T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKS MİNİMİZASYON PROBLEMİNİ ÇÖZEN BİR GRADİENT PROJEKSİYON ALGORİTMASININ ÜSTÜNLEŞTİRİLMESİ VE PERTÜRBASYON DİRENÇLİLİĞİ

AHMET SALKIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2020

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

KONVEKS MİNİMİZASYON PROBLEMİNİ ÇÖZEN BİR GRADİENT PROJEKSİYON ALGORİTMASININ ÜSTÜNLEŞTİRİLMESİ VE PERTÜRBASYON DİRENÇLİLİĞİ

Ahmet SALKIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Bu tez 25/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK
Danışman

Prof. Dr. Aydın İZGİ
Üye

Doç. Dr. Faik GÜRSOY
Üye

Doç. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS MİNİMİZASYON PROBLEMİNİ ÇÖZEN BİR GRADİENT PROJEKSİYON ALGORİTMASININ ÜSTÜNLEŞTİRİLMESİ VE PERTÜRBASYON DİRENÇLİLİĞİ

Ahmet SALKIM

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK
Yıl : 2020, Sayfa sayısı: vii+64

Jüri : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Doç. Dr. Faik GÜRSOY
Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

Son zamanlarda, konveks optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan algoritmalarda bozulmalara müsaade ederek algoritmanın etkinliğini artırmak, hesaplama yönünden daha az zahmetli hale getirmek ve amaçlanan uygulama için ele alınan algoritmadan daha yararlı sonuçlar elde etmek amacıyla üstünleştirme adında yeni bir yöntem çalışılmaktadır. Bu tezde amacımız, [1]'de Ertürk ve arkadaşları tarafından, konveks minimizasyon probleminin çözümü için önerilen gradient projeksiyon algoritmasının üstünleştirmesini ve pertürbasyon dirençliliğini çalışmaktır. Tezimizde, Ertürk ve ark. tarafından önerilen gradient projeksiyon algoritmasının üstünleştirilmiş versiyonunun bozulmalara karşı dirençli olduğunu, dolayısıyla orijinal algoritma gibi minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığını gösterdik. Elde ettiğimiz sonucu, sonsuz boyutlu Hilbert uzayında bir örnek ile somutlaştırdık. Ayrıca gösterdiğimiz sonucun doğrusal ters problemler ve split fizibilite problemleri için uygulamalarını verdik.

Anahtar Kelimeler: Konveks minimizasyon problemi; Üstünleştirme metodu; Sınırlı pertürbasyon dirençliliği; Gradient projeksiyon algoritmaları

ABSTRACT

MSc Thesis

BOUNDED PERTURBATION RESİLİENCE AND SUPERIORIZATION OF A GRADİENT PROJECTION ALGHORİTM SOLVİNG THE CONVEX MİNİMİZATİON PROBLEM

Ahmet SALKIM

Adiyaman University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Müzeyyen ERTÜRK
Year : 2020 , Number of pages: vii+64

Jury : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Assoc. Prof. Dr. Faik GÜRSOY
Assoc. Prof. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

Recently, a new method called superiorization has been studied in order to increase the efficiency of the algorithm, to make it less computationally demanding and to obtain more useful results than the algorithm considered for the intended application by allowing perturbations in the algorithms used in the solution of the convex optimization problem. In this thesis, our aim is to study the superiorization and perturbation resilience of the gradient projection algorithm proposed by Ertürk et al. in [1] for the solution of the convex minimization problem. In our thesis, we showed that the superiposed version of this gradient projection algorithm, which studied Erturk et al., is resistant to perturbations, thus it weakly converges to a solution of the minimization problem such as the original algorithm. We concretized our result by an example in the infinite dimensional Hilbert space. We also gave the applications of our theorem for linear inverse problems and split feasibility problems.

Key Words: Convex minimization problem; Superiorization; Bounded perturbation resilience; Gradient projection algorithms

BEYAN

“Konveks minimizasyon problemini çözen bir gradient projeksiyon algoritmasının üstünleştirilmesi ve pertürbasyon dirençliliği” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Ahmet SALKIM

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken engin bilgisi ile yeni ufuklara yelken açmamı sağlayan, çalışma azmine hayran kaldığım, gösterdiği alâka ve duyduğu güvenden ötürü danışman hocam Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK'e teşekkür ediyorum.

Tezin hazırlanması ve yazımı sırasında desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen çok kıymetli eşim Sümeyra SALKIM'a, çalışmalarım sırasında hayatımıza renk ve neşe katan gözümüzün nuru çocuklarımız Alperen SALKIM ve Aslıhan SALKIM'a ve bugünlere gelmemi sağlayan aileme gönülden teşekkür ediyorum.

Üzerimde emeği olan değerli hocalarıma da bana kattıkları için sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR IV
İÇİNDEKİLER V
ÇİZELGELER DİZİNİ VI
SİMGELER VE KISALTMALAR VII
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
3. TEMEL KAVRAMLAR 8
4. MATERYAL ve YÖNTEM 20
4.1. Gradient Projeksiyon Algoritması 20
4.1.1. Monoton Operatörler 22
4.1.2. Minimizasyon Probleminin Sabit Nokta Bulma Problemi Olarak İfade Edilmesi 26
4.1.3. ∇f'nin GPA'nın Yakınsaklığına Etkisi 28
4.1.3.1. GPA'nın Güçlü Yakınsaklığı 28
4.1.3.2. GPA'nın Zayıf Yakınsaklığı 30
4.2. Üstünleştirme Metodolojisi ve İterasyonların Pertürbasyon Dirençliliği 34
4.2.1. Üstünleştirme Metodolojisinin Uygulandığı Bazı Alanlar 35
5. BULGULAR ve TARTIŞMA 39
6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 59
KAYNAKLAR 60
KİŞİSEL BİLGİLER 64

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1. (5.29) ve (5.30) iteratif algoritmalarının yakınsaklık davranışı........... 56

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A^o	: A kümesinin içi
$\bar{A}$	: A kümesinin kapanışı
A'	: A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
$B(x_0\,,\varepsilon)$	: x_0 merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(x_0\,,\varepsilon)$	: x_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar
F_T	: T döüşümünün sabit noktalarının kümesi
l_2	: $l_2=\{(x_i)=(x_0,x_1,x_2,\cdots):x_i\in\ \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ cisim) $ve\ \sum_{i=0}^{\infty}\lvert x_0\rvert^2<\infty\,\}$
P_C	: Metrik izdüşüm operatörü
S	: $min_{x\in C}f(x)$ probleminin tüm çözümlerinin kümesi
T'	: T dönüşümünün birinci mertebeden türevi
(X,d)	: Metrik uzay
$(X,\lVert.\rVert)$	: Normlu uzay
$(X,\langle\,,\rangle)$	: İç çarpım uzayı
$x_n\rightharpoonup x$	: x_n dizisi x noktasına zayıf yakınsar
$w_w(x_n)$	: $w_w(x_n):=\left\{x:\exists x_{n_j}\rightharpoonup x\right\}$
∇f	: f fonksiyonunun gradienti
∂A	: A kümesinin sınırı
Γ	: $\Gamma=\{x\epsilon C:Ax\epsilon Q\,\}=C\cap A^{-1}Q$, SFP'nin çözümlerinin kümesi

Kısaltmalar

GPA	: Gradient Projeksiyon Algoritması
inf	: En büyük alt sınır
PSG	: Projected Scaled Gradient
SFP	: Split Fizibilite Problemi
sup	: En küçük üst sınır
SM	: Üstünleştirme Metodolojisi

1. GİRİŞ

Optimizasyon, en temel anlamda bir durum veya bir konu hakkında iyi ve doğru karar verme sanatıdır. Üstün özelliklere sahip bir şey isteyen her problem bir optimizasyon problemidir. En sağlam binayı inşa etmek, kimyasal bir reaksiyonda en iyi verimi elde etmek, bir hastalığı mümkün olduğunca en erken teşhis etmenin yolunu bulmak, en az yakıt harcayan arabayı yapmak, en kârlı yatırım planını yapmak optimizasyon problemine birer örnek olarak verilebilirler. Bu nedenle optimizasyon, matematik, tıp, fizik, kimya, ekonomi, mühendislik gibi neredeyse tüm alanlarda ortaya çıkan problemleri çözmek için kullanılan bir araç olmuştur.

Optimizasyon problemleri üç temel unsurdan oluşmaktadır. Birinci unsur, maksimize veya minimize edilmesi gereken amaç (objective) fonksiyonudur. Bir reaksiyonun gerçekleşme süresi, bir şirketin kârları, bir aracın belirli bir varış noktasına ulaşırken harcadığı yakıt, siyasi bir partinin oy oranı amaç fonksiyonuna örnek olarak verilebilirler. İkinci unsur, amaç fonksiyonunu optimize etmek için değerleri manipüle edilebilen miktarlar olan bir değişkenler topluluğudur. Buna bir reaksiyonun gerçekleşmesine etki eden sıcaklık, bir aracın trafik ağı üzerinden izleyeceği rotalar, bir siyasi partinin savunacağı politikalar örnek olarak verilebilirler. Optimizasyonun üçüncü unsuru, değişkenlerin alabileceği değerlere sınırlamalar getiren kısıtlamalardır. Bir üretim sürecinin mevcut olandan daha fazla kaynak gerektirememesi ve bu üretim süreci için sıfırdan daha az kaynak kullanılamaması getirilen kısıtlara örnek olarak verilebilirler.

Geniş çerçevede optimizasyon problemleri farklı matematiksel özelliklere sahip olabilir. Optimizasyonun bir alt dalı olan konveks optimizasyon, amaç fonksiyonunun ve problemin kısıtlarını sağlayan uygulanabilir (feasible) kümenin, konveks olduğu ve amaç fonksiyonun minimumlarının bulunması şeklinde modellenen optimizasyon problemidir. Bu nedenle, bu tip problemler konveks minimizasyon problemleri olarak da adlandırılırlar.

Bununla birlikte bir dönüşümün değişmez noktalarını bulma, dönüşümün sabit noktalarını bulma problemi olarak adlandırılır. Ele alınan dönüşüme, dönüşümün taşıdığı özelliklere ve dönüşümün tanımlandığı uzaya bağlı olarak zengin bir teori içerir. Sabit nokta teorisi, matematiğin başlı başına bir çalışma alanı olmasının yanında, çoğu günlük hayat problemlerinin uygun bir zemin ve uygun bir modelle bir sabit nokta problemi olarak ifade edilebilmesinden dolayı, ekonomi, fizik, kimya, mühendislik gibi diğer alanlarda da kullanışlı bir araç olmuştur. Sabit nokta teorisinde, ele alınan dönüşümün sabit noktasına yaklaşmak için ardışık yaklaşımlar veya iteratif algoritmalar adı verilen bir teknik kullanılır. Dönüşümün taşıdığı özelliğe göre sabit noktaya yaklaşmada kullanılacak olan uygun algoritmayı bulmak, sabit nokta teorisinde çok çalışılan dinamik bir alandır. Bu bakımdan, iteratif algoritmalar, bilimin birçok dalında ortaya çıkan problemleri çözmek için kullanılan çok önemli matematiksel araçlardır.

Konveks optimizasyon da iteratif algoritmaların kullanıldığı alanlardan biridir. Konveks optimizasyon problemini çözmek için eski ve yeni birçok yöntem vardır. Kesim düzlemi metodu, elipsoid metodu ve gradient metotları gibi yöntemler bazı eski yöntemlere örnek olarak verilebilir. Bunun yanında iç nokta metodu ve gradient projeksiyon tipi iteratif algoritmalar sınıfına ait olan Projected Scaled Gradient (PSG) ve Subgradient Projection gibi metotlar yeni yöntemlere örnek olarak verilebilir. Bu çözüm yöntemlerinin yanı sıra, özellikle konveks optimizasyon probleminin bir sabit nokta problemi şeklinde tasarlanabilmesi, konveks optimizasyon probleminde çözüme gitmek için çeşitli iteratif metotların bir çözüm aracı olarak kullanılması yönünden çözüm seçeneklerine zenginlik katar.

