_M = 0_M$$

olduğundan $x - y \in M_0$ dır.

- $M_0 \cdot M_0 \subseteq M_0$ dır: Her $x, y \in M_0$ için

$$(x\cdot y)\cdot 0_M = x\cdot(y\cdot 0_M) = x\cdot 0_M = 0_M$$

olup, $x \cdot y \in M_0$ dır.

Böylece M_0, M nin bir alt yakın halkasıdır. Benzer şekilde M_c nin de M nin bir alt yakın halkası olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 6.3.3 [16] M bir yakın halka ve Γ bir M-grup olsun. O zaman Γ nın $M\Delta \subseteq \Delta$ koşulunu sağlayan bir Δ alt grubuna, Γ nın bir *M-alt grubu* denir.

6.4 Homomorfizmalar ve İdealler

Tanım 6.4.1 [16] $M, M' \in \mathcal{M}$ ve $\Gamma, \Gamma' \in {}_M\mathcal{G}$ olsun. Bu durumda

(i) Her $m, n \in M$ için

$$\varphi(m+n)=\varphi(m)+\varphi(n) \text{ ve } \varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$$

ise $\varphi : M \to M'$ dönüşümüne bir *yakın halka homomorfizması* denir.

(ii) Her $\alpha,\beta \in \Gamma$ ve her $n \in M$ için

$$\psi(\alpha+\beta)=\psi(\alpha)+\psi(\beta) \text{ ve } \psi(n\alpha)=n\psi(\alpha)$$

ise $\psi : \Gamma \to \Gamma'$ dönüşümüne bir M *-homomorfizması* denir.

Benzer şekilde yakın halka teorisinde ve yakın-modül teorisinde monomorfizma, epimorfizma ve izomorfizma kavramları tanımlanabilir. $M, M' \in \mathcal{M}$ ve $\Gamma,\Gamma' \in {}_M\mathcal{G}$ olmak üzere, M den M' ye bütün yakın halka homomorfizmaların kümesi $Hom(M,M')$ ve Γ dan Γ' ye bütün M -homomorfizmaların kümesi de $Hom_N(\Gamma,\Gamma')$ ile gösterilir.

$M, M' \in \mathcal{M}$ olmak üzere, M den M' ye bir monomorfizma varsa M , M' ye *gömülebilir* denir.

Örnek 6.4.2 [16] M bir yakın halka ve Γ bir M -grup olsun. O zaman her $\gamma \in \Gamma$ için $\psi(n)=n\gamma$ şeklinde tanımlanan $\psi : M \to \Gamma$ dönüşümü bir M -homomorfizmasıdır, yani $\psi \in Hom_N(M,\Gamma)$ dır.

Tanım 6.4.3 [16] M bir yakın halka ve I , $(M,+)$ nın bir normal alt grubu olsun. Bu durumda

(i) $I \cdot M \subseteq I$,

(ii) Her $n,n' \in M$ ve her $a \in I$ için $n\cdot(n'+a)-n\cdot n' \in I$

koşulu sağlanıyorsa I ya M nin *ideali* denir ve $I \lhd M$ ile gösterilir.

Ayrıca, sadece (i) koşulunu sağlayan I ya M nin *sağ ideali* denir $\left(I \lhd_r M\right)$ ve sadece (ii) koşulunu sağlayan I ya M nin *sol ideali* denir $\left(I \lhd_\ell M\right)$.

Tanım 6.4.4 [16] M bir yakın halka ve Γ bir M-grup olsun. O zaman Δ, Γ nın bir normal alt grubu olmak üzere, her $\gamma \in \Gamma$, her $\delta \in \Delta$ ve her $n \in M$ için $n(\gamma+\delta)-n\gamma \in \Delta$ koşulu sağlanıyorsa Δ ya Γ nın *ideali* denir ve $\Delta \lhd_M \Gamma$ ile gösterilir.

Örnek 6.4.5 [16] M bir yakın halka ve Γ bir M-grup olsun. Bu durumda $\{0_M\}$, M ve $\{0_\Gamma\}$, Γ sırasıyla M ve Γ nın idealleri olup, bu ideallere triviyal ideal denir.

Not 6.4.6 M bir yakın halka ve I da M nin bir ideali olsun. O zaman $n, n' \in M$ olmak üzere,

$$n \equiv n' \left(\operatorname{mod} I\right) \quad :\Leftrightarrow \quad n - n' \in I$$

şeklinde tanımlanan "$\equiv$" bağıntısı bir kongrüans bağıntısıdır. Bu durumda "$\equiv$" bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan, bu bağıntıya göre denklik (kalan) sınıfları $n \in M$ için $\bar{n} = n + I = \left\{n' \mid n \equiv n' \left(\operatorname{mod} I\right)\right\}$ şeklindedir. Bütün denklik (kalan) sınıflarının kümesi $M/I = \left\{\bar{n} \mid n \in M\right\}$ ile gösterilir.

M bir yakın halka, Γ bir M-grup ve Δ da Γ nın bir ideali olmak üzere, benzer şekilde $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$\alpha \equiv \beta \left(\operatorname{mod} \Delta\right) \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha - \beta \in \Delta$$

biçiminde "$\equiv$" kongrüans bağıntısı ve dolayısıyla denklik (kalan) sınıflarının $\Gamma/\Delta = \left\{\bar{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\right\}$ kümesi tanımlanabilir.

Teorem 6.4.7 [16] M bir yakın halka ve I da M nin bir ideali olsun. O zaman M/I üzerinde, M deki "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri dikkate alınarak,

$$(m+I)+(n+I)=(m+n)+I \text{ ve } (m+I)\cdot(n+I)=(m\cdot n)+I$$

şeklinde tanımlanan “$+$” ve “$\cdot$” işlemlerine göre M/I bir yakın halkadır.

Tanım 6.4.8 [16] Yukarıda belirtilen $(M/I,+,\cdot)$ yakın halkasına, M yakın halkasının I idealine göre *bölüm yakın halkası* denir.

Tanım 6.4.9 [16] $M, M' \in \mathcal{N}$ ve $\varphi \in Hom(M, M')$ olmak üzere,

$$Ker\,\varphi = \{n \in M \mid \varphi(n) = 0_{M'}\}$$

kümesine φ yakın halka homomorfizmasının *çekirdeği* denir.

Teorem 6.4.10 [16] M ve M' iki yakın halka ve $\varphi : M \to M'$ bir yakın halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(1) K, M nin bir alt yakın halkası ise $\varphi(K)$ da M' nün bir alt yakın halkasıdır.

(2) I, M nin bir ideali ve φ örten ise $\varphi(I)$ da M' nün bir idealidir.

(3) K', M' nün bir alt yakın halkası (ideali) ise $\varphi^{-1}(K')$ de M nin bir alt yakın halkasıdır (idealidir).

Teorem 6.4.11 [16] (*Homomorfizma Teoremi*) M ve M' iki yakın halka olsun. O zaman

(1) $I \lhd M$ ise M/I, M nin bir homomorfik görüntüsüdür.

(2) $\varphi : M \to M'$ bir yakın halka epimorfizması ise $Ker\,\varphi$, M nin bir idealidir ve $M/Ker\,\varphi \cong M'$ dür.

Teorem 6.4.12 [16] M ve M' iki yakın halka ve $\varphi : M \to M'$ bir yakın halka epimorfizması olsun. O zaman M nin $Ker\,\varphi$ yi kapsayan alt yakın halkaları (idealleri) ile M' nün alt yakın halkaları (idealleri) arasında birebir eşleme vardır.

