T.C.

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

PARA-SASAKİAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

ADIYAMAN, 2021

T.C.

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARA-SASAKİAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

FATİH FINDIK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2021

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

PARA-SASAKİAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

FATİH FINDIK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Bu tez 01/07/2021 tarihinde aşağıda ismi geçen jüri üyeleri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Bilal Eftal ACET

Danışman

Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR	**Dr. Öğr. Üyesi M. Aykut AKGÜN**
Üye	**Üye**

Prof. Dr. Tayfun SERVİ

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARA-SASAKİAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Fatih FINDIK

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Bilal Eftal ACET
Yıl : 2021, 39+vi

Jüri : Doç. Dr. Bilal Eftal ACET
Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Dr. Öğr. Üyesi M. Aykut AKGÜN

Bu tez çalışmasının amacı para-Sasakian manifoldlarda eğrilik tensör alanlarının bazı özellikleri incelemektir.

Bu tez dört kısımdan oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümü giriş bölümü olup hemen hemen parakontakt manifoldlarla ilgili yapılan çalışmalar üzerinde durulmuştur.

İki ve üçüncü bölümlerde semi-Riemann manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiş, concircular eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörü kavramlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise para-Sasakian manifoldlar üzerinde bazı eğrilik şartları incelenerek manifoldlarla ilgili bazı sınıflandırmalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hemen Hemen Parakontakt Manifold, Eğrilik Tensörü, Para-Sasakian Manifold.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME CURVATURE CONDITIONS ON PARA-SASAKIAN MANIFOLDS

Fatih FINDIK

Adıyaman University
Graduate School of Education
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET
Year : 2021, 39+vi

Jury : Assoc. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET
Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Assist. Prof. Dr. M. Aykut AKGÜN

The aim of this thesis is to examine some properties of tensor fields in para-Sasakian manifolds.

This thesis consists of four parts.

The first part of the thesis is the introductory part, and almost the studies on paracontact manifolds are emphasized.

In the seccont and third chapters, some basic definitions and thorems related to semi-Riemann manifolds are examined, and the concepts of concircular curvature tensor and projective curvature tensor are given.

In the fourth chapter, some curvature conditions on para-Sasakian manifolds are examined and some classifications are optained on this manifolds.

Key Words: Almost Paracontact Manifold, Curvature Tensor, Para-Sasakian Manifold.

BEYAN

“Para-Sasakian Manifoldlar Üzerinde Bazı Eğrilik Şartları” konulu tez çalışmamın tamamı akademik prensiplere ve etik değerlere uygun bir şekilde yürütüldüğünü ve çalışmamın hazırlanmasında faydalandığım akademik çalışmaların kaynakçada belirtilen dökümanlardan oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etik kurallarına uygun atıf yaparak faydalandığımı beyan ederim.

Fatih FINDIK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecinde desteğini esirgemeyen, deneyim ve tecrübelerinden istifade ettiğim öncelikle Sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI, lisans ve yüksek lisans sürecinde öğrencisi bulunduğum değerli hocam Sayın Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ'a en içten duygularımla teşekkür ederim.

Bu tez çalışmamı yöneten ve çalışmamın her basamağında kıymetli vaktini bana ayıran ve bigisini paylaşıp zamanından fedakarlık ederek desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Bilal Eftal ACET'e teşekkürlerimi sunarım.

Değerli annem Gülsüm FINDIK'a, babam Salih FINDIK'a ve eşim Hümeyra FINDIK'a öğrenciliğim aşamasında sağladıkları maddi ve manevi imkanlardan dolayı ayrıca teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\widetilde{M}$	: Manifold
g	: Metrik Tensör
C^{∞}	: Diferansiyellenebilme
$[,]$	: Lie Parantez Operatörü
$T_p\widetilde{M}$	: $\widetilde{M}$ ’nin bir P noktasındaki teğet uzayı
$T_p^*\widetilde{M}$	: $\widetilde{M}$ ’ninbir P noktasındaki normal uzayı
$\chi(\widetilde{M})$	: $\widetilde{M}$ ’nin teğet vektör alanlarının uzayı
$T_s^r\widetilde{M}$	: $\widetilde{M}$ üzerinde $(r,s)-$tipindeki tensör
N_F	: F ’nin Nijenhuis Torsiyon Tensörü
N_{φ}	: φ ’nin Nijenhuis Torsiyon Tensörü
J	: Kompleks yapı
R	: Riemann Eğrilik Tensörü
P	: Projektif Eğrilik Tensörü
Z	: Concircular Eğrilik Tensörü
φ	: $(1,1)-$tipinde tensor alanı
η	: 1-form
ξ	: Karekteristik vektör alanı
∇	: $\widetilde{M}$ üzerindeki Afin Konneksiyon
τ	: Skaler Eğrilik
$\mathbb{Q}$	: Ricci Operatörü

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin en kapsamlı ve en önemli konularından olan manifold teorisi çalışmaların daha basit, kolay ve işlem yapılabilir uzaylar cinsinde karakterize edilebilir olmasından dolayı bilimsel olarak popüler duruma gelmiştir. Ayrıca ortak çalışma alanlarının artması manifold kavramını sadece geometrinin çalışma sahası olmasından öte cebirin ve fiziğin birçok alanında birlikte kullanılan paydaş çalışma sahası durumuna getirmiştir. Bu nedenle manifoldlar teorisi her geçen gün yeni bilgilerin elde edildiği ortak bir çalışma sahası haline gelmiştir.

Matematiğin cebirsel dalları başta olmak üzere birçok farklı branşlardaki bilim dallarında farklı biçim ve isimlerde manifoldların olduğu biliniyor. Bu manifoldların biri kontakt (değme) manifoldlardır. Kontakt manifold boyutu tek olan $(2n+1)-$ boyutlu ve diferansiyellenebilir bir manifolddur ve üzerinde tanımlı bir diferansiyellenebilir η $1-$formu ile tanımlanır. Bu η $1-$form manifoldun her noktasında

$$(\eta \Lambda d\eta)^n \neq 0$$

eşitsizliğini sağlar. η $1-$form yardımıyla kontrakt distrübüsyon şeklinde adlandırılır ve

$$D = \left\{ X \in T\widetilde{M}^{2n+1} : \eta(X) = 0 \right\}$$

biçiminde $2n-$boyutlu bir kontakt distübüsyon olarak bilinen D distrübüsyonu tanımlanır. D nin yönlendirilebilirliği

$$\eta(\xi) = 1, \qquad d\eta(\xi, X) = 0$$

biçimdedeki eşitlikler D nin $T\widetilde{M}^{2n+1}$ tümleyeni olan bir ξ nin varlığını gerektirir. Elde edilen ξ vektör alanına karakteristik vektör alanı denir. Bu şekilde bir kontakt manifold η $1-$formu ve ξ karakteristik vektör alanı ile belirlenir.

φ, $\widetilde{M}^{2n+1}$ üzerinde bir $(1,1)-$tensör alanı ve ξ, $\widetilde{M}^{2n+1}$ üzerinde bir vektör alanı olmak üzere $\eta(\xi)=1$ ve $\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi$ şartlarını sağlıyor ise $\widetilde{M}^{2n+1}$ manifolduna (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısına sahiptir denir.

$\widetilde{M}^{2n+1}$, (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt manifold ise $\widetilde{M}^{2n+1}\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde (φ,ξ,η) yapısıyla birlikte bir J hemen hemen kompleks manifold olur. Böylece J ile birlikte $\widetilde{M}^{2n+1}\times\mathbb{R}$ hemen hemen kompleks manifolddur. Eğer J integrallenebilir ise (φ,ξ,η) yapısına normaldir denir. Normal kontakt metrik manifoldlar ise Sasakian manifodlar şeklinde adlandırılır [1].

Diferansiyellenebilir bir manifoldda

$$\eta(\xi)=1,$$
$$\varphi^2=I-\eta\otimes\xi$$

şartlarıyla hemen hemen parakontakt yapı şeklinde adlandırılan bir (φ,ξ,η) üçlüsünü ilk olarak I. Sato [2,3] tanımladı. Hemen hemen parakontakt yapı, hemen hemen kontakt yapının [4,5] bir benzeridir. Ancak, hemen hemen parakontakt yapı, kendisiyle yakından bağlantılı olan kontakt yapının aksine, hemen hemen parakontakt çarpım yapısı ile ilintilidir. Hemen hemen kontakt manifoldlar her zaman tek boyutludur. I. Sato [2] nun tanımladığı hemen hemen parakontakt manifoldlar ise çift boyutlu olma durumu da vardır.

B. O'Neill [6] manifold üzerinde metrik tensörün negatif olma ihtimaline binaen yarı-Riemann manifoldları tanımladı. Eğer yarı-Riemann manifoldunun bir alt manifolduna indirgenen metrik tensör pozitif tanımlı ise spacelike, negatif tanımlı olursa timelike (zaman benzeri) altmanifold denir.

