T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH UZAYLARINDA ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN İTERASYON DİZİLERİNİN ZAYIF VE KUVVETLİ YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Mustafa ÇETİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN 2021

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARINDA ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN İTERASYON DİZİLERİNİN ZAYIF VE KUVVETLİ YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Mustafa ÇETİN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 17/03/2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Seyit TEMİR

Danışman

Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Üye

Prof. Dr. Hasan FURKAN

Üye

Prof. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BANACH UZAYLARINDA ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN İTERASYON DİZİLERİNİN ZAYIF VE KUVVETLİ YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Mustafa ÇETİN

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Yıl : 2021, Sayfa sayısı: vi+50

Jüri : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr.Hasan FURKAN

Bu tezde, düzgün konveks Banach uzaylarında kendisinden kendisine ve kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için üç-adım iterasyon şemaları çalışılmaktadır. Düzgün konveks Banach uzaylarında belli şartlar altında bu iterasyon şemaları üzerinde zayıf ve kuvvetli yakınsaklık sonuçları elde edilmektedir. Bu tezde elde edilen sonuçlar, Banerjee ve Choudjury [4], Khan ve Hussain [19], Nilsrakoo ve Saejung [24] Suantai [32], Temir [35] ve Thianwan [36] çalışmalarının geliştirilmesidir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, asimptotik genişlemeyen dönüşüm, kuvvetli ve zayıf yakınsama, düzgün konveks Banach uzayı.

ABSTRACT

MSc Thesis

WEAK AND STRONG CONVERGENCE THEOREMS OF ITERATION SEQUENCES FOR ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES

Mustafa ÇETİN

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Year : 2021 , Number of pages:vi+50

Jury : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr.Hasan FURKAN

In this thesis, we study the three-step iterative schemes for approximating common fixed points of three asymptotically nonexpansive self and nonself mappings in uniformly convex Banach spaces. Several strong and weak convergence results on these iterative schemes are established under certain conditions in uniformly convex Banach spaces. The results obtained in this thesis improve the recent ones announced by Banerjee and Choudjury [4], Khan and Hussain [19], Nilsrakoo and Saejung [24], Suantai [32], Temir [35] and Thianwan [36].

Key Words: Fixed point, asymptotically nonexpansive mappings, weak and strong convergence, uniformly convex Banach space.

BEYAN

"Banach Uzaylarında Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler İçin İterasyon Dizilerinin Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremleri" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mustafa ÇETİN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak yaptığım bu çalışma, Adıyaman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim dalında hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Seyit TEMİR' e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\boldsymbol{B_X}$	: *X* uzayındaki yuvar
$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{X},\mathbb{C})$	: *X* in normlu duali
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$	: *T* dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\mathcal{F}$	: Ortak sabit noktaların kümesi
$\boldsymbol{\ell_1}$	: $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert$ yakınsak olan tüm $\{x_n\}$ dizilerinin uzayı
$\boldsymbol{\ell_2}$	: $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert^2$ yakınsak olan tüm $\{x_n\}$ dizilerinin uzayı
$\boldsymbol{\ell_p}$	: $1 \leq p < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert^p$ yakınsak olan tüm $\{x_n\}$ dizilerinin uzayı
$\boldsymbol{\ell}_\infty$	: Sınırlı dizilerin uzayı
$\boldsymbol{X}^*$	: *X* uzayının normlu duali
$\boldsymbol{\delta_{\mathrm{x}}}$	: *X* uzayının konveksliğinin modülü
$\boldsymbol{\omega_{\mathrm{W}}}(\{\mathbf{x_n}\})$	: $\{x_n\}'$ nin zayıf dizisel limitlerinin kümesi

1. GİRİŞ

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında Brower ile başlamıştır. Sabit nokta teori, topoloji ve analizin uygun bir bileşimi olduğundan lineer olmayan denklemlerin çalışmasında çok önemli ve güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Matematik biliminin hemen hemen her alanında çok sayıda uygulamaya sahiptir. Örneğin, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerin lineer denklem sistemlerinin ve ekonomik denge çözümlerin varlığını kanıtlamaktadır. Özellikle sabit nokta teknikleri, biyoloji, kimya, ekonomi, mühendislik ve fizik gibi farklı alanlara uygulanmıştır.

Sabit nokta teori çalışmaları tam metrik ve normlu uzaylar olmak üzere kısmi ve sıralı metrik uzaylar, normlu uzaylar gibi çok çeşitli matematiksel yapılar üzerinde yürütülmektedir.

1930 yılında J. Schauder, Brower Sabit Nokta Teorisi' ni geliştirmiştir. Schauder Teoremi olarak adlandırılan teorem, "X bir Banach uzayı ve K, X' in boş olmayan herhangi bir konveks ve kompakt alt kümesi olmak üzere, $T: K \rightarrow K$ sürekli dönüşüm olsun. O zaman, T'nin en az bir sabit noktaya sahiptir" şeklinde ifade edilmiştir.

Banach Sabit Nokta Teoremi bir tam metrik uzayda dönüşümlerle ilgili çok genel bir teoremdir. Teoremde bahsi geçen sabit noktanın daima tek olması kesin bir hesaplamayla elde edilebilir olması yanında kullanılan dönüşümün daralma olması şartı teoremin uygulama alanlarına ciddi kısıtlamalar getirmektedir. Bu sebeple birçok araştırmacı daha genel metrik uzayları veya farklı türden dönüşüm sınıflarını kullanarak bu teoremin çok sayıda genelleştirmelerini elde etmiştir. Literatürde dönüşümlerin sabit noktalarını incelemek için sabit noktanın varlığını ve değerini bulmak gereklidir ve bu da kolay olmadığından bunları hesaplamak için iterasyon süreçlerine gereksinim vardır. Banach Sabit Nokta Teoremi, dönüşümlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremi olmasının yanı sıra sabit noktanın tam olarak hesaplanmasını sağlayan doğal bir yöntem geliştirmektedir. Söz konusu bu yönteme iterasyon (ardışık yaklaşımlar) denir. İterasyon yöntemleri birçok bilim dalında karşılaşılan lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan çok önemli matematiksel araçlardır.

Genişlemeyen dönüşümler ve onların genelleştirilmesi lineer olmayan dönüşümler, fonksiyonel analizde büyük önem taşımaktadır. Genişlemeyen dönüşümler sınıfının önemli bir genellemesi olan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı Gobel ve Kirk [12] tarafından verilmiş ve düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks ve sınırlı alt kümesi üzerinde her asimptotik genişlemeyen dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamışlardır. Daha sonra, Nilsrakoo ve Saejung [24], Suantai [32] yeni üç adım iterasyon şemasını sunarak asimptotik genişlemeyen dönüşümler için birçok yakınsaklık teoremlerini ispatladılar.

Chidume ve ark. [6] kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramını ve böyle dönüşümler için iterasyon tekniklerini kullanarak bazı kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremlerini ispatladılar. Kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin yeni elde edilen iterasyon metodları kullanılarak zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri, Khan ve Hussain [19], Temir [35], Thianwan [36], Banarjee ve Choudhury [4] tarafından da çalışıldı.

Bu tez çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümde, sabit nokta teoremlerinin gelişim süreci anlatılmakta olup literatürle ilgili bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölüm, temel kavramlar bölümü olup tezde kullanılan temel tanım ve ilgili teoremler verilmektedir. Dördüncü bölümde, kullanılan iterasyon yöntemleri ve beşinci bölümde faydalanılacak lemmalar ve ispatları yer almaktadır. Beşinci bölümde ise Khan ve Hussain [19], Temir [35], Thianwan[36], Banarjee ve Choudhury [4], Nilsrakoo ve Saejung [24], Suantai [32] çalışmaları gözönüne alınarak alınan iterasyonla üç tane kendisinden kendisine ve kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları incelenmektedir.

2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Genişlemeyen dönüşümler sınıfının önemli bir genellemesi olan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı Gobel ve Kirk [12] tarafından verilmiştir. Gobel ve Kirk [12], düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks ve sınırlı alt kümesi üzerinde kendi üzerine olan her asimptotik genişlemeyen dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu ispatladılar.

Kendisinden kendisine olan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin önemli bir genelleştirilmesi olan kendinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler kavramı 2003 yılında Chidume ve ark. [6] tarafından verildi. Chidume ve Ali [7], kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin bir sonlu ailesinin ortak sabit noktaya yaklaşımında yeni iterasyon dizisi kullanarak bazı kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremlerini ispatladılar. Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalara yaklaşımı Mann, Ishikawa ve Noor, modifiye edilmiş iterasyon süreçleri kullanarak birçok yazar tarafından yoğun olarak çalışılmıştır ([4], [6], [8], [12], [18], [19], [24], [29], [31], [32], [34], [35], [36], [38]).

Bu çalışmada, Banarjee ve Choudhury [4], Khan ve Hussain [19], Nilsrakoo ve Saejung [24], Suantai [32], Temir [35] ve Thianwan [36]'nin çalışmaları gözönüne alınarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Suantai [32], Noor iterasyonun geliştirilmişi olan üç adımlı yeni iterasyonu tanımladı ve düzgün konveks Banach uzaylarında asimtotik genişlemeyen dönüşümlerin geliştirilmiş iterasyonu için zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerini ispatladı. Nilsrakoo ve Saejung [24], Noor iterasyonunun genişlemesi olan yeni üç-adım iterasyon tanımladılar ve asimptotik genişlemeyen dönüşümler için geliştirilmiş Noor iterasyonunun zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerini çalıştılar. Khan ve Hussain [19], Temir [35], kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için geliştirilmiş iterasyon süreçlerini kullanarak zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatladılar. Thianwan [36], kendisinden kendisine olmayan üç asimptotik genişlemeyen dönüşümün ortak sabit noktaya yaklaşımı için geliştirilmiş Noor iterasyonunun yakınsaklık kriterini çalıştı. Banerjee ve Choudhury [4] 'de verilen iterasyon teknikleri kullanılarak düzgün konveks Banach uzayında kendisinden kendisine olmayan (nonself) asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktalarına yakınsaklığını sonlu iterasyon şeması için elde ettiler.

Bu tezde, düzgün konveks Banach uzayında üç tane kendisinden kendisine olan ve kendisinden kendisine olmayan (nonself) asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yeni verilen üç-adım iterasyon şemasının zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri incelenmektedir.

3.TEMEL KAVRAMLAR ve TEOREMLER

3.1. Genel Tanımlar ve Kavramlar

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlara ve teoremlere yer verilmektedir.

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X' e F cismi üzerinde bir lineer uzay denir.

X , + ikili işlemine göre değişmeli bir gruptur;

1) Her $x, y \in X$ için $x + y \in X$' dır.

2) Her $x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$' dir.

3) Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

4) Her $x \in X$ için $x + x' = x' + x = \theta$ olacak şekilde $x' \in X$ vardır.

5) Her $x, y \in X$ için $x + y = y + x'$ dir.

$\cdot : F \times X \to X$, $(a, x) \to a.x$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar.

1^0) Her $x \in X$ ve $a \in F$ için $a.(x + y) = a.x + a.y$' dır.

2^o) Her $x, y \in X$ ve $a, b \in F$ için $(a + b).x = a.x + b.y$' dır.

3^o) Her $x \in X$ ve $a, b \in F$ için $(ab).x = a(b.x)$' dır.

4^o) $1.x = x$ dır. (Burada $1, F$ nin birim elemanıdır.)

Eğer $F = \mathbb{R}$ ise X'e reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise X'e kompleks lineer uzay denir [21].

Tanım 3.1.2. K, X lineer uzayının alt kümesi olsun. Her $x, y \in K$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $(1 - \alpha)x + \alpha y \in K$ ise K ‘ya konveks küme denir [21].

Tanım 3.1.3. X boştan farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna her $x, y, z \in X$ için

1. $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlıyorsa X üzerinde bir metrik adı verilir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay adı verilir [21].

Tanım 3.1.4. (X,d) bir metrik uzay, bu uzay içinde bir dizi $\{x_n\}$ ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n \to x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde ifade edilir [22].

Tanım 3.1.5. (X,d) metrik uzay ve bu uzay içinde bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n, m$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [22].

(X,d) metrik uzayında yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. (X,d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise X uzayına tamdır denir [22].