Teorem 6.4.13 [16] M ve M' iki yakın halka ve $\varphi : M \to M'$ bir yakın halka epimorfizması olsun. O zaman M nin $Ker\varphi$ yi kapsayan I idealleri için $N/I \cong \varphi(M)/\varphi(I)$ dır.

Teorem 6.4.14 [16] M bir yakın halka ve $I, J \lhd M$ olsun. Bu durumda $J \subseteq I$ olmak üzere, ${}^{M/J}\!\big/_{I/J} \cong M/I$ dır.

Not 6.4.15 Yukarıda verilen izomorfizma teoremleri M -gruplar için de geçerlidir.

7. BULGULAR ve TARTIŞMA

7.1 Yaklaşımlı Yakın Halka

Tanım 7.1.1 $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ bir tanımsal proksimal relator uzay, "$+$" ve "$\cdot$" X üzerinde birer ikili işlem olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere

$(YY1)$ N, "$+$" ikili işlemi ile bir yaklaşımlı gruptur. (Değişmeli olması gerekmez.)

$(YY2)$ N, "$\cdot$" ikili işlemi ile bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

$(YY3)$ Her $x, y, z \in N$ için

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

özellikleri $\Phi^* N$ de sağlanıyorsa N ye yaklaşımlı yakın halka denir.

$(YY4)$ Her $x, y \in N$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise N ye değişmeli yaklaşımlı yakın halka denir.

$(YY5)$ Her $x \in N$ için $1_N \cdot x = x \cdot 1_N$ olacak şekilde bir $1_N \in \Phi^* N$ varsa N ye birimli yaklaşımlı yakın halka denir.

$(YY3)$ den dolayı, yaklaşımlı yakın halka yerine yaklaşımlı sağ yakın halka kavramı kullanılabilir. $(YY3)$ yerine, her $x, y, z \in N$ için $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ koşulu sağlanıyorsa N ye yaklaşımlı sol yakın halka denir. Bu çalışma boyunca yaklaşımlı yakın halka kavramı kullanılmıştır.

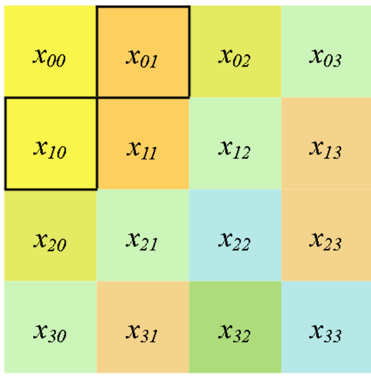
Genel olarak, $\left(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi}\right)$ yaklaşımlı grubunun etkisiz elemanı, yaklaşımlı yakın halkanın sıfırı olarak tanımlanır.

$(YY1)$ - $(YY3)$ koşulları $\Phi^* N$ de sağlanır. N deki elemanların sonlu tane toplamı veya çarpımı her zaman $\Phi^* N$ ye ait olmayabilir. Yani her $x \in N$ ve bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ için $nx \in \Phi^* N$ veya $x^n \in \Phi^* N$ olduğu kesin olarak söylenemez. $\left(\Phi^* N, +\right)$ ve $\left(\Phi^* N, \cdot\right)$

grupoid ise bu durumda her $x \in N$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \in \Phi^* N$ veya her $n \in \mathbb{Z}$ için $nx \in \Phi^* N$ olur.

N bir yaklaşımlı yakın halka ve $x \in N$ olmak üzere, $y \cdot x = 1_N$ ($x \cdot z = 1_N$) olacak şekilde bir $y \in \Phi^* N$ $\left(z \in \Phi^* N\right)$ varsa x elemanına sol (sağ) yaklaşımlı tersinirdir denir. y (z) elemanına x elemanının sol (sağ) yaklaşımlı tersi denir. $x \in N$ hem sol ve hem de sağ tersinir ise elemanına yaklaşımlı tersinirdir denir.

Örnek 7.1.2 I, δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı ile birlikte, Şekil 7.1 de olduğu gibi 16 pikselden oluşan bir dijital görüntü olsun.



Şekil 7.1. I dijital görüntüsü

I daki x_{ij} pikseli I dijital görüntüsündeki (i, j) (satır ve sütun) konumundaki pikseldir. φ, RGB kodunu temsil eden bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere φ nin aldığı değerler şekil 7.1 deki gibidir.

Tablo 7.1. Piksellerin RGB değerleri

	Red	Green	Blue
x_{00}	249	245	75
x_{01}	252	207	94
x_{02}	228	234	98
x_{03}	204	245	185
x_{10}	249	245	75
x_{11}	252	207	94
x_{12}	204	245	185
x_{13}	244	212	140

	Red	Green	Blue
x_{20}	228	234	98
x_{21}	204	245	185
x_{22}	181	232	231
x_{23}	244	212	140
x_{30}	204	245	185
x_{31}	244	212	140
x_{32}	174	220	124
x_{33}	181	232	231

$i+k \equiv m \pmod 2$ ve $j+l \equiv n \pmod 2$ $\left(0 \le i, j, k, l \le 3\right)$ olmak üzere,

$$+ : I \times I \to I$$

$$\left(x_{ij}, x_{kı}\right) \mapsto x_{ij} + x_{kı} = x_{mn}$$

I üzerinde bir ikili işlem ve $N = \left\{x_{01}, x_{10}\right\} \subseteq I$ bir alt dijital görüntü olsun. Bu durumda

$$Q(N) = \left\{\varphi(x_{01}), \varphi(x_{10})\right\}$$

$$= \left\{(252, 207, 94), (249, 245, 75)\right\}$$

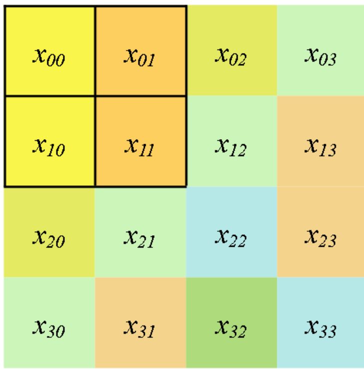
dir. Tanım 4.1.13 ten N nin tanımsal üst yaklaşımı

$$\Phi^* N = \left\{x_{ij} \in I \mid x_{ij} \delta_\Phi N\right\}$$

$$= \left\{x_{ij} \in I \,\middle|\, \left\{\varphi\left(x_{ij}\right)\right\} \cap Q(N) \neq \varnothing\right\}$$

$$= \left\{x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11}\right\}$$

olur. Bu durumda N nin tanımsal üst yaklaşımı Şekil 7.2 deki gibidir.



Şekil 7.2. N nin tanımsal üst yaklaşımı

Tanım 4.2.17 den I, "$+$" işlemi ile bir yaklaşımlı gruptur.

$$\cdot : I \times I \to I$$

$$\left(x_{ij}, x_{kl}\right) \mapsto x_{ij} \cdot x_{kl} = x_{ij}$$

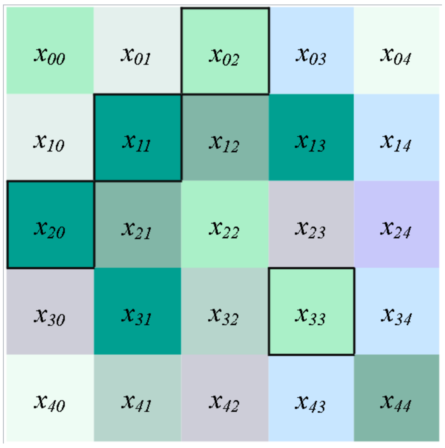
I üzerinde bir ikili işlem olsun. O halde N, I daki "$\cdot$" ikili işlemi ile bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

Her $x_{ij}, x_{kl}, x_{mn} \in N$ için

$$\left(x_{ij} + x_{kl}\right) \cdot x_{mn} = x_{ij} \cdot x_{mn} + x_{kl} \cdot x_{mn}$$

özelliği $\Phi^* N$ de sağlanır. Fakat $x_{01} \cdot \left(x_{01} + x_{01}\right) \neq x_{01} \cdot x_{01} + x_{01} \cdot x_{01}$ eşit olmadığından $x_{ij} \cdot \left(x_{kl} + x_{mn}\right) = x_{ij} \cdot x_{kl} + x_{ij} \cdot x_{mn}$ özelliği $\Phi^* N$ de sağlanmaz. Sonuç olarak, N bir yaklaşımlı sağ yakın halkadır.