Diğer yandan, sınırlı bilgi işlem kaynakları ile sistemlerin hesaplama kabiliyeti, birçok kısıtlamayı karşılayan bir amaç fonksiyonun minimumunu bulma şeklinde modellenen kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümü için önemli bir engeldir. Sadece kısıtlamaları karşılayan uygulanabilir (feasible) bir çözüm bulmak için etkili ve hesaplama açısından daha az zahmetli olan iteratif yöntemler mevcuttur. Bu yöntemler, mevcut optimizasyon algoritmalarının çalışamayacağı sorun boyutlarının ötesinde çalışabilir. Bu boşluğu kapatmak için, metodolojik olarak optimizasyon ve fizibilite arayışı arasında olan üstünleştirme adı verilen bir metodoloji vardır. Bu yöntem, iterasyonları, verilen amaç fonksiyonuna göre uygulanabilir ve üstün, ancak mutlaka optimal olmayan bir noktaya yönlendirmek için verimli iteratif algoritmalar kullanmamızı sağlar [2].

"Tam kısıtlı optimizasyon" yerine "üstünleştirme (superiorization) " yaparak etkili iteratif algoritmalar kullanmak, kısıtlamaları ve amaç fonksiyonunu içeren matematiksel modelleri işleyen yeni bir metottur. Üstünleştirme metodunun (SM) hedefi matematiksel modellerin hesaplama davranışını etkilemektir. Böylece eldeki uygulama açısından daha küçük bir hesaplama maliyetiyle arzu edilen çözümlere ulaşılabilir. Bu gibi durumlarda, pertürbasyona dirençli fizibilite arayıcı mevcut algoritmalar, üstünleştirme gerçekleştiren verimli algoritmalara dönüştürülebilir [2]. Böylece, yakınsamaları belirli bozulma türlerine dirençli olan iteratif algoritmaların etkinliği arttırılmış olur. Üstünleştirme metodolojisi, iteratif bir algoritmanın pertürbasyon direncini araştırarak ve daha sonra, proaktif bir şekilde izin verilen bu pertürbasyonları kullanarak, pertürbe edilmiş algoritmayı orijinal algoritmanın yaptığını hesaplama açısından daha az zahmetle yapmaya zorlayarak çalışır [3]. Daha açık bir ifadeyle, düzensizlikler ve bozulmalar olarak ifade ettiğimiz pertürbasyonlar, amaçlanan uygulama için orijinal iteratif algoritma tarafından üretilen sonuçlardan daha yararlı sonuçlar üretmeye yönelik olarak düzensiz algoritmayı "zorlamak" için tasarlanmıştır. Bozulan algoritmaya orijinal bozulmamış algoritmanın "üstünleştirilmiş sürümü" denir [3].

Orijinal algoritmanın eldeki uygulama açısından hesaplama yönüyle verimli ve faydalı olduğu durumlarda, pertürbasyonların hesaplanması zor değilse, bu yöntemin avantajı, esasen hesaplama maliyeti için, tasarlanan pertürbasyonlara göre orijinal algoritmanın iterasyon adımlarını yönlendirerek daha cazip bir şey elde etmek olacaktır [3].

Bununla birlikte, SM'nin kullanılması sadece fizibilite arayıcı algoritmalarla sınırlı değildir. Sınırlı pertürbasyonlara dirençli herhangi bir temel algoritma alınabilir ve izin verilen belirli pertürbasyonlar iterasyon adımlarına dahil edilebilir. Böylece elde edilen algoritma, verilen amaç fonksiyonuna göre daha üstün bir çıktı üretmek için otomatik olarak yönlendirilmiş olur [3].

SM'nin pratikte birçok uygulaması mevcuttur. SM, pertürbasyon-dirençlilik teknikleri sayesinde tıbbi görüntü iyileşmesi [4], bilgisayarlı tomografi [5], radyasyon tedavisinin ters problemleri gibi uygulamalı alanlardan kaynaklanan doğrusal olmayan problemleri çözmek amacıyla hesaplama verimliliğini ve iteratif yöntemlerin kararlılığını incelemek için yeni bir yol sunmaktadır.

Bu tezde, Ertürk ve ark. [1] tarafından konveks minimizasyon probleminin çözümü için önerilen algoritmanın üstünleştirmesini ve sınırlı pertürbasyon dirençliliğini çalışacağız. Üstünleştirilmiş algoritmanın split fizibilite ve ters lineer problemler için uygulamasını vereceğiz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

H reel bir Hilbert uzayı ve C, H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $f: C \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonunun minimumlarının bulunması problemi,

$$\min_{x \in C} f(x) \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilir. Bu problemin en az bir çözümünün mevcut olduğunu kabul edelim. P_C, H'den C üzerine bir projeksiyon ve $f: C \to \mathbb{R}$, ∇f gradienti Fréchet diferansiyellenebilir olan bir konveks fonksiyon olmak üzere (2.1) problemi $x^* = P_C\left(x^* - \gamma \nabla f(x^*)\right)$, $\gamma > 0$ şeklinde yazılabilir. x_0, C'den alınan keyfi bir başlangıç noktası ve $\gamma, \gamma_n \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = P_C\left(x_n - \gamma \nabla f(x_n)\right), \; n = 0,1,2, \ldots \tag{2.2}$$

daha genel olarak,

$$x_{n+1} = P_C(I - \gamma_n \nabla f)(x_n) = P_C(x_n - \gamma_n \nabla f(x_n)) \tag{2.3}$$

iteratif algoritmasına Gradient Projeksiyon Algoritması (GPA) denir.

$P_C(I - \gamma_n \nabla f)$ dönüşümü ∇f'nin taşıyacağı özelliklere göre şekillendiğinden dolayı, GPA'nın yakınsaklığı ∇f ile yakından ilgilidir. Levitin ve Polyak [6], ∇f'nin $L-$Lipschitzian ve $\eta-$kuvvetli (strongly) monoton olması durumunda,

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \gamma_n \leq \limsup_{n \to \infty} \gamma_n < \frac{2\eta}{L^2}$$

şartını gerçekleyen $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için GPA'nın f'nin C'deki bir tek minimumuna güçlü yakınsak olduğunu gösterdiler. ∇f'nin $L-$ Lipschitzian olup kuvvetli monoton olmaması durumunda ise

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \gamma_n \leq \limsup_{n \to \infty} \gamma_n < \frac{2}{L}$$

şartı altında (2.3) ile verilen GPA'nın (2.1) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığını gösterdiler [6]. 2011 yılında, Xu ortalamalı dönüşümler yaklaşımı ile GPA'yı bir genişlemeyen dönüşüm ve bir özdeşlik dönüşümünün uygun bir konveks kombinasyonu biçiminde yeniden yazarak GPA'nın minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstermiştir [7].

Öte yandan, üstünleştirme ve pertürbasyon dirençliliği kavramı, ilk olarak Davidi, Herman ve Censor tarafından sonlu boyutlu bir Öklid uzayında konveks fizibilite problemini çözmek amacıyla, mevcut iteratif adımı eşzamanlı olarak tüm kümeler ailesinin bir alt ailesinin kümelerine (blok olarak adlandırılır) yansıtan ve ardından ortaya çıkan noktaların konveks bir kombinasyonunu bir sonraki iterasyon adımı olarak alan algoritma için kullanıldı [4]. Aynı çalışmada bu yeni kavramı fonksiyonel olarak hem toplam varyasyon hem de negatif entropi kullanarak projeksiyonlardan görüntülerin yeniden yapılandırmasında uyguladılar.

Bu ilk çalışmanın ardından, Censor ve arkadaşları [2], 2010 yılında SM aracılığıyla optimizasyon problemini çözmek için, çeşitli kısıtlar getirmek yerine ele alınan iteratif algoritmayı bozup üstünleştirilmiş versiyonlarını kullanarak, süreci, verilen işleve göre mutlaka optimal olmayan, üstün uygulanabilir bir nokta yönünde yönlendiren pertürbasyon kullandılar ve ardından iki farklı projeksiyon algoritmasının projeksiyonlardan görüntülerin yeniden yapılandırmasında uygulamasını verdiler. SM, pertürbasyon dirençliliği ve bunların çeşitli alanlardaki uygulamaları ile ilgili [8], [9], [10] çalışmalarına bakılabilir.

Jin ve arkadaşları [3], sonlu boyutlu uzaylarda sınırlı pertürbasyonlar varlığında konveks optimizasyon problemini çözen ve GPA'dan daha genel bir algoritma olan Projected Scaled Gradient (PSG) yönteminin yakınsaklığını çalıştılar.

He ve Xu [11], ortalamalı dönüşümlerin ardışık sabit nokta algoritması için sınırlı pertürbasyon direncini araştırdılar ve kısıt kümesinin ortalamalı dönüşümlerin sonlu bir ailesinin sabit nokta kümelerinin kesişim kümesi olduğu durumda kısıtlı konveks minimizasyon problemine SM'yi uyguladılar.

2017 yılında Xu [12], Hilbert uzaylarında Jin ve arkadaşlarının PSG yöntemi için sınırlı pertürbasyon dirençliliğini ve SM tekniklerini, genel Hilbert uzaylarında ortalamalı dönüşümler yaklaşımıyla inceledi.

Ertürk ve ark. [1], herhangi bir genişlemeyen dönüşüm için Picard tipi bir iteratif algoritmanın zayıf yakınsaklığını gösterdiler ve elde ettikleri teoremin sonuçlarından biri olarak konveks $f: C \to \mathbb{R}$ için konveks minimizasyon problemini çözmek amacıyla şaşağıda verilen yeni bir gradient projeksiyon algoritması önerdiler.

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C(I - \gamma_n \nabla f) y_n \\ \quad y_n = (1 - a_n) P_C(I - \gamma_n \nabla f) x_n + a_n P_C(I - \gamma_n \nabla f) z_n \\ \quad z_n = (1 - b_n) x_n + b_n P_C(I - \gamma_n \nabla f) x_n \end{cases} \tag{2.4}$$

∇f, $L-$ Lipschitzian bir dönüşüm olmak üzere, $0 < a \leq a_n, b_n \leq b < 1$ ve $0 < \gamma_n < \frac{2}{L}$ şartları altında önerdikleri (2.4) gradient projeksiyon algoritmasının (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğunu gösterdiler.

Bu tez çalışmasında amaç, konveks minimizasyon probleminin çözümü için Ertürk ve ark. [1] önerdikleri (2.4) gradient projeksiyon algoritmasının üstünleştirmesini ve üstünleştirilmiş versiyonunun sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençliliğini incelemektir. Ayrıca elde ettiğimiz sonucun, split fizibilte ve ters problemlere uygulaması verilecektir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. (Metrik ve Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme olsun. $X \times X$ üzerinde, her $x, y, z \in X$ için,

i. d, reel değerli, sonlu ve negatif değildir,

ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

iii. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri)

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) çiftine bir metrik uzay denir [13].

Tanım 3.2. (Cauchy Dizisi ve Tamlık) $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, bir $X = (X, d)$ metrik uzayının dizisi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n > N$ için

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine X uzayında bir Cauchy dizisi denir. X'deki her Cauchy dizisi yakınsak ise (yani yine X'de bulunan bir limite sahip ise) X uzayı tamdır denir [14].

Tanım 3.3. (Yakınsak Dizi ve Limit) $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, X'de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yakınsaktır ya da x noktasına yakınsar denir. x noktasına $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limiti adı verilir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca

$$x_n \to x,\, n \to \infty$$

ile gösterilir. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yakınsak değilse ıraksaktır denir [13].