Tanım 3.1.6. X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ 'deki değeri, $\|x\|$ ile gösterilmek üzere. Her $x, y \in X$ ve $a \in F$ için,

1. $\| x \| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [21].

Tanım 3.1.7. X normlu uzay olmak üzere X, $d(x,y) = \|x - y\|$ normunun indirgediği metriğine göre tam ise X' e Banach uzayı denir [21].

Tanım 3.1.8. X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle .,. \rangle: X \times X \to F$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ ve $a \in F$ için

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
2. $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, buna iç çarpım fonksiyonu denir [21].

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı lineer uzaya iç çarpım uzayı denir ve $(\mathrm{X}, \langle\, .\,,. \rangle)$ biçiminde gösterilir. X bir iç çarpım uzayı ve $\|.\|$ iç çarpım normu olsun.

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

olarak tanımlanırsa (X,d) bir metrik uzay olur.

Tanım 3.1.9. İç çarpım üzerinde tanımlanan normdan indirgenen d metriğine göre X tam ise, X 'e Hilbert uzayı denir [21].

Tanım 3.1.10. X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \geq 0$ sayısı varsa, X' e düzgün konveks uzay adı verilir [2].

Örnek 3.1.11. X Hilbert uzayı, düzgün konvekstir. Her $x, y \in X$ için paralelkenar özdeşliğinden

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) - \|x-y\|^2$$

yazılabilir. Burada, $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_X$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ olduğunu göz önünde bulundurarak

$$\|x-y\|^2 \leq 4-\varepsilon^2$$

olur. Eğer

$$\delta(\varepsilon) = 1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}} \text{ alınırsa}$$

$$\frac{1}{2}\|x-y\| \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

bulunur. O halde, X Hilbert uzayı, düzgün konveks bir uzaydır [37].

Örnek 3.1.12.

1) ℓ_1 ve ℓ_∞ sonsuz uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\, x_n\,|$ ve $\|x\|_\infty = sup\{|\, x_n\,| : n \in \mathbb{N}\}$ normlarına göre düzgün konveks uzay değildirler.

2) $1 < p < \infty$ olmak üzere ℓ_{p} Banach uzayı, düzgün konveks uzayıdır [37].

Teorem 3.1.13. X bir Banach uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X, düzgün konvekstir.

2. X ‘deki $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dizileri için

$$\|x_n\| \leq 1, \quad \|y_n\| \leq 1 \ \ ve \ \lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$$

dır [1].

Tanım 3.1.14. X bir Banach uzayı olsun. $\delta_X\colon [0,2] \to [0,1]$

$\delta_X(\varepsilon) = \ inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\|\right\}$çiminde tanımlanan δ_X’e, X‘in konveksliğinin modülü denir [1].

Buradan $\delta_X(0) = 0$ ve her $\omega \geq 0$ için $\delta_X(\omega) \geq 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 3.1.15. X Banach uzayı, düzgün konvekstir ancak ve ancak her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_X(\varepsilon) > 0$ olmasıdır [1].

Tanım 3.1.16. X bir normlu uzay, X‘de tanımlı bütün kompleks değerli sürekli lineer fonksiyonellerin kümesi $\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ ile gösterilsin. Bu uzaya, X‘in normlu duali denir ve X^* biçiminde gösterilir [22].

Tanım 3.1.17.

1) X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X‘de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x’ e norma göre (kuvvetli) yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{\text{k}} x$ şeklinde gösterilir.

2) X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X ’de bir dizi ve X* , X’ in duali olsun. Eğer $\forall\ f \in$ X* için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x’ e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{\text{z}} x$ veya $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir [22].

3.2. Dönüşüm Sınıfları ve Sabit Nokta Kavramı

Tanım 3.2.1. X boştan farklı bir küme, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer, $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası (fixed point) denir. O zaman $Tx = x$ denkleminin çözümleri T'nin sabit noktalarıdır. T 'nin sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir [21].

Örnek 3.2.2.

1. $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ için $F(T) = \left\{\sqrt{3}\right\}$' tür.
2. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ birim dönüşümü için X' in her noktası sabit bir noktadır.
3. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = \alpha + x$ şeklindeki öteleme dönüşümlerinin sabit noktası yoktur.
4. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 18$ dönüşümü için $F(T) = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\right\}$' tür.

X boştan farklı küme olmak üzere, $T_1, T_2: X \to X$ dönüşümleri verilsin. Eğer $T_1 x = T_2 x = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, buna T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir ve ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.2.3.

1. $X = \mathbb{R}$, $T_1, T_2: X \to X$, $T_1(x) = x^2 - 6x + 12$ ve $T_2(x) = x^2 - 5x + 9$ dönüşümleri verilsin. T_1 ve T_2'nin ortak sabit noktaları kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{3\}$' tür.
2. $X = \mathbb{R}^2$, $T_1, T_2: X \to X$ $T_1(x, y) = (-x, y)$ ve $T_2(x, y) = (3x, y)$ dönüşümleri verilsin. T_1 ve T_2 'nin ortak sabit noktaları kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{(0, y)\}$' dir.

Tanım 3.2.4. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall\ x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y) \qquad (3.1)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ sayısı varsa, T' ye Lipschitzian dönüşüm denir. (3.1) eşitsizliğine Lipschitzian koşulu ve bu koşulu sağlayan en küçük L sayısına da Lipschitz sabiti denir [5].

Bu tanıma göre Lipschitz koşulunu sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir.

Tanım 3.2.5. (X, d)bir metrik uzay ve $T: X \to X$ Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Eğer (3.1) eşitsizliği $0 \leq L < 1$ olması halinde sağlıyorsa, T' ye daralma (contraction) dönüşümü denir [5, 21].

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daralma dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünü alalım. T dönüşümü bir daralma dönüşümüdür, fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daralma dönüşümlerde düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daralma dönüşümü de olamaz. Buna karşın T daralma dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n (T'nin n. iterasyonu) bir daralma dönüşümü olabilir.

Tanım 3.2.6. (X, d)metrik uzay olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü alınsın. $\forall\ x, y \epsilon X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

eşitsizliği gerçeklenirse *T*' ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [5].

Örnek 3.2.7. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, $\forall x, y \in X$ için $\|Tx - Ty\| \leq \|\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\| = \|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\| = \|\frac{x-y}{2}\| = \frac{1}{2}\|x - y\| \leq \|x - y\|$

olduğundan, *T* bir genişlemeyen dönüşümdür.

Örnek 3.2.8. $T:[0,3]\rightarrow[0,3],\, T(x)=\begin{cases}1.2\,, & x=3\\ 0\,, & x\neq 3\end{cases}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, $x=3$ ve $y=2.5$ için $\|\|Tx-Ty\|=1.2>0.5=\|x-y\|$ elde edilir. Dolayısıyla, T bir genişlemeyen dönüşüm değildir.

Tanım 3.2.9. X bir normlu uzay, $K\neq\emptyset$, $K\subseteq X$ ve $T:K\rightarrow K$ dönüşümü olmak üzere Eğer $\forall\, x,y\in K$ ve $\forall\, n\in\mathbb{N}$ için

$$\|T^n x-T^n y\|\leq L\|x-y\|$$

olacak biçimde $L>0$ sayısı varsa, T ‘ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir [24].

Örnek 3.2.10. $X=\left[\frac{-1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]$ ve $T:X\rightarrow X$,

$$Tx=\begin{cases}0\,, & x=0\\ \dfrac{x}{2}sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\end{cases}$$

bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm sürekli olmasına rağmen bir Lipschitzian dönüşüm değildir [37].

Örnek 3.2.11. X alışılmış norm ile reel sayılar kümesi ve $K=[-1,1]$ olmak üzere $R,S,T,U:K\rightarrow K$ tanımlayalım.

$$R(x)=\begin{cases}x\,, & x\in[0,1]\\ x\,, & x\in[-1,0)\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}-\,sin\,x, & x\in[0,1]\\ sin\,x\,, & x\in[-1,0)\end{cases}$$

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\in[0,1]\\ \dfrac{-x}{2}, & x\in[-1,0)\end{cases}$$

$$U(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & x\in[0,1]\\ \dfrac{-x}{3}, & x\in[-1,0)\end{cases}$$

$x\in K$ için $R,S,T,U:K\rightarrow K$ ve R,S,T,U birer genişlemeyen dönüşüm ve ortak sabit noktası $\mathcal{F}=F(R)\cap F(S)\cap F(T)\cap F(U)=\{0\}$ olan dönüşümdürler. S nin genişlemeyen dönüşüm olduğu gösterelim.

Eğer $x,y\in[0,1]$ ya da $x,y\in[-1,0]$ olsun. Buradan

$$\|\,Sx-Sy\,\|=|sin\,x-sin\,y|=2\left|sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+y}{2}\right|\leq 2\left|sin\frac{x-y}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right|$$

$=|\mathrm{x}-\mathrm{y}|$ olur.

Eğer $x \in [0,1]$, $y \in [-1,0)$ ya da $x \in [-1,0)$, $y \in [0,1]$ ise

$\| Sx - Sy \| = |\sin x + \sin y| = 2\left|\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right| \leq 2|x+y| \leq |x-y|$

olduğundan S bir genişlemeyen dönüşümdür. Diğer taraftan $R(x), T(x)$ ve $U(x)$' in de genişlemeyen dönüşüm oldukları kolayca gösterilebilir.

Şimdi kendisinden kendisine tanımlı genişlemeyen dönüşümler sınıfının bir genellemesi olan asimptotik genişlemeyen dönüşümler sınıfı ile ilgili temel kavramları verelim.

Tanım 3.2.12. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T' ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir [12].

Tanım 3.2.13. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme olsun ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise, T' ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir [9, 27].

Tanım 3.2.14. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$, her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T dönüşümüne asimptotik olarak quasi-genişlemeyen dönüşüm denir [18, 24].

Örnek 3.2.15. B_{ℓ_2}, ℓ_2 Hilbert uzayında kapalı birim yuvar ve $\{\alpha_i\}, \prod_{i=2}^{\infty} \alpha_i = \frac{1}{2}, (0 < \alpha_i < 1)$ şartını sağlayan bir reel dizi olsun. $T: B_{\ell_2} \to B_{\ell_2}$ dönüşümünü

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, {x_1}^2, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \cdots)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda her $x, y \in B_{\ell_2}$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq 2\|x - y\|$$

dir. Buradan T Lipschitzian bir dönüşümdür. Diğer taraftan, her $x, y \in B_{\ell_2}$ ve $n \geq 2$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq 2 \prod_{i=2}^{n} a_i \, \|x - y\|$$

olur. Limit alınırsa, $\lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} 2 \prod_{i=2}^{n} a_i = 1$ elde edilir. Dolayısıyla T bir asimptotik genişlemeyen dönüşüm olmasına rağmen genişlemeyen bir dönüşüm olmadığı açıkça görülür [37].

Örnek 3.2.16. X, $\|.\|$ alışılmış norm ile reel eksen olamak üzere $K = [-1,0]$ olsun ve T aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$T(x) = \begin{cases} -2\sin\dfrac{x}{2}, & x \in [0,1] \\ 2\ \sin\dfrac{x}{2}, & x \in [-1,0) \end{cases}$$

Açık olarak $F(T) = \{0\}$ ve T genişlemeyen dönüşümdür. Gerçekte eğer $x, y \in [0,1]$ yada $x, y \in [-1,0)$ ise o zaman

$$\| Tx - Ty \| = 2\left|\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2}\right| \leq |x - y|$$

Eğer $x \in [0,1]$, $y \in [-1,0)$ ya da $y \in [0,1]$, $x \in [-1,0)$ ise o zaman

$$\| Tx - Ty \| = 2\left|\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2}\right| = 4\left|\sin\frac{x+y}{4}\cos\frac{x-y}{4}\right| \leq |x + y| \leq |x - y|$$

Yani, T genişlemeyen dönüşüm olur. Diğer taraftan, T dönüşümü düzgün Lipschitzian ve $k_n \cong 1$ olarak alındığında, T dönüşümü, asimptotik genişlemeyen dönüşüm olur.

4.MATERYAL ve YÖNTEM

4.1. İterasyon Yöntemleri

Herhangi bir dönüşümün sabit nokta veya noktalarını hesaplarken çeşitli iterasyon şemaları kullanılır. Bunlardan Picard iterasyonu, Mann iterasyonu, Ishikawa iterasyonu ve Noor iterasyonu en iyi bilinen iterasyon şemalarına örnek olarak verilebilir.