Örnek 7.1.3 I, δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı ile birlikte, Şekil 7.3 te olduğu gibi 25 pikselden oluşan bir dijital görüntü olsun.



Şekil 7.3. I dijital görüntüsü

I daki x_{ij} pikseli I dijital görüntüsündeki (i, j) (satır ve sütun) konumundaki pikseldir. φ, RGB kodunu temsil eden bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere φ nin aldığı değerler Tablo 7.2 deki gibidir.

Tablo 7.2. Piksellerin RGB değerleri

	Red	Green	Blue
x_{00}	170	240	200
x_{01}	228	240	237
x_{02}	170	240	200
x_{03}	200	230	255
x_{04}	238	252	244
x_{10}	228	240	237
x_{11}	0	160	145
x_{12}	130	182	167
x_{13}	0	160	145
x_{14}	200	230	255

	Red	Green	Blue
x_{20}	0	160	145
x_{21}	130	182	167
x_{22}	170	240	200
x_{23}	205	205	216
x_{24}	200	200	250
x_{30}	205	205	216
x_{31}	0	160	145
x_{32}	183	213	204
x_{33}	170	240	200
x_{34}	200	230	255

	Red	Green	Blue
x_{40}	238	252	244
x_{41}	183	213	204
x_{42}	205	205	216
x_{43}	200	230	255
x_{44}	130	182	167

$i+k \equiv m(\operatorname{mod} 4)$ ve $j+l \equiv n(\operatorname{mod} 4)$ $(0 \le i, j, k, l \le 4)$ olmak üzere,

$$+ : I \times I \to I$$

$$\left(x_{ij}, x_{kı}\right) \mapsto x_{ij} + x_{kı} = x_{mn}$$

I üzerinde bir ikili işlem ve $N = \{x_{02}, x_{11}, x_{20}, x_{33}\} \subseteq I$ bir alt dijital görüntü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q(N) &= \{\varphi(x_{02}), \varphi(x_{11}), \varphi(x_{20}), \varphi(x_{33})\} \\ &= \{(170, 240, 200), (0, 160, 145)\} \end{aligned}$$

dir. Tanım 4.1.13 ten N nin tanımsal üst yaklaşımı

$$\begin{aligned} \Phi^* N &= \{x_{ij} \in I \mid x_{ij} \delta_\Phi N\} \\ &= \left\{x_{ij} \in I \middle| \{\varphi(x_{ij})\} \cap Q(N) \neq \emptyset \right\} \\ &= \{x_{00}, x_{02}, x_{11}, x_{13}, x_{20}, x_{22}, x_{31}, x_{33}\} \end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.2.17 den I, "$+$" işlemi ile bir yaklaşımlı gruptur.

$$\cdot : I \times I \to I$$

$$\left(x_{ij}, x_{kl}\right) \mapsto x_{ij} \cdot x_{kl} = x_{ij}$$

I üzerinde bir ikili işlem olsun. O halde N, I daki "$\cdot$" ikili işlemi ile bir yaklaşımlı yarı-gruptur. Her $x_{ij}, x_{kl}, x_{mn} \in N$ için

$$\left(x_{ij} + x_{kl}\right) \cdot x_{mn} = x_{ij} \cdot x_{mn} + x_{kl} \cdot x_{mn}$$

özelliği $\Phi^* N$ de sağlanır. $x_{02} \cdot (x_{02} + x_{02}) \neq x_{02} \cdot x_{02} + x_{02} \cdot x_{02}$ eşit olmadığından $x_{ij} \cdot (x_{kl} + x_{mn}) = x_{ij} \cdot x_{kl} + x_{ij} \cdot x_{mn}$ özelliği $\Phi^* N$ de sağlanmaz. Bundan dolayı N, yaklaşımlı sağ yakın halkadır.

Teorem 7.1.4 Her yakın halka bir yaklaşımlı yakın halkadır.

İspat. $N \subseteq X$ bir yakın halka olsun. Aynı zamanda $N \subseteq \Phi^* N$ dir. Bundan dolayı $(YY1)$- $(YY3)$ koşulları $\Phi^* N$ de sağlanır. Böylece N yaklaşımlı yakın halkadır.

Teorem 7.1.5 Her yaklaşımlı halka bir yaklaşımlı yakın halkadır.

İspat. $N \subseteq X$ bir yaklaşımlı halka olsun. Yaklaşımlı halka tanımından N nin yaklaşımlı yakın halka olduğu kolayca görülür.

Lemma 7.1.6 $N \subseteq X$ bir yaklaşımlı yakın halka ve $0_N \in N$ olsun. Bu durumda $x \in N$ için $0_N \cdot x \in N$ olmak üzere,

(i) Her $x \in N$ için $0_N \cdot x = 0_N$

(ii) Her $x, y \in N$ için $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

dir.

İspat. (i) N bir yaklaşımlı yakın halka olmak üzere $x, 0_N \in N$ için

$$0_N \cdot x = (0_N + 0_N) \cdot x = 0_N \cdot x + 0_N \cdot x$$

dir. $0_N \cdot x \in N$ nin toplamsal tersi $-(0_N \cdot x) \in N$ vardır. Bu durumda birim elemanın tekliğinden

$$-(0_N \cdot x) + 0_N \cdot x = -(0_N \cdot x) + 0_N \cdot x + 0_N \cdot x$$

$$\Rightarrow 0_N = 0_N + 0_N \cdot x$$

$$\Rightarrow 0_N = 0_N \cdot x$$

elde edilir.

(ii) (i) den her $x \in N$ için $0_N \cdot x = 0_N$ olduğundan,

$$0_N = 0_N \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = x \cdot y + (-x) \cdot y$$

dir. $(N, +)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan $x \cdot y$ elemanının toplamsal tersi vardır ve ters elemanın tekliğinden

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$$

dir.

Not 7.1.7 N bir yaklaşımlı yakın halka olmak üzere, her $x, y \in N$ için $x \cdot 0_N = 0_N$ ve $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ eşitlikleri sağlanmayabilir.

Tanım 7.1.8 N bir yaklaşımlı yakın halka olsun. O zaman

$N_0 = \{x \in N \mid x \cdot 0_N = 0_N\}$ kümesine N nin sıfır-simetrik kısmı ve

$N_c = \{x \in N \mid x \cdot 0_N = x\}$ kümesine de N nin sabit kısmı denir.

Not 7.1.9 $N = N_0$ ise N ye sıfır-simetrik yaklaşımlı yakın halkla, $N = N_c$ ise N ye sabit yaklaşımlı yakın halka denir. Ayrıca, bütün sıfır-simetrik yakın halkaların kümesi N_0, bütün sabit yaklaşımlı yakın halkaların kümesi de N_c ile gösterilir.