Hemen hemen kontakt yapı ile birleşen ve yarı-Riemann metriğe sahip hemen hemen kontakt manifoldları ilk kez T. Takahashi [7] tanımlamıştı. 1989' da ise K. Matsumoto [8] hemen hemen parakontakt manifold üzerinde karakteristik vektör alanını $-\xi$ vektör alanı ile değiştirerek oluşan yeni yapı ile birleşen Lorentzian metriği ile birlikte Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısını ortaya çıkardı. Aşikardır ki, hemen hemen Lorenzian parakontakt manifoldlar üzerindeki yarı-Riemann metriğinin indeksi 1 dir ve karekteristik vektör alanı olan ξ daima timelikedir.

Buraya kadar sözü geçen bir hemen hemen parakontakt manifoldu hemen hemen parakontakt Riemann manifoldu yapan Riemann metriğini ve Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldu üzerindeki Lorentz metriğini kapsayacak biçimde yarı-Riemann metriğe sahip hemen hemen parakontakt manifoldları ilk olarak M. Tripathi, S. Keleş, E. Kılıç ve S. Yüksel Perktaş tanımlandı ve bu tip manifoldlar belirsiz parakontakt manifoldlar olarak adlandırıldı [9].

1985' te S. Kaneyuki ve M. Konzai, $(2n+1)-$boyutlu bir yarı-Riemann manifold üzerinde hemen hemen parakontakt yapıyı tanımlayarak $\widetilde{M}^{2n+1}\times\mathbb{R}$ bir hemen hemen parakompleks yapı oluşturdu [10]. S. Zamkovoy [11] ise [10] da verilen hemen hemen parakontakt yapıyı

$$g(\varphi X,\varphi W)=-g(X,W)+\eta(X)\eta(W)$$

şeklinde $(n+1,n)$ işaretli bir yarı-Riemann metrik ile bağlantısını kurarak bir hemen hemen parakontakt yapının uyumlu metrik olarak adlandırılan bu tipte bir yarı-Riemann metriği tanımını oluşturmaya imkan tanıdığını göstermiş oldu.

Bu tezin ilk üç bölümünde, yarı-Riemann manifoldlar, hemen hemen parakontakt manifoldlar ve para-Sasakian manifoldlar ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve dördüncü bölümde ise para-Sasakian eğrilikli manifoldlar üzerinde bazı eğrilik şartları incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Yarı-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. V reel bir vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü her $r, s, t \in V$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

i. $g(r,s) = g(s,r)$

ii. $g(\lambda r + \mu s, t) = \lambda g(r,t) + \mu g(s,t),$

iii. $g(r, \lambda s + \mu t) = \lambda g(r,t) + \mu g(s,t)$

şartlarına sağlıyor ise g ye V üzerinde simetrik bilineer form denir [6].

Tanım 2.1.2. V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form g olsun. O halde

$\forall r \in V$, $r \neq 0$, $g(r,r) > 0$ olursa g ye pozitif tanımlı,

$\forall r \in V$, $r \neq 0$, $g(u,u) < 0$ olursa g ye negatif tanımlı,

$\forall r \in V$, $r \neq 0$, $g(u,u) \geq 0$ olursa g ye pozitif yarı tanımlı,

$\forall r \in V$, $r \neq 0$, $g(u,u) \leq 0$ olursa g ye negatif yarı tanımlı olarak adlandırılır [6].

Tanım 2.1.3. V bir vektör uzayı ve

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik bilineer form olsun. Bu durumda

$$g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

biçimde negatif tanımlı ve boyutu en büyük olan W alt uzayının boyutu g nin indeksi olarak adlandırılır. W ye indirgenmiş $g|_W$ simetrik bilineer formuna ise indirgenmiş simetrik bilineer form adı verilir ve kısaca g ile gösterilir [6].

Tanım 2.1.4. V vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilineer form olsun. O halde

i. $g\left(\beta_i,\beta_j\right)=0,\ i\neq j$

ii. $g\left(\beta_i,\beta_i\right)=1,\ \ 1\leq i\leq \gamma$

iii. $g\left(\beta_i,\beta_i\right)=-1,\ \ \gamma+1\leq i\leq \gamma+v,$

iv. $g\left(\beta_i,\beta_i\right)=0,\ \ \gamma+v+1\leq i\leq n=\gamma+v+\mu$

biçiminde $\left\{\beta_1,...,\beta_n\right\}$ bazı vardır [6].

Tanım 2.1.5. V reel bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan non-dejenere simetrik bilineer forma skalar çarpım (yarı-Öklid metriği) denir. V üzerinde skalar çarpım g ise (V,g) ye ise skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir [12].

Tanım 2.1.6. $\widetilde{M}$ diferansiyellenebilir manifoldunun $p\in\widetilde{M}$ noktasındaki tanjant uzayı $T_P\widetilde{M}$ ise

$$g:T_p\widetilde{M}\times T_p\widetilde{M}\rightarrow\ \mathbb{R}$$
$$(Y_p,U_p)\rightarrow g(Y_p,U_p)$$

şeklinde tanımlı non-dejenere $(0,2)-$ tipindeki g , indeksi sabit, bilineer, simetrik, tensör alanına $\widetilde{M}$ üzerinde bir metrik tensör ve g , metrik tensörü ile donanmış bir $\widetilde{M}$ manifolduna ise yarı-Riemann manifoldu denir [6].

Tanım 2.1.7. $\widetilde{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve g , $\widetilde{M}$ üzerinde bir metrik tensör olsun. g nin indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve $ind\widetilde{M}$ şeklinde yazılır [6].

Tanım 2.1.8. $\widetilde{M}$ bir diferansiyellenebilir yarı-Riemann manifoldu ve g , $\widetilde{M}$ üzerinde bir metrik tensör olsun. Eğer her $p\in\widetilde{M}$ ve $X_p\in T_p\widetilde{M}$ için

$$g:T_p\widetilde{M}\times T_p\widetilde{M}\rightarrow\ \mathbb{R}$$

olmak üzere

i. $g(U_p, U_p) > 0$ veya $U_p = 0$ ise U_p vektörüne spacelike (uzay benzeri),

ii. $g(U_p, U_p) < 0$ ise U_p vektörüne timelike (zaman benzeri),

iii. $g(U_p, U_p) = 0,\quad X_p \neq 0$ ise U_p vektörüne lightlike (ışık benzeri veya null) vektör denir [6].

Tanım 2.1.9. $\{u_1, ..., u_n\}$ $\mathbb{R}_v^n$ üzerinde standart koordinat sistemi ve $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial_{u_i}}$ olsun. $\mathbb{R}_v^n$ de Y ve W için

$$\nabla_Y W = V(W_i)\partial_i$$

şeklinde tanımlanan $\nabla_V W$ vektör alanına W nın Y ye göre kovaryant türevi denir [6]. Burada $W = w_i \partial_i$ dir.

Tanım 2.1.10. $\widetilde{M}$ bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan

$$\nabla : \Gamma(T\widetilde{M}) \times \Gamma(T\widetilde{M}) \to \Gamma(T\widetilde{M})$$

fonksiyonuna $\widetilde{M}$ üzerinde lineer konneksiyon denir.

i. $\nabla_Y W,\ Y$ ye göre $C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ lineerdir.

ii. $\nabla_Y W,\ W$ ye göre $\mathbb{R}$ lineerdir.

iii. $\nabla_Y(\delta W) = Y(\delta)W + \delta \nabla_Y W,\ \ \forall \delta \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$

dir [6].

Tanım 2.1.11. $\widetilde{M}$ bir yarı-Riemann manifold olsun. Bu durumda $\widetilde{M}$ üzerinde her $Y, V \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

i. $[Y, V] = \nabla_Y V - \nabla_V Y$

ii. $Yg(V, Z) = g(\nabla_Y V, Z) + g(V, \nabla_Y Z)$

koşullarını sağlayan sadece bir ∇ Levi-Civita konneksiyonu olup bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y V, Z) &= Yg(V,Z) + Vg(Z,Y) - Zg(Y,V) \\ &\quad + g([Y,V],Z) + g([Z,Y],V) \\ &\quad - g([V,Z],Y) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile tek türlü bellidir [6].

Tanım 2.1.12. $\widetilde{M}$, Levi-Civita konneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifold olsun. Her $Y,V,Z \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$R : \Gamma(T\widetilde{M}) \times \Gamma(T\widetilde{M}) \times \Gamma(T\widetilde{M}) \to \Gamma(T\widetilde{M})$$
$$(Y,V,Z) \to R(Y,V)Z = \nabla_Y \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,V]} Z$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına $\widetilde{M}$ nın Riemann eğrilik tensörü denir [6].