Tanım 4.1.1. $(X.d)$ bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 0,1,2,\cdots \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır [28].

Bu iterasyon, birbiri ardına olan yaklaşımlar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Tam metrik uzay üzerinde tanımlı daralma dönüşümlerinin sabit noktalarına yakınsamada kullanılan önemli iterasyonlardan biri Picard iterasyonudur. Daralma dönüşümü yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa Picard iterasyonu, dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 4.1.2. $X = [0,1]$ olmak üzere $T: [0,1] \to [0,1], Tx = 1 - x$ dönüşümü verilsin. T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \frac{1}{2}$ dir. Herhangi bir $x_0 = \alpha \neq \frac{1}{2}$ noktası için (4.1) Picard iterasyonu,

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 = 1 - \alpha \\
x_2 &= Tx_1 = T^2 x_0 = \alpha \\
x_3 &= Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = 1 - \alpha \\
&\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

biçimindedir. Bu ise $(\alpha, 1-\alpha, \alpha, 1-\alpha, \cdots)$ dizisini belirtir. Bu dizi $\alpha \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla istenilen sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon şemalarını göz önüne almak gerekir.

Tanım 4.1.3. X normlu uzay, $K \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, n = 0,1,2,\cdots \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir [23].

Mann tarafından 1953 yılında oluşturulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır.

Tanım 4.1.4. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, n = 0,1,2,\cdots \end{cases} \quad (4.3)$$

şekinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir [15].

1974 yılında S.Ishikawa [15] tarafından kurulmuş, Lipschitzian ve pseudo-contractive dönüşümleri için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudo-contractive olan bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır [3].

(4.3) eşitliğinde verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur [5].

Tanım 4.1.5. X normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme olmak üzere $T: K \to K$ dönüşümü verilsin. $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, n \geq 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir [25].

Nilsrakoo ve Saejung [24]' de, düzgün konveks Banach uzayında kendi üzerine olan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının zayıf ve kuvvetli yakınsaklığını aşağıdaki iterasyonu kullanarak elde etmişlerdi.

$$\begin{cases} z_n = a_n T^n x_n + (1-a_n)x_n \\ y_n = b_n T^n z_n + c_n T^n x_n + (1-b_n-c_n)x_n \\ x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + \beta_n T^n z_n + \gamma_n T^n x_n + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{b_n + c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n\} \subset [0,1]$$

koşulları sağlansın. Eğer (4.5)' de, $\{\gamma_n\} = 0$ alınırsa [32]' de tanımlanan geliştirilmiş Noor iterasyonuna indirgenir ve

$$\begin{cases} z_n = a_n T^n x_n + (1-a_n)x_n \\ y_n = b_n T^n z_n + c_n T^n x_n + (1-b_n-c_n)x_n \\ x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + \beta_n T^n z_n + (1-\alpha_n-\beta_n)x_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer (4.5)' de, $\{c_n\} = \{\beta_n\} = \{\gamma_n\} = 0$ alınırsa, [25]' da tanımlanan Noor iterasyonuna indirgenir ve

$$\begin{cases} z_n = a_n T^n x_n + (1-a_n)x_n \\ y_n = b_n T^n z_n + (1-b_n)x_n \\ x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1-\alpha_n)x_n \qquad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer (4.5)' de, $\{a_n\} = \{c_n\} = \{\beta_n\} = \{\gamma_n\} = 0$ alınırsa, [15]' da tanımlanan Ishikawa iterasyonuna indirgenir ve

$$\begin{cases} y_n = b_n T^n z_n + (1-b_n)x_n \\ x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1-\alpha_n)x_n, \qquad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer (4.5)' de, $\{a_n\} = \{b_n\} = \{c_n\} = \{\beta_n\} = \{\gamma_n\} = 0$ ise alınırsa, [23]' de tanımlanan Mann iterasyonuna indirgenir ve

$$x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1-\alpha_n)x_n, \quad \forall n \geq 1 \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır.

4.2. Bazı Gerekli Tanım ve Lemmalar

Bu kısımda, 5. Bölüm için gerekli olan bazı tanım ve lemmalar verilmiştir.

Tanım 4.2.1. X bir reel Banach uzayı ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer, X 'deki $\{x_n\}$ dizisi x^*' a zayıf ve Tx_n dizisi p' ye kuvvetli yakınsadığında $Tx^* = p$ oluyorsa, T dönüşümüne p noktasında demiclosed (yarı-kapalı) denir [8, 37].

Tanım 4.2.2. Bir X Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması $\forall\ y \in X, y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, X Banach uzayı, Opial'in şartını sağlıyor denir [26].

Örnek 4.2.3. Her Hilbert uzayı Opial şartını sağlar. Yani, X Hilbert uzayında, $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına zayıf yakınsak ise $\forall\ y \in X$ ve $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

olur. Bilindiği üzere, zayıf yakınsak dizi, sınırlıdır. O zaman, $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$ sonludur.

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle$$

olduğundan $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 > \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2$ bulunur [37].

Tanım 4.2.4. K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşümü olsun. Eğer K' daki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ oluyorsa T dönüşümüne semikompakt denir. O zaman $\{x_n\}$ dizisinin, K 'da x^* sabit noktasına kuvvetli yakınsak olan bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır [7].

Tanım 4.2.5. K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin, bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi var ve $\{Tx_{n_j}\}$ dizisi, T'nin görüntü kümesinde yakınsak ise, T dönüşümüne tamamen süreklidir denir [7].

Tanım 4.2.6. K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T))$$

ise T' ye (A) şartını sağlıyor denir [30].

Burada $d(x, F(T)) = inf_{y \in F(T)} d(x, y)$' dir. (A) şartı, K 'nın kompaktlığından daha zayıftır [33].

$T_1, T_2, T_3: K \to K$ olmak üzere üç dönüşüm için (A) şartı aşağıdaki şekilde genelleştirilir.

Tanım 4.2.7. K boştan farklı X Banach uzayının alt kümesi ve $T_1, T_2, T_3: K \to K$ verilsin. Eğer $\forall r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{3}(\|x - T_1 x\| + \|x - T_2 x\| + \|x - T_3 x\|) \geq f(d(x, F(T))$$

ise $T_1, T_2, T_3: K \to K$ dönüşümleri (A′) şartını sağlıyor denir [4].

Diğer yandan $T_1 = T_2 = T_3 = T$ alınırsa, (A), (A′) şartının özel bir durumu olduğu açıktır.

K, boştan farklı X Banach uzayının alt kümesi ve $T_1, T_2, T_3: K \to K$ verilsin. Eğer $\forall r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$max_{1 \leq i \leq 3}(\|x - T_i x\|) \geq f(d(x, F(T))$$

ise $T_1, T_2, T_3: K \to K$ dönüşümleri (A") şartını sağlıyor denir[4].

Ayrıca yine $T_1 = T_2 = T_3 = T$ alınırsa, (A), (A") şartının özel bir durumu olur.

Lemma 4.2.8. $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{\delta_n\}$ diziler olmak üzere

$$a_{n+1} \leq (1 + \delta_n) a_n + b_n, n \geq 1$$

eşitsizliğini gerçekleyen negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Şayet $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ ise $\lim_{n \to \infty} a_n$ vardır [33].

Lemma 4.2.9. X, Opial'in şartını sağlayan bir Banach uzayı, $\{x_n\}$, X 'de bir dizi ve $u, v \in X$ için $\lim_{n \to \infty} \|x_n - u\|$ ve $\lim_{n \to \infty} \|x_n - v\|$ limitleri var olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin

$\{x_{n_k}\}$ ve $\{x_{m_k}\}$ alt dizileri sırasıyla u ve v noktalarına zayıf yakınsıyorlarsa $u = v$ olur [32].

Şimdi asimptotik genişlemeyen dönüşümler ile demiclosed (yarı-kapalı) olma durumu arasındaki bağıntıyı verelim. Daha sonra da asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin varlık teoremi verilecektir.

Lemma 4.2.10. K, Opial'in şartını sağlayan Banach uzayının boş olmayan zayıf kompakt bir alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $\{x_n\}$, $n \to \infty$ iken $x_n \to x \in K$ ve $x_n - Tx_n \to 0$ şartlarını sağlayan bir dizi ise $\{Tx_n\}$ dizisi $x \in K$ noktasına zayıf yakınsar [1].

Teorem 4.2.11. K, Opial'in şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan zayıf kompakt, konveks alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. O halde $(I - T)$ 0' da demiclosed (yarı-kapalı) olur [1].

Teorem 4.2.12. X düzgün konveks Banach uzayı, K' da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. O halde $(I - T)$ sıfırda demiclosed (yarı-kapalı) olur [39].

Teorem 4.2.13. X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. O halde $F(T)$ kümesi kapalı ve konvekstir [12].

Lemma 4.2.14. $k > 1$ sabit bir sayı ise X Banach uzayı düzgün konvekstir ancak ve ancak tüm $x, y \in B_X \coloneqq \{x \in X: \|x\| \le r\}, r > 0$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\|^k \le \lambda\|x\|^k + (1-\lambda)\|y\|^k + \omega_k(\lambda)g(\|x - y\|)$$

ve $g(0) = 0$ olacak şekilde $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli, kuvvetli artan ve konveks fonksiyonu vardır. Burada $\omega_k(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^k - \lambda^k(1-\lambda)$ ' dır [38].

Lemma 4.2.15. X düzgün konveks Banach uzayı olmak üzere $\forall\, x, y, z \in B_X$ ve $\lambda + \beta + \gamma = 1$ şartını sağlayan her $\lambda, \beta, \gamma \in [0,1]$ için

$$\|\lambda x + \beta y + \gamma z\|^2 \le \lambda\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \lambda\beta g(\|x - y\|)$$

olacak biçimde sürekli, kesin artan ve konveks bir $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(0) = 0$ fonksiyonu vardır [8].

Lemma 4.2.16. X düzgün konveks Banach uzayı ve
$B_X \coloneqq \{x \in X: \|x\| \leq R\}, R > 0$ olsun. O zaman $x, y, z \in B_X$ ve $\lambda, \mu, \xi, v \in [0,1]$ $\lambda + \mu + \xi + v = 1$

$$\|\lambda x + \mu y + \xi z + v w\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 + \mu\|y\|^2 + \xi\|z\|^2 + v\|w\|^2$$
$$-\frac{1}{3}(v(\lambda g(\|x - w\|) + \mu g(\|y - w\|) + \xi g(\|z - w\|))$$

ve $g(0) = 0$ olmak üzere $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli, kuvvetli artan, konveks bir fonksiyon vardır [24].

Kendisinden kendisine olan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin tanımı, 3.2 kısımda verilmişti. Bu kısımda ise kendisinden kendisine olan asimptotik genişlemeyen dönüşümler ile ilgili bilinen temel teorem ve lemmalar verildi. Buradan itibaren kendisinden kendisine olmayan (nonself) asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramı verilecektir.

4.3. Kendisinden Kendisine Olmayan Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler

Kendisinden kendisine olmayan bir dönüşüm için kullanılan iterasyon süreci iyi tanımlı olmayabilir. Bu iterasyon sürecini iyi tanımlı yapabilmek için bir çekmeye (retraction) gereksinim duyulmaktadır.

Tanım 4.3.1. K, bir X reel Banach uzayının alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $Px = x$ olacak biçimde $P: X \to K$ sürekli dönüşüm varsa, K'ya X'in çekilmesi (retract) denir [36].

Düzgün konveks Banach uzayında alınan her kapalı konveks alt küme, bir çekmedir. $P: X \to X$ dönüşümünün bir çekme (retraction) olabilmesi için $P^2 = P$ durumunun gerçeklenmesi gereklidir.

Asimptotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin önemli bir genelleştirmesi olan kendisinden kendisine olmayan (nonself) asimptotik olarak genişlemeyen dönüşüm kavramını ilk defa Chidume ve ark. [6] ifade etmişlerdir.

Tanım 4.3.2. K, bir X reel normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $P: X \to K$ dönüşümü X' in K üzerindeki bir genişlemeyen çekmesi olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n\|x - y\|$$

olacak şekilde $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, $T: K \to X$ dönüşümüne asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir [6,7].

Eğer $\forall\, x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ reel sayısı varsa, T'ye düzgün L-Lipschitzian dönüşüm adı verilir [6, 7, 36].