Her $x, y \in N$ için

$d \cdot (x + y) = d \cdot x + d \cdot y$ özelliği $\Phi^* N$ de geçerli ise d elemanına distrübitif (dağılmalı) eleman denir. Ayrıca, birimli yaklaşımlı yakın halkaların kümesi N_1 ve bütün distribütif elemanların kümesi de N_d ile gösterilir. $N_1 = N_d$ ise N ye distribütif yaklaşımlı yakın halka denir.

7.2 Yaklaşımlı N-Gruplar ve Alt Cebirsel Yapılar

Tanım 7.2.1 $(G,+)$ bir yaklaşımlı grup ve N bir yaklaşımlı yakın halka olsun. Bu durumda

$$\omega : \Phi^* N \times G \to G \quad , \quad \omega((x, g)) = xg$$

şeklinde tanımlanan dış çarpım dikkate alındığında, aşağıdaki özellikler sağlanırsa (G, ω) ikilisine bir yaklaşımlı N-*grup* denir:

Her $g \in G$ ve her $x, y \in N$ için

$$(x + y)g = xg + yg \quad \text{ve} \quad (xy)g = x(yg).$$

Yaklaşımlı N-grup kavramı kısaca ${}_N G$ ile gösterilir. Ayrıca, bütün yaklaşımlı N-grupların kümesi ${}_N\mathcal{G}$ ile gösterilir.

Teorem 7.2.2 Her yaklaşımlı yakın halka bir yaklaşımlı N-gruptur.

Lemma 7.2.3 $N \subseteq X$ bir yaklaşımlı yakın halka, $0_N \in N$ ve G yaklaşımlı N-grup olsun. Bu durumda her $x, y \in N$ için $0_N \cdot x \in N$ olmak üzere,

(i) Her $g \in G$ için $0_N g = 0_G$,

(ii) Her $g \in G$ ve $x \in N$ için $(-x)g = -xg$,

(iii) Her $x \in N_0$ için $x0_G = 0_G$,

(iv) Her $g \in G$ ve $x \in N_C$ için $xg = x0_G$

dir.

İspat. (i) Her $g \in G$ için,

$$0_N g = (0_N + 0_N)g = 0_N g + 0_N g$$

olur. Etkisiz elemanın tekliğinden $0_N g = 0_G$ dir.

(ii) *(i)* den her $g \in G$ için, $0_N g = 0_G$ dir. Bu durumda

$$0_G = 0_N g = ((-x) + x)g = (-x)g + xg$$

olur. Ters elemanın tekliğinden her $g \in G$ ve $x \in N$ için $(-x)g = -xg$ bulunur.

(iii) Her $x \in N_0$ için $x0_N = 0_N$ olduğundan, *(i)* den

$$x0_G = x(0_N g) = (x \cdot 0_N)g = 0_N g = 0_G$$

olur.

(iv) Her $x \in N_C$ için $x0_N = x$ olduğundan, *(i)* den

$$xg = (x \cdot 0_N)g = x(0_N g) = x0_G$$

olur.

Tanım 7.2.4 N bir yaklaşımlı yakın halka ve $(K,+)$, $(N,+)$ nın bir alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda $K \cdot K \subseteq \Phi^* N$ ise K ya N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkası denir.

Teorem 7.2.5 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K da N nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $(\Phi^* N,+)$ ve $(\Phi^* N,\cdot)$ birer grupoid olsun. Bu durumda K nın N yaklaşımlı yakın halkasının bir alt yaklaşımlı yakın halkası olması için gerek ve yeter koşul her $x \in K$ için $-x \in K$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ K, N yaklaşımlı yakın halkasının bir alt yaklaşımlı yakın halkası olsun. Bu durumda $(K,+)$ bir yaklaşımlı gruptur. Böylece her $x \in K$ için $-x \in K$ dir.

$(\Leftarrow)$ Hipotezden $(\Phi^* N,+)$ bir grupoid ve $K \subseteq N$ olduğundan ve Teorem 4.2.15 gereğince $(K,+)$ bir yaklaşımlı gruptur. $(\Phi^* N,\cdot)$ bir grupoid, $K \subseteq N$ ve N bir yaklaşımlı yakın halka olduğundan, $K \subseteq N \subseteq \Phi^* N$ dir ve böylece $\Phi^* N$ de birleşme özelliği sağlanır. Bu durumda $(K,\cdot)$ bir yaklaşımlı yarı-gruptur. Her $x,y,z \in K \subseteq N$ için $y+z \in \Phi^* N$, $(y+z)\cdot x \in \Phi^* N$ ve $y\cdot z+z\cdot x \in \Phi^* N$ dir. N yaklaşımlı bir yakın halka olduğundan $(y+z)\cdot x = (y\cdot x)+(z\cdot x)$ özelliği $\Phi^* N$ de sağlanır. Böylece K, N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

Tanım 7.2.6 N yaklaşımlı yakın halka, G yaklaşımlı N-grup ve H, $(G,+)$ nın bir yaklaşımlı alt grubu olsun. Bu durumda

$$N \cdot H \subseteq \Phi^* H$$

koşulu sağlanıyorsa H ye G nin alt yaklaşımlı N-grubu denir.

Tanım 7.2.7 N yaklaşımlı yakın halka ve I, $(N,+)$ nın bir alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda

(1) $I \cdot N \subseteq \Phi^* I$,

(2) Her $x,y \in N$ ve her $a \in I$ için $x\cdot(y+a)-x\cdot y \in \Phi^* I$

koşulları sağlanıyorsa I ya N nin yaklaşımlı ideali denir.

Eğer sadece (1) koşulu sağlanıyorsa I ya N nin sağ yaklaşımlı ideali denir. Ayrıca, eğer sadece (2) koşulu sağlanıyorsa I ya N nin sol yaklaşımlı ideali denir.

Tanım 7.2.8 N yaklaşımlı yakın halka, G yaklaşımlı N-grup ve H, $(G,+)$ nın bir alt yaklaşımlı N-grubu olsun. Bu durumda her $g \in G$, her $h \in H$ ve her $x \in N$ için

$$x(g+h) - xg \in \Phi^* H$$

koşulu sağlanıyorsa H ye G nin yaklaşımlı ideali denir.

Teorem 7.2.9 N yaklaşımlı yakın halka, K_1 ve K_2, N nin iki alt yaklaşımlı yakın halkası olsun. Bu durumda $\Phi^* K_1$ ve $\Phi^* K_2$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere

$$\left(\Phi^* K_1\right) \cap \left(\Phi^* K_2\right) = \Phi^*\left(K_1 \cap K_2\right)$$

ise $K_1 \cap K_2$, N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

İspat. K_1 ve K_2, N nin iki alt yaklaşımlı yakın halkası olsun. $K_1 \cap K_2 \subseteq N$ olduğu açıktır. $\Phi^* K_1$ ve $\Phi^* K_2$, N deki işlemlere göre birer grupoid ve

$$\left(\Phi^* K_1\right) \cap \left(\Phi^* K_2\right) = \Phi^*\left(K_1 \cap K_2\right)$$

olduğundan $\Phi^*\left(K_1 \cap K_2\right)$ de N deki işlemlere göre bir grupoiddir. $x \in K_1 \cap K_2$ olsun. K_1 ve K_2 iki alt yaklaşımlı yakın halka olduğundan $-x \in K_1$ ve $-x \in K_2$ olup, $-x \in K_1 \cap K_2$ olur. Sonuç olarak Teorem 7.2.5 ten $K_1 \cap K_2$, N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

Sonuç 7.2.10 N yaklaşımlı yakın halka ve $\{K_i \mid i \in \Delta\}$ ailesi de N nin alt yaklaşımlı yakın halkalarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda $\Phi^* K_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte birer grupoid olmak üzere

$$\bigcap_{i\in\Delta}\left(\Phi^{*}K\right)=\Phi^{*}\left(\bigcap_{i\in\Delta}K_i\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta}K_i$, N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

7.3 Yaklaşımlı Zayıf Kalan Sınıflarının Yaklaşımlı Yakın Halkası

N yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin alt yaklaşımlı yakın halkası olsun. Bu durumda $x, y \in N$ olmak üzere, N nin elemanları arasında

$$x \sim_r y :\Leftrightarrow x+(-y)\in K \cup \{0_N\}$$

bağıntısı tanımlanabilir.