Teorem 2.1.1. R, $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörü olsun her $W,V,X,Y \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

i. $g(R(W,V)Y,X) = -g(R(V,W)Y,X)$,

ii. $g(R(W,V)Y,X) = g(R(W,V)X,Y)$,

iii. $R(W,V)Y + R(V,Y)W + R(Y,W)V = 0$

iv. $g(R(W,V)Y,X) = g(R(Y,X)W,V)$

dir [6].

Tanım 2.1.13. $\widetilde{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, $T_p\widetilde{M}$ tanjant uzayının ortonormal bir bazı olsun

$$Ric : T_p\widetilde{M} \times T_p\widetilde{M} \to \mathbb{R}$$

$$(U_p, Y_p) \to Ric(U_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i, U_p)Y_p, e_i)$$

ya da

$$Ric(U_p,Y_p)=iz\left\{Z_p\rightarrow R(Z_p,U_p)Y_p\right\}$$

biçminde ifade edilen Ricci tensörüne $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü ve $Ric(U_p,U_p)\equiv Ric\left(U_p\right)$ değerine Ricci eğriliği denir [6].

Tanım 2.1.14. $\widetilde{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve $\left\{e_1,...,e_n\right\}$, $T_p\widetilde{M}$ nın ortonormal bir bazı olsun. $\widetilde{M}$ nın skaler eğriliği

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i Ric(e_i,e_i)$$

biçiminde adlandırılır [6].

Tanım 2.1.15. $\widetilde{M}$, $(2n+1)-$boyutlu bir Riemann manifold olsun. Her $U,X,V\in\chi(\widetilde{M})$ için $\widetilde{M}$ nin concircular eğrilik tensör alanı

$$Z(U,X)V=R(U,X)V-\frac{\tau}{2n(2n+1)}\left[g(X,V)U-g(U,V)X\right] \tag{2.1.1}$$

dir [15].

Tanım 2.1.16. $\widetilde{M}$, $(2n+1)-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda her $U,Y,V\in\chi(\widetilde{M})$ için $\widetilde{M}$ nın projektif eğrilik tensör alanı

$$P(U,Y)V=R(U,Y)V-\frac{1}{2n}\left[S(Y,V)U-S(U,V)Y\right] \tag{2.1.2}$$

dir [15].

Tanım 2.1.17. $\widetilde{M}$, C^{∞} sınıfından bağlantılı $n\geq 2$ boyutlu Riemann manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde tanımlı $(0,2)-$tipinde simetrik tensör alanı $\widetilde{D}$ olmak üzere endomorfizmi

$$(Y\wedge_{\widetilde{D}}V)Z=\widetilde{D}(V,Z)Y-\widetilde{D}(Y,Z)V \tag{2.1.3}$$

şeklindedir. Eğer $\widetilde{D}=g$ alınırsa

$$(Y \wedge_g V)Z = g(V,Z)Y - g(Y,Z)V \tag{2.1.4}$$

şeklindedir. Artık $(X \wedge_g Y)$ yerine kısaca $X \wedge Y$ kullanılacaktır.

$\widetilde{M}$ üzerinde $(0,k)-$tipindeki $k \geq 1$ bir K tensör alanı ve $(0,2)-$tipindeki bir simetrik $\widetilde{D}$ tensör alanı verildiğinde $R \cdot K$ ve $\mathbb{Q}(\widetilde{D} \cdot K)$ tensörleri sırası ile

$$(R \cdot K)(U_1,...,U_k;U,Y) = -K(R(U,Y)U_1,...U_k) - ... \tag{2.1.5}$$

$$-K(U_1,U_2,...,R(U,Y)U_k)$$

ve

$$\mathbb{Q}(\widetilde{D} \cdot K)(U_1,...U_k;U,Y) = -K(U \wedge_{\widetilde{D}} Y)(U_1,...U_k) - ... \tag{2.1.6}$$

$$-T(U_1,U_2,...,(U \wedge_{\widetilde{D}} Y)U_k)$$

şeklinde ifade edilir [16].

Böylece (2.1.5) ve (2.1.6) denkleminde $K = R$ ve $\widetilde{D} = g$ alındığında;

$$(R \cdot R)(U_1,...,U_k;U,Y) = -R(R(U,Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.1.7}$$

$$-R(U_1,...,R(U,Y)U_k)$$

$$\mathbb{Q}(g \cdot R)(U_1,...,U_k;U,Y) = -R(U \wedge_g Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.1.8}$$

$$-R(U_1,...,R(U \wedge_g Y)U_k).$$

$K = Z$ ve $\widetilde{D} = g$ alındığında;

$$(R \cdot Z)(U_1,...,U_k;U,Y) = -Z(R(U,Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.1.9}$$

$$-Z(U_1,...,R(U,Y)U_k)$$

$$\mathbb{Q}(g \cdot Z)(U_1,...,U_k;U,Y) = -Z(U \wedge_g Y)U_1,...,U_k) - ...$$
$$-Z(U_1,..., R(U \wedge_g Y)U_k) \tag{2.1.10}$$

$K = P$ ve $\widetilde{D} = g$ alındığında;

$$(R \cdot P)(U_1,...,U_k;U,Y) = -P(R(U,Y)U_1,...,U_k) - ...$$
$$-P(U_1,..., R(U \wedge_g Y)U_k) \tag{2.1.11}$$

$A = P,\ T = R$ için (2.1.6) denkleminden;

$$\mathbb{Q}(P \cdot R)(U_1,...,U_k;U,Y) = -R(U \wedge_p Y)U_1,...,U_k) - ...$$
$$-R(U_1,..., R(U \wedge_p Y)U_k) \tag{2.1.12}$$

şeklinde bulunur.

$\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde

i) $R \cdot R = 0$ ise $\widetilde{M}$ yarı simetriktir [16],

ii) $R \cdot P = 0$ ise $\widetilde{M}$ projektif yarı simetriktir [16],

iii) $R \cdot Z = 0$ ise $\widetilde{M}$ concircular yarı simetriktir [15],

denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlar

Bu bölümde eğrilik hemen hemen parakontakt manifold tanımlanıp temel özellikleri gösterilecektir.

Tanım 3.1.1. $\widetilde{M}^{2n+1}$ diferansiyellenebilir manifold üzerinde φ, $(1,1)-$tipindeki bir tensör alanı, η $1-$form ve ξ de bir vektör alanı olmak üzere

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi, \tag{3.1.1}$$

$$\eta(\xi) = 1 \tag{3.1.2}$$

koşullarını sağlanıyor ise (φ, ξ, η) üçlüsüne $\widetilde{M}$ üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı ve $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta)$ ya da bir hemen hemen parakontakt manifold denir [10].

Önerme 3.1.1. $\widetilde{M}^{2n+1}$ bir (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. O halde

$$\begin{gathered} \varphi\xi = 0, \\ \eta o \varphi = 0, \\ rank\varphi = 2n \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

dir [10].

Tanım 3.1.2. $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde

$$\widetilde{g}(W, Z) = -\widetilde{g}(W, Z) + \eta(W)\eta(Z) \tag{3.1.4}$$

biçimde bir g yarı-Riemann metriği var ise $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ ikilisine hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $\widetilde{g}$ metriğine bağdaşabilir metrik denir.

Sonuç 3.1.1. $(\widetilde{M},\varphi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda

$$g(\varphi Y,W)=-g(Y,\varphi W) \tag{3.1.5}$$

ve

$$\eta(Y)=g(Y,\xi) \tag{3.1.6}$$

dir [11].

Tanım 3.1.3. $(\widetilde{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde

$$\Phi(X,W)=g(X,\varphi W),\ \ \forall X,W\in\Gamma(T\widetilde{M}) \tag{3.1.7}$$

biçiminde tanımlanan Φ dönüşümüne, (φ,ξ,η,g) hemen hemen parakontakt yapısının temel iki formu denir [11].

Tanım 3.1.4. $\widetilde{M}$, (φ,ξ,η,g) yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer her $Z,W\in\Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$g(Z,\varphi W)=d\eta(Z,W) \tag{3.1.8}$$

ise $\widetilde{M}$ ye parakontakt metrik manifold ve η ya $\widetilde{M}$ nin parakontakt formu denir. Burada

$$d\eta(Z,W)=\frac{1}{2}\left\{Z\eta(W)-W\eta(Z)-\eta([Z,W])\right\} \tag{3.1.9}$$

dir.

$(\widetilde{M}^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontakt metrik manifoldu için bir lokal ortonormal baz inşa edilebilir. $\widetilde{U}$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir koordinat komşuluğu ve X_1, ξ ye dik olacak şekilde $\widetilde{U}$ üzerinde herhangi bir birim vektör alanı ve φX_1, X_1 ve ξ ye ortogonal vektör alanı olsun. Bu durumda φX_1, X_1 ve ξ, X_1 ortogonal vektör alanı ve $|\varphi X_1|^2=-1$ dir.