Lemma 4.3.3. X, bir reel düzgün konveks Banach uzayı ve P genişlemeyen çekme olmak üzere X' in boş olmayan kapalı kümesi K ve $T: K \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, o zaman $F(PT) = F(T)$ olur [6, 7].

Lemma 4.3.4. K, bir reel düzgün konveks X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olmak üzere, $T: K \to X$ kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşüm ise $(I - T)$ sıfırda demiclosed (yarı-kapalı) olur [6].

Kendisinden kendisine olmayan genişlemeyen dönüşümlerin (non-self nonexpansive mappings) sabit noktalara yakınsaklığı için iterasyon teknikleri [6], [7], [19], [31], [34], [35] ve [36] çalışmalarında ele alınmıştır. Aşağıda verilen iterasyonu kullanarak Chidume ve ark [6], kendisinden kendisine asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin genellemesi olan kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler (nonself asymptotically nonexpansive mappings) için bazı kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremlerini elde etmişlerdir.

$$\begin{cases} y_n = P(\beta_n T(PT)^{n-1}x_n + (1 - \beta_n)x_n) \\ x_{n+1} = P(\alpha_n T(PT)^{n-1}y_n + (1 - \alpha_n)x_n), \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Burada $\delta \in (0,1)$, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [\delta, 1 - \delta]$.

Son zamanlarda, Temir [35], düzgün konveks Banach uzayında kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için aşağıdaki üç adım iterasyon şemasının kuvvetli ve zayıf yakınsaklıklarını elde etmiştir.

$$\begin{cases} z_n = P(a_n T(PT)^{n-1}x_n + (1-a_n)x_n) \\ y_n = P(b_n T(PT)^{n-1}z_n + c_n T(PT)^{n-1}x_n + (1-b_n-c_n)x_n) \\ x_{n+1} = P(\alpha_n T(PT)^{n-1}y_n + \beta_n T(PT)^{n-1}z_n + \gamma_n T(PT)^{n-1}x_n + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x_n), \\ \qquad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümün ilk kısmında, kendisinden kendisine olan asimptotik genişlemeyen dönüşümler ile ilgili Nilsrakoo, Saejung [24]'de sunulan iterasyon süreci modifiye edilerek üç-adım iterasyonu aşağıdaki biçimde sunulmaktadır. Bu iterasyon kullanılarak üç tane kendisinden kendisine olan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktasına yakınsaklık teoremleri verilmektedir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar, Nilsrakoo ve Saejung [24] , Suantai [32]'da elde edilen sonuçların bir genellemesidir.

$$\begin{cases} z_n = a_n {T_1}^n x_n + (1-a_n)x_n \\ y_n = b_n {T_2}^n z_n + c_n {T_2}^n x_n + (1-b_n-c_n)x_n \\ x_{n+1} = \alpha_n {T_3}^n y_n + \beta_n {T_3}^n z_n + \gamma_n {T_3}^n x_n + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x_n, \qquad n \geq 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Burada $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{b_n+c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n\} \subset [0,1]$ içindeki dizilerdir.

Bununla birlikte, $k_n = max\{{l_n}^1, {l_n}^2, {l_n}^3\}$ olmak üzere ve $k_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde bir pozitif reel sayı dizisi alalım.

5.1. Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler İçin İterasyon Dizisinin Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremleri

Lemma 5.1.1. X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi olmak üzere, $i = 1,2,3$ için $T_i: K \to K$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde pozitif reel dizi ve $\bigcap_{i=1}^{3} F(T_i) = \mathcal{F}$ boş olmayan sabit noktası ile asimptotik genişlemeyen dönüşümler olmak üzere (5.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini alalım. O zaman $\forall p \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur.

İspat $q \in F(T)$ olmak üzere (5.1) kullanılarak

$$\begin{aligned} \|z_n - q\| &= \|a_n {T_1}^n x_n + (1-a_n)x_n - q)\| \\ &= \|a_n({T_1}^n x_n - q) + (1-a_n)(x_n - q)\| \\ &\leq a_n \|{T_1}^n x_n - q\| + (1-a_n)\|x_n - q\| \\ &\leq a_n k_n \|x_n - q\| + (1-a_n)\|x_n - q\| \\ &= (a_n k_n + 1 - a_n)\|x_n - q\| \end{aligned}$$

$$= (1 + a_n(k_n - 1))\|x_n - q\|$$

$$\|y_n - q\| = \|b_n T_2{}^n z_n + c_n T_2{}^n x_n + (1 - b_n - c_n)x_n - q\|$$
$$= \|b_n(T_2{}^n z_n - q) \| + c_n(T_2{}^n x_n - q) + (1 - b_n - c_n)(x_n - q)\|$$
$$\leq b_n\|T_2{}^n z_n - q \| + c_n \| T_2{}^n x_n - q \| + (1 - b_n - c_n) \| x_n - q\|$$
$$\leq b_n k_n\| z_n - q \| + c_n b_n \| x_n - q \| + (1 - b_n - c_n) \| x_n - q\|$$
$$\leq (b_n k_n((1 + a_n(k_n - 1)) + c_n k_n + (1 - b_n - c_n))\|x_n - q\|$$
$$= (1 + b_n k_n + b_n k_n a_n(k_n - 1) + c_n k_n - b_n - c_n)\|x_n - q\|$$
$$= (1 + b_n(k_n - 1) + b_n k_n a_n(k_n - 1) + c_n(k_n - 1)\|x_n - q\|$$

$$\|x_{n+1} - q\| = \|\alpha_n T_3{}^n y_n + \beta_n T_3{}^n z_n + \gamma_n T_3{}^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)x_n - q\|$$
$$\leq \|\alpha_n(T_3{}^n y_n - q) + \beta_n(T_3{}^n z_n - q) + \gamma_n(T_3{}^n x_n - q)$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)(x_n - q)\|$$
$$\leq \alpha_n\|T_3{}^n y_n - q\| + \beta_n\|T_3{}^n z_n - q\| + \gamma_n\|T_3{}^n x_n - q\|$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|$$
$$\leq \alpha_n k_n\|y_n - q\| + \beta_n k_n\|z_n - q\| + \gamma_n k_n\|x_n - q\|$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|$$
$$\leq \alpha_n k_n(1 + b_n(k_n - 1) + b_n k_n a_n(k_n - 1) + c_n(k_n - 1)\|x_n - q\|$$
$$+\beta_n k_n(1 + a_n(k_n - 1))\|x_n - q\| + \gamma_n k_n\|x_n - q\|$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|$$
$$= (1 + a_n k_n + b_n k_n a_n(k_n - 1) + a_n b_n k_n{}^2 \alpha_n(k_n - 1)$$
$$+c_n k_n a_n(k_n - 1) - a_n + \beta_n k_n + \beta_n k_n a_n(k_n - 1)$$
$$-\beta_n + \gamma_n k_n - \gamma_n)\|x_n - q\|$$
$$= (1 + a_n(k_n - 1) + b_n k_n a_n(k_n - 1)$$
$$+k_n b_n a_n(k_n - 1) + c_n(k_n - 1)$$
$$+\beta_n(k_n - 1) + \beta_n k_n a_n(k_n - 1) + \gamma_n(k_n - 1))\|x_n - q\|$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olduğundan, Lemma 4.2.8 gereği $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - q\|$ mevcuttur.

Lemma 5.1.2. X düzgün konveks Banach uzayı, K' da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi, $i = 1,2,3$ için $T_i: K \to K$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde pozitif reel dizi ve $\bigcap_{i=1}^{3} F(T_i) = \mathcal{F}$ boş olmayan sabit noktası ile asimptotik genişlemeyen dönüşümler olmak üzere, (5.1) de tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini alalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler elde edilir.

1. $0 < lim\, inf_n \alpha_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n + \beta_{n+}\gamma_n) < 1$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \| {T_3}^n y_n - x_n \| = 0\text{'dır.}$$

2. $0 < lim\, inf_n \beta_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \| {T_3}^n z_n - x_n \| = 0\text{'dır.}$$

3. $0 < lim\, inf_n \gamma_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n + \beta_{n+}\gamma_n) < 1$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \| {T_3}^n x_n - x_n \| = 0\text{'dır.}$$

4. $0 < lim\, inf_n \alpha_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1$ ve

$lim\, sup_n(b_n + c_n) < 1$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \| {T_2}^n z_n - x_n \| = 0\text{'dır.}$$

5. $0 < lim\, inf_n(\alpha_n b_n + \beta_n)$, $0 < lim\, inf_n a_n \leq lim\, sup_n a_n < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} \| {T_1}^n x_n - x_n \| = 0$' dır.

İspat : Lemma 5.1.1' de $\forall q \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \|$ var olduğu ispatlanmıştı. O halde $\{x_n - q\}, \{{T_1}^n x_n - q\}, \{{T_2}^n z_n - q\}, \{{T_3}^n y_n - q\}, \{{T_3}^n z_n - q\}, \{{T_3}^n x_n - q\}$ dizileri sınırlıdır.

$$\begin{aligned} \|z_n - q\|^2 &= \|a_n {T_1}^n x_n + (1 - a_n)x_n - q\|^2 \\ &\leq a_n \|{T_1}^n x_n - q\|^2 + (1 - a_n)\|x_n - q\|^2 \\ &\quad - a_n(1 - a_n) g(\|{T_1}^n x_n - x_n\|) \\ &\leq a_n {k_n}^2 \|x_n - q\|^2 + (1 - a_n)\|x_n - q\|^2 \\ &\quad - a_n(1 - a_n) g(\|{T_1}^n x_n - x_n\|) \end{aligned}$$

$$\|y_n - q\|^2 = \|b_n {T_2}^n z_n + c_n {T_2}^n x_n + (1 - b_n - c_n)x_n - q\|^2$$

$$\leq b_n\|T_2{}^n z_n - q\|^2 + c_n\|T_2{}^n x_n - q\|^2 + (1 - b_n - c_n)\|x_n - q)\|^2$$
$$-b_n(1 - b_n - c_n)\ g(\|T_2{}^n z_n - x_n\|)$$
$$\leq b_n k_n{}^2\|z_n - q\|^2 + c_n k_n{}^2\|x_n - q\|^2 + (1 - b_n - c_n)\|x_n - q)\|^2$$
$$-b_n(1 - b_n - c_n)g(\|T_2{}^n z_n - x_n\|)$$
$$\leq b_n k_n{}^2(1 + a_n(k_n{}^2 - 1))\|x_n - q)\|^2 + c_n k_n{}^2 + (1 - b_n - c_n))$$
$$\|x_n - q)\|^2 - b_n(1 - b_n - c_n)g(\|T_2{}^n z_n - x_n\|)$$
$$-a_n b_n k_n{}^2(1 - a_n)g(\|T_1{}^n x_n - x_n\|)$$
$$\leq \left(1 + b_n k_n{}^2 + a_n b_n k_n{}^2(k_n{}^2 - 1) + c_n k_n{}^2 - b_n - c_n\right)\|x_n - q\|^2$$
$$-b_n(1 - b_n - c_n)(g(\|T_2{}^n z_n - x_n\|))$$
$$-a_n b_n k_n{}^2(1 - a_n)(g(\|T_1{}^n x_n - x_n\|))$$

$$\|x_{n+1} - q\|^2 = \|\alpha_n T_3{}^n y_n + \beta_n T_3{}^n z_n + \gamma_n T_3{}^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)x_n) - q)\|^2$$
$$\leq \alpha_n\|T_3{}^n y_n - q\|^2 + \beta_n\|T_3{}^n z_n - q\|^2 + \gamma_n\|T_3{}^n x_n - q\|^2$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|^2$$
$$-\tfrac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)(\alpha_n g(\| T_3{}^n y_n - x_n\|)$$
$$+\beta_n g(\| T_3{}^n z_n - x_n\|) + \gamma_n g(\| T_3{}^n x_n - x_n\|))$$
$$\leq \alpha_n k_n{}^2\|y_n - q\|^2 + \beta_n k_n{}^2\|z_n - q\|^2 + \gamma_n k_n{}^2\|x_n - q\|^2$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q)\|^2$$
$$-\tfrac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)(\alpha_n g(\| T_3{}^n y_n - x_n\|)$$
$$+\beta_n g(\| T_3{}^n z_n - x_n\| + \gamma_n g(\| T_3{}^n x_n - x_n \|)$$
$$\leq \Big[\alpha_n k_n{}^2\left(1 + b_n k_n{}^2 + a_n b_n k_n{}^2(k_n{}^2 - 1) + c_n k_n{}^2 - b_n - c_n\right)$$
$$+ \beta_n k_n{}^2\left(\alpha_n k_n{}^2 + (1 - \alpha_n)\right) + \gamma_n k_n{}^2 + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\Big]\|x_n$$
$$- q)\|^2 - \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)(\alpha_n g(\| T_3{}^n y_n - x_n\|)$$
$$+ \beta_n g(\| T_3{}^n z_n - x_n \|) + \gamma_n g(\| T_3{}^n x_n - x_n\|))$$
$$- \alpha_n k_n{}^2(b_n(1 - b_n - c_n)g(\| T_2{}^n z_n - x_n\|) - k_n{}^4 a_n \alpha_n b_n(1$$
$$- a_n)g(\| T_1{}^n x_n - x_n\|) - a_n\beta_n k_n{}^2(1 - a_n)g(\| T_1{}^n x_n - x_n\|)$$