Teorem 7.3.1 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K da N nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. O zaman $\sim_r$ bağıntısı N üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. N bir yaklaşımlı yakın halka olduğundan her $x\in N$ için $-x\in N$ dir. $x+(-x)=\{0_R\}$ olduğundan $x\sim_r x$ olur.

Her $x, y\in N$ için $x\sim_r y$ ise $x+(-y)\in K\cup\{0_N\}$, yani $x+(-y)\in K$ veya $x+(-y)\in\{0_R\}$ olur. $x+(-y)\in K$ ise $(N,+)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan $-(x+(-y))=y+(-x)\in K$ dır. Böylece $y\sim_r x$ bulunur. Ayrıca, $x+(-y)\in\{0_N\}$ ise $x+(-y)=0_N$ dir. Buradan $x+(-y)=-(x+(-y))=-0_N=0_N$ ve böylece $y\sim_r x$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_r$" bağıntısı N üzerinde bir sağ eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x\in N$ için "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının N yaklaşımlı yakın halkasında belirttiği sınıf:

$$\tilde{x}_r=\{k+x \mid k\in K, x\in N, k+x\in N\}\cup\{x\}$$

ile belirlenir.

N yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin alt yaklaşımlı yakın halkası olsun. Bu durumda $x, y \in N$ olmak üzere, N nin elemanları arasında

$$x \sim_{\ell} y :\Leftrightarrow (-x) + y \in K \cup \{0_N\}$$

bağıntısı tanımlanabilir.

Teorem 7.3.2 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K da N nin bir alt yaklaşımlı halkası olsun. O zaman "$\sim_{\ell}$" bağıntısı N üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $(N,+)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan her $x \in N$ için $-x \in N$ dir. $x + (-x) = \{0_N\}$ olduğundan $x \sim_{\ell} x$ olur.

Her $x, y \in R$ için $x \sim_{\ell} y$ ise $(-x) + y \in K \cup \{0_N\}$, yani $(-x) + y \in K$ veya $(-x) + y \in \{0_N\}$ olur. $(-x) + y \in K$ ise $(N,+)$ bir yaklaşımlı grup olduğundan $-((-x) + y) = (-y) + x \in K$ dır. Böylece $y \sim_{\ell} x$ bulunur. Ayrıca, $(-x) + y \in \{0_N\}$ ise $(-x) + y = 0_N$ dir. Buradan $(-y) + x = -((-x) + y) = -0_N = 0_N$ ve böylece $y \sim_{\ell} x$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_{\ell}$" bağıntısı N üzerinde bir sol eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in N$ için "$\sim_{\ell}$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının N yaklaşımlı yakın halkasında belirttiği sınıf:

$$\tilde{x}_{\ell} = \{x + k \mid k \in K, x \in N, x + k \in N\} \cup \{x\}$$

ile belirlenir.

Tanım 7.3.3 "$\sim_{\ell}$" bağıntısı ile belirlenen kalan sınıfına yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıf denir ve $x \in N$ için $\tilde{x}_{\ell}$ ile gösterilir. Benzer şekilde, "$\sim_r$" bağıntısı ile belirlenen kalan sınıfına yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıf denir ve $x \in N$ için $\tilde{x}_r$ ile gösterilir.

Kolayca görülebilir ki $\tilde{x}_\ell = x + K$ ve $\tilde{x}_r = K + x$ dir. $(N,+)$ her zaman değişmeli olmayabilir. Bu durumda $\tilde{x}_\ell \neq \tilde{x}_r$ dir. Eğer $(N,+)$ değişmeli yaklaşımlı grup ise $\tilde{x}_\ell = \tilde{x}_r$ olur.

N nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi

$$N/_{\sim_\ell} = \{x + K \mid x \in N\}$$

dir. Burada N yaklaşımlı yakın halkası yerine $\Phi^* N$ alınırsa

$$(\Phi^* N)/_{\sim_\ell} = \{x + K \mid x \in \Phi^* N\}$$

elde edilir.

Tanım 7.3.4 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin bir yaklaşımlı alt yakın halkası olsun. $x, y \in N$ olmak üzere $x + K$ ve $y + K$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x + y \in \Phi^* N$ elemanının belirlediği yaklaşımlı sol kalan sınıfı

$$(x+y)+K = \{(x+y)+k \mid k \in K, x+y \in \Phi^* N,\ (x+y)+k \in N\} \cup \{x+y\}$$

ile tanımlıdır. Buna yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(x+K) \oplus (y+K) = (x+y)+K$$

ile gösterilir.

Tanım 7.3.5 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin bir yaklaşımlı alt yakın halkası olsun. $x, y \in N$ olmak üzere $x + K$ ve $y + K$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı olsun. Bu durumda $x \cdot y \in \Phi^* N$ elemanının belirlediği yaklaşımlı sol kalan sınıfı

$$(x \cdot y)+K = \{(x \cdot y)+k \mid k \in K, x \cdot y \in \Phi^* N, (x \cdot y)+k \in N\} \cup \{x \cdot y\}$$

ile tanımlıdır. Buna yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının çarpımı denir ve

$$\left(x+K\right)\odot\left(y+K\right)=\left(x\cdot y\right)+K$$

ile gösterilir.

Tanım 7.3.6 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkası olsun. $N/_{\sim_\ell}$, N nin K ile belirlenen bütün yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi\left(S\right),\ S\in P\left(X\right)$ kümesinin yaklaşımlı küme ailesi olmak üzere

$$\Phi^*\left(N/_{\sim_\ell}\right)=\bigcup_{\xi_\Phi(S)\underset{\Phi}{\cap}N/_{\sim_\ell}\neq\varnothing}\xi_\Phi\left(S\right)$$

kümesine $N/_{\sim_\ell}$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 7.3.7 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkası ve $N/_{\sim_\ell}$, N nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda

$$\left(\Phi^*N\right)/\sim_\ell\subseteq\Phi^*\left(N/\sim_\ell\right)$$

ise $N/_{\sim_\ell}$, her $x,y\in N$ için

$$\left(x+K\right)\oplus\left(y+K\right)=\left(x+y\right)+K,$$

$$\left(x+K\right)\odot\left(y+K\right)=\left(x\cdot y\right)+K$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yaklaşımlı yakın halkadır.

İspat. $\left(YY_1\right)$ $\left(\Phi^*N\right)/_{\sim_\ell}\subseteq\Phi^*\left(N/_{\sim_\ell}\right)$ olsun. N bir yaklaşımlı yakın halka olduğundan ve Teorem 4.2.29 dan $\left(N/_{\sim_\ell},\oplus\right)$, N nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı grubudur.

(YY_2) $(N,\cdot)$ bir yaklaşımlı yarı grup olduğundan, her $x,y\in N$ için $x\cdot y\in\Phi^*N$ ve her $(x+K),(y+K)\in N/_{\sim_\ell}$ için

$$(x+K)\odot(y+K)=(x\cdot y)+K\in\left(\Phi^*N\right)\big/_{\sim_\ell}$$

dir. Hipotezden $(x+K),(y+K)\in N/_{\sim_\ell}$ için

$$(x+K)\odot(y+K)=(x\cdot y)+K\in\Phi^*\left(N/_{\sim_\ell}\right)$$

bulunur.