Tanım 3.4. (Açık Yuvar) $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $B(x_0\,, \varepsilon) = \{x \in X : \; d(x, x_0) < \varepsilon\}$ kümesine x_0 merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar denir veya x_0'ın bir ε-komşuluğu denir [13].

Tanım 3.5. (Kapalı Yuvar) $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $\bar{B}(x_0\,, \varepsilon) = \{x \in X : \; d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ kümesine x_0 merkezli ve ε yarıçaplı kapalı yuvar denir [14].

Tanım 3.6. (İç Nokta) $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, A, x_0'ın bir ε -komşuluğunu içeriyorsa, x_0'a A kümesinin bir iç noktası adı verilir. A'nın içi ise, A'nın tüm iç noktalarından oluşan küme olup A^o ile gösterilir [14].

Tanım 3.7. (Açık Küme) X bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi, her bir noktasının bir ε-komşuluğunu içeriyorsa A kümesine açık küme denir [13].

Tanım 3.8. (Yığılma Noktası) X bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir $x_0 \in X$ için x_0'ın her bir ε-komşuluğu, x_0'dan farklı en az bir $y \in A$ noktası içeriyorsa, x_0 noktasına A'nın bir yığılma noktası adı verilir. A'nin bütün yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir [14].

Tanım 3.9. (Kapanış) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \cup A'$ kümesine A'nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir [15].

Tanım 3.10. (Kapalı Küme) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\bar{A} = A$ ise A’ya kapalı küme denir [15].

Tanım 3.11. (Bir Kümenin Sınırı) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\bar{A} \backslash A^o$ kümesine A’nın sınırı denir ve ∂A ile gösterilir [15].

Tanım 3.12. (Sürekli Dönüşüm) $X = (X, d_1)$ ve $Y = (Y, d_2)$ iki metrik uzay olsun. $T: X \to Y$ dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer, her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d_1(x, x_0) < \delta$ koşulunu gerçekleyen bütün x’ler için

$$d_2(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T dönüşümü $x_0 \epsilon X$ noktasında süreklidir denir. T, X’in her noktasında sürekli ise T’ye X üzerinde süreklidir denir [13].

Tanım 3.13. (Lineer Uzay) $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{K}$ bir cisim olsun. $+: X \times X \to X$ ve $\cdot : \mathcal{K} \times X \to X$ cebirsel işlemleri aşağıdaki şartları sağlarsa X’e $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (ya da vektör uzayı), X’in her bir elemanına da vektör denir.

A. X, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

$\boldsymbol{G_1}$**.** Her $x, y \in X$ için $x + y \in X$’dir,

$\boldsymbol{G_2}$**.** Her $x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$’dir,

$\boldsymbol{G_3}$**.** Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır,

$\boldsymbol{G_4}$**.** Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır,

$\boldsymbol{G_5}$**.** Her $x, y \in X$ için $x + y = y + x$’dir.

B. Her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

$\boldsymbol{L_1}$**.** $\alpha . x \in X$’dir,

$\boldsymbol{L_2}$**.** $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$’dir,

$\boldsymbol{L_3}$**.** $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$’dir,

$\boldsymbol{L_4}$**.** $(\alpha . \beta) . x = \alpha . (\beta . x)$’dir,

$\boldsymbol{L_5}$**.** $1. x = x$’dir. (Burada 1, $\mathcal{K}$’nin birim elemanıdır.)

$\mathcal{K}$'ya X vektör uzayının skaler cismi adı verilir. Eğer, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ise, X'e reel vektör uzayı, $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ ise, X'e kompleks vektör uzayı denir [13].

Tanım 3.14. (Konveks Küme) Bir X vektör uzayının A alt kümesini ele alalım. Eğer, $x, y \epsilon A$ için,

$$K = \{z \epsilon X : z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

oluyorsa, A kümesi konvekstir denir [13].

Tanım 3.15. (Konveks Dönüşüm) X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. $f: A \to \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x, y \,\epsilon\, X$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye konveks dönüşüm denir [13].

Tanım 3.16. (Normlu Uzay) X, bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \,\epsilon\, X$ ve her $\alpha \,\epsilon\, \mathcal{K}$ için $\|\,.\,\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\|\,.\,\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\,.\,\|)$ çiftine ise bir normlu uzay denir [16]:

i. $\|x\| \geq 0,$

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|,$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Önerme 3.1. $(X, \|\,.\,\|)$ bir normlu uzay olmak üzere her $x, y \,\epsilon\, X$ için

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir. Buna göre, her normlu uzay bir metrik uzaydır [14].

Tanım 3.17. (Banach Uzayı) X bir normlu vektör uzayı olsun. Eğer X, norm tarafından üretilen metriğe göre tam ise X'e bir Banach uzayı denir [14].

Tanım 3.18. (İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı) X bir $\mathcal{K}$ skaler cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{K}$ için $\langle \, , \rangle : X \times X \to \mathcal{K}$ fonksiyonu,

i. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

ii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

iii. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

iv. $\langle x, x \rangle \geq 0$'dır. Ayrıca, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (Burada θ, $\mathcal{K}$ cisminin birim elemanıdır.)

şartlarını sağlıyorsa $\langle \, , \rangle$ fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu denir. $(X, \langle \, , \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir. X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

ile verilen bir norm ve

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

ile verilen bir metrik tanımlar. Üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. Buna göre, iç çarpım uzayları birer normlu uzay olup, Hilbert uzayları ise birer Banach uzayıdır [14].

Örnek 3.1. $\mathcal{K}$ cismi reel veya kompleks sayılar olmak üzere

$$l_2 = \left\{ x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) : x_n \in \mathcal{K} \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

olsun. l_2, üzerinde tanımlanmış

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

normuna göre bir Banach uzayı olduğundan l_2 bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.19. (Schwarz Eşitsizliği ve Üçgen Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı olsun. İç çarpım normu için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir [17].

i. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Schwarz Eşitsizliği)

ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

Tanım 3.20. (Operatör) X ve Y iki vektör uzayı olmak üzere, $T: X \to Y$ dönüşümüne bir operatör denir [13].

Tanım 3.21. (Lineer Operatör) X ve Y aynı $\mathcal{K}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere, $T: X \to Y$ operatörü, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{K}$ için,

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad \text{ve} \quad T(\alpha x) = \alpha Tx$$

şartlarını sağlıyorsa T'ye lineer operatör denir [17].

Tanım 3.22. (Sınırlı Lineer Operatör) X ve Y birer normlu uzay ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer, her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ reel sayısı varsa, T operatörü sınırlıdır denir [14].

Tanım 3.23. (Normlu Uzaylarda Zayıf Yakınsaklık) Normlu bir X uzayında bir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer, sınırlı ve sürekli her f dönüşümü için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e zayıf yakınsaktır denir ve

$$x_n \rightharpoonup x,\ n \to \infty$$

şeklinde gösterilir. x elemanına $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir [13].

Normlu uzaylarda, $x_n \to x$ ifadesi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin x'e güçlü yakınsadığı anlamında kullanılır.

Tanım 3.24. (Hilbert Uzaylarında Zayıf Yakınsaklık) Bir H Hilbert uzayında $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi verilsin. $x \in H$ olsun, her $y \in H$ için

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

yazılabiliyorsa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e zayıf yakınsaktır denir [13].

Uyarı 3.1.

- **i.** X sonlu boyutlu bir normlu uzay olsun. Bu takdirde zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığa denktir,
- **ii.** Eğer $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e kuvvetli yakınsak ise bu takdirde bu dizi x'e zayıf yakınsaktır [17].

Tanım 3.25. (Bessel Eşitsizliği) H bir Hilbert uzayı olsun. $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, H'de her i, j için

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

şartını sağlasın. Bu durumda her $x \in H$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

dir [14].

Örnek 3.2. $H = l_2$ dizi uzayında yukarıdaki gibi tanımlanan $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin elemanları açıkça

$$\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,0, \cdots) \\ e_1 &= (0,1,0,0,0, \cdots) \\ e_2 &= (0,0,1,0,0,0, \cdots) \\ \vdots &= \vdots \\ e_n &= \left(0,0,0, \cdots, \overbrace{1}^{n.bileşen}, 0,0,0, \cdots\right) \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

şeklindedir. $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi 0'a güçlü yakınsak olmamasına karşın 0'a zayıf yakınsar. $\forall x \in l_2$ için Bessel eşitsizliği kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

yazılabilir. $n \to \infty$ için $|\langle e_n, x \rangle|^2 \to 0$ olduğundan $\langle e_n, x \rangle \to 0 = \langle 0, x \rangle$'dır.

Tanım 3.26. (Sabit Nokta) X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer,

$$Tx = x$$

olacak şekilde bir $x \in X$ bulunabiliyorsa, bu x noktasına T'nin sabit noktası denir. T dönüşümünün bütün sabit noktalarının kümesi F_T ile gösterilir [18].

Tanım 3.27. (Lipschitzian Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı varsa T'ye bir Lipschitzian (veya L −Lipschitzian) dönüşüm denir [19].

Tanımdan da görüldüğü üzere her T, Lipschitzian dönüşümü süreklidir. Buradan sürekli olmayan bir dönüşümün L −Lipschitzian olamayacağı sonucu çıkar.

Tanım 3.28. (Daraltan Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$$

eşitsizliği $L \in [0,1)$ olması halinde sağlanıyorsa T'ye daraltan (contraction) dönüşüm veya büzülme dönüşümü denir [19].

Tanım 3.29. (Genişlemeyen Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

oluyorsa T'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [19].

Uyarı 3.2. $L \in [0,1)$ olmak üzere, T bir daraltan dönüşüm olsun. Her daraltan dönüşüm için $d(Tx,Ty) \leq Ld(x,y) \leq d(x,y)$ eşitsizliği gerçeklendiğinden, bir daraltan dönüşüm aynı zamanda bir genişlemeyen dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir. Bu daraltan dönüşümler sınıfının genişlemeyen dönüşümler sınıfının bir alt kümesi olduğu anlamına gelir [20].

Lemma 3.1. C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T: C \to C$ bir genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda F_T kapalı ve konveks bir kümedir [20].

Tanım 3.30. (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. g bir fonksiyon olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yöntemi genel olarak

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = g(T, x_n)\,; \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

bağıntısı ile tanımlanır [19].

Literatürde en çok çalışılan iterasyon yöntemlerinden bazıları aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.31. (Picard İterasyonu) (X,d) bir metrik uzay, $K \subset X$ ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere, Picard iterasyonu,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0\ ,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır [19]. Ayrıca (3.1) Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi sabit noktaya yakınsıyorsa T bir Picard operatörüdür denir [19].

Teorem 3.1. (Banach Daraltan Dönüşüm Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda,

i. T, X'te bir tek p sabit noktasına sahiptir,

ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0,\ n = 0,1,2,\ldots$ ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi p'ye yakınsar [21].

Picard iterasyonunun genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamasındaki yetersizliğini göz önünde bulunduran Krasnoselskij, aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımlayarak bu durumu ortadan kaldırmıştır [22].

Tanım 3.32. (Krasnoselskij İterasyonu) $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks bir küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır [22]. Bu iterasyon, $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

Tanım 3.33. (Mann İterasyonu) X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks bir küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ olmak üzere, Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $[0,1]$ aralığında bir kontrol dizisidir. Mann iterasyonunda, $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa, bu iterasyon Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir.

Tanım 3.34. (Ishikawa İterasyonu) X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks bir küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır [24].

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri $[0,1]$ aralığında kontrol dizileridir. (3.4) ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir [24].

Tanım 3.35. (Noor İterasyonu) X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan bir konveks küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, Noor iteasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır [25].

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri $[0,1]$ aralığında kontrol dizilerdir. (3.5) ile verilen iterasyon,

$\alpha_n = 1$, $\beta_n = 0$ ve $\gamma_n = 0$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

$\alpha_n = \lambda$, $\beta_n = 0$ ve $\gamma_n = 0$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir.