ξ, X_1 ve φX_1 e ortogonal olacak biçimde bir X_2 ve birim vektör alanı seçilirse φX_2, X_1, φX_1, X_2 ve ξ ye ortogonal vektör alanı ve $|\varphi X_2|^2 = -1$ olur. Bu şekilde devam ederek $\phi -$ bazı olarak adlandırılan bir $\{X_i, \varphi X_i, \xi\}$, $(i = 1,...,n)$ lokal ortonormal bazı bulunur [11].

Örnek 3.1.1. $\mathbb{R}^{2n+1}$, (u_i, v_i, z), $(i = 1,...,n)$, standart koordinat sistemi ile verilen reel uzay olsun. $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial}{\partial v_i},\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial}{\partial u_i},\ \varphi\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\eta = dz, \xi = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$g = \eta \otimes \eta + \sum_{i=1}^{n} du_i \otimes du_i - \sum_{i=1}^{n} dv_i \otimes dv_i$$

olacak şekilde φ $(1,1)-$ tensör alanını η, $1-$ formunu, ξ vektör alanını ve g metriğini tanımlayalım. Bu durumda $\left(R^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right)$ bir hemen hemen parakontakt manifold olur [11].

Lemma 3.1.1. *M* hemen hemen parakontakt metrik manifoldun bir para-Sasakian manifold olması için gerek ve yeter şart her $Z, W \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$(\nabla_Z \varphi)W = -g(Z,W)\xi + \eta(W)Z \tag{3.1.10}$$

olmasıdır [11].

Önerme 1.1.2. $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda

$$R(Z,W)\xi = \eta(Z)W - \eta(W)Z \qquad (3.1.11)$$

diğer taraftan para-Sasakian manifoldlar için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$R(\xi,W)V = -g(W,V)\xi + \eta(V)W\ , \qquad (3.1.12)$$

$$S(W,\xi) = -2n\eta(W) \qquad (3.1.13)$$

4. PARA-SASAKİAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Teorem 4.1.1. $(\widetilde{M},\varphi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$ boyutlu bir para-Sasakian manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde $Z(\xi,W).R=0$ şartı sağlanıyor ise $\widetilde{M}$ bir Einstein manifolddur.

İspat: Bir $(2n+1)$-boyutlu para-Sasakian manifold $\widetilde{M}$ üzerinde

$$Z(\xi,W).R=0$$

şartı sağlansın bu durumda (2.1.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} Z(\xi,W)R(X,U)Y &= Z(\xi,W)R(X,U)Y - R(Z(\xi,W)X,U)Y \\ &\quad -R\big(X,Z(\xi,W)U\big)Y - R(X,U)Z(\xi,W)Y \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

olur. (4.1.1) de (2.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} -g\big(W,R(X,U)Y\big)\xi+\eta\big(R(X,U)Y\big)W \\ +g(W,X)R(\xi,U)Y-\eta(X)R(W,U)Y \\ +g(W,U)R(X,\xi)Y-\eta(U)R(X,W)Y \\ +g(W,Y)R(X,U)\xi-\eta(Y)R(X,U)W \end{pmatrix}=0 \tag{4.1.2}$$

elde edilir. (4.1.2) denklemi V ile iç çarpım yapılırsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} -g(W,R(X,U)Y)g(\xi,V)+\eta(R(X,U)Y)g(W,V) \\ +g(W,X)g(R(\xi,U)Y,V)-\eta(X)g(R(W,U)Y,V) \\ +g(W,U)g(R(X,\xi)Y,V)-\eta(U)g(R(X,W)Y,V) \\ +g(W,Y)g(R(X,U)\xi,V)-\eta(Y)g(R(X,U)W,V) \end{pmatrix}=0 \quad (4.1.3)$$

bulunur. (4.1.3) eşitliğinde (3.1.6) eşitliği kullanılırsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} -g(W,R(X,U)Y)\eta(V)+g(W,V)\eta(R(X,U)Y) \\ +g(W,X)g(R(\xi,U)Y,V)-\eta(X)g(R(W,U)Y,V) \\ +g(W,U)g(R(X,\xi)Y,V)-\eta(U)g(R(X,W)Y,V) \\ +g(W,Y)g(R(X,U)\xi,V)-\eta(Y)g(R(X,U)W,V) \end{pmatrix}=0 \quad (4.1.4)$$

olur. (4.1.4) denkleminde $X=\xi$ alınırsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} -g(U,R(\xi,W)Y)\eta(V)+g(U,V)\eta(R(\xi,W)Y) \\ +g(U,\xi)(R(\xi,W)Y,V)-\eta(\xi)(R(U,W)Y,V) \\ +g(U,W)(R(\xi,\xi)Y,V)-\eta(W)(R(\xi,U)Y,V) \\ +g(U,Y)(R(\xi,W)\xi,V)-\eta(Y)(R(\xi,W)U,V) \end{pmatrix}=0 \quad (4.1.5)$$

elde edilir. (4.1.5) denkleminde (3.1.6) kullanılırsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} -g\left(U,R(\xi,W)Y\right)\eta(V)+g(U,V)\eta\left(R(\xi,W)Y\right) \\ +\eta(U)\left(R(\xi,W)Y,V\right)-\eta(\xi)\left(R(U,W)Y,V\right) \\ +g(U,W)\left(R(\xi,\xi)Y,V\right)-\eta(W)\left(R(\xi,U)Y,V\right) \\ +g(U,Y)\left(R(\xi,W)\xi,V\right)-\eta(Y)\left(R(\xi,W)U,V\right) \end{pmatrix}=0 \quad (4.1.6)$$

olur. (4.1.6) eşitliğinde (3.1.2) eşitliği kullanilirsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} -g\left(W,R(\xi,U)Y\right)\eta(V)+g(W,V)\eta\left(R(\xi,U)Y\right) \\ +\eta(U)g\left(R(\xi,U)Y,V\right)-g\left(R(W,U)Y,V\right) \\ +g(W,U)g\left(R(\xi,\xi)Y,V\right)-\eta(U)g\left(R(\xi,W)Y,V\right) \\ +g(W,Y)g\left(R(\xi,U)\xi,V\right)-\eta(Y)g\left(R(\xi,U)W,V\right) \end{pmatrix}=0 \quad (4.1.7)$$

bulunur. (4.1.7) eşitliğinde (3.1.12) eşitliği kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} g(W,Y)g(V,U)-g(W,V)g(U,Y) \\ -g\left(R(W,U)Y,V\right) \end{pmatrix}=0 \quad (4.1.8)$$

eşitliği bulunur. Buradan $\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun. (4.1.8) denkleminde $W=V=E_i=\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}$ alalım. Bu durumda

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} g(e_i,Y)g(e_i,U)-g(e_i,e_i)g(U,Y) \\ -g\left(R(e_i,U)Y,e_i\right)+g\left(\varphi_{e_i},Y\right)g\left(\varphi_{e_i},U\right) \\ +g\left(\varphi_{e_i},\varphi_{e_i}\right)g(U,Y)+g\left(R\left(\varphi_{e_i},U\right)Y,\varphi_{e_i}\right) \\ -g(\xi,Y)g(\xi,U)-g(\xi,\xi)g(U,Y) \\ -g\left(R(\xi,U)Y,\xi\right) \end{pmatrix}=0 \tag{4.1.9}$$

elde edilir. (4.1.9) eşitliğinden

$$S(U,Y)=-2ng(U,Y) \tag{4.1.10}$$

sonucuna ulaşılır. (4.1.10) eşitliği göz önüne alınırsa $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $(\widetilde{M},\varphi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$boyutlu bir para-Sasakian manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde $P(\xi,W).R=0$ şartı sağlanıyor ise $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur.