$(N,\cdot)$ bir yaklaşımlı yarı grup olduğundan, her $x,y,z\in N$ için Φ^*N de birleşme özelliği sağlanır. Bu durumda $(x+K),(y+K),(z+K)\in N\big/_{\sim_\ell}$ için

$$\begin{aligned}((x+K)\odot(y+K))\odot(z+K) &= ((x\cdot y)+K)\odot(z+K)=((x\cdot y)\cdot z)+K\\ &=(x\cdot(y\cdot z))+K=(x+K)\odot((y\cdot z)+K)\\ &=(x+K)\odot((y+K)\odot(z+K))\end{aligned}$$

şitliği $\left(\Phi^*N\right)\big/_{\sim_\ell}$ de sağlanır. Böylece hipotezden her $(x+K),(y+K),(z+K)\in N\big/_{\sim_\ell}$ için $\Phi^*\left(N\big/_{\sim_\ell}\right)$ de birleşme özelliği sağlanır. Sonuç olarak, $\left(N\big/_{\sim_\ell},\odot\right)$, N nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı yarı-grubudur.

(YY_3) N bir yaklaşımlı yakın halka olduğundan Φ^*N de sağdan dağılma özelliği sağlanır. Her $(x+K),(y+K),(z+K)\in N\big/_{\sim_\ell}$ için

$$\begin{aligned}((x+K)\oplus(y+K))\odot(x+K) &= ((x+y)+K)\odot(z+K)=((x+y)\cdot z)+K\\ &=((x\cdot z)+(y\cdot z))+K\end{aligned}$$

$$=\left(\left(x\cdot z\right)+K\right)\oplus\left(\left(y\cdot z\right)+K\right)$$

$$=\left(\left(x+K\right)\odot\left(y+K\right)\right)\oplus\left(\left(x+K\right)\odot\left(z+K\right)\right)$$

olur. Böylece $\left(\Phi^{*}N\right)/_{\sim_{\ell}}$ de sağdan dağılma özelliği sağlanır. Sonuç olarak, $N/_{\sim_{\ell}}$ bir yaklaşımlı yakın halkadır.

Tanım 7.3.8 N bir yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin bir yaklaşımlı alt yakın halkası olsun. $N/_{\sim_{\ell}}$ yaklaşımlı halkasına N nin K ile belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı yakın halkası denir ve $N/_{\sim}K$ şeklinde gösterilir.

7.4 Yaklaşımlı Yakın Halka Homomorfizmaları

Tanım 7.4.1 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka olsun. Her $x, y \in N_1$ için

$$\psi\left(x+y\right)=\psi\left(x\right)+\psi\left(y\right)$$

ve

$$\psi\left(x\cdot y\right)=\psi\left(x\right)\cdot\psi\left(y\right)$$

olacak şekilde bir

$$\psi:\Phi^{*}N_1\to\Phi^{*}N_2$$

fonksiyonu varsa ψ ye yaklaşımlı yakın halka homomorfizması denir. N_1 ve N_2 yaklaşımlı yakın halkalarına da yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $N_1 \simeq_a N_2$ ile gösterilir.

ψ, $\Phi^{*}N_1$ den $\Phi^{*}N_2$ ye bir yaklaşımlı yakın halka homorfizması olmak üzere

(i) ψ, birebir ise ψ ye yaklaşımlı yakın halka monomorfizması,
(ii) ψ, örten ise ψ ye yaklaşımlı yakın halka epimorfizması,
(iii) ψ, birebir ve örten ise ψ ye yaklaşımlı yakın halka izomorfizması

denir.

$\Phi^* N_1$ den $\Phi^* N_2$ ye bütün yaklaşımlı yakın halka homomorfizmalarının kümesi $Hom\left(\Phi^* N_1, \Phi^* N_2\right)$ ile gösterilir.

Teorem 7.4.2 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka ve ψ, $\Phi^* N_1$ den $\Phi^* N_2$ ye bir yaklaşımlı yakın halka homorfizması olsun. Bu durumda

(1) $0_{N_2} \in \Phi^* N_2$, N_2 nin yaklaşımlı sıfır elemanı olmak üzere, $\Psi\left(0_{N_1}\right) = 0_{N_2}$ dir.

(2) Her $x \in N_2$ için $\Psi(-x) = -\Psi(x)$

İspat. (1) $0_{N_1} = 0_{N_1} + 0_{N_1}$ olup, bu eşitliğe yaklaşımlı yakın halka homomorfizma uygulanırsa

$$\Psi\left(0_{N_1}\right) = \Psi\left(0_{N_1} + 0_{N_1}\right) = \Psi\left(0_{N_1}\right) + \Psi\left(0_{N_1}\right)$$

elde edilir. Böylece N_2 deki " $+$ " işlemine göre etkisiz elemanın tekliğinden $\Psi\left(0_{N_1}\right) = 0_{N_2}$ dir.

(2) $x \in N_1$ olmak üzere, $0_{N_1} = x + (-x)$ dir. Bu eşitliğe yaklaşımlı yakın halka homomorfizması uygulanırsa ve (1) kullanılırsa her $x \in N_1$ için

$$\Psi\left(0_{N_1}\right) = \Psi\left(x + (-x)\right) \text{ ve}$$

$$0_{N_2} = \Psi(x) + \Psi(-x)$$

olur. Benzer şekilde, $x \in N_1$ için $0_{N_2} = \Psi(-x) + \Psi(x)$ olduğu gösterilebilir. Böylece N_2 deki " $+$ " işlemine göre $\Psi(x)$ elemanının tersinin tekliğinden her $x \in N_1$ için $\Psi(-x) = -\Psi(x)$ bulunur.

Tanım 7.4.3 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka ve $\Psi \in Hom\left(\Phi^* N_1, \Phi^* N_2\right)$ olmak üzere

$$Ker\Psi = \left\{ x \in N_1 \middle| \Psi(x) = 0_{N_2} \right\}$$

kümesine Ψ yaklaşımlı yakın halka homomorfizmasının çekirdeği denir.

Teorem 7.4.4 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka ve $\psi : \Phi^* N_1 \to \Phi^* N_2$ bir yaklaşımlı yakın halka homomorfizması olsun. Bu durumda $\left(\Phi^* Ker\Psi, +\right)$ ve $\left(\Phi^* Ker\Psi, \cdot\right)$ birer grupoid olmak üzere $Ker\Psi$, N_1 in bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

İspat. $x \in Ker\Psi$ olsun. $\Psi(x) = 0_{N_2}$ dir. Ayrıca $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka olduğundan $0_{N_1} \in \Phi^* N_1$ ve $0_{N_2} \in \Phi^* N_2$ olup Teorem 7.4.2 (1) den $\Psi\left(0_{N_1}\right) = 0_{N_2}$ dir. Bu durumda

$$0_{N_2} = \Psi\left(0_{N_1}\right) = \Psi\left(x + (-x)\right) = \Psi(x) + \Psi(-x)$$

olur ki, $\Psi(x) = 0_{N_2}$ olduğundan $\Psi(-x) = 0_{N_2}$ elde edilir. O zaman ψ yaklaşımlı yakın halka homomorfizmasının tanımından $-x \in Ker\Psi$ dir. Böylece Teorem 7.2.5 dikkate alınırsa $Ker\Psi$, N_1 in alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