$\beta_n = 0$ ve $\gamma_n = 0$ için Mann iteasyonuna indirgenir.

$\gamma_n = 0$ için Ishikawa iterasyonuna indirgenir.

Tanım 3.36. (Picard-S İterasyonu) X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan bir konveks küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, Picard-S iteasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n, \\ y_n = (1-\alpha_n)T x_n + \alpha_n T z_n, \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır [26], [27].

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri $[0,1]$ aralığında kontrol dizileridir.

4. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm boyunca H reel bir Hilbert uzayını göstersin. C, H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi olarak alındığında, konveks $f: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun minimumlarının bulunması problemi olan ve $\min_{x \in C} f(x)$ şeklinde ifade edilen (2.1) minimizasyon problemini göz önüne alalım. (2.1) minimizasyon probleminin çözülebilir olduğunu varsayalım. Bu bölümde ilk olarak, (2.1) minimizasyon probleminin çözümünde kullanılan ve (2.3) ile verilen $x_{n+1} = P_C(I - \gamma_n \nabla f)(x_n)$ GPA ele alınarak, bu algoritmanın güçlü ve zayıf yakınsaklığı incelenecektir. Ardından, bir iterasyon için üstünleştirme metodolojisi ve pertürbasyon dirençliliği kavramı tanıtılacak ve bu kavramların split fizibilite ve ters lineer problemler için uygulamaları ele alınacaktır.

4.1. Gradient Projeksiyon Algoritması

Bu kısımda, (2.3) ile verilen $x_{n+1} = P_C(I - \gamma_n \nabla f)(x_n)$ gradient projeksiyon algoritmasının yapısını anlamak için $P_C(I - \gamma_n \nabla f)$'yi teşkil eden P_C ve ∇f dönüşümleri tanıtılacak ve ∇f'nin taşıdığı özelliklerin GPA'nın yakınsaklığı üzerine etkisi araştırılacaktır.

Tanım 4.1.1. (Metrik Projeksiyon) C, H'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $x \in H$ olsun. Eğer $\forall z \in C$ için $\|y - x\| \le \|z - x\|$ şartını sağlayan bir $y \in C$ varsa y'ye x'in C üzerindeki metrik izdüşümü (metrik projeksiyonu) denir ve $y = P_C x$ ile gösterilir. Yani, metrik projeksiyonu, H'nin herhangi bir x elemanına C'deki en yakın noktayı bulur.

Eğer $\forall x \in H$ için $P_C x$ var ve tek ise $P_C: H \to C$ operatörüne projeksiyon (metrik izdüşüm operatörü) denir. Tanımdan da görüleceği üzere, H'den C üzerine projeksiyon, her bir $x \in H$ için bir tek $P_C x \in C$ tanımlayan ve aşağıdaki özelliği sağlayan fonksiyondur [28]:

$$\|x - P_C x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

Metrik izdüşüm tanımından $\forall x \in C$ için, $P_C x = x$'dir ve $\forall x \notin C$ için $P_C x$ izdüşümü varsa $P_C x \in \partial C$'dır [28].

Teorem 4.1.1. C, H'nin kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Bu durumda her $x \in H$ için, $P_C x$ vardır ve tektir [28].

Teorem 4.1.2. C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi, $x \in H$ ve $y \in C$ olsun. Bu durumda $\forall z \in C$ için aşağıdakiler denktir.

- **i.** $y = P_C x,$
- **ii.** $\langle y, z - y \rangle \geq \langle x, z - y \rangle$'dır [28].

Sonuç 4.1.2. C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $P_C \colon H \to C$ projeksiyon dönüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür. Yani, her $x, x^* \in H$ için

$$\|P_C x - P_C x^*\| \leq \|x - x^*\|$$

dir [28].

İspat: $x, x^* \in H$, $y = P_C x$, $y^* = P_C x^*$ olsun. Teorem 4.1.2'den,

$$\langle y, z - y \rangle \geq \langle x, z - y \rangle \tag{4.1}$$

$$\langle y^*, z - y^* \rangle \geq \langle x^*, z - y^* \rangle \tag{4.2}$$

olduğu elde edilir. (4.1)'de $z = y^*$, (4.2)'de $z = y$ alınır ve bunlar taraf tarafa toplandıktan sonra Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|P_C x - P_C x^*\|^2 = \|y - y^*\|^2 = \langle y - y^*, y - y^* \rangle \leq \langle x - x^*, y - y^* \rangle$$
$$\leq \|x - x^*\| \|y - y^*\|$$

elde edilir. Böylece, $\|y - y^*\| \leq \|x - x^*\|$, yani $\|P_C x - P_C x^*\| \leq \|x - x^*\|$ olur.

Tanım 4.1.2. (Fréchet Diferansiyellenebilme) $f: H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{|f(x+y) - f(x) - \langle y, j \rangle|}{\|y\|} = 0$$

olacak şekilde bir $j \in H$ varsa, j elemanına f'nin x'teki Fréchet diferansiyeli denir ve ∇f ile gösterilir [20].

Uyarı 4.1.1. Eğer $H = \mathbb{R}$ ise bu durumda Fréchet türevi klasik türev tanımı olur, yani

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$$

dir.

Örnek 4.1.1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dönüşümü $f(x) = x_1^3 + x_2^3, x = (x_1, x_2)$ olsun. Bu durumda f nin Fréchet türevi,

$$\nabla f(x) = (3{x_1}^2, 3{x_2}^2)$$

olarak bulunur.

Önerme 4.1.1. C, bir X iç çarpım uzayının konveks bir alt kümesi ve $f: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $x, y \in C$ iken, f'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ olmasıdır [29].

4.1.1. Monoton Operatörler

Herhangi bir T dönüşümünün bir iç çarpım uzayındaki tanım kümesini $D(T)$ ile gösterelim.

Tanım 4.1.1.1. (Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \ \in D(T)$ için,

$$\langle Tx - Ty, x - y \,\rangle \geq 0$$

ise, T'ye monoton dönüşüm denir [30].

Örnek 4.1.1.1. $H = \mathbb{R}$ ve $C = [1{,}2]$ olmak üzere, $T: C \to C$ dönüşümünü

$$Tx = \frac{2x+1}{3}$$

olarak tanımlayalım. $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\langle x, y\rangle = x.y$ ile tanımlanan iç çarpıma göre

$$(Tx - Ty)(x - y) = \left(\frac{2x+1}{3} - \frac{2y+1}{3}\right)(x - y) = \frac{2}{3}(x - y)^2 \geq 0$$

olduğundan, T bir monoton dönüşümdür.

Tanım 4.1.1.2. (Kesin Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \ \in D(T)$, $x \neq y$ için,

$$\langle Tx - Ty, x - y \,\rangle > 0$$

ise, T'ye kesin monoton (strictly monotone) dönüşüm denir [30].

Örnek 4.1.1.2. $H = \mathbb{R}$ ve $C = [0{,}1]$ olmak üzere, $T: C \to C$ dönüşümü

$$Tx = x^2$$

olarak tanımlansın. $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\langle x, y\rangle = x.y$ ile tanımlanan iç çarpıma göre

$$(Tx - Ty)(x - y) = (x^2 - y^2)(x - y) = (x - y)^2(x + y) > 0$$

olduğundan, T kesin monoton dönüşümdür.

Tanım 4.1.1.3. (η −Kuvvetli Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \in D(T)$ ve $x \neq y$ için,

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2$$

olacak şekilde $\eta > 0$ sayısı varsa, T'ye $\eta -$ kuvvetli monoton (η −strongly monotone) dönüşüm denir [30].

Örnek 4.1.1.3 $H = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere, $T: C \to C$ dönüşümü

$$Tx = \frac{x}{3}$$

olarak tanımlansın. $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\langle x, y \rangle = x.y$ ile tanımlanan iç çarpıma göre

$$(Tx - Ty)(x - y) = \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right)(x - y) = \frac{1}{3}(x - y)^2$$

olduğundan, T bir $\frac{1}{3} -$ kuvvetli monoton dönüşümdür.

Tanım 4.1.1.4. ($v -$ ters Kuvvetli Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \in D(T)$ için,

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq v \|Tx - Ty\|^2$$

olacak şekilde $v > 0$ sayısı varsa, T'ye $v -$ ters kuvvetli monoton ($v -$ inverse strongly monotone) dönüşüm denir [30]. Bu ifade tezimizde v −tkm şeklinde kısaltılacaktır.

Örnek 4.1.1.4. $H = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere, $T: C \to C$ dönüşümünü

$$Tx = \frac{5x + 4}{9}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\langle x, y \rangle = x.y$ ile tanımlanan iç çarpıma göre

$$(Tx-Ty)(x-y)=\left(\frac{5x+4}{9}-\frac{5y+4}{9}\right)(x-y)=\frac{5}{9}(x-y)^2\geq\frac{25}{81}v(x-y)^2$$

olduğu elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik $v=\frac{9}{5}$ için sağlanır. Dolayısıyla T, $\frac{9}{5}-$ ters kuvvetli monoton dönüşümdür.

Tanım 4.1.1.5. (Firmly Genişlemeyen Dönüşüm) $T: H\rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Eğer $2T-I$ dönüşümü genişlemeyen dönüşüm ise veya denk olarak her $x,y\in H$ için,

$$\langle x-y, Tx-Ty\rangle\geq\|Tx-Ty\|^2$$

oluyorsa, T firmly genişlemeyen dönüşümdür denir. Eğer T firmly genişlemeyen dönüşüm ise, $T=\frac{1}{2}(I+M)$ olacak şekilde bir $M: H\rightarrow H$ bir genişlemeyen dönüşümü vardır [7]. Çünkü,

$$T=\frac{1}{2}(I+M)\Rightarrow 2T-I=M$$

dır.

Örnek 4.1.1.5. Projeksiyon dönüşümler firmly genişlemeyen dönüşümdürler [7].

Tanım 4.1.1.6. (α −Ortalamalı Dönüşüm) $T: H\rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü, I özdeş dönüşümü ve bir genişlemeyen dönüşümün ortalaması olarak yazılabilirse, yani, $M: H\rightarrow H$ genişlemeyen dönüşüm olmak üzere, $\alpha\in(0,1)$ için

$$T=(1-\alpha)I+\alpha M$$

şeklinde yazılabilirse, T'ye $\alpha-$ ortalamalı dönüşüm denir [7].

Örnek 4.1.1.6. C, H'nin kapalı ve konveks alt kümesi olsun, P_C firmly genişlemeyen dönüşüm olduğundan,

$$P_C=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}M=\left(1-\frac{1}{2}\right)I+\frac{1}{2}M$$

dir. Böylece, P_C, $\frac{1}{2}-$ ortalamalı dönüşümdür [7].

Önerme 4.1.1.1. $M: H \to H, T: H \to H, V: H \to H$ dönüşümleri için,

i. $T = (1-\alpha)M + \alpha V$, $\alpha \in (0,1)$ ve M ortalamalı ve V genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda, T ortalamalı dönüşümdür.

ii. T firmly genişlemeyen dönüşümdür $\Leftrightarrow I - T$ bir genişlemeyen dönüşümdür.

iii. $T = (1-\alpha)M + \alpha V$, $\alpha \in (0,1)$, M firmly genişlemeyen dönüşüm ve V genişlemeyen dönüşüm ise, bu durumda T ortalamalıdır.

iv. Sonlu sayıda ortalamalı dönüşümün bileşkesi de ortalamalıdır. Özellikle, T_1, $\alpha_1 -$ ortalamalı ve T_2, $\alpha_2 -$ ortalamalı olsun. Bu takdirde, $T_1 T_2$,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 . \alpha_2$$

ortalamalı olur [31], [32].