$$
\begin{aligned}
&= \big[1 + (\alpha_n {k_n}^2 + b_n\alpha_n {k_n}^4 + a_n b_n \alpha_n {k_n}^6 \\
&\quad - a_n b_n \alpha_n {k_n}^4 + c_n\alpha_n {k_n}^4 - b_n\alpha_n {k_n}^2 - \alpha_n c_n {k_n}^2 + \beta_n a_n {k_n}^4 \\
&\quad + \beta_n {k_n}^2 - \beta_n a_n {k_n}^2 + \gamma_n {k_n}^2 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\big]\|x_n - q\|^2 - \frac{1}{3}(1 \\
&\quad - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)(\alpha_n g(\| {T_3}^n y_n - x_n\|) + \beta_n g(\| {T_3}^n z_n - x_n \|) \\
&\quad + \gamma_n g(\| {T_3}^n x_n - x_n\|)) - \alpha_n {k_n}^2 (b_n(1 - b_n - c_n) g(\| {T_2}^n z_n - x_n\|) \\
&\quad - {k_n}^4 a_n \alpha_n b_n (1 - a_n) g(\| {T_1}^n x_n - x_n\|) - a_n \beta_n {k_n}^2 (1 \\
&\quad - a_n) g(\| {T_1}^n x_n - x_n\|) \\
&= 1 + \left({k_n}^2 - 1\right) \\
&\quad \left[\alpha_n + b_n\alpha_n + a_n b_n \alpha_n {k_n}^4 + \alpha_n c_n {k_n}^2 + \beta_n a_n {k_n}^2 + \beta_n + \gamma_n\right] \|x_n - q\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)(\alpha_n g(\| {T_3}^n y_n - x_n\|) + \beta_n g(\| {T_3}^n z_n - x_n \|) \\
&\quad + \gamma_n g(\| {T_3}^n x_n - x_n\|)) - \alpha_n {k_n}^2 (b_n(1 - b_n - c_n) g(\| {T_2}^n z_n - x_n\|) \\
&\quad - {k_n}^4 a_n \alpha_n b_n (1 - a_n) g(\| {T_1}^n x_n - x_n\|) - a_n \beta_n {k_n}^2 (1 \\
&\quad - a_n) g(\| {T_1}^n x_n - x_n\|)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_n = &-\tfrac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)(\alpha_n g(\| {T_3}^n y_n - x_n\|) + \beta_n g(\| {T_3}^n z_n - x_n \|) \\
&+ \gamma_n g(\| {T_3}^n x_n - x_n\|)) - \alpha_n {k_n}^2 (b_n(1 - b_n - c_n) g(\| {T_2}^n z_n - x_n\|) \\
&- k_n a_n \alpha_n b_n (1 - a_n) g(\| {T_1}^n x_n - x_n\|) - a_n \beta_n {k_n}^2 (1 - a_n) g(\| {T_1}^n x_n - x_n\|)
\end{aligned}
$$

ve

$B_{n=}\left({k_n}^2 - 1\right)\left[\alpha_n + b_n\alpha_n + a_n b_n \alpha_n {k_n}^4 + \alpha_n c_n {k_n}^2 + \beta_n \alpha_n {k_n}^2 + \beta_n + \gamma_n\right]$

alalım. Buradan

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \le (1 + B_n)\|x_n - q\|^2 + A_n$$

eşitsizliği yazılır. O zaman,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) g(\| {T_3}^n y_n - x_n\|) \le 3(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + B_n) \\
&\beta_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) g(\| {T_3}^n z_n - x_n\|) \le 3(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + B_n) \\
&\gamma_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) g(\| {T_3}^n x_n - x_n\|) \le 3(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + B_n) \\
&a_n b_n (1 - b_n - c_n) g(\| {T_2}^n z_n - x_n\|) \le (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + B_n) \\
&a_n b_n \alpha_n (1 - a_n) + a_n \beta_n (1 - a_n) g(\| {T_1}^n x_n - x_n\|) \\
&\qquad\qquad \le (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + B_n)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q\|$ mevcut ve
$\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)g(\| T_3{}^n y_n - x_n\|) \leq 3(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + B_n)$
olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} g(\| T_3{}^n y_n - x_n\|) = 0$$

olur. $\mathrm{g}(0) = 0$, g sürekli artan fonksiyon ve

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \| T_3{}^n y_n - x_n\| = 0$$

elde edilir. Aynı metod kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \| T_3{}^n z_n - x_n\| = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \| T_3{}^n x_n - x_n\| = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \| T_2{}^n z_n - x_n\| = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \| T_2{}^n x_n - x_n\| = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \| T_1{}^n x_n - x_n\| = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

bulunur. Böylece istenilen elde edilir.

(5.2)'den faydalanarak, $\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_1 x_n \| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_2 x_n \| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_3 x_n \| = 0$ eşitlikleri kolaylıkla aşağıdaki gibi elde edilir. (5.1) ve (5.2)' den

$$\|z_n - x_n\| = \| \alpha_n T_1{}^n x_n + (1 - a_n)x_n - x_n\|$$

eşitliğinde limit alınır ve işlem yapılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n \| T_1{}^n x_n - x_n\| = 0$$

elde edilir. Yine (5.1) ve (5.2)' den

$$\| x_{n+1} - x_n \| = \| \alpha_n T_3{}^n y_n + \beta_n T_3{}^n z_n + \gamma_n T_3{}^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)x_n - x_n) \|$$

eşitliği yazılır ve buradan da limit alınır ve işlem yapılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - x_n \| \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \| T_3{}^n y_n - x_n \| + \beta_n \| T_3{}^n z_n - x_n \| + \gamma_n \| T_3{}^n x_n - x_n \| = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$\| x_n - T_1 x_n \| \leq \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - T_1^{\,n+1} x_{n+1} \|$$
$$+ \| T_1^{\,n+1} x_{n+1} - T_1^{\,n+1} x_n \| + \| T_1^{\,n+1} x_n - T_1^{\,n} x_n \|$$

eşitsizliği yazılır. Bilindiği gibi, asimptotik genişlemeyen dönüşümün bir düzgün Lipschitzian dönüşüm olduğu kullanılır ve limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_1 x_n \| \leq \lim_{n\to\infty} (\| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - T_1^{\,n+1} x_{n+1} \|$$
$$+ L \| x_{n+1} - x_n \| + L \| T_1^{\,n} x_n - x_n \|) = 0$$

elde edilir. Ayrıca benzer işlemler yapıldığında

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_2 x_n \| = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \| x_n - T_3 x_n \| = 0$$

olduğu bulunur.

Teorem 5.1.3. X düzgün konveks Banach uzayı, K' da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi, $i = 1,2,3$ için $T_i: K \to K$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde pozitif reel dizi ve $\bigcap_{i=1}^{3} F(T_i) = \mathcal{F}$ boş olmayan sabit noktası ile asimptotik genişlemeyen dönüşümler olmak üzere, (5.1) de tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini alalım. Eğer T_i $(i = 1,2,3)$ 'den en az biri tamamen sürekli veya semikompakt ve $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) \cap F(T_3) \neq \emptyset$ ise o zaman $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ dizileri T_i $(i = 1,2,3)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsar.

İspat: T_i $(i = 1,2,3)$'den en az biri tamamen sürekli dönüşüm ve $\{\mathrm{x_n}\} \subset \mathrm{K}$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} T_1 x_{n_k} \to q^*$ olduğu için $\{T_1 x_n\}$ dizisinin $\{T_1 x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Bu yüzden, $\lim_{n\to\infty} \|T_1 x_n - x_n\| = 0$ elde edildiğinden, $k \to \infty$ için $x_{n_k} \to q^*$ olur.T_1 in sürekliliğinden $T_1 q^* = q^*$ dır. Buradan hareketle $T_2 q^* = q^*$ ve $T_3 q^* = q^*$elde edilir. Böylece $q^* \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q^*\|$ mevcut olduğundan $\{x_n\}$, q^* a kuvvetli yakınsar. Ayrıca $\|y_n - q^*\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - q^*\|$ dan $\{y_n\}, T_1, T_2, T_3$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Benzer olarak, $\|z_n - q^*\| \leq \|z_n - x_n\| + \|x_n - q^*\|$ dan $\{z_n\}$ de T_1, T_2, T_3 dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Şimdi, T_1 semikompakt olsun. $\{x_n\}$ sınırlı ve $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_1 x_n\| = 0$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = q^*$ olduğu kabul edilecek şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Lemma 4.2.12’ den $I - T_1$ sıfırda demiclosed(yarı-kapalı) olduğundan $T_1 q^* = q^*$ olur. Benzer olarak $T_2 q^* = q^*$ ve $T_3 q^* = q^*$ olur. Tüm $q^* \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q^*\|$ mevcut olduğundan $\{x_n\}$ dizisi q^* ye kuvvetli yakınsar.

Yani, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q^*\| = 0$ olur. Benzer işlemlerle $\{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizilerinin $\mathcal{F}$’ nin q^* elemanına yakınsadığı gösterilir.

Teorem 5.1.4. K, Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayının kapalı konveks alt kümesi olsun. Lemma 5.1.2’ deki gibi T_i $(i = 1,2,3)$ ve $\{x_n\}$ dizisini tanımlayalım. Eğer $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ise, o zaman $\{x_n\}$ dizisi, T_1, T_2, T_3’ün ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $i = 1,2,3$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ olduğu Lemma 5.1.2‘de gösterilmişti. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin $\mathcal{F}$ içinde bir tek zayıf alt dizisel limite sahip olduğunu ispatlayalım. Bunu ispatlamak için u ve v sırasıyla $\{x_n\}$ in $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri olsun. $i = 1,2,3$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ olduğu Lemma 5.1.2’ den elde edilir ve $i = 1,2,3$ için $I - T_i$ sıfırda demiclosed (yarı-kapalı) olduğundan $T_1 u = u, T_2 u = u, T_3 u = u$ olur. Aynı yöntemle $v \in \mathcal{F}$ olduğu ispatlanır. Şimdi limitin tekliğini ispatlayalım. $u \neq v$ olduğunu kabul edelim Opial’in şartından

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\| &= \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - u\| \\
&< \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - v\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - v\| \\
&= \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - v\| \\
&< \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - u\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x_n - u\|
\end{aligned}$$

yazılır. Bu ise çelişkidir. O halde $u = v$’ dir.

5.2. Kendisinden Kendisine Olmayan Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler İçin Üç Adım İterasyon Dizisinin Yakınsaklığı

Bu bölümde kendisinden kendisine olmayan üç tane asimptotik genişlemeyen dönüşümler için aşağıda verilen üç-adım iterasyonu sunulmaktadır. Bu iterasyon kullanılarak üç tane kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için ortak sabit noktaya yakınsaklık teoremleri verilmektedir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar [4], [19], [35] ve [36]' da yapılan çalışmaların bir geliştirilmesidir.

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x} \in \mathrm{K}$$

$$\begin{cases} z_n = P(a_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + (1 - a_n) x_n) \\ y_n = P(b_n T_2 (PT_2)^{n-1} z_n + c_n T_2 (PT_2)^{n-1} x_n + (1 - b_n - c_n) x_n) \\ x_{n+1} = P(\alpha_n T_3 (PT_3)^{n-1} y_n + \beta_n T_3 (PT_3)^{n-1} z_n + \gamma_n T_3 (PT_3)^{n-1} x_n \\ \qquad\qquad + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n), \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Burada, $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{b_n + c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n\} \subset [0,1]$ içinde dizilerdir.