İspat: Bir $(2n+1)$**-**boyutlu para-Sasakian manifold $\widetilde{M}$ üzerinde

$$P(\xi,W).R=0$$

şartı sağlansın bu durumda

$$\begin{aligned} P(\xi,W)R(X,U)Y &= P(\xi,W)R(X,U)Y-R(P(\xi,W)X,U)Y \\ &\quad -R\left(X,P(\xi,W)U\right)Y-R(X,U)P(\xi,W)Y \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

yazılır. (4.1.11) denkleminde (2.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,R\left(X,U\right)Y\right)\xi+\eta\left(R\left(X,U\right)Y\right)W \\
&+g\left(W,X\right)R\left(\xi,U\right)Y-\eta\left(X\right)R\left(W,U\right)Y \\
&+g\left(W,U\right)R\left(X,\xi\right)Y-\eta\left(X\right)R\left(X,W\right)Y \\
&+g\left(W,Y\right)R\left(X,U\right)\xi-\eta\left(Y\right)R\left(X,U\right)W \\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S\left(W,R\left(X,U\right)Y\right)\xi+2n\eta\left(R\left(X,U\right)Y\right)W \\ -S\left(W,X\right)R\left(\xi,U\right)Y-2n\eta\left(X\right)R\left(W,U\right)Y \\ -S\left(W,U\right)R\left(X,\xi\right)Y-2n\eta\left(U\right)R\left(X,W\right)Y \\ -S\left(W,Y\right)R\left(X,U\right)\xi-2n\eta\left(Y\right)R\left(X,U\right)W \end{pmatrix} \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.12}
$$

elde edilir. (4.1.12) denkleminde V ile iç çarpım yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,R\left(X,U\right)Y\right)g\left(\xi,V\right)+\eta\left(R\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right) \\
&+g\left(W,X\right)g\left(R\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(X\right)g\left(R\left(W,U\right)Y,V\right) \\
&+g\left(W,U\right)g\left(R\left(X,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(X\right)g\left(R\left(X,W\right)Y,V\right) \\
&+g\left(W,Y\right)g\left(R\left(X,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(R\left(X,U\right)W,V\right) \\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S\left(W,R\left(X,U\right)Y\right)g\left(\xi,V\right)+2n\eta\left(R\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right) \\ -S\left(W,X\right)g\left(R\left(\xi,U\right)Y,V\right)-2n\eta\left(X\right)g\left(R\left(W,U\right)Y,V\right) \\ -S\left(W,U\right)g\left(R\left(X,\xi\right)Y,V\right)-2n\eta\left(U\right)g\left(R\left(X,W\right)Y,V\right) \\ -S\left(W,Y\right)g\left(R\left(X,U\right)\xi,V\right)-2n\eta\left(Y\right)g\left(R\left(X,U\right)W,V\right) \end{pmatrix} \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

bulunur. (4.1.12) denkleminde (3.1.6) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,R\left(X,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(R\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,X\right)g\left(R\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(X\right)g\left(R\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,U\right)g\left(R\left(X,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(R\left(X,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(R\left(X,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(R\left(X,U\right)W,V\right)\\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
S\left(W,R\left(X,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+2n\eta\left(R\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
-S\left(W,X\right)g\left(R\left(\xi,U\right)Y,V\right)-2n\eta\left(X\right)g\left(R\left(W,U\right)Y,V\right)\\
-S\left(W,U\right)g\left(R\left(X,\xi\right)Y,V\right)-2n\eta\left(U\right)g\left(R\left(X,W\right)Y,V\right)\\
-S\left(W,Y\right)g\left(R\left(X,U\right)\xi,V\right)-2n\eta\left(Y\right)g\left(R\left(X,U\right)W,V\right)
\end{pmatrix}\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.14}
$$

elde edilir. (4.1.14) denkleminde $X=\xi$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,R\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(R\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,\xi\right)g\left(R\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(\xi\right)g\left(R\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,U\right)g\left(R\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(R\left(\xi,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(R\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(R\left(\xi,U\right)W,V\right)\\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
S\left(W,R\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+2n\eta\left(R\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
-S\left(W,\xi\right)g\left(R\left(\xi,U\right)Y,V\right)-2n\eta\left(\xi\right)g\left(R\left(W,U\right)Y,V\right)\\
-S\left(W,U\right)g\left(R\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-2n\eta\left(U\right)g\left(R\left(\xi,W\right)Y,V\right)\\
-S\left(W,Y\right)g\left(R\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-2n\eta\left(Y\right)g\left(R\left(\xi,U\right)W,V\right)
\end{pmatrix}\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.15}
$$

elde edilir. (4.1.15) denkleminde (3.1.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&-g\left(W,R(\xi,U)Y\right)\eta(V)+\eta\left(R(\xi,U)Y\right)g(W,V)\\
&+g(W,\xi)g\left(R(\xi,U)Y,V\right)-g\left(R(W,U)Y,V\right)\\
&+g(W,U)g\left(R(\xi,\xi)Y,V\right)-\eta(U)g\left(R(\xi,W)Y,V\right)\\
&+g(W,Y)g\left(R(\xi,U)\xi,V\right)-\eta(Y)g\left(R(\xi,U)W,V\right)\\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
S\left(W,R(\xi,U)Y\right)\eta(V)+2n\eta\left(R(\xi,U)Y\right)g(W,V)\\
-S(W,\xi)g\left(R(\xi,U)Y,V\right)-2ng\left(R(W,U)Y,V\right)\\
-S(W,U)g\left(R(\xi,\xi)Y,V\right)-2n\eta(U)g\left(R(\xi,W)Y,V\right)\\
-S(W,Y)g\left(R(\xi,U)\xi,V\right)-2n\eta(Y)g\left(R(\xi,U)W,V\right)
\end{pmatrix}\\
&=0
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

olur. (4.1.16) eşitliğinde (3.1.13) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&-g\left(W,R(\xi,U)Y\right)\eta(V)+\eta\left(R(\xi,U)Y\right)g(W,V)\\
&+g(W,\xi)g\left(R(\xi,U)Y,V\right)-g\left(R(W,U)Y,V\right)\\
&+g(W,U)g\left(R(\xi,\xi)Y,V\right)-\eta(U)g\left(R(\xi,W)Y,V\right)\\
&+g(W,Y)g\left(R(\xi,U)\xi,V\right)-\eta(Y)g\left(R(\xi,U)W,V\right)\\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
S\left(W,R(\xi,U)Y\right)\eta(V)+2n\eta\left(R(\xi,U)Y\right)g(W,V)\\
+2n\eta(W)g\left(R(\xi,U)Y,V\right)-2ng\left(R(W,U)Y,V\right)\\
-S(W,U)g\left(R(\xi,\xi)Y,V\right)-2n\eta(U)g\left(R(\xi,W)Y,V\right)\\
-S(W,Y)g\left(R(\xi,U)\xi,V\right)-2n\eta(Y)g\left(R(\xi,U)W,V\right)
\end{pmatrix}\\
&=0
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

olur. (4.1.17) eşitliğinde (3.1.12) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& g(U,Y)\eta(W)\eta(V)-g(W,V)\eta(V)\eta(Y) \\
& -g(U,Y)g(W,V)+g(W,V)\eta(U)\eta(Y) \\
& -g(U,Y)\eta(W)\eta(V)+g(V,U)\eta(W)\eta(Y) \\
& -g(R(W,U)Y,V)-g(W,Y)\eta(U)\eta(V) \\
& -g(W,V)\eta(U)\eta(Y)-g(W,Y)\eta(V)\eta(U) \\
& +g(V,U)g(W,Y)+g(W,U)\eta(V)\eta(Y) \\
& -g(V,U)\eta(W)\eta(Y) \\
& -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
-g(U,Y)S(W,\xi)\eta(V)+S(W,U)\eta(Y)\eta(V) \\
-2ng(U,Y)g(W,V)+2ng(W,V)\eta(U)\eta(Y) \\
-2ng(U,Y)\eta(W)\eta(V)+2ng(U,V)\eta(W)\eta(Y) \\
-2ng(R(W,U)Y,V)+2ng(W,Y)\eta(U)\eta(V) \\
-2ng(W,V)\eta(U)\eta(Y)+S(W,Y)\eta(V)\eta(U) \\
-S(W,Y)g(V,U)+2ng(W,U)\eta(V)\eta(Y) \\
-2ng(V,U)\eta(W)\eta(Y)
\end{pmatrix} \\
& =0
\end{aligned}
\tag{4.1.18}
$$

elde edilir. (4.1.18) de gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
& g(V,U)g(W,Y)-g(U,Y)g(W,V)-g(R(W,U)Y,V) \\
& -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
S(W,U)\eta(Y)\eta(V)-2ng(U,Y)g(W,V) \\
-2ng(R(W,U)Y,V)+2ng(W,Y)\eta(U)\eta(V) \\
+S(W,Y)\eta(V)\eta(U)-S(W,Y)g(V,U) \\
+2ng(W,U)\eta(V)\eta(Y)
\end{pmatrix} \\
& =0
\end{aligned}
\tag{4.1.19}
$$