Uyarı 4.1.1.1.

i. T genişlemeyen dönüşüm ise, $I - T$ monotondur.

ii. P_C projeksiyonu $1 -$ tkm'dir [7].

Önerme 4.1.1.2.

i. T genişlemeyen dönüşümdür $\Leftrightarrow I - T$, $\frac{1}{2} -$ tkm'dır.

ii. T, $v -$ tkm ise, $\gamma > 0$ için γT, $\frac{v}{\gamma} -$ tkm'dır.

iii. T, ortalamalıdır $\Leftrightarrow v > \frac{1}{2}$ için $I - T$, $v -$ tkm'dir. Gerçekten de her $\alpha \in (0,1)$ için T, $\alpha -$ ortalamalıdır $\Leftrightarrow I - T$, $\frac{1}{2\alpha} -$ tkm'dir [31], [33].

4.1.2. Minimizasyon Probleminin Sabit Nokta Bulma Problemi Olarak İfade Edilmesi

Teorem 4.1.2.1. x^*'ın (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul x^*'ın aynı zamanda her $x \in C$ için $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ eşitsizliğini sağlamasıdır [34].

İspat: x^*, minimizasyon probleminin bir çözümü olsun. Her $t \in [0,1]$ için, $g(t) = f(x^* + t(x - x^*))$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. $g(t)$ fonksiyonu $t = 0$ da minimum değerini alır. Bu durumda, $g'(0) \geq 0$'dır. $g'(0) = \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$ olduğundan $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$'dır.

Ayrıca f konveks bir fonksiyon olduğundan, Önerme 4.1.1 gereğince her $x \in C$ için,

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$$

dir. $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ olduğu kabulünden, $f(x) \geq f(x^*)$ elde edilir. Yani x^*, f fonksiyonunun bir minimum noktasıdır.

Teorem 4.1.2.2. x^*'ın , (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $\gamma > 0$ için $x^* = P_C(x^* - \gamma \nabla f(x^*))$ olmasıdır [34].

İspat: x^*, minimizasyon probleminin bir çözümü olduğundan Teorem 4.1.2.1 gereğince $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ dır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $-\gamma < 0$ ile çarparak ve her iki tarafına $\langle x^*, x - x^* \rangle$ ekleyerek,

$$\langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle x^* - \gamma \nabla f(x^*), x - x^* \rangle, \forall x \in C$$

olduğu elde edilir. Teorem 4.1.2'den $x^* = P_C(x^* - \gamma \nabla f(x^*))$ olduğu görülür. Tersine $\gamma > 0$ için, $x^* = P_C(x^* - \gamma \nabla f(x^*))$ olsun. Bu durumda,

$$\langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle x^* - \gamma \nabla f(x^*), x - x^* \rangle, \qquad \forall x \in C$$

olur. Buradan da, $\forall x \in C$ için $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ olduğu elde edilir. Teorem 4.1.2.1'den x^*, (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.1.2.3. ∇f, C üzerinde tanımlı kesin monoton bir operatör olsun. Bu durumda, $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ eşitsizliğinin bir çözümü varsa tektir [34].

İspat: x_1 ve x_2 birbirinden farklı iki çözüm olsun. Bu durumda, her $x \in C$ için x_1 ve x_2 sırasıyla,

$$\langle \nabla f(x_1), x - x_1 \rangle \geq 0 \tag{4.3}$$

ve

$$\langle \nabla f(x_2), x - x_2 \rangle \geq 0 \tag{4.4}$$

eşitsizliklerini sağlarlar. (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinde x yerine sırasıyla x_2 ve x_1 yazılırsa,

$$\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_2), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

elde edilir. Fakat bu eşitsizlik kesin monotonluk tanımıyla çelişir. Dolayısıyla $x_1 = x_2$'dir.

Sonuç 4.1.2.1. $\nabla f,\ C$ üzerinde tanımlı kesin monoton bir operatör olsun. Bu durumda minimizasyon probleminin bir çözümü varsa bu çözüm tektir [29].

4.1.3. ∇f'nin GPA'nın Yakınsaklığına Etkisi

GPA'nın yakınsaklığı, ∇f'nin taşıdığı özellikler ile yakından ilgilidir. (2.3) ile verilen GPA'da, $T := P_C(I - \gamma \nabla f)$ olarak alalım.

4.1.3.1. GPA'nın Güçlü Yakınsaklığı

$\nabla f, \eta$ -kuvvetli monoton ve L $-$Lipschitzian olduğunda uygun şartları sağlayan γ_n'ler için için T bir daraltan dönüşüm olacağından Banach daraltan teoreminden yararlanılarak GPA'nın güçlü yakınsak olduğu sonucunu aşağıdaki şekilde vereceğiz.

Önerme 4.1.3.1.1. $\nabla f,\ L$ $-$Lipschitzian ve $\eta -$ kuvvetli monoton olsun. $0 < \gamma < \frac{2\eta}{L^2}$ şartını sağlayan γ'lar için T bir daraltan dönüşümdür.

Daha açık bir ifadeyle; $\forall\, x, y\ \in H$ için $\tau = \sqrt{1 - \gamma(2\eta - \gamma L^2)} < 1$ olmak üzere, $\|Tx - Ty\| \leq \tau\|x - y\|$'dır [35].

İspat: $\forall\, x, y\ \in C$ için,

$$\|Tx - Ty\|^2 = \|\, P_C(\mathrm{I} - \gamma\nabla f)x - \ P_C(\mathrm{I} - \gamma\nabla f)y\|^2$$

$$\leq \|\, (I - \gamma\nabla f)x - \ (I - \gamma\nabla f)y\|^2$$

$$\leq \|x - y\|^2 - 2\gamma\langle\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle + \gamma^2\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

$$\leq \|x - y\|^2 - 2\gamma\eta\|x - y\|^2 + \gamma^2 L^2\|x - y\|^2$$

$$= \big(1 - \gamma(2\beta - \gamma L^2)\big)\|x - y\|^2$$

olduğundan, T, $\sqrt{1 - \gamma(2\eta - \gamma L^2)} < 1$ için bir daraltan dönüşüm olur.

Teorem 4.1.3.1.1. $\nabla f,\ L-$Lipschitzian ve $\eta -$ kuvvetli monoton olsun. $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için,

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2\eta}{L^2} \tag{4.5}$$

olsun. Bu durumda, (2.3) ile verilen GPA, minimizasyon probleminin bir tek çözümüne kuvvetli yakınsar [35].

İspat: $\nabla f, \eta -$ kuvvetli monoton olduğundan, aynı zamanda kesin monotondur. Sonuç 4.1.2.1'den dolayı, $T \equiv T_{\gamma_n} :\ P_C(I - \gamma_n\nabla f)$'nin bir tek sabit noktası olur.
(4.5) varsayımından, her $n \geq N$ için,

$$0 < \alpha \leq \theta < \frac{2\eta}{L^2} \text{ ve } \alpha \leq \gamma_n \leq \theta$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır.

$h = \max_{\alpha \leq \gamma \leq \theta} \sqrt{1 - \gamma(2\eta - \gamma L^2)}$ olarak alınırsa, $0 \leq h < 1$'dir ve her $n \geq N$ için

$$0 \leq \sqrt{1 - \gamma_n(2\eta - \gamma_n L^2)} \leq h$$

olur.

Önerme 4.1.3.1.1'den, $T \equiv T_{\gamma_n}: P_C(I - \gamma_n \nabla f)$ bir daraltan dönüşümdür. Banach daraltan teoremi gereğince, (2.3) ile üretilen GPA, T'nin bir tek sabit noktasına yakınsar.

4.1.3.2. GPA'nın Zayıf Yakınsaklığı

Levitin ve Polyak, ∇f'nin kuvvetli monoton olmayıp sadece L −Lipschitzian olması durumunda, GPA'nın (2.1) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığını gösterdiler [6]. Çünkü, ∇f, sadece L −Lipschitzian olduğunda, uygun γ değerleri için $P_C(I - \gamma \nabla f)$ bir genişlemeyen dönüşüm olacağından, $P_C(I - \gamma \nabla f)$ dönüşümü için bir Picard iterasyonu olan GPA güçlü yakınsak olmayabilir:

Önerme 4.1.3.2.1. $f: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu f Fréchet diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer ∇f bir $L -$ Lipschitzian dönüşüm ise ∇f aynı zamanda $\frac{1}{L} -$ tkm'dir [36].

Önerme 4.1.3.2.2. C, H'nin kapalı ve konveks alt kümesi ve $\nabla f: C \to H$, L −Lipschitzian bir dönüşüm olsun. $0 < \gamma < \frac{2}{L}$ için $P_C(I - \gamma \nabla f)$ bir genişlemeyen dönüşümdür.

İspat: Önerme 4.1.3.2.1'den, ∇f'nin $\frac{1}{L} -$ tkm olduğunu ve P_C'nin bir genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak, her $x, y \in C$ için,

$$\| P_C(I - \gamma \nabla f)(x) - P_C(I - \gamma \nabla f)(y)\|^2 \leq \|(I - \gamma \nabla f)(x) - (I - \gamma \nabla f)(y)\|^2$$

$$= \|x-y\|^2 - 2\gamma\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y\rangle + \gamma^2 \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

$$\leq \|x-y\|^2 - 2\gamma \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 + \gamma^2\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

$$= \|x-y\|^2 - \gamma\left(2\frac{1}{L} - \gamma\right)\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

$$\leq \|x-y\|^2$$

olduğunu elde ederiz. Böylece $P_C(I - \gamma\nabla f)$ bir genişlemeyen dönüşümdür.

Teorem 4.1.3.2.1. (2.1) ile verilen konveks minimizasyon probleminin çözülebilir olduğunu kabul edelim. ∇f, L −Lipschitzian olsun. $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ parametreler dizisi için $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2}{L}$ koşulu sağlansın. Bu takdirde GPA algoritması (2.1)'in bir çözümüne zayıf yakınsar [5].

Levitin ve Polyak'ın gösterdiği Teorem 4.1.3.2.1'i Xu [7] ortalamalı dönüşümler mantığıyla yeniden ispatladı. Aşağıda, 5. bölümde kullanılacak lemmalar verildikten sonra GPA'nın Xu'nun ortalamalı dönüşüm yaklaşımıyla yeniden yazılmasını bir önerme olarak vereceğiz.

Lemma 4.1.3.2.1. $\forall x, y \in H$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \qquad (4.6)$$

eşitliği geçerlidir [37].

Lemma 4.1.3.2.2. (Demiclosedness Prensibi) C, H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T: C \to C$ bir genişlemeyen dönüşüm ve $F_T \neq \emptyset$ olsun. Eğer C'de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e zayıf yakınsıyor ve $(I-T)x_n$ bir y'ye güçlü yakınsıyorsa bu takdirde, $(\mathrm{I} - T)x = y$'dir. Özellikle $y = 0$ ise $x \in F_T$ olur [38].

Lemma 4.1.3.2.3. $C \subset H$ kapalı ve konveks bir küme olsun ve H'de bir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın:

i. $\forall x \in C$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ mevcuttur,

ii. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin zayıf yakınsak alt dizilerinin limitlerinin kümesi $w_w(x_n) := \left\{x: \exists x_{n_j} \rightharpoonup x\right\} \subset C$ olsun.

Bu takdirde, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, C'de bir noktaya zayıf yakınsar [38].

Lemma 4.1.3.2.4. $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan sayıların bir dizisi ve $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ de negatif olmayan sayıların $\sum_{n=0}^{\infty} s_n < \infty$ şartını sağlayan bir dizisi olsun. Eğer,

$$q_{n+1} \leq q_n + s_n$$

ise, $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlıdır ve $\lim_{n\to\infty} q_n$ mevcuttur [39].

Xu'nun ortalamalı dönüşüm yaklaşımını aşağıdaki önermede verelim.