Bununla beraber, $k_n = max\{{l_1}^1, {l_n}^2, {l_n}^3\}$ olmak üzere ve $k_n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak şekilde bir pozitif reel sayı dizisi olduğunu kabul edelim.

Lemma 5.2.1. X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi olsun. $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olmak üzere (i=1,2,3) için $T_i: K \to X$ kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve T_i nin ortak sabit noktalarının kümesi boştan farklı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini (5.3)' de verilen iterasyon dizisi olarak tanımlayalım. O halde $q \in \mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) \cap F(T_3) \neq \emptyset$ ise $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q\|$ mevcuttur.

İspat: $\|z_n - q\| = \|P(a_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + (1 - a_n) x_n - Pq)\|$

$$\leq \|a_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + (1 - a_n) x_n - q\|$$

$$\leq \|a_n (T_1 (PT_1)^{n-1} x_n - q) + (1 - a_n)(x_n - q)\|$$

$$\leq a_n \|T_1 (PT_1)^{n-1} x_n - q\| + (1 - a_n)\|x_n - q\|$$

$$\leq a_n k_n \|x_n - q\| + (1 - a_n)\|x_n - q\|$$

$$= (1 + a_n k_n - a_n)\|x_n - q\| = (1 + a_n(k_n - 1))\|x_n - q\|$$

elde edilir.

$$\|y_n - q\| = \|P(b_n T_2(PT_2)^{n-1} z_n + c_n T_2(PT_2)^{n-1} x_n + (1 - b_n - c_n)x_n) - Pq\|$$
$$\leq \|b_n T_2(PT_2)^{n-1} z_n + c_n T_2(PT_2)^{n-1} x_n + (1 - b_n - c_n)x_n - q\|$$
$$\leq b_n \|T_2(PT_2)^{n-1} z_n - q\| + c_n \|T_2(PT_2)^{n-1} x_n - q\| + (1 - b_n - c_n)\|x_n - q\|$$
$$\leq \boldsymbol{b_n k_n}\|\boldsymbol{z_n} - q\| + \boldsymbol{c_n k_n}\|\boldsymbol{x_n} - q\| + (1 - b_n - c_n)\|x_n - q\|$$
$$\leq \boldsymbol{b_n k_n}\big(1 + a_n(k_n - 1)\big)\|x_n - q\| + (\boldsymbol{c_n k_n} + (1 - b_n - c_n))\|x_n - q\|$$
$$\leq (1 + (k_n - 1)(\boldsymbol{b_n} + \boldsymbol{c_n} + a_n b_n k_n))\|x_n - q\|$$

elde edilir.

$$\|x_{n+1} - q\| = \|P(\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1} y_n + \beta_n T_3(PT_3)^{n-1} z_n + \gamma_n T_3(PT_3)^{n-1} x_n$$
$$+ (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)x_n) - Pq\|$$
$$\leq \|\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1} y_n - q\| + \beta_n \|T_3(PT_3)^{n-1} z_n - q\|$$
$$+ \gamma_n \|T_3(PT_3)^{n-1} x_n - q\|$$
$$+ (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|$$
$$\leq \alpha_n k_n \|y_n - q\| + \beta_n k_n \|z_n - q\| + \gamma_n k_n \|x_n - q\|$$
$$+ (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|$$
$$\leq [(\alpha_n k_n)(1 + (k_n - 1)(\boldsymbol{b_n} + \boldsymbol{c_n} + a_n b_n k_n))$$
$$+ \beta_n k_n (1 + \alpha_n (k_n - 1))$$
$$+ \gamma_n k_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)]\|x_n - q\|$$
$$\leq [1 + (k_n - 1)(\boldsymbol{\alpha_n} + \boldsymbol{\beta_n} + \boldsymbol{\gamma_n}) + (k_n - 1)(k_n \alpha_n \beta_n + \alpha_n c_n k_n)]$$
$$+ (k_n - 1)\big(\boldsymbol{\alpha_n k_n}^2 \boldsymbol{b_n} a_n\big) + (k_n - 1)(k_n a_n \beta_n))\big]\|x_n - q\|$$

bulunur. Buradan da

$$\|x_{n+1} - q\| \leq (1 + (k_n - 1)(\boldsymbol{\alpha_n} + \boldsymbol{\beta_n} + \boldsymbol{\gamma_n} + k_n \alpha_n b_n + k_n \alpha_n c_n + \boldsymbol{\alpha_n k_n}^2 \boldsymbol{b_n} a_n$$
$$+ \boldsymbol{\beta_n k_n} a_n))\|x_n - q\|$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olduğundan ve Lemma 4.2.8 gereği, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ mevcuttur.

Lemma 5.2.2. X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi olsun. $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olmak üzere (i=1,2,3) için $T_i : K \to X$ kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve T_i nin ortak sabit noktalarının kümesi boştan farklı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini (5.3)' de verilen iterasyon dizisi olarak tanımlayalım. Burada $\sum_{n=0}^{\infty}\left({k_n}^2 - 1\right) < \infty$ ve $k_n \geq 1$ olacak şekilde reel sayıların bir $\{k_n\}$ dizisini alalım. O zaman aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. $0 < lim\, inf_n \alpha_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1,$

2. $0 < lim\, inf_n \alpha_n \; ve \; 0 \leq lim\, sup_n b_n \leq lim\, sup_n(b_n + c_n) < 1,$

3. $0 < lim\, inf_n \beta_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1,$

4. $0 < lim\, inf_n \gamma_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) < 1,$

5. $0 < lim\, inf_n(\alpha_n b_n + \beta_n), \;\; 0 < lim\, inf_n a_n \leq lim\, sup_n a_n < 1,$

olarak kabul edelim. O zaman

$$lim_{n\to\infty}\|T_1x_n - x_n\| = 0\,, lim_{n\to\infty}\|T_2z_n - x_n\| = 0, lim_{n\to\infty}\|T_3z_n - x_n\| = 0$$
$$lim_{n\to\infty}\|T_3y_n - x_n\| = 0\,, lim_{n\to\infty}\|z_n - x_n\| = 0, lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$$
$$lim_{n\to\infty}\|T_2x_n - x_n\| = 0\,, lim_{n\to\infty}\|T_3x_n - x_n\| = 0$$

olur.

İspat: Lemma 5.2.1'den $q \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ vardır. O zaman $\{x_n - q\}$ sınırlıdır. $\{T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\}, \{T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\}, \{T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\},$
$\{T_3(PT_3)^{n-1}z_n - q\}, \{T_3(PT_3)^{n-1}x_n - q\},$
dizileri de sınırlıdır. Böylece
$\{x_n - q\}, \{T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\}, \{T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\}, \{T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\},$
$\{T_3(PT_3)^{n-1}z_n - q\}, \{T_3(PT_3)^{n-1}x_n - q\} \subset B_R$
olacak şekilde $R > 0$ vardır.

$$\begin{aligned}
\|z_n - q\|^2 &= \|P(a_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1-a_n)x_n - Pq)\|^2 \\
&\leq \|a_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1-a_n)x_n - q\|^2 \\
&\leq \|a_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + (1-a_n)(x_n - q)\|^2 \\
&\leq a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2 + (1-a_n)\|x_n - q\|^2 \\
&\quad -a_n(1-a_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|\,)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq a_n{k_n}^2\|x_n-q\|^2+(1-a_n)\|x_n-q\|^2\\
&\qquad\qquad -a_n(1-a_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)\\
&\leq (1+a_n{k_n}^2-a_n)\|x_n-q\|^2-a_n(1-a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|))\\
&=((1+a_n\big({k_n}^2-1\big))\|x_n-q\|^2-a_n(1-a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|y_n-q\|^2 &= \|P(b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n+c_nT_2(PT_2)^{n-1}x_n+(1-b_n-c_n)x_n-Pq)\|^2\\
&\leq \|b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n+c_nT_2(PT_2)^{n-1}x_n+(1-b_n-c_n)x_n-q)\|^2\\
&\leq b_n\|(T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|^2+c_n\|T_2(PT_2)^{n-1}x_n-q\|^2\\
&\quad +(1-b_n-c_n)\|x_n-q\|^2\\
&\quad -b_n(1-b_n-c_n)(b_n\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|))\\
&\leq b_n{k_n}^2\|z_n-q\|^2+c_n{k_n}^2\|x_n-q\|^2+(1-b_n-c_n)\|x_n-q)\|^2\\
&\quad -b_n(1-b_n-c_n)g(\|T(PT)^{n-1}z_n-x_n\|)\\
&\leq b_n{k_n}^2(1+a_n\big({k_n}^2-1\big))\|x_n-q)\|^2\\
&\quad +(c_n{k_n}^2+(1-b_n-c_n))\|x_n-q)\|^2\\
&\quad -b_n(1-b_n-c_n)(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|))\\
&\quad -a_nb_n{k_n}^2(1-a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|))\\
&= \Big(1+\big({k_n}^2-1\big)\big(\,b_n+c_n+a_nb_n{k_n}^2\big)\Big)\,\|x_n-q)\|^2\\
&\quad -b_n(1-b_n-c_n)(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|))\\
&\quad -a_nb_n{k_n}^2(1-a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\|^2 = {} & \|P(\alpha_n(T_3(PT_3)^{n-1}y_n+\beta_nT_3(PT_3)^{n-1}z_n+\gamma_nT_3(PT_3)^{n-1}x_n \\
& +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x_n)-Pq)\|^2 \\
& \leq \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-q\|^2+\beta_n\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n-q\|^2 \\
& +\gamma_n\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\|x_n-q\ \|^2 \\
& -\tfrac{1}{3}(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)(\alpha_ng(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|) \\
& +\beta_ng(\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n-x_n\|)+\gamma_ng(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq \alpha_n{k_n}^2\|y_n-q\|^2+\beta_n{k_n}^2\|z_n-q\|^2+\gamma_n{k_n}^2\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n \\
-\gamma_n)\|x_n-q)\|^2-\frac{1}{3}(1-\alpha_n-\beta_n \\
-\gamma_n)(\alpha_ng(\|\ T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|)+\beta_ng(\\
\|\ T_3(PT_3)^{n-1}z_n-x_n\|)+\gamma_ng(\|\ T_3(PT_3)^{n-1}x_n-x_n\ \|))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq \alpha_n{k_n}^2\left(1+\left({k_n}^2-1\right)\left(\ b_n+c_n+a_nb_n{k_n}^2\right)\right)\|x_n-q)\|^2-\alpha_nb_n(1-b_n \\
-c_n)(g\left(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|\right)) \\
+\beta_n{k_n}^2\left(1+\alpha_n\left({k_n}^2-1\right)\right)\|x_n-q)\|^2+\gamma_n{k_n}^2\|x_n-q)\|^2 \\
+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\|x_n-q)\|^2-\frac{1}{3}(1-\alpha_n-\beta_n \\
-\gamma_n)(\alpha_ng(\|\ T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|))+\beta_ng(\\
\|\ T_3(PT_3)^{n-1}z_n-x_n\|)+\gamma_ng(\|\ T_3(PT_3)^{n-1}x_n-x_n \\
\|))-\alpha_nb_n(1-b_n-c_n)(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|))-a_n\alpha_nb_n(1 \\
-a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|))-a_n\beta_n(1 \\
-a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|))
\end{aligned}
$$

$$\leq \Big[\alpha_n {k_n}^2\big[b_n {k_n}^2 + \beta_n \alpha_n {k_n}^4 - \beta_n \alpha_n {k_n}^2 + c_n k^2 + 1 - b_n - c_n\big]$$
$$+ \beta_n {k_n}^2\big[1 + \alpha_n {k_n}^2 - \alpha_n\big]$$
$$+ \big[\big(\gamma_n {k_n}^2 + 1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n\big)\big]\Big] \|x_n - q\|^2 - \frac{1}{3} b_n \alpha_n {k_n}^2 (1 - b_n$$
$$- c_n)\big(g(\|T_2(PT_2)^{n-1} z_n - x_n\|)\big) - \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n$$
$$- \gamma_n)(\alpha_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1} y_n - x_n\|) + \beta_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1} z_n - x_n\|)$$
$$+ \gamma_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1} x_n - x_n\|)) - b_n(\alpha_n {k_n}^2)(1 - b_n$$
$$- c_n)\big(g(\|T_2(PT_2)^{n-1} z_n - x_n\|)\big) - b_n a_n {k_n}^2 (\alpha_n {k_n}^2)(1$$
$$- \alpha_n)\big(g(\|T_1(PT_1)^{n-1} x_n - x_n\|)\big) - \beta_n(\alpha_n {k_n}^2)(1$$
$$- \alpha_n)\big(g(\|T_1(PT_1)^{n-1} x_n - x_n\|)\big)$$