Teorem 7.4.5 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka, $K \subseteq N_1$ ve ψ , $\Phi^* N_1$ den $\Phi^* N_2$ ye bir yaklaşımlı yakın halka homorfizması olsun. Bu durumda $\left(\Phi^* K, +\right)$ ve $\left(\Phi^* K, \cdot\right)$ birer grupoid olmak üzere K , N_1 in bir alt yaklaşımlı yakın halkası ve

$$\Psi\left(\Phi^* K\right) = \Phi^* \Psi(K)$$

ise $\Psi(K) = \left\{\Psi(x) \,\middle|\, x \in K\right\}$, N_2 nin bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

İspat. $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka olduğundan $0_{N_1} \in \Phi^* N_1$ ve $0_{N_2} \in \Phi^* N_2$ olup Teorem 7.4.2 (1) den $\Psi\left(0_{N_1}\right) = 0_{N_2}$ dir. O zaman,

$$0_{N_2} = \Psi\left(0_{N_1}\right) = \Psi\left(\Phi^* K\right) = \Phi^* \Psi(K)$$

elde edilir ki, $\Phi^* \Psi(K) \neq \varnothing$ ve dolayısıyla $\Psi(K) \neq \varnothing$ olur. $x \in K$ olmak üzere K , N_1 in bir alt yaklaşımlı yakın halkası olduğundan Teorem 7.2.5 den $-x \in K$ dir. Bu nedenle Teorem 7.4.2 (2) den her $\Psi(x) \in \Psi(K)$ için

$$-\Psi(x) = \Psi(-x) \in \Psi(K)$$

bulunur. Böylece Teorem 7.2.5 dikkate alındığında $\Psi(K)$, N_2 nin bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

Teorem 7.4.6 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka, $L \subseteq N_2$ ve ψ, $\Phi^* N_1$ den $\Phi^* N_2$ ye bir yaklaşımlı yakın halka homorfizması olsun. Bu durumda $(\Phi^* L, +)$ ve $(\Phi^* L, \cdot)$ birer grupoid olmak üzere, L, N_2 nin bir alt yaklaşımlı yakın halkası ise $\Psi^{-1}(L) = \{x \in N_1 | \Psi(x) \in L\}$, N_1 in bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

İspat. $x \in \Psi^{-1}(L)$ olsun. Bu durumda $\Psi(x) \in L$ olup, L, N_2 nin bir alt yaklaşımlı yakın halkası olduğundan Teorem 7.2.5 gereğince $-\Psi(x) \in L$ elde edilir. O zaman Teorem 7.4.2 (2) den $\Psi(-x) \in L$ ve dolayısıyla $-x \in \Psi^{-1}(L)$ bulunur. Böylece Teorem 7.2.5 dikkate alınırsa $\Psi^{-1}(L) = \{x \in N_1 | \Psi(x) \in L\}$, N_1 in bir alt yaklaşımlı yakın halkasıdır.

Teorem 7.4.7 N yaklaşımlı yakın halka ve K, N nin bir alt yaklaşımlı yakın halkası olsun. Bu durumda her $x \in \Phi^* N$ için

$$\Pi(x) = x + K$$

ile tanımlı

$$\Pi : \Phi^* N \to \Phi^* \left(N /_{\sim_\ell} K \right)$$

fonksiyonu bir yaklaşımlı yakın halka homomorfizmasıdır.

İspat. Tanım 7.3.6 ve Tanım 7.3.7 den her $x, y \in N$ için

$$\Pi(x+y) = (x+y) + K = (x+K) \oplus (y+K) = \Pi(x) \oplus \Pi(y)$$

ve

$$\Pi(x \cdot y) = (x \cdot y) + K = (x+K) \odot (y+K) = \Pi(x) \odot \Pi(y)$$

olur. Böylece Tanım 4.3.1 den Π bir yaklaşımlı yakın halka homorfizmasıdır.

Tanım 7.4.8 Yaklaşımlı yakın halka homorfizması Π ye, $\Phi^* N$ den $\Phi^* \left(N /_\rho K \right)$ ye bir doğal yaklaşımlı yakın halka homorfizması denir.

Tanım 7.4.9 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka ve $S \subseteq N_1$ olsun.

$$\tau : \Phi^* N_1 \to \Phi^* N_2$$

bir dönüşüm ve

$$\tau_S = \tau\big|_S : S \to \Phi^* N_2$$

kısıtlanmış bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in S$ için

$$\tau(x+y) = \tau_S(x+y) = \tau_S(x) + \tau_S(y) = \tau(x) + \tau(y)$$

ve

$$\tau(x \cdot y) = \tau_S(x \cdot y) = \tau_S(x) \cdot \tau_S(y) = \tau(x) \cdot \tau(y)$$

ise τ ya kısıtlanmış yaklaşımlı yakın halka homomorfizması denir. Bu durumda N_1, N_2 ye kısıtlanmış yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $N_1 \simeq_{ra} N_2$ ile gösterilir.

Teorem 7.4.10 $N_1, N_2 \subseteq X$ iki yaklaşımlı yakın halka ve τ, $\Phi^* N_1$ dan $\Phi^* N_2$ ye tanımlı bir yaklaşımlı halka homomorfizma olsun. $\left(\Phi^* Ker\tau, +\right)$ ve $\left(\Phi^* Ker\tau, \cdot\right)$ birer grupoid ve $\left(\Phi^* N_1\right)\big/_{\sim_\ell}$ $\Phi^*\left(N_1\right)$ in $Ker\tau$ tarafından belirlenen yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$\left(\Phi^* N_1\right)\big/_{\sim_\ell} \subseteq \Phi^*\left(N_1/_{\sim_\ell}\right)$$

ve

$$\Phi^* \tau\left(N_1\right) = \tau\left(\Phi^* N_1\right)$$

ise

$$N_1\big/_{\sim_\ell} Ker\tau \simeq_{ra} \tau\left(N_1\right)$$

dir.

İspat. $\left(\Phi^* Ker\tau, +\right)$ ve $\left(\Phi^* Ker\tau, \cdot\right)$ grupoid olduğundan ve Teorem 7.4.4 ten $Ker\tau$, N_1 in alt yaklaşımlı yakın halkasıdır. $Ker\tau$, N_1 in yaklaşımlı alt yakın halkası ve

$\left(\Phi^* N_1\right)\big/_{\sim\ell} \subseteq \Phi^*\left(N_1/_{\sim\ell}\right)$ olduğundan ve Teorem 7.3.9 dan $N_1\big/_{\sim\ell}$ N_1 in $Ker\tau$ tarafından belirlenen sol zayıf kalan sınıflarının bir yaklaşımlı yakın halkasıdır. Ayrıca, $\Phi^*\tau\left(N_1\right)=\tau\left(\Phi^* N_1\right)$olduğu dikkate alınırsa $\tau\left(N_1\right)$, N_2 nin bir yaklaşımlı alt yakın halkasıdır.