Önerme 4.1.3.2.3. ∇f, $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2}{L}$ olmak üzere L −Lipschitzian olsun. Her n için, $P_C(I - \gamma_n \nabla f)$ dönüşümü, $\beta_n = \frac{2+\gamma_n L}{4}$ ortalamalıdır [7].

İspat: $0 < \alpha \leq \gamma_n \leq \theta < \frac{2}{L}$ olduğunu kabul edelim. ∇f, L −Lipschitzian olduğundan, her $x, y \in C$ için,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \leq L^2 \|x - y\|^2$$

dir.

Önerme 4.1.3.2.1'den, ∇f, $\frac{1}{L}$ − tkm′dır. Önerme 4.1.1.2 i.'den, $\gamma \nabla f$, $\frac{1}{\gamma L}$ − tkm'dır. Önerme 4.1.1.2 iii.'den, $\gamma \nabla f$, $\frac{1}{\gamma L}$ − tkm olduğundan, $I - \gamma \nabla f$, $\frac{\gamma L}{2}$ − ortalamalıdır.

P_C'nin $\frac{1}{2}-$ortalamalı dönüşüm olduğunu biliyoruz. P_C, $\frac{1}{2}-$ ortalamalı ve $I-\gamma\nabla f$, $\frac{\gamma L}{2}-$ortalamalı olduğundan, Önerme 4.1.1.1 iv.'ü kullanarak $P_C(I-\gamma\nabla f)$ dönüşümünün $\frac{1}{2}+\frac{\gamma L}{2}-\frac{\gamma L}{4}=\frac{2+\gamma L}{4}$ ortalamalı olduğunu elde ederiz. $0<\gamma<\frac{2}{L}$ olmak üzere, $P_C(I-\gamma\nabla f)$ dönüşümü bir ortalamalı dönüşüm olduğundan,

$$P_C(I-\gamma\nabla f) = \left(1-\frac{2+\gamma L}{4}\right)I+\frac{2+\gamma L}{4}\,T$$

olacak şekilde bir $T: H \to H$ genişlemeyen dönüşüm vardır. Böylece her bir n için T_n dönüşümleri genişlemeyen dönüşümler olmak üzere,

$$P_C(I-\gamma_n\nabla f)=\left(\frac{2-\gamma_n L}{4}\right)I+\frac{2+\gamma_n L}{4}T_n$$

olur. $\alpha_1=\frac{2+\alpha L}{4}$, $\theta_1=\frac{2+\theta L}{4}$, $0<\alpha\le\gamma_n\le\theta<\frac{2}{L}$ olmak üzere, $\beta_n=\frac{2+\gamma_n L}{4}$ diyelim. $\beta_n\in[\alpha_1,\theta_1]\subset(0,1)$ dir. Bu durumda,

$$P_C(I-\gamma_n\nabla f)=(1-\beta_n)I+\beta_n T_n \tag{4.7}$$

yazılabilir.

(4.7) kullanılarak, (2.3) ile verilen GPA algoritması aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_C(I-\gamma_n\nabla f)x_n = [(1-\beta_n)I+\beta_n T_n]x_n \\ &= (1-\beta_n)I(x_n)+\beta_n T_n(x_n) = (1-\beta_n)x_n+\beta_n T_n x_n \quad . \end{aligned}$$

Ertürk ve ark. [1], (2.1) konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne (2.4) ile verilen GPA'nın zayıf yakınsak olduğunu gösterdiler. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1.3.2.1. (2.1) ile verilen konveks minimizasyon probleminin çözülebilir olduğunu kabul edelim. ∇f, L −Lipschitzian dönüşüm olsun. $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri için aşağıdaki şartlar sağlansın.

i. $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2}{L}$.

ii. $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n < 1$ ve $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

Bu takdirde, (2.4) ile verilen GPA, (2.1)'in bir çözümüne zayıf yakınsar [1].

4.2. Üstünleştirme Metodolojisi ve İterasyonların Pertürbasyon Dirençliliği

Son zamanlarda, Davidi, Herman ve Censor tarafından iteratif yöntemlerin etkililiğini artırmak için üstünleştirme metodolojisi (SM) olarak adlandırılan yeni bir metodoloji kullanılmıştır [4]. Bu yöntem, iteratif algoritmalar üzerinde pertürbasyon-direnç tekniklerini kullanır. SM, bozulmuş algoritmaya orijinal algoritmanın yaptığını, daha az hesaplama ile yaptırma prensibine dayalı olarak çalışır. Daha kesin olmak gerekirse, pertürbasyonlar (bozulmalar), bozulmuş algoritmayı, amaçlanan uygulama için orijinal iteratif algoritma tarafından üretilenlerden daha yararlı sonuçlar üretmeye "zorlamak" üzere tasarlanmıştır. Şimdi Censor'un [10]'da Öklid uzayında vermiş olduğu sınırlı pertürbasyon dirençliliğinin matematiksel tanımını verelim.

Tanım 4.2.1. τ, R^J'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$ şartını sağlayan reel sayıların bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de R^J'de sınırlı bir dizi olsun. Eğer $x_0 \in R^J$ için $x_{n+1} = A(x_n)$ ile üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratif algoritması τ'daki bir noktaya yakınsıyorken, $y_{n+1} = A(y_n + \beta_n v_n)$ ile verilen $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratif algoritması da, herhangi bir $y_0 \in R^J$ için τ'daki bir noktaya yakınsarsa $A: R^J \to R^J$ algoritmik operatörüne τ'ya göre sınırlı pertürbasyon dirençliliğine sahiptir denir.

Bu tanımda $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, orijinal algoritma olan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$'nin üstünleştirilmiş versiyonudur.

Xu [12], ortalamalı dönüşümler yaklaşımını kullanarak, Hilbert uzaylarında konveks minimizasyon probleminde kullanılan ve gradient projeksiyon algoritmasından daha genel olan PSG algoritmasının sınırlı pertürbasyon dirençliliğini çalıştı ve aşağıdaki sonucu elde etti:

Teorem 4.2.1 H bir reel Hilbert uzayı ve C, H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Konveks bir $f: H \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun C kümesindeki minimumlarının bulunmasını problemini, yani, $\min_{x \in C} f(x)$'i göz önüne alalım ve bu problemin çözülebilir olduğunu varsayalım. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, her n için $\beta_n \geq 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$ şartını sağlayan reel sayıların bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de H'de sınırlı bir dizi olsun. Eğer ∇f, L-Lipschitzian ve $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ parametreler dizisi için

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \gamma_n \leq \limsup_{n \to \infty} \gamma_n < \frac{2}{L}$$

ise GPA'nın üstünleştirilmiş versiyonu olan

$$x_{n+1} = P_C\big(x_n + \beta_n v_n - \gamma_n \nabla f(x_n + \beta_n v_n)\big)$$

algoritması (2.1)'in bir çözümüne zayıf yakınsaktır [12].

4.2.1. Üstünleştirme Metodolojisinin Uygulandığı Bazı Alanlar

SM, bazı önemli pratik uygulamalarda, özellikle projeksiyonlardan görüntü rekonstrüksiyonu, yoğunluk ayarlı radyasyon tedavisi ve tahribatsız muayene gibi ters problemlerde başarıyla kullanılan ve ek alanlarda uygulama ve test bekleyen çok genel bir prensiptir. Şimdi günlük hayatta SM'nin pratik uygulamalarını görebileceğimiz iki problemi verelim.

Tanım 4.2.1.1. (Lineer Ters Problemler) H bir Hilbert uzayı, C, H nin boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. A, H üzerinde bir sınırlı lineer opertaör olsun. A^*, A'nın eşleniğini göstersin ve $b \in H$ olsun.

Konveks olarak kısıtlı ters problem olan $Ax = b, x \in C$ problemini göz önüne alalım. Bu problem, en küçük kareler yöntemi ile aşağıdaki gibi bir minimizasyon problemi olarak ifade edilebilir [12]:

$$\min_{x \in C} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2.$$

Tikhonovun regülerizasyonunu uygulayarak yukarıdaki minimizasyon problemi aşağıdaki gibi regülerize edilmiş en küçük kareler problemi ile çözülebilir:

$$\min_{x \in C} f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2. \tag{4.8}$$

Burada $\varepsilon > 0$ regülazisyon parametresidir. f_ε fonksiyonunun gradienti olan

$$\nabla f_\varepsilon(x) = A^*(Ax - b) + \varepsilon x \, , x \in H,$$

fonksiyonu $L(f_\varepsilon) = \|A\|^2 + \varepsilon$ sabiti ile Lipschitziandır.
(4.8) problemi, aşağıdaki teoremde verildiği üzere sınırlı pertürbasyon dirençliliğe sahip GPA ile çözülebilir.

Teorem 4.2.1.1. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, negatif olmayan sayıların $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$ koşulunu sağlayan bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, H'de sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda, $0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2 + \varepsilon}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = P_C\big((1 - \gamma\varepsilon)(x_n + \beta_n v_n) - \gamma A^* A(x_n + \beta_n v_n) + \gamma A^* b\big)$$

algoritması (4.8)'in bir çözümüne zayıf yakınsaktır [12].

İspat: $\nabla f_\varepsilon(x) = A^*(Ax - b) + \varepsilon x$, $L(f_\varepsilon) = \|A\|^2 + \varepsilon$ ve $\gamma_n = \gamma$ olduğu göz önüne alınarak Teorem 4.2.1'den sonucu elde ederiz.

Tanım 4.2.1.2 (Split Fizibilite Problemi): Yoğunluk ayarlı radyasyon terapisinde ve ifadeleri geri almalarda ortaya çıkan ters problemleri modellemek için [40], [41]'de tanıtılan split fizibilite problemini (SFP) aşağıdaki şekilde formüle edebiliriz:

C ve Q sırasıyla, H_1 ve H_2 Hilbert uzayının boştan farklı kapalı ve konveks alt kümeleri olsun. $A: H_1 \to H_2$ dönüşümünün sınırlı bir lineer operatör olduğunu kabul edelim. SFP,

$$x \in C \text{ ve } Ax \in Q \tag{4.9}$$

özelliğini sağlayan bir x noktası bulma problemi olarak formüle edilir. SFP'nin çözümlerinin kümesini $\Gamma = \{x\epsilon C: Ax\epsilon Q\} = C \cap A^{-1}Q$ ile gösterelim. Uygunluk açısından, Γ'nin kapalı ve konveks olduğunu kabul edelim.

Şimdi SFP'ye GPA uygulamak amacıyla SFP'nin bir minimizasyon problemi olarak nasıl ifade edildiğini görelim [42]:

Açıktır ki; $x\epsilon\Gamma$ olması, bazı $q \in Q$ için, $Ax - q = 0$ olacak şekilde $x \in C$ olduğu anlamına gelir. Bu da $d(Ax, q) = \|Ax - q\|$ uzaklık fonksiyonunun ve $\min_{x\in C, q\in Q} \frac{1}{2}\|Ax - P_Q Ax\|^2$ minimizasyon probleminin göz önüne alınmasına yol açar.

Eğer $q \in Q$ ya göre minimize edilirse bu durumda,

$$\min_{x\in C} f(x) := \frac{1}{2}\|Ax - P_Q Ax\|^2 \tag{4.10}$$

minimizasyon problemi elde edilir.

f fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilirdir ve $\nabla f x = A^*(I - P_Q)Ax$'dir. $(I - P_Q)$ dönüşümünün firmly genişlemeyen dönüşüm olduğu kullanılarak, her $x, y \in C$ için $\|\nabla f x - \nabla f y\| \leq \|A\|^2\|x - y\|$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten ∇f'nin bir $\|A\|^2 -$ Lipschitzian dönüşüm olduğu sonucu çıkar [42].