$$= \|x_n - q\|^2 + \big[\alpha_n\, b_n {k_n}^4 + b_n a_n \alpha_n {k_n}^6 - \alpha_n b_n a_n {k_n}^4 + \alpha_n c_n {k_n}^4 + \alpha_n {k_n}^2$$
$$- \alpha_n b_n {k_n}^2 - \alpha_n c_n {k_n}^2 + \beta_n {k_n}^2 + \beta_n a_n {k_n}^4 - \beta_n a_n {k_n}^2 + \gamma_n {k_n}^2$$
$$- \alpha_n - \beta_n - \gamma_n\big] \|x_n - q\|^2 - \frac{1}{3} b_n \alpha_n {k_n}^2 (1 - b_n$$
$$- c_n)\big(g(\|T_2(PT_2)^{n-1} z_n - x_n\|)\big) - \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n$$
$$- \gamma_n)(\alpha_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1} y_n - x_n\|) + \beta_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1} z_n - x_n\|)$$
$$+ \gamma_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1} x_n - x_n\|)) - b_n(\alpha_n {k_n}^2)(1 - b_n$$
$$- c_n)\big(g(\|T_2(PT_2)^{n-1} z_n - x_n\|)\big) - b_n a_n {k_n}^2 (\alpha_n {k_n}^2)(1$$
$$- a_n)\big(g(\|T_1(PT_1)^{n-1} x_n - x_n\|)\big) - \beta_n(a_n {k_n}^2)(1$$
$$- a_n)\big(g(\|T_1(PT_1)^{n-1} x_n - x_n\|)\big)$$

$$= \|x_n - q\|^2 + \big[\alpha_n({k_n}^2 - 1) + \beta_n({k_n}^2 - 1) + \gamma_n({k_n}^2 - 1) + \alpha_n b_n {k_n}^2({k_n}^2 - 1)$$
$$+ \alpha_n a_n b_n {k_n}^4({k_n}^2 - 1) + a_n\beta_n {k_n}^2({k_n}^2 - 1) + \alpha_n c_n {k_n}^2({k_n}^2$$
$$- 1)\big]\|x_n - q\|^2 - \frac{1}{3} b_n\alpha_n(1 - b_n - c_n)(g(\|T(PT)^{n-1}z_n - x_n\|))$$
$$- \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n$$
$$- \gamma_n)\big(\alpha_n g(\|T(PT)^{n-1}y_n - x_n\|) + \beta_n g(\|T(PT)^{n-1}z_n - x_n\|)$$
$$+ \gamma_n g(\|T(PT)^{n-1}x_n - x_n\|)\big) - (\alpha_n {k_n}^2) b_n(1 - b_n$$
$$- c_n)(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)) - (\alpha_n {k_n}^2) a_n b_n {k_n}^2(1$$
$$- a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)) - (\beta_n {k_n}^2) a_n(1$$
$$- a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|))$$

$$= \|x_n - q\|^2 + \big({k_n}^2 - 1\big)\big[\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + (b_n a_n {k_n}^2) + (\alpha_n a_n b_n {k_n}^4)$$
$$+ (\beta_n a_n {k_n}^2) + (c_n \alpha_n {k_n}^2)\big]\|x_n - q\|^2$$
$$- b_n a_n {k_n}^2(1 - b_n - c_n)\big(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)\big)$$
$$- \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\big(\alpha_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$+ \beta_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n - x_n\|) + \gamma_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\|)\big)$$
$$- (\alpha_n {k_n}^2) b_n(1 - b_n - c_n)(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|))$$
$$- (\alpha_n {k_n}^2) a_n b_n {k_n}^2(1 - a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|))$$
$$- (\beta_n {k_n}^2) a_n(1 - a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|))$$

$$\le \|x_n - q\|^2 + \big({k_n}^2 - 1\big)\big[\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + (b_n a_n {k_n}^2) + (\alpha_n a_n b_n {k_n}^4)$$
$$+ (\beta_n a_n {k_n}^2) + (c_n \alpha_n {k_n}^2)\big]\|x_n - q\|^2$$
$$- \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\big(\alpha_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$+ \beta_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n - x_n\|) + \gamma_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\|)\big)$$
$$- \alpha_n b_n(1 - b_n - c_n)\big(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)\big)$$
$$- \alpha_n a_n b_n(1 - a_n)\big(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)\big) - \beta_n a_n(1$$
$$- a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|))$$

bulunur. Lemma 5.2.1’ den $q \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q\|$ vardır.

$\{\|x_n - q\|\}$ sınırlı olduğundan $\|x_n - q\|^2 = r^2$ ve

$$M = \left[\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + (b_n a_n {k_n}^2) + (\alpha_n a_n b_n {k_n}^4) + (\beta_n a_n {k_n}^2) + (c_n \alpha_n {k_n}^2)\right] r^2$$

alalım. O zaman

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 \le \|x_n - q\|^2 + ({k_n}^2 - 1)M \\ &- \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\big(\alpha_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|) \\ &+ \beta_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n - x_n\|) + \gamma_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\|)\big) \\ &- \alpha_n b_n(1 - b_n - c_n)(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)) - \alpha_n a_n b_n(1 \\ &- a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)) - \beta_n a_n(1 \\ &- a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|))\end{aligned}$$

yazılır.

$$\kappa_n = ({k_n}^2 - 1)M$$

olarak alınırsa $\sum_{n=1}^{\infty}({k_n}^2 - 1) < \infty$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n < \infty$ olur.

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 \le \|x_n - q\|^2 + \kappa_n \\ &- \frac{1}{3}(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\big(\alpha_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|) \\ &+ \beta_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n - x_n\|) + \gamma_n g(\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\|)\big) \\ &- \alpha_n b_n(1 - b_n - c_n)(g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)) - (\alpha_n b_n \\ &+ \beta_n)a_n(1 - a_n)(g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|))\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}&\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|) \\ &\quad \le 3(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + \kappa_n)\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}&\beta_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)g(\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n - x_n\|) \\ &\quad \le 3(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + \kappa_n)\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}&\gamma_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)g(\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\|) \\ &\quad \le 3(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + \kappa_n)\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\alpha_n b_n(1-b_n-c_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \leq (\|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2+\kappa_n) \quad (5.7)$$

$$(\alpha_n b_n+\beta_n)a_n(1-a_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \leq (\|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2+\kappa_n) \quad (5.8)$$

eşitsizlikleri bulunur.

$$0 < lim\, inf_n \gamma_n \leq lim\, sup_n(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n) < 1$$

şartından dolayı tüm $n \geq n_0$ için $0 < \delta < \gamma_n$ ve $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n < \delta' < 1$ olacak şekilde $\delta, \delta' \in (0,1)$ ve n_0 pozitif tamsayısı vardır. O halde tüm $n \geq n_0$ için (5.4) den

$$(\delta(1-\delta'))\lim_{n\to\infty} g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|) \leq 3(\|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2+\kappa_n)$$

elde edilir. Böylece, $m \geq n_0$ için

$$\sum_{n=n_0}^{m} g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|) \leq \frac{3}{\delta(1-\delta')}\sum_{n=n_0}^{m}(\|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2+\kappa_n)$$

$$\frac{3}{\delta(1-\delta')}\left(\|x_n-q\|^2+\sum_{n=n_0}^{m}(\kappa_n)\right)$$

yazılır. $m \to \infty$ alındığında ise

$$\sum_{n=n_0}^{m} g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|) < \infty$$

olduğunda $g(0)=0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|)=0$$

elde edilir. g sürekli, kuvvetli aratan fonksiyon ve (1) şartından

$$\lim_{n\to\infty}\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|=0$$

elde edilir. (5.5) - (5.8) eşitsizlikleri için aynı metod kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \|T_3(PT_3)^{n-1}z_n - x_n\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$$

bulunur. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$$

olduğu gösterilecektir. İlk olarak,

$$\begin{aligned}\|z_n - x_n\| &= \|P(\alpha_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1-\alpha_n)x_n) - Px_n)\|\\ &\leq \alpha_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|\\ &\leq \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da $\lim_{n\to\infty} \|z_n - x_n\| = 0$ olur. Sonra da

$$0 < lim\ inf_n\alpha_n\ ve\ 0 \leq lim\ sup_n b_n \leq lim\ sup_n(b_n + c_n) < 1$$

olduğu kabul edelim.

$$\begin{aligned}\|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n &\leq \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - T_2(PT_2)^{n-1}z_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|\\ &\leq k_n\|z_n - x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|y_n - x_n\| &= \|P(b_n T_2(PT_2)^{n-1}z_n + c_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n + (1-b_n-c_n)x_n) - Px_n)\|\\ &\leq b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + c_n\|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\|\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|P(\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1}y_n + \beta_n T_3(PT_3)^{n-1}z_n + \gamma_n T_3(PT_3)^{n-1}x_n\\ &\quad + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x_n) - Px_n)\|\\ &\leq \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| + \beta_n\|T_3(PT_3)^{n-1}z_n - x_n\|\\ &\quad +\gamma_n\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ olur. Her asimptotik olarak genişlemeyen dönüşüm düzgün Lipschitzian dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1}\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - T_1(PT_1)^{n-2}x_n\| \\ &\quad + \|T_1(PT_1)^{n-2}x_n - T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + L\|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + \|T_1(PT_1)^{n-2}x_n - x_n\|\end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1}\| = 0$ 'dır. Ek olarak $(PT)^{1-1}$, K' dan K' ya birim dönüşüm olarak gösterilir. (5.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - T_1x_{n+1}\| &\leq \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| \\ &\quad + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - T_1x_{n+1}\| \\ &= \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| \\ &\quad + L\|T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1} - x_{n+1}\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T_1x_{n+1}\| = 0$. Benzer olarak

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - T_2(PT_2)^{n-2}x_{n+1}\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - T_2(PT_2)^{n-2}x_n\| \\ &\quad + \|T_2(PT_2)^{n-2}x_n - T_2(PT_2)^{n-2}x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + L\|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + \|T_2(PT_2)^{n-2}x_n - x_n\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T_2(PT_2)^{n-2}x_{n+1}\| = 0$. Buradan da

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - T_2x_{n+1}\| &\leq \|x_{n+1} - T_2(PT_2)^{n-1}x_{n+1}\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}x_{n+1} - T_2x_{n+1}\| \\ &= \|x_{n+1} - T_2(PT_2)^{n-1}x_{n+1}\| + L\|T_2(PT_2)^{n-2}x_{n+1} - x_{n+1}\|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T_2x_{n+1}\| = 0$ 'dır. Yine benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - T_3x_{n+1}\| &\leq \|x_{n+1} - T_3(PT_3)^{n-1}x_{n+1}\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}x_{n+1} - T_3x_{n+1}\| \\ &= \|x_{n+1} - T_3(PT_2)^{n-1}x_{n+1}\| + L\|T_3(PT_3)^{n-2}x_{n+1} - x_{n+1}\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T_3x_{n+1}\| = 0$ elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \|T_1x_n - x_n\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \|T_2x_n - x_n\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \|T_3x_n - x_n\| = 0,$$

oldukları ispatlanmış olur.

Teorem 5.2.3. X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi olsun. $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olmak üzere (i=1,2,3) için $T_i: K \to X$ kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve T_i nin ortak sabit noktalarının kümesi boştan farklı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini (5.3)' de verilen iterasyon dizisi olarak tanımlayalım. Eğer T_i $(i = 1,2,3)$ den en az biri tamamen sürekli veya semikompakt ve $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) \cap F(T_3) \neq \emptyset$ ise o zaman $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ dizileri T_i $(i = 1,2,3)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsar.