Her $x+Ker\tau \in N_1\big/_{\sim\ell}$ için

$$\sigma_{N_1/_{\sim\ell}} = \sigma\big|_{N_1/_{\sim\ell}} : N_1\big/_{\sim\ell} \to \Phi^*\tau\left(N_1\right)$$

$$x+Ker\tau \mapsto \sigma_{N_1/_{\sim\ell}}\left(x+Ker\tau\right)=\tau\left(x\right)$$

olmak üzere

$$\sigma : \Phi^*\left(N_1\big/_{\sim\ell}\right) \to \Phi^*\tau\left(N_1\right)$$

$$A \mapsto \sigma\left(A\right)=\begin{cases} \sigma_{N_1/_{\sim\ell}}\left(A\right) & , A\in\left(\Phi^* N_1\right)\big/_{\sim\ell} \\ 0_{\tau\left(N_1\right)} & , A\notin\left(\Phi^* N_1\right)\big/_{\sim\ell} \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$x+Ker\tau=\left\{x+k \mid k\in Ker\tau, x+k\in N_1\right\}\cup\left\{x\right\},$$

$$y+Ker\tau=\left\{y+k' \mid k'\in Ker\tau, y+k'\in N_1\right\}\cup\left\{y\right\}$$

ve χ yaklaşımlı yakın halka homomorfizması olduğundan

$$x+Ker\tau=y+Ker\tau \Rightarrow x\in y+Ker\tau$$

$$\Rightarrow x\in\left\{y+k' \middle| k'\in Ker\tau, y+k'\in N_1\right\}\cup\left\{y\right\}$$

$$\Rightarrow x=y+k', k'\in Ker\tau, y+k'\in N_1 \quad veya \quad x=y$$

$$\Rightarrow -y+x=(-y+y)+k',k' \in Ker\tau \ \ veya \ \ \tau(x)=\tau(y)$$

$$\Rightarrow -y+x=k',k' \in Ker\tau$$

$$\Rightarrow -y+x \in Ker\tau$$

$$\Rightarrow \tau(-y+x)=0_{\tau(N_1)}$$

$$\Rightarrow \sigma_{N_1/\sim_\ell}(x+Ker\tau)=\sigma_{N_1/\sim_\ell}(y+Ker\tau)$$

olur. Böylece $\sigma_{N_1/\sim_\ell}$ iyi tanımlıdır.

$A,B \in \Phi^*\left(N_1/_{\sim_\ell}\right)$ için $A=B$ olsun. $\sigma_{N_1/\sim_\ell}$ iyi tanımlı olduğundan

$$\sigma(A)=\begin{cases} \sigma_{N_1/\sim_\ell}(A) & , A \in \left(\Phi^* N_1\right)/_{\sim_\ell} \\ 0_{\tau(N_1)} & , A \notin \left(\Phi^* N_1\right)/_{\sim_\ell} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sigma_{N_1/\sim_\ell}(B) & , B \in \left(\Phi^* N_1\right)/_{\sim_\ell} \\ 0_{\tau(N_1)} & , B \notin \left(\Phi^* N_1\right)/_{\sim_\ell} \end{cases}$$

$$=\sigma(B)$$

olur. Bu durumda σ iyi tanımlıdır.

Her $x+Ker\tau, y+Ker\tau \in N_1/_{\sim_\ell}\ Ker\tau \subseteq \Phi^*\left(N_1/_{\sim_\ell}\right)$ için

$$\sigma\left((x+Ker\tau)\oplus(y+Ker\tau)\right)=\sigma\left((x+y)+Ker\tau\right)$$

$$=\sigma_{N_1/\sim_\ell}\left((x+y)+Ker\tau\right)$$

$$=\tau(x+y)$$

$$= \tau(x) + \tau(y)$$

$$= \sigma_{N_1/\sim_\ell}\left(\left(x + Ker\tau\right) + \left(y + Ker\tau\right)\right)$$

$$= \sigma\left(x + Ker\tau\right) + \sigma\left(y + Ker\tau\right)$$

ve

$$\sigma\left(\left(x + Ker\tau\right) \odot \left(y + Ker\tau\right)\right) = \sigma\left(\left(x.y\right) + Ker\tau\right)$$

$$= \sigma_{N_1/\sim_\ell}\left(\left(x \cdot y\right) + Ker\tau\right)$$

$$= \tau(x \cdot y) = \tau(x) \cdot \tau(y)$$

$$= \sigma_{N_1/\sim_\ell}\left(x + Ker\tau\right) \cdot \sigma_{N_1/\sim_\ell}\left(y + Ker\tau\right)$$

$$= \sigma\left(x + Ker\tau\right) \cdot \sigma\left(y + Ker\tau\right)$$

dir. Böylece Tanım 7.4.9 dan σ kısıtlanmış yaklaşımlı yakın halka homomorfizmasıdır. Sonuç olarak, $N_1/_{\sim_\ell} Ker\tau \simeq_{ra} \tau\left(N_1\right)$ olur.

8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde farklı küme kavramları ile ilgili araştırmalar yapmak ve yeni sonuçlar elde etmek amacıyla, yaklaşımlı (approximately) cebirsel yapılar incelenmiş ve özgün bir çalışma olarak yaklaşımlı yakın halka kavramı tanımlanmıştır. Yaklaşımlı yakın halkalarla ilgili örnekler verilmiş ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, yaklaşımlı N-gruplar ve alt cebirsel yapılar, yaklaşımlı zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı yakın halkası ve yaklaşımlı yakın halka homomorfizmaları verilmiştir.

Yaklaşımlı cebirsel yapıların, görüntü analizi veya sınıflandırma problemleri gibi diğer araştırma konuları için etkili çalışma imkânı sağlaması beklenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] V.A. Efremovič, “The geometry of proximity I”, *Matematicheski Sbornik (N.S.)*, vol. 31, no. 73(1), pp. 189-200, 1952.

[2] M.M. Kovăr, “A new causal topology and why the universe is co-compact”, arXiv:1112.0817 [math-ph], pp. 1-15, 2011.

[3] M. Lodato, “On topologically induced generalized proximity relations”, Ph.D. Thesis, Rutgers University, 1962.

[4] S.A. Naimpally and J.F. Peters, *Topology with applications: Topological spaces via near and far*, World Scientific, Singapore, 2013.

[5] J.F. Peters, “Proximal relator spaces”, *Filomat*, vol. 30, no. 2, pp. 469-472, 2016.

[6] J.F. Peters, M.A. Öztürk and M. Uçkun, “Exactness of proximal groupoid homomorphisms”, *Adıyaman University Journal of Science*, vol. 5, no. 1, pp. 1-13, 2015.

[7] J.F. Peters, E. İnan and M.A. Öztürk, “Spatial and descriptive isometries in proximity spaces”, *General Mathematics Notes*, vol. 21, no. 2, pp. 125-134, 2014.

[8] E. İnan, “Approximately semigroups and ideals: An algebraic view of digital images”, *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, vol. 17, pp. 479-487, 2017.

[9] E. İnan, “Approximately groups in proximal relator spaces”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, vol. 68, no. 1, pp. 572-582, 2019.

[10] E. İnan, “Approximately subgroups in proximal relator spaces”, *Adıyaman University Journal of Science*, vol. 8, no. 1, pp. 24-41, 2018.

[11] L.E. Dickson, “Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, pp. 198-204, 1905.

[12] L.E. Dickson, “On Finite Algebras”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, pp. 358-393, 1905.

[13] H. Zassenhaus, “Über Endliche Fastkörper”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 11, pp. 187-220, 1935/1936.

[14] M. Uçkun and E. İnan, “Approximately gamma-semigroups in proximal relator spaces”, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 30, no. 4, pp. 299-311, 2019.

[15] E. İnan, “Approximately rings in proximal relator spaces”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 6, pp. 2941-2953, 2019.

[16] G. Pilz, *Near-rings: The Theory and Its Applications*, 2nd ed., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Ayşegül KOCAMAZ

Doğum Yeri : Malatya

Doğum Tarihi : 10.08.1988

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : aysegulbulurel@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	2021
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	2012
Lise	Fen Bilimleri	Hacı Ahmet Akıncı Lisesi	2006

Yayınlar

[1] E. İnan and A. Kocamaz, “Approximately Near Rings”, (submitted) 2020.