SFP'nin minimizasyon problemi olarak ifade edilebilmesi, SFP için GPA'nın kullanılmasına imkân tanır. Sonuç olarak SFP, optimizasyon problemi olarak yazılabildiğinden dolayı SFP 'nin sınırlı pertürbasyon dirençliliği GPA ile çözülebilir. Bu sonuç aşağıdaki teoremden çıkar.

Teorem 4.2.1.2. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan sayıların $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n < \infty$ koşulunu sağlayan bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, H'de sınırlı bir dizi olsun. $0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$x_{n+1} = P_C\big(x_n + \beta_n v_n - \gamma A^*(I - P_Q)A(x_n + \beta_n v_n)\big) \tag{4.11}$$

algoritması SFP'nin bir çözümüne zayıf yakınsar [12].

İspat: $\nabla f = A^*\big(I - P_Q\big)A$ dönüşümünün $\|A\|^2$ −Lipschitzian dönüşüm olduğunu göz önüne alarak Teorem 4.2.1'den (4.11) algoritmasının SFP'nin bir çözümüne zayıf yakınsadığını görürüz.

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde H bir reel Hilbert uzayı, C H'nin kapalı ve konveks alt kümesi ve $f: H \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. f'nin C kümesindeki minimum noktalarını bulma problemi olarak (2.1) minimizasyon problemini göz önüne alalım. Bu problemin çözümlerinin kümesini S ile gösterelim ve $S \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim.

Tezin bu kısmında, Ertürk ve ark. [1] tarafından konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğu gösterilen (2.4) ile verilen GPA'nın üstünleştirilmiş versiyonunu konveks bir $f: H \to \mathbb{R}$ dönüşümü için ele alacağız. (2.4)'in üstünleştirilmiş versiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C\big(y_n + \beta_n v_n - \gamma_n \nabla f(y_n + \beta_n v_n)\big) \\ \quad y_n = (1 - a_n) P_C\big(x_n + \beta_n v_n - \gamma_n \nabla f(x_n + \beta_n v_n)\big) \\ \qquad\qquad + a_n P_C\big(z_n + \beta_n v_n - \gamma_n \nabla f(z_n + \beta_n v_n)\big) \\ \quad z_n = (1 - b_n)(x_n + \beta_n v_n) + b_n P_C(x_n + \beta_n v_n - \gamma_n \nabla f(x_n + \beta_n v_n)) \end{cases} \tag{5.1}$$

Burada, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, her n için $\beta_n \geq 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$ şartını sağlayan reel sayıların bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, H'deki elemanların sınırlı bir dizisidir. (5.1) ile verilen üstünleştirilmiş gradient projeksiyon algoritmasının, (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğunu, dolayısıyla (2.4) ile verilen GPA'nın sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençli olduğunu, ortalamalı dönüşüm yaklaşımını kullanarak göstereceğiz.

Ayrıca, SFP ve doğrusal ters problemler için üstünleştirilmiş (5.1) algoritmasının uygulamalarını vereceğiz. Bunlara ek olarak, elde ettiğimiz sonucu sonsuz boyutlu Hilbert uzayında bir örnekle açıklayacağız.

Teorem 5.1. Konveks $f: H \to \mathbb{R}$ dönüşümü için (2.1) minimizasyon problemini göz önüne alalım. $S \neq \emptyset$ olsun ve ∇f'nin $L -$ Lipschitzian olduğunu kabul edelim. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, her n için $\beta_n \geq 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$ şartını sağlayan reel sayıların bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, H'deki elemanların sınırlı bir dizisi olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_0 \in H$

tarafından üretilen (5.1) algoritması olsun. Eğer $[0,1]$'deki $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri ve $\left(0,\frac{2}{L}\right)$'deki $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

i. $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2}{L}$,

ii. $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n < 1$ ve $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n < 1$.

şartlarını sağlarsa, (5.1) ile verilen üstünleştirilmiş $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, (2.1) ile verilen minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsaktır.

İspat: 1. Adım: Her bir $x_* \in S$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_*\|$'in mevcut olduğunu göstereceğiz. (5.1) ile verilen üstünleştirilmiş algoritmada (4.7) ile verilen ortalamalı dönüşüm yaklaşımını kullanarak ve (5.1)'i yeniden düzenleyerek

$$e_n = (1-\epsilon_n)\beta_n v_n + \epsilon_n T_n(y_n + \beta_n v_n) - \epsilon_n T_n y_n$$

$$\tilde{e}_n = (1-\epsilon_n)\beta_n v_n + (1-a_n)\epsilon_n(T_n(x_n + \beta_n v_n) - T_n x_n)$$

$$+a_n\epsilon_n(T_n(z_n + \beta_n v_n) - T_n z_n)$$

$$\tilde{\tilde{e}}_n = (1-\epsilon_n b_n)\beta_n v_n + \epsilon_n b_n(T_n(x_n + \beta_n v_n) - T_n x_n)$$

olmak üzere aşağıdaki algoritmayı elde ederiz:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n + e_n \\ \quad y_n = (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\big) \\ \qquad +a_n\big((1-\epsilon_n)z_n + \epsilon_n T_n z_n\big) + \tilde{e}_n \\ \quad z_n = (1-b_n)x_n + b_n\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\big) + \tilde{\tilde{e}}_n. \end{cases} \tag{5.2}$$

$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlı bir dizi olduğundan her n için $\|v_n\| \leq K$ olacak şekilde bir K reel sayısı vardır. Her n için, T_n'nin genişlemeyen dönüşüm olduğunu ve $\|v_n\| \leq K$ olduğunu göz önüne alarak, $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\tilde{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\tilde{\tilde{e}}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin sınırlı olduğunu aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\|e_n\| = \|(1-\epsilon_n)\beta_n v_n + \epsilon_n T_n(y_n + \beta_n v_n) - \epsilon_n T_n y_n\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n)\|\beta_n v_n\| + \epsilon_n \|T_n(y_n + \beta_n v_n) - T_n y_n\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n)\beta_n\|v_n\| + \epsilon_n\beta_n\|v_n\|$$

$$= \beta_n\|v_n\|$$

$$\leq \beta_n K, \tag{5.3}$$

$$\|\tilde{e}_n\| = \left\| \begin{matrix} (1-\epsilon_n)\beta_n v_n + (1-a_n)\epsilon_n(T_n(x_n+\beta_n v_n) - T_n x_n) \\ +a_n\epsilon_n(T_n(z_n+\beta_n v_n) - T_n z_n) \end{matrix} \right\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n)\|\beta_n v_n\| + (1-a_n)\epsilon_n\|T_n(x_n+\beta_n v_n) - T_n x_n\|$$

$$+a_n\epsilon_n\|T_n(z_n+\beta_n v_n) - T_n z_n\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n)\beta_n\|v_n\| + (1-a_n)\epsilon_n\beta_n\|v_n\| + a_n\epsilon_n\beta_n\|v_n\|$$

$$= \beta_n\|v_n\|$$

$$\leq \beta_n K, \tag{5.4}$$

ve

$$\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\| = \|(1-\epsilon_n b_n)\beta_n v_n + \epsilon_n b_n(T_n(x_n+\beta_n v_n) - T_n x_n)\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n b_n)\|\beta_n v_n\| + \epsilon_n b_n\|T_n(x_n+\beta_n v_n) - T_n x_n\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n b_n)\beta_n\|v_n\| + \epsilon_n b_n\beta_n\|v_n\|$$

$$\leq \beta_n K. \tag{5.5}$$

(5.3), (5.4) ve (5.5) eşitsizliklerinde, $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ gerçeğini kullanarak,

$$\lim_{n\to\infty}\|e_n\| = 0,\ \lim_{n\to\infty}\|\tilde{e}_n\| = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\| = 0 \tag{5.6}$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz.

$x_* \in S$ olsun. Her n için $T_n x_* = x_*$ olduğunu kullanarak

$$\|x_{n+1} - x_*\| = \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n + e_n - x_*\|$$

$$= \|(1-\epsilon_n)(y_n - x_*) + \epsilon_n(T_n y_n - x_*) + e_n\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n)\|y_n - x_*\| + \epsilon_n\|T_n y_n - T_n x_*\| + \|e_n\|$$

$$\leq (1-\epsilon_n)\|y_n - x_*\| + \epsilon_n\|y_n - x_*\| + \|e_n\|$$

$$= \|y_n - x_*\| + \|e_n\|, \tag{5.7}$$

$$\|y_n - x_*\| = \left\| \begin{matrix} (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\big) \\ +a_n\big((1-\epsilon_n)z_n + \epsilon_n T_n z_n\big) + \tilde{e}_n - x_* \end{matrix} \right\|$$

$$\leq (1-a_n)\|(1-\epsilon_n)(x_n - x_*) + \epsilon_n(T_n x_n - x_*)\|$$

$$+a_n\|(1-\epsilon_n)(z_n - x_*) + \epsilon_n(T_n z_n - x_*)\| + \|\tilde{e}_n\|$$

$$\leq (1-a_n)(1-\epsilon_n)\|x_n - x_*\| + (1-a_n)\epsilon_n\|T_n x_n - x_*\|$$

$$+a_n(1-\epsilon_n)\|z_n - x_*\| + a_n\epsilon_n\|T_n z_n - x_*\| + \|\tilde{e}_n\|$$

$$\leq (1-a_n)(1-\epsilon_n)\|x_n - x_*\| + (1-a_n)\epsilon_n\|x_n - x_*\|$$

$$+a_n(1-\epsilon_n)\|z_n - x_*\| + a_n\epsilon_n\|z_n - x_*\| + \|\tilde{e}_n\|$$

$$\leq (1-a_n)\|x_n - x_*\| + a_n\|z_n - x_*\| + \|\tilde{e}_n\| \tag{5.8}$$

olur. (5.7)'de (5.8)'i kullanarak,

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq (1-a_n)\|x_n - x_*\| + a_n\|z_n - x_*\| + \|\tilde{e}_n\| + \|e_n\| \tag{5.9}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yine, her n için $T_n x_* = x_*$ olduğunu kullanarak,

$$\|z_n - x_*\| = \left\|(1-b_n)x_n + b_n\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\big) + \tilde{\tilde{e}}_n - x_*\right\|$$

$$\leq (1-b_n)\|x_n - x_*\| + b_n\|(1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n - x_*\| + \left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|$$

$$\leq (1-b_n)\|x_n - x_*\| + b_n(1-\epsilon_n)\|x_n - x_*\|$$

$$+b_n\epsilon_n\|T_n x_n - x_*\| + \left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|$$

$$\leq (1-b_n)\|x_n - x_*\| + b_n(1-\epsilon_n)\|x_n - x_*\|$$

$$+b_n\epsilon_n\|x_n - x_*\| + \left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|$$

$$= \|x_n - x_*\| + \left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\| \tag{5.10}$$

eşitsizliği bulunur. (5.9)'da (5.10)'u kullanarak,

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq (1 - a_n)\|x_n - x_*\| + a_n\left(\|x_n - x_*\| + \left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|\right) + \|\tilde{e}_n\| + \|e_n\|$$

$$\leq \|x_n - x_*\| + \left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\| + \|\tilde{e}_n\| + \|e_n\| \tag{5.11}$$

olduğunu görürüz. (5.11)'de (5.3), (5.4) ve (5.5)'i göz önüne alarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız:

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq \|x_n - x_*\| + 3\beta_n K.$$

Bu eşitsizlikte Lemma 4.1.3.2.4**'**ü kullanarak, $\{\|x_n - x_*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğunu ve her $x_* \in S$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_*\|$ nin mevcut olduğunu görürüz.