İspat : T_i $(i = 1,2,3)$ den en az biri tamamen sürekli dönüşüm ve $\{x_n\} \subset K$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} T_1 x_{n_k} \to q^*$ olduğu kabul edilecek şekilde $\{T_1 x_n\}$ dizisinin $\{T_1 x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Bu yüzden, $\lim_{n\to\infty} \|T_1 x_n - x_n\| = 0$ elde edildiğinden, $k \to \infty$ için $x_{n_k} \to q^*$ olur.T_1 in sürekliliğinden $T_1 q^* = q^*$ dır. Buradan hareketle, $T_2 q^* = q^*$ ve $T_3 q^* = q^*$ elde edilir. Böylece, $q^* \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q^*\|$ mevcut olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q^*\| = 0$ olur. Böylece $\{x_n\}$ q^*' a kuvvetli yakınsar. Ayrıca $\|y_n - q^*\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - q^*\|$ dan $\lim_{n\to\infty} \|y_n - q^*\| = 0$ olur. Benzer olarak, $\|z_n - q^*\| \leq \|z_n - x_n\| + \|x_n - q^*\|$ dan $\lim_{n\to\infty} \|z_n - q^*\| = 0$ elde edilir.

Şimdi, T_1'in semikompakt olduğunu kabul edelim. Lemma 5.2.1 gereği $\{x_n\}$ sınırlıdır ve Lemma 5.2.2'den $\lim_{n\to\infty} \|T_1 x_n - x_n\| = 0$ olduğundan, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = q^*$ elde edilecek şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Lemma 4.3.4' den $T_1 q^* = q^*$ olur.

O zaman tüm $q^* \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q^*\|$ var olduğundan $\{x_n\}$ dizisi q^*'ye kuvvetli yakınsar.

Yani, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q^*\| = 0$ olur. $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|z_n - x_n\| = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|y_n - q^*\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \|z_n - q^*\| = 0$ olur ve $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ dizilerinin $\mathcal{F}$ nin q^* elemanına yakınsadığı görülür.

Teorem 5.2.4. X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi olsun. $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olmak üzere (i=1,2,3) için $T_i: K \to X$ kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve T_i nin ortak sabit noktalarının kümesi boştan farklı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini (5.3)' de verilen iterasyon dizisi olarak tanımlayalım. Eğer $T_1, T_2, T_3: K \to K$, (A") şartını sağlayan K' nın kendisinden kendisine olmayan üç asimtotik genişlemeyen dönüşümü ve $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) \cap F(T_3) \neq \emptyset$ ise o zaman $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ dizileri T_i $(i = 1,2,3)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 5.2.2' den $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_1x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_2x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_3x_n\| = 0$ elde edilir. f' yi , $\{x_n\}$' e göre (A") şartına karşılık gelen azalmayan bir fonksiyon olarak kabul edelim. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, \mathcal{F})\big) \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - T_1x_n\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, \mathcal{F})\big) \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - T_2x_n\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, \mathcal{F})\big) \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - T_3x_n\| = 0$$

olur. Her üç durumda da

$$\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, \mathcal{F})\big) = 0$$

olur. $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ tüm $r \in (0,\infty)$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ sağlayan azalmayan fonksiyon mevcut olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

elde edilir. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olduğundan, $\varepsilon > o$ verildiğinde $\forall n > n_0$ için $d(x_n, \mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır.

Böylece $\left\|x_{n_0} - y^*\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $y^* \epsilon \mathcal{F}$ bulunabilir. $n > n_0$ ve $m \geq 1$ için

$$\|x_{m+n} - x_n\| \leq \|x_{n+m} - y^*\| + \|x_n - y^*\|$$

$$\leq \|x_{n_0} - y^*\| + \|x_0 - y^*\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olur. X düzgün konveks Banach uzayı olduğundan, $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsaktır. $\lim_{k\to\infty} x_n = q$ olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ dan $d(q, \mathcal{F}) = 0$ olur. $\mathcal{F}$ kapalıdır, bu yüzden $q\epsilon\mathcal{F}$ olur. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|y_n - q\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \|z_n - q\| = 0$ bulunur.

Teorem 5.2.5. $K,$ Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayının kapalı konveks alt kümesi olsun. Lemma 5.2.2 deki gibi T_i $(i = 1,2,3)$ ve $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Eğer $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ise o zaman $\{x_n\}$ dizisi T_1, T_2, T_3'ün ortak sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $i = 1,2,3$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ olduğu Lemma 5.2.2'de gösterilmişti. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin $\mathcal{F}$ içinde bir tek zayıf alt dizisel limite sahip olduğu ispatlayalım. Bunu ispatlamak için u ve v sırasıyla $\{x_n\}$ in $\{\mathrm{x}_{\mathrm{n_i}}\}$ ve $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri olsun. $i = 1,2,3$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ Lemma 5.2.2'den elde edilir. $i = 1,2,3$ için $I - T_i$ sıfırda demiclosed olduğundan o zaman $T_1 u = u, T_2 u = u, T_3 u = u$ olur. Aynı yöntemle $v \in \mathcal{F}$ ispatlanır. Şimdi limitin tekliğini ispatlayalım. $u \neq v$ olduğunu kabul edelim.Opial'in şartından

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - u\| < \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - v\|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - v\|$$
$$= \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - v\| < \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - u\|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \|x_n - u\|$$

yazılır. Bu ise çelişkidir. O halde $u = v$ olur.

6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Literatürde sabit nokta teori, lineer olmayan denklemlerin çalışmasında çok önemli ve güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Matematik biliminin hemen hemen her branşında çok sayıda uygulamaya sahip olduğu için uygulama alanlarının genişliğinden dolayı yoğun çalışılan bir konudur. Dönüşümlerin sabit noktalarını incelemek için sabit noktanın varlığını ve değerini bulmak önemlidir. Bu sabit noktanın bulunması da kolay olmadığından bunları hesaplamak için iterasyon süreçlerine gereksinim vardır. Bu iterasyon süreçlerinin geliştirilmesi ve genelleşmiş dönüşümlerin yeni geliştirilen iterasyon süreçlerini kullanarak sabit noktalarının bulunması araştırmaya değer bir konudur.

Bu tezde, Khan ve Hussain [19] , Temir [35], Thianwan [36], Banarjee ve Choudhury [4], Nilsrakoo ve Saejung [24], Suantai [32] çalışmaları gözönüne alınarak geliştirilmiş üç adım iterasyonla üç tane kendisinden kendisine ve kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ispatlanmaktadır. Buradan hareketle hata eklenmiş geliştirilmiş iterasyonlar için kendisinden kendisine ve kendisinden kendisine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] R.P.Agarwal, D. O'Regan, and D. R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian Type Mappings with Applications*, in: Topological Fixed Point Theory and its Applications, vol. 6, Springer, New York, 2009.

[2] A.G. Aksoy and M.A. Khamsi, "Nonstandard Methods in Fixed Point Theory", ISBN 0-387-97364-8, 1990.

[3] Y.I. Alber, *Metric and Generalized Projection Operators in Banach Space: Propertics and Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Math., 1996.

[4] S.Banerjee, B.S. Choudhury, "Weak and strong convergence theorems of a multistep iteration to a common fixed point of a family of nonself asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces", *Cubo A Math Journal*, Vol.14 No:03,143-166, 2012.

[5] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Lecture Notes in Math.,2006.

[6] C. E. Chidume, E. U. Ofoedu and H. Zegeye "Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings", *J. Math. Analy. Appl.*, 280, 364-374, 2003.

[7] C.Chidume, B. Ali, "Approximation of common fixed points for finite families of nonself asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces", *J. Math. Analy. Appl.* 326 960−973, 2007.

[8] Y. J. Cho, H.Y. Zhou, and G. Guo, "Weak and strong convergence theorems for three-step iterations with errors for asymptotically nonexpansive mappings", *Comput. Math. Appl.*47 707-717, 2004.

[9] G.Das, J.P. Debata, "Fixed points of quasi−nonexpansive mappings", *Indian J. Pure Appl. Math. Soc.* 40,113-117, 1989.

[10] W.G.J. Dotson, “On the Mann iterative”, *Proc. Tran. Amer. Math.Soc.* 149:65-73, 1970.

[11] M.K. Ghost and L. Debnaht, “Convergence of Ishikawa iterates of quasi-nonexpansive mapping”. *J. Math. Analy. Appl.*, 207:96-103, 1997.

[12] K.Goebel, W.A Kirk, “A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 35 (1) 171-174, 1972.

[13] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory,* Cambridge Studies in advanced mathematics 28, 252 pp., 1990.

[14] R. Glowinski, P. LE Tallec, *Augmented Langrangian and Operatör-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics,* SIAM, Philadelphia, 1989.

[15] S. Ishikawa, “Fixed points by a new iteration method”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 44 147-150, 1974.

[16] M. A. Khamsi and W. A. Kirk , *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory,* 2001.

[17] S. H. Khan and H. Fukhar-ud-din “Weak and stronge convergence of a scheme with errors of two nonexpansive mappings”, *Nonlinear Analy.*, 61, 1295-1301, 2005.

[18] A. R. Khan, A. A. Domlo and H. Fukhar-ud-din “Common fixed points Noor iteration for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces”, *J. Math. Analy. Appl.,* 341, 1-11 , 2008.

[19] S.H. Khan, N. Hussain, “Convergence theorems for nonself asymptotically nonexpansive mappings”, *Computers and Mathematics with Applications*, 55, 2544-2553, 2008.

[20] S.H. Khan, W.Takahashi, “Iterative approximation of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings with compact domains”, *Pan Amer. Math. Journal*, 11 (1) 19-24, 2001.

[21] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications,* John Wiley & Sons. Inc., New York, 1978.

[22] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University at the Press., 1970.

[23] W.R. Mann, “Mean value methods in iterations”, *Proc. Amer. Math. Soc.,* (4) 506-510,1953.

[24] W. Nilsrakoo and S. Saejung, “A new three-step fixed points iteration scheme for asymptotically nonexpansive mapping”, *Appl. Math. and Comp.*, 181, 1026-1034, 2006.

[25] M.A. Noor “New approximation schemes for general variational inequalities”, *J. Math. Analy. Appl.,* 251:217-229, 2000.

[26] Z. Opial, “Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*”, Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 591-597, 1967.

[27] W.V. Petryshyn and T.E. Williamson, “Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mapping”. *J. Math. Analy. Appl.,* 43: 459-497, 1973.

[28] E.C. Picard, “Memorie sur la therie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives”.*J.Math. Pures Appl.* 6,145-210, (1890).

[29] J.Schu, “Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings”, *Bull. Austral. Math. Soc.,* 43 153-159, 1991.

[30] H. F. Senter and W. G. Dotson “Approximating fixed points of nonexpansive mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 44, 375-380, 1974.

[31] N. Shahzad, “Approximating fixed points of nonself nonexpansive mappings in Banach spaces”, *Nonlinear Analy.* 61, 1031–1039, 2005.

[32] S. Suantai, “Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings”, *J. Math. Analy. Appl.*, 311 (2) 506-517, 2005.

[33] K.K. Tan, H.K. Xu, “Approximating fixed point of nonexpansive mapping”, *J. Math. Analy. Appl.*, 178 301-308, 1993.

[34] L. Wang, “Strong and weak convergence theorems for common fixed points of nonself asymptotically nonexpansive mappings”, *J. Math. Analy. Appl.*, 323 (1) 550-557,2006.

[35] S. Temir, “Convergence of Three-Step Iterations Scheme for Nonself Asymptotically Nonexpansive Mappings”, *Fixed Point Theory and Applications*, Volume 2010 , Article ID 783178, 15 pages, doi:10.1155/2010/783178, 2010.

[36] T. Thianwan, “Convergence criteria of modified Noor iterations with errors for three asymptotically nonexpansive nonself-mappings”, *J.Nonlinear Sci. Appl.*, 6, 181-197, 2013.

[37] Ş. Türkan “Asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve sabit nokta iterasyonları”, Yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi, 2014.

[38] H. K. Xu, “Inequalities in Banach spaces with applications”, *Nonlinear Analy.*, Vol:16,No:12, 1127-1138, 1991.

[39] H.K Xu, “Existence and convergence for fixed points of mappings of the asymptotically nonexpansive type”, *Nonlinear Analy.*, Vol:16,No:12, 1139-1146, 1991.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mustafa ÇETİN

Doğum Yeri : Ergani/DİYARBAKIR

Doğum Tarihi : 01.06.1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mustafacetin_3084@hotmail.com

Eğitim Durumu

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans			
Lisans	Matematik	Dicle	2008
Lisans	İlköğretim Matematik	Adıyaman	2019