eşitliği bulunur. Buradan $\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun (4.1.19) denkleminde $W=V=E_i=\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&g(e_i,U)g(e_i,Y)-g(U,Y)g(e_i,e_i)-g\big(R(e_i,U)Y,e_i\big)\\
&-g(\varphi e_i,U)g(\varphi e_i,Y)+g(U,Y)g(\varphi e_i,\varphi e_i)+g\big(R(\varphi e_i,U)Y,\varphi e_i\big)\\
&+g(\xi,U)g(\xi,Y)-g(U,Y)g(\xi,\xi)-g\big(R(\xi,U)Y,\xi\big)\\
&-\frac{1}{2n}\left(\begin{array}{l}
S(e_i,W)\eta(Y)\eta(e_i)-2ng(W,Y)g(e_i,e_i)\\
-2ng\big(R(e_i,U)Y,e_i\big)+2ng(e_i,Y)\eta(U)\eta(e_i)\\
+S(e_i,Y)\eta(e_i)\eta(U)-S(e_i,Y)g(e_i,U)\\
+2ng(e_i,U)\eta(e_i)\eta(Y)\\
-S(\varphi e_i,U)\eta(Y)\eta(\varphi e_i)+2ng(U,Y)g(\varphi e_i,\varphi e_i)\\
+2ng\big(R(\varphi e_i,U)Y,\varphi e_i\big)-2ng(\varphi e_i,Y)\eta(U)\eta(\varphi e_i)\\
-S(\varphi e_i,Y)\eta(\varphi e_i)\eta(U)+S(\varphi e_i,Y)g(\varphi e_i,U)\\
-2ng(\varphi e_i,U)\eta(\varphi e_i)\eta(Y)\\
+S(\xi,U)\eta(Y)\eta(\xi)-2ng(U,Y)g(\xi,\xi)\\
-2ng\big(R(\xi,U)Y,\xi\big)+2ng(\xi,Y)\eta(U)\eta(\xi)\\
+S(\xi,Y)\eta(\xi)\eta(U)-S(\xi,Y)g(\xi,U)\\
+2ng(\xi,U)\eta(\xi)\eta(Y)
\end{array}\right)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.20}
$$

elde edilir. (4.1.20) eşitliğinden

$$
S(U,Y)=-2ng(U,Y) \tag{4.1.21}
$$

sonucuna ulaşılır. (4.1.21) eşitliği göz önüne alınırsa $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. $(\widetilde{M},\varphi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$boyutlu bir para-Sasakian manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde $R(\xi,W).Z=0$ şartı sağlanıyor ise $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur.

İspat: Bir $(2n+1)$-boyutlu para-Sasakian manifold $\widetilde{M}$ üzerinde

$$R(\xi,W).Z=0$$

şartı sağlansın bu durumda

$$\begin{aligned} R(\xi,W).Z(X,U)Y &= R(\xi,W).Z(X,U)Y - .Z\big(R(\xi,W)X,U\big)Y \\ &\quad -Z\big(X,R(\xi,W)U\big)Y - Z(X,U)R(\xi,W)Y \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

(4.1.22) denkleminde (3.1.12) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &-g\big(W,Z(X,U)Y\big)\xi+\eta\big(Z(X,U)Y\big)W \\ &+g(W,X)Z(\xi,U)-\eta(X)Z(W,U)Y \\ &+g(W,U)Z(X,\xi)Y-\eta(U)Z(X,W)Y \\ &+g(W,Y)Z(X,U)\xi-\eta(Y)Z(X,U)W \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

elde edilir. (4.1.23) denkleminde V ile iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} &-g\big(W,Z(X,U)Y\big)g(\xi,V)+\eta\big(Z(X,U)Y\big)g(W,V) \\ &+g(W,X)g\big(Z(\xi,U)Y,V\big)-\eta(X)g\big(Z(W,U)Y,V\big) \\ &+g(W,U)g\big(Z(X,\xi)Y,V\big)-\eta(U)g\big(Z(X,W)Y,V\big) \\ &+g(W,Y)g\big(Z(X,U)\xi,V\big)-\eta(Y)g\big(Z(X,U)W,V\big) \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

bulunur. (4.1.24) denkleminde (3.1.6) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,Z\left(X,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(Z\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,X\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(X\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,U\right)g\left(Z\left(X,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(Z\left(X,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)W,V\right)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.25}
$$

olur. (4.1.25) denkleminde $X=\xi$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,Z\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(Z\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,\xi\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(\xi\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,U\right)g\left(Z\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(Z\left(\xi,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)W,V\right)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.26}
$$

elde edilir. (4.1.26) denkleminde $\left(3.1.2\right)$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,Z\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(Z\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,\xi\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,U\right)g\left(Z\left(U,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(Z\left(\xi,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)W,V\right)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.27}
$$

elde edilir. (4.1.27) de (3.1.6) ve (2.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} g(U,Y)\eta(W)\eta(V)-\eta(Y)\eta(V)g(W,U) \\ -g(U,Y)g(W,V)+\eta(Y)\eta(U)g(W,V) \\ -g(U,Y)\eta(W)\eta(V)+g(U,V)\eta(Y)\eta(W) \\ +g(W,Y)\eta(U)\eta(V)-g(W,V)\eta(Y)\eta(U) \\ -g(W,Y)\eta(U)\eta(V)+g(U,V)g(W,Y) \\ -g(W,W)\eta(Y)\eta(V)+g(U,V)\eta(Y)\eta(W) \\ +g(U,Y)g(W,V)-g(W,Y)g(U,V) \end{pmatrix}$$
$$-g(R(W,U)Y,V)$$
$$-\frac{\tau}{2n(2n+1)}\left(g(U,Y)g(W,V)+g(W,Y)g(U,V)\right)$$
$$=0 \tag{4.1.28}$$

eşitliği bulunur. Buradan $\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun (4.1.28) denkleminde $W=V=E_i=\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} &g(e_i,Y)g(U,e_i)-g(U,Y)g(e_i,e_i)-g(R(e_i,Y)U,e_i) \\ &-g(\varphi e_i,Y)g(U,\varphi e_i)+g(U,Y)g(\varphi e_i,\varphi e_i)+g(R(\varphi e_i,Y)U,\varphi e_i) \\ &+g(\xi,Y)g(U,\xi)-g(U,Y)g(\xi,\xi)-g(R(\xi,Y)U,\xi) \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

elde edilir. (4.1.29) eşitliğinden

$$S(U,Y)=-2ng(U,Y) \tag{4.1.30}$$

sonucuna ulaşılır. (4.1.30) eşitliği göz önüne alınırsa $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4. $(\widetilde{M},\varphi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$boyutlu bir para-Sasakian manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde $R(\xi,W).P=0$ şartı sağlanıyor ise $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur.

İspat: Bir $(2n+1)$-boyutlu para-Sasakian manifold $\widetilde{M}$ üzerinde

$$R(\xi,W).P=0$$

şartı sağlansın bu durumda

$$\begin{aligned} R(\xi,W)P(X,U)Y &= R(\xi,W)P(X,U)Y-P\big(R(\xi,W)X,U\big)Y \\ &\quad -P\big(X,R(\xi,W)U\big)Y-P(X,U)R(\xi,W)Y \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

olur. (4.1.31) denkleminde (3.1.12) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &-g\big(W,P(X,U)Y\big)\xi+\eta\big(P(X,U)Y\big)W \\ &+g(W,X)P(\xi,U)Y-\eta(X)P(W,U)Y \\ &+g(W,Y)P(X,\xi)Y-\eta(U)P(X,W)Y \\ &+g(W,Y)P(X,U)\xi-\eta(Y)P(X,U)W \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

elde edilir. (4.1.32) denkleminde V ile iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} &-g\big(W,P(X,U)Y\big)g(\xi,V)+\eta\big(P(X,U)Y\big)g(W,V) \\ &+g(W,X)g\big(P(\xi,U)Y,V\big)-\eta(X)g\big(P(W,U)Y,V\big) \\ &+g(W,Y)g\big(P(X,\xi)Y,V\big)-\eta(U)g\big(P(X,W)Y,V\big) \\ &+g(W,Y)g\big(P(X,U)\xi,V\big)+\eta(Y)g\big(P(X,U)W,V\big) \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

bulunur. (4.1.33) denkleminde (3.1.6) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&-g\left(W,P\left(X,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(P\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,X\right)g\left(P\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(X\right)g\left(P\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(P\left(X,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(P\left(X,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(P\left(X,U\right)\xi,V\right)+\eta\left(Y\right)g\left(P\left(X,U\right)W,V\right)\\
&=0
\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

olur. (4.1.34) denkleminde $X=\xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&-g\left(W,P\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(P\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,\xi\right)g\left(P\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(\xi\right)g\left(P\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(P\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(P\left(\xi,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(P\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(P\left(\xi,U\right)W,V\right)\\
&=0
\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

elde edilir. (4.1.35) denkleminde (3.1.6) ve $(3.1.2)$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&-g\left(W,P\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(P\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,\xi\right)g\left(P\left(\xi,U\right)Y,V\right)-g\left(P\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(P\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(P\left(\xi,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(P\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(P\left(\xi,U\right)W,V\right)\\
&=0
\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

bulunur. (4.1.36) denkleminde (2.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& g(U,V)\eta(W)\eta(V)-g(W,U)\eta(Y)\eta(V)-g(R(U,W)Y,V) \\
& -g(W,Y)\eta(U)\eta(V)+g(U,V)g(W,Y)-g(U,Y)g(W,V) \\
& +\eta(Y)\eta(U)g(W,V)-g(U,Y)\eta(W)\eta(V)+g(U,V)\eta(W)\eta(Y) \\
& +g(W,Y)\eta(U)\eta(V)-g(W,V)\eta(Y)\eta(U)+g(W,U)\eta(Y)\eta(V) \\
& -g(U,V)\eta(W)\eta(Y) \\
& \frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
\eta(V)g(W,S(U,Y)\xi+2n\eta(Y)U) \\
+g(S(W,Y)U-S(U,Y)W,V) \\
-g(W,Y)g(S(U,\xi)\xi+2nU,V) \\
-g(W,V)\eta(S(U,Y)\xi+2n\eta(Y)U) \\
-\eta(W)g(S(U,Y)\xi+2n\eta(Y)U,V) \\
+\eta(U)g(S(W,Y)\xi+2n\eta(Y)W,V) \\
+\eta(Y)g(S(U,W)\xi+2n\eta(W)U,V)
\end{pmatrix} \\
& =0
\end{aligned}
\tag{4.1.37}
$$

bulunur. (4.1.37) denkleminde (3.1.13) eşitliği kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
& -g(R(W,Y)U,V)-g(U,Y)g(W,V)+g(W,Y)g(U,V) \\
& -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
-2ng(W,U)\eta(U)\eta(V)+S(W,Y)g(U,V) \\
-S(W,Y)\eta(U)\eta(V)-2ng(W,Y)\eta(U)\eta(V) \\
+2ng(W,Y)g(U,V)-S(W,U)\eta(Y)\eta(V)
\end{pmatrix} \\
& =0
\end{aligned}
\tag{4.1.38}
$$

eşitliği bulunur. Buradan $\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun (4.1.38) denkleminde $W=V=E_i=\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& g\left(e_i,Y\right)g\left(U,e_i\right)-g\left(U,Y\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(R\left(e_i,Y\right)U,e_i\right) \\
& -g\left(\varphi e_i,Y\right)g\left(U,\varphi e_i\right)+g\left(U,Y\right)g\left(\varphi e_i,\varphi e_i\right)+g\left(R\left(\varphi e_i,Y\right)U,\varphi e_i\right) \\
& +g\left(\xi,Y\right)g\left(U,\xi\right)-g\left(U,Y\right)g\left(\xi,\xi\right)-g\left(R\left(\xi,Y\right)U,\xi\right) \\
& -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix}
-2ng\left(e_i,U\right)\eta\left(U\right)\eta\left(e_i\right)+S\left(e_i,Y\right)g\left(U,e_i\right) \\
-S\left(e_i,Y\right)\eta\left(U\right)\eta\left(e_i\right)-2ng\left(e_i,Y\right)\eta\left(U\right)\eta\left(e_i\right) \\
+2ng\left(e_i,Y\right)g\left(U,e_i\right)-S\left(e_i,U\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(e_i\right) \\
+2ng\left(\varphi e_i,U\right)\eta\left(U\right)\eta\left(\varphi e_i\right)-S\left(\varphi e_i,Y\right)g\left(U,\varphi e_i\right) \\
+S\left(\varphi e_i,Y\right)\eta\left(U\right)\eta\left(\varphi e_i\right)+2ng\left(\varphi e_i,Y\right)\eta\left(U\right)\eta\left(\varphi e_i\right) \\
-2ng\left(\varphi e_i,Y\right)g\left(U,\varphi e_i\right)+S\left(\varphi e_i,U\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(\varphi e_i\right) \\
-2ng\left(\xi,U\right)\eta\left(U\right)\eta\left(\xi\right)+S\left(\xi,Y\right)g\left(U,\xi\right) \\
-S\left(\xi,Y\right)\eta\left(U\right)\eta\left(\xi\right)-2ng\left(\xi,Y\right)\eta\left(U\right)\eta\left(\xi\right) \\
+2ng\left(\xi,Y\right)g\left(U,\xi\right)-S\left(\xi,U\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(\xi\right)
\end{pmatrix} \\
& =0
\end{aligned}
\tag{4.1.39}
$$

elde edilir. (4.1.39) eşitliğinden

$$
S\left(U,Y\right)=-2ng\left(U,Y\right) \tag{4.1.40}
$$

sonucuna ulaşılır. (4.1.40) eşitliği göz önüne alınırsa $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5. $(\widetilde{M},\varphi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$boyutlu bir para-Sasakian manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde $P\left(\xi,W\right).Z=0$ şartı sağlanıyor ise $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur.

İspat: Bir $(2n+1)$-boyutlu para-Sasakian manifold $\widetilde{M}$ üzerinde

$$P(\xi,W).Z=0$$

şartı sağlansın bu durumda

$$\begin{aligned} P(\xi,W)Z(X,U)Y &= P(\xi,W)Z(X,U)Y - Z(P(\xi,W)X,U)Y \\ &\quad -Z(X,P(\xi,W)U)Y - Z(X,U)P(\xi,W)Y \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.41}$$

(4.1.41) denkleminde (2.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &-g(W,Z(X,U)Y)\xi+\eta(Z(X,U)Y)W \\ &+g(W,X)Z(\xi,U)Y-\eta(X)Z(W,U)Y \\ &+g(W,U)Z(X,\xi)Y-\eta(U)Z(X,W)Y \\ &+g(W,Y)Z(X,U)\xi-\eta(Y)Z(X,U)W \\ &-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S(W,Z(X,U)Y)\xi+2n\eta(Z(X,U)Y)W \\ -S(W,X)Z(\xi,U)Y-2n\eta(X)Z(W,U)Y \\ -S(W,U)Z(X,\xi)Y-2n\eta(U)Z(X,W)Y \\ -S(W,Y)Z(X,U)\xi-2n\eta(Y)Z(X,U)W \end{pmatrix} \\ &=0 \end{aligned} \tag{4.1.42}$$

elde edilir. (4.1.42) denkleminde V ile iç çarpım yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,Z\left(X,U\right)Y\right)g\left(V,\xi\right)+\eta\left(Z\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,X\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(X\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,U\right)g\left(Z\left(X,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(Z\left(X,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)W,V\right)\\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S\left(W,Z\left(X,U\right)Y\right)g\left(\xi,V\right)+2n\eta\left(Z\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\ -S\left(W,X\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-2n\eta\left(X\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right)\\ -S\left(W,U\right)g\left(Z\left(X,\xi\right)Y,V\right)-2n\eta\left(U\right)g\left(Z\left(X,W\right)Y,V\right)\\ -S\left(W,Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)\xi,V\right)-2n\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)W,V\right)\end{pmatrix}\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.43}
$$

bulunur. (4.1.43) denkleminde (3.1.6) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,Z\left(X,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(Z\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\
&+g\left(W,X\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(X\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,U\right)g\left(Z\left(X,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(Z\left(X,W\right)Y,V\right)\\
&+g\left(W,Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)W,V\right)\\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S\left(W,Z\left(X,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+2n\eta\left(Z\left(X,U\right)Y\right)g\left(W,V\right)\\ -S\left(W,X\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-2n\eta\left(X\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right)\\ -S\left(W,U\right)g\left(Z\left(X,\xi\right)Y,V\right)-2n\eta\left(U\right)g\left(Z\left(X,W\right)Y,V\right)\\ -S\left(W,Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)\xi,V\right)-2n\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(X,U\right)W,V\right)\end{pmatrix}\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.44}
$$

olur. (4.1.44) denkleminde $X=\xi$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,Z\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(Z\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right) \\
&+g\left(W,\xi\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-\eta\left(\xi\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right) \\
&+g\left(W,U\right)g\left(Z\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(Z\left(\xi,W\right)Y,V\right) \\
&+g\left(W,Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)W,V\right) \\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S\left(W,Z\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+2n\eta\left(Z\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right) \\ -S\left(W,\xi\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-2n\eta\left(\xi\right)g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right) \\ -S\left(W,U\right)g\left(Z\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-2n\eta\left(U\right)g\left(Z\left(\xi,W\right)Y,V\right) \\ -S\left(W,Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-2n\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)W,V\right) \end{pmatrix} \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.45}
$$

elde edilir. (4.1.45) denkleminde $(3.1.2)$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(W,Z\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+\eta\left(Z\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right) \\
&+g\left(W,\xi\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-g\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right) \\
&+g\left(W,U\right)g\left(Z\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-\eta\left(U\right)g\left(Z\left(\xi,W\right)Y,V\right) \\
&+g\left(W,Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)W,V\right) \\
&-\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S\left(W,Z\left(\xi,U\right)Y\right)\eta\left(V\right)+2n\eta\left(Z\left(\xi,U\right)Y\right)g\left(W,V\right) \\ -S\left(W,\xi\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)Y,V\right)-2ng\left(Z\left(W,U\right)Y,V\right) \\ -S\left(W,U\right)g\left(Z\left(\xi,\xi\right)Y,V\right)-2n\eta\left(U\right)g\left(Z\left(\xi,W\right)Y,V\right) \\ -S\left(W,Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)\xi,V\right)-2n\eta\left(Y\right)g\left(Z\left(\xi,U\right)W,V\right) \end{pmatrix} \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.1.46}
$$

bulunur. (4.1.46) eşitliğinde (2.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} g(U,Y)\eta(W)\eta(V)-g(W,V)\eta(V)\eta(Y) \\ -g(U,Y)g(W,V)+g(W,V)\eta(U)\eta(Y) \\ -g(U,Y)\eta(W)\eta(V)+g(V,U)\eta(W)\eta(Y) \\ -g(R(W,U)Y,V)-g(W,Y)\eta(U)\eta(V) \\ -g(W,V)\eta(U)\eta(Y)-g(W,Y)\eta(V)\eta(U) \\ +g(V,U)g(W,Y)+g(W,U)\eta(V)\eta(Y) \\ -g(V,U)\eta(W)\eta(Y) \end{pmatrix} \\
&-\frac{1}{2n}\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} -2ng(U,Y)\eta(W)\eta(V)+S(W,U)\eta(Y)\eta(V) \\ -2ng(U,Y)g(W,V)+2ng(W,V)\eta(U)\eta(Y) \\ -2nS(W,\xi)g(U,Y)\eta(V)+g(U,V)\eta(W)\eta(Y) \\ -2ng(R(W,U)Y,V)+2ng(W,Y)\eta(U)\eta(V) \\ -2ng(W,V)\eta(U)\eta(Y)+S(W,Y)\eta(V)\eta(U) \\ -S(W,Y)g(V,U)+2ng(W,U)\eta(V)\eta(Y) \\ -g(V,U)\eta(W)\eta(Y) \end{pmatrix} \\
&-g(R(W,U)Y,V) \\
&=0
\end{aligned} \tag{4.1.47}$$

elde edilir. (4.1.47) denkleminde (3.1.13) eşitliği kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} g(V,U)g(W,Y)-g(U,Y)g(W,V)-g(R(W,U)Y,V) \\ -\dfrac{1}{2n}\begin{pmatrix} S(W,U)\eta(Y)\eta(V)-2ng(U,Y)g(W,V) \\ -2ng(R(W,U)Y,V)+2ng(W,Y)\eta(U)\eta(V) \\ +S(W,Y)\eta(V)\eta(U)-S(W,Y)g(V,U) \\ +2ng(W,U)\eta(V)\eta(Y) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&=0
\end{aligned} \tag{4.1.48}$$

eşitliği bulunur. Buradan $\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun (4.1.48) denkleminde $W=V=E_i=\{e_i,\varphi_{e_i},\xi\}$ alalım. Bu durumda

$$\left(1+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\begin{pmatrix} g(e_i,U)g(e_i,Y)-g(U,Y)g(e_i,e_i)-g(R(e_i,U)Y,e_i) \\ -g(\varphi e_i,U)g(\varphi e_i,Y)+g(U,Y)g(\varphi e_i,\varphi e_i)+g(R(\varphi e_i,U)Y,\varphi e_i) \\ +g(\xi,U)g(\xi,Y)-g(U,Y)g(\xi,\xi)-g(R(\xi,U)Y,\xi) \\ -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} S(e_i,U)\eta(Y)\eta(e_i)-2ng(U,Y)g(e_i,e_i) \\ -2ng(R(e_i,U)Y,e_i)+2ng(e_i,Y)\eta(U)\eta(e_i) \\ +S(e_i,Y)\eta(e_i)\eta(U)-S(e_i,Y)g(e_i,U) \\ +2ng(e_i,U)\eta(e_i)\eta(Y) \\ -S(\varphi e_i,U)\eta(Y)\eta(\varphi e)+2ng(U,Y)g(\varphi e_i,\varphi e_i) \\ +2ng(R(\varphi e_i,U)Y,\varphi e_i)-2ng(\varphi e_i,Y)\eta(U)\eta(\varphi e_i) \\ -S(\varphi e_i,Y)\eta(\varphi e_i)\eta(U)+S(\varphi e_i,Y)g(\varphi e_i,U) \\ -2ng(\varphi e_i,U)\eta(\varphi e_i)\eta(Y) \\ +S(\xi,U)\eta(Y)\eta(\xi)-2ng(U,Y)g(\xi,\xi) \\ -2ng(R(\xi,U)Y,\xi)+2ng(\xi,Y)\eta(U)\eta(\xi) \\ +S(\xi,Y)\eta(\xi)\eta(U)-S(\xi,Y)g(\xi,U) \\ +2ng(\xi,U)\eta(\xi)\eta(Y) \end{pmatrix}\end{pmatrix} = 0 \tag{4.1.49}$$

elde edilir. (4.1.49) eşitliğinden

$$S(U,Y)=-2ng(U,Y) \tag{4.1.50}$$

sonucuna ulaşılır. (4.1.50) eşitliği göz önüne alınırsa $\widetilde{M}$ bir Einstein manifold olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

.

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

Tezin ana başlığı olan “Para-Sasakian Manifoldlarda Bazı Eğrilik Şartları” kısmında verilen projektif eğrilik tensörü ve concircular eğrilik tensörünün simetriklik şartları altında, manifoldların tasnifine ulaşılmıştır. Bu eğrilik tensörleri ve verilen şartlar değiştiğinde manifoldun sınıflandırılmasının nasıl değişeceği tetkik edilip bulguların açığa çıkarılması gereken bir araştırma konusudur.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında para-Sasakian manifoldlar ile ilgili incelenen eğrilik tensörlerinin temel eşitliklerine ulaşılarak para-Sasakian manifoldlar üzerinde bu eğrilik şartları altındaki sonuçları bulunmuştur. Verilen eğrilik şartlarında bulunan manifold Einstein manifold olarak tasnif edilmiştir.

Bu tezden faydalınarak tezdeki temel kriterler üzerinden yola çıkılıp değişik eğrilik şartlarını göz önüne alarak farklı tipteki manifoldlar tasnif edilebilir. Bu sınıflandırmalar neticesinde farklı eşitliklere ulaşılabileceği sonucuna varılabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] D. Blair, *Riemannian geometry of contact and sympletic manifold*. Birkhauser, Boston, 2002.

[2] I. Sato, "On a structure similar to the almost contact sturcture I.", *Tensor N. S.*, vol. 30, pp. 219-224, 1976.

[3] I. Sato, "On a structure similar to the almost contact sturcture II.", *Tensor N. S,.vol.* 30, pp. 199-205, 1976.

[4] S. Sasaki, "On differentiable manifolds with certain structures with are closely related to almost contact structure I", *Tohoku Math. J.*, vol. 12,no. 2, pp. 459-476, 1960.

[5] D. Blair, *Contact manifolds in Riemanian geometry*. Lectutres Notes in Mahtematics, Springer-Verlag, 1976.

[6] B. O'Neill, *Semi-Riemann geometry*. Acamedic Press Inc., 1983.

[7] T. Takahashi, "Sasakian manifolds with pseudo-Riemannian metric", *Tohoku Math. J.*,vol. 12,no. 2, pp. 644-653, 1969.

[8] K. Matsumoto,"On Lorentzian paraconctact manifolds", *Bulletin Yamagata Univ. Nat. Sci.*,vol. 12,no. 2, pp. 161-166, 1989.

[9] M.M.Tripathi, E.Kılıc, S. Yüksel Perktaş and S.Keleş, "Indefinite almost paracontact metric manifolds", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sci.*, Art. ID 846195, 19 pp, 2010.

[10] S. Kaneyuki and M. Konzai,“Paracomplex structure and afine symmetric spaces”, *Tokyo J. Math*., vol. 8, pp. 301-308, 1985.

[11] S. Zamkovoy, “Canonical connection on paracontact manifolds”, *Ann. Glob. Anal. Geo.*Vol. 36, pp. 37-60, 2009.

[12] K.L. Duggal and A. Bejancu, *Lighlike submanifold of semi-Riemann manifolds and Applications*. Kluwer Academic Publisher, 1996.

[13] B.E. Acet, “Para-Sasakian manifoldların alt manifoldları” Doktora Tezi, İnönü Üniversites, 2014.

[14] S. Zamkovoy, “Para-Sasakian manifolds with a constant paraholomorphic section curvature”, arXiv:0812.1676v1, 2008.

[15] R.Deszcs,“On pseudo symmetric spaces”, *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A.,*vol. 44 no.1,pp. 1-34, 1992.

[16] Z. I.Szabó, “Structure theorems on Riemannian space satisfying the local version”, *J. Differential Geom*.,vol. 17, no. 4, pp. 531-582, 1982.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Fatih FINDIK

Doğum Yeri : SAKARYA/AKYAZI

Doğum Tarihi : 01.10.1990

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ffindik54@hotmail.com

Eğitim Durumu

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Pedagojik Formasyon	Eğitim Bilimleri	İnönü Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitrsi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Sakarya Akyazı Şht. Yzb. Halil İbrahim Sert Lisesi	2007

2014 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir Lisede matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.