2. Adım: $\omega_w(x_n) \subset S$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için Lemma 4.1.3.2.2**'**yi kullanacağız. İlk olarak ispatın bu kısmı için aşağıdakileri hesaplayalım:

Her n için T_n'nin genişlemeyen dönüşüm olması, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 4.1.3.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_*\|^2 &= \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n + e_n - x_*\|^2 \\
&= \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n - x_*\|^2 \\
&\qquad + 2\langle (1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n - x_*, e_n\rangle + \|e_n\|^2 \\
&\leq \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n - x_*\|^2 \\
&\qquad + 2\|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n - x_*\|\|e_n\| + \|e_n\|^2 \\
&\leq \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n - x_*\|^2 \\
&\qquad + 2[(1-\epsilon_n)\|y_n - x_*\| + \epsilon_n\|T_n y_n - x_*\|]\|e_n\| + \|e_n\|^2 \\
&\leq \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n - x_*\|^2 + 2\|y_n - x_*\|\|e_n\| + \|e_n\|^2 \\
&= \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n - x_*\|^2 + \|e_n\|(2\|y_n - x_*\| + \|e_n\|) \\
&\leq (1-\epsilon_n)\|y_n - x_*\|^2 + \epsilon_n\|T_n y_n - x_*\|^2 \\
&\qquad - \epsilon_n(1-\epsilon_n)\|T_n y_n - y_n\|^2 + \|e_n\|(2\|y_n - x_*\| + \|e_n\|) \\
&\leq \|y_n - x_*\|^2 + \|e_n\|(2\|y_n - x_*\| + \|e_n\|),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\|y_n - x_*\|^2 = \left\| \begin{matrix} (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\big) \\ +a_n\big((1-\epsilon_n)z_n + \epsilon_n T_n z_n\big) + \tilde{e}_n - x_* \end{matrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{matrix} (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n - x_*\big) \\ +a_n\big((1-\epsilon_n)z_n + \epsilon_n T_n z_n - x_*\big) + \tilde{e}_n \end{matrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{matrix} (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)(x_n - x_*) + \epsilon_n (T_n x_n - x_*)\big) \\ +a_n\big((1-\epsilon_n)(z_n - x_*) + \epsilon_n (T_n z_n - x_*)\big) \end{matrix} \right\|^2$$

$$+2\left\langle \begin{matrix} (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)(x_n - x_*) + \epsilon_n (T_n x_n - x_*)\big) \\ +a_n\big((1-\epsilon_n)(z_n - x_*) + \epsilon_n (T_n z_n - x_*)\big), \tilde{e}_n \end{matrix} \right\rangle$$
$$+\|\tilde{e}_n\|^2$$

$$= (1-a_n)\|(1-\epsilon_n)(x_n - x_*) + \epsilon_n(T_n x_n - x_*)\|^2$$
$$+a_n\|(1-\epsilon_n)(z_n - x_*) + \epsilon_n(T_n z_n - x_*)\|^2$$
$$-(1-a_n)a_n\|(1-\epsilon_n)(x_n - z_n) + \epsilon_n(T_n x_n - T_n z_n)\|^2$$
$$+2\left\| \begin{matrix} (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)(x_n - x_*) + \epsilon_n (T_n x_n - x_*)\big) \\ +a_n\big((1-\epsilon_n)(z_n - x_*) + \epsilon_n (T_n z_n - x_*)\big) \end{matrix} \right\| \|\tilde{e}_n\| + \|\tilde{e}_n\|^2$$

$$\le (1-a_n)\big((1-\epsilon_n)\|x_n - x_*\|^2 + \epsilon_n\|T_n x_n - x_*\|^2 - (1-\epsilon_n)\epsilon_n\|x_n - T_n x_n\|^2\big)$$
$$+a_n\big((1-\epsilon_n)\|z_n - x_*\|^2 + \epsilon_n\|T_n z_n - x_*\|^2 - (1-\epsilon_n)\epsilon_n\|z_n - T_n z_n\|^2\big)$$
$$-(1-a_n)a_n\|(1-\epsilon_n)(x_n - z_n) + \epsilon_n(T_n x_n - T_n z_n)\|^2$$
$$+2\big((1-a_n)\|x_n - x_*\| + a_n\|z_n - x_*\|\big)\|\tilde{e}_n\| + \|\tilde{e}_n\|^2$$

$$\le (1-a_n)\|x_n - x_*\|^2 + a_n\|z_n - x_*\|^2$$
$$+2\big((1-a_n)\|x_n - x_*\| + a_n\|z_n - x_*\|\big)\|\tilde{e}_n\| + \|\tilde{e}_n\|^2 \qquad (5.13)$$

$$\|z_n - x_*\|^2 = \left\|(1-b_n)x_n + b_n\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\big) + \tilde{\tilde{e}}_n - x_*\right\|^2$$

$$= \left\|(1-b_n)(x_n - x_*) + b_n\big((1-\epsilon_n)(x_n - x_*) + \epsilon_n(T_n x_n - x_*)\big)\right\|^2$$

$$+2\big\langle(1-b_n)(x_n - x_*) + b_n\big((1-\epsilon_n)(x_n - x_*) + \epsilon_n(T_n x_n - x_*)\big), \tilde{\tilde{e}}_n\big\rangle$$

$$+\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|^2$$

$$\leq (1-b_n)\|x_n-x_*\|^2+b_n\|(1-\epsilon_n)(x_n-x_*)+\epsilon_n(T_nx_n-x_*)\|^2$$

$$-(1-b_n)b_n{\epsilon_n}^2\|T_nx_n-x_n\|^2$$

$$+2\left\|(1-b_n)(x_n-x_*)+b_n\big((1-\epsilon_n)(x_n-x_*)+\epsilon_n(T_nx_n-x_*)\big)\right\|\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|$$
$$+\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|^2$$

$$\leq (1-b_n)\|x_n-x_*\|^2+b_n(1-\epsilon_n)\|x_n-x_*\|^2+b_n\epsilon_n\|T_nx_n-x_*\|^2$$

$$-b_n(1-\epsilon_n)\epsilon_n\|T_nx_n-x_n\|^2-(1-b_n)b_n{\epsilon_n}^2\|T_nx_n-x_n\|^2$$

$$+2\big((1-b_n)\|x_n-x_*\|+b_n(1-\epsilon_n)\|x_n-x_*\|+b_n\epsilon_n\|x_n-x_*\|\big)\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|$$

$$+\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|^2 \tag{5.14}$$

olduğu elde edilir. (5.14)'den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|z_n-x_*\|^2\leq\|x_n-x_*\|^2-b_n(1-\epsilon_n)\epsilon_n\|T_nx_n-x_n\|^2$$

$$+2\|x_n-x_*\|\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|+\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|^2. \tag{5.15}$$

Eğer (5.15) ve (5.13)'ü (5.12)'de yerine yazarsak,

$$\|x_{n+1}-x_*\|^2\leq(1-a_n)\|x_n-x_*\|^2$$

$$+a_n\begin{bmatrix}\|x_n-x_*\|^2-b_n(1-\epsilon_n)\epsilon_n\|T_nx_n-x_n\|^2\\+2\|x_n-x_*\|\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|+\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|^2\end{bmatrix}$$

$$+2\big((1-a_n)\|x_n-x_*\|+a_n\|z_n-x_*\|\big)\|\tilde{e}_n\|+\|\tilde{e}_n\|^2$$

$$+\|e_n\|(2\|y_n-x_*\|+\|e_n\|)$$

$$\leq\|x_n-x_*\|^2-a_nb_n(1-\epsilon_n)\epsilon_n\|x_n-T_nx_n\|^2$$

$$+a_n\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|\big(2\|x_n-x_*\|+\left\|\tilde{\tilde{e}}_n\right\|\big)$$

$$+\|\tilde{e}_n\|\big(2\big((1-a_n)\|x_n-x_*\|+a_n\|z_n-x_*\|\big)+\|\tilde{e}_n\|\big)$$

$$+\|e_n\|(2\|y_n-x_*\|+\|e_n\|) \tag{5.16}$$

eşitsizliğine ulaşırız. (5.16)'dan,

$$\|x_n - T_n x_n\|^2 \leq \frac{1}{a_n b_n (1-\epsilon_n)\epsilon_n} \begin{bmatrix} \|x_n - x_*\|^2 - \|x_{n+1} - x_*\|^2 \\ +a_n \|\tilde{\tilde{e}}_n\| \left(2\|x_n - x_*\| + \|\tilde{\tilde{e}}_n\|\right) \\ +\|\tilde{e}_n\| \left[2\left((1-a_n)\|x_n - x_*\| + a_n\|z_n - x_*\|\right) + \|\tilde{e}_n\|\right] \\ +\|e_n\|(2\|y_n - x_*\| + \|e_n\|) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

eşitsizliği elde edilir. $\frac{1}{2} < \epsilon_n < 1$, $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n < 1$ ve $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$ olduğuna dikkat edelim. $\{\|x_n - x_*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğundan, (5.8) ve (5.10)'un yardımıyla $\{\|y_n - x_*\|\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\|z_n - x_*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin de sınırlı olduğu sonucuna ulaşırız. (5.17) eşitsizliğinin her iki tarafının limitini alalım. (5.6)'yı kullanarak ve $\{\|x_n - x_*\|\}_{n=0}^{\infty}, \{\|y_n - x_*\|\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\|z_n - x_*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin sınırlı olduklarını göz önüne alarak

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0$$

olduğunu elde ederiz. Şimdi de her n için T_n'in genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde edelim:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|(1-\epsilon_n)y_n + \epsilon_n T_n y_n + e_n - x_n\| \\ &\leq (1-\epsilon_n)\|y_n - x_n\| + \epsilon_n\|T_n y_n - x_n\| + \|e_n\| \\ &\leq (1-\epsilon_n)\|y_n - x_n\| \\ &\quad +\epsilon_n(\|T_n y_n - T_n x_n\| + \|T_n x_n - x_n\|) + \|e_n\| \\ &\leq (1-\epsilon_n)\|y_n - x_n\| \\ &\quad +\epsilon_n(\|y_n - x_n\| + \|T_n x_n - x_n\|) + \|e_n\| \\ &= \|y_n - x_n\| + \epsilon_n\|T_n x_n - x_n\| + \|e_n\| \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \|y_n - x_n\| &= \left\| \begin{matrix} (1-a_n)\left((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\right) \\ +a_n\left((1-\epsilon_n)z_n + \epsilon_n T_n z_n\right) + \tilde{e}_n - x_n \end{matrix} \right\| \\ &\leq (1-a_n)\left\|\left((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_n T_n x_n\right) - x_n\right\| \\ &\quad +a_n\left\|\left((1-\epsilon_n)z_n + \epsilon_n T_n z_n\right) - x_n\right\| + \|\tilde{e}_n\| \end{aligned}$$

$$\leq (1-a_n)\epsilon_n\|T_nx_n - x_n\| + a_n(1-\epsilon_n)\|z_n - x_n\|$$
$$+a_n\epsilon_n\|T_nz_n - x_n\| + \|\tilde{e}_n\|$$
$$\leq (1-a_n)\epsilon_n\|T_nx_n - x_n\| + a_n(1-\epsilon_n)\|z_n - x_n\|$$
$$+a_n\epsilon_n\|T_nz_n - z_n\| + a_n\epsilon_n\|z_n - x_n\| + \|\tilde{e}_n\|$$
$$\leq (1-a_n)\epsilon_n\|T_nx_n - x_n\|$$
$$+a_n\|z_n - x_n\| + a_n\epsilon_n\|T_nz_n - z_n\| + \|\tilde{e}_n\| \tag{5.19}$$

$$\|T_nz_n - z_n\| \leq \|T_nz_n - T_nx_n\| + \|T_nx_n - z_n\|$$
$$\leq \|z_n - x_n\| + \left\| T_nx_n - \begin{pmatrix} (1-b_n)x_n \\ +b_n\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_nT_nx_n\big) + \tilde{\tilde{e}}_n \end{pmatrix} \right\|$$
$$\leq \|z_n - x_n\| + \|\tilde{\tilde{e}}_n\| + \left\| \begin{matrix} T_nx_n \\ -\Big((1-b_n)x_n + b_n\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_nT_nx_n\big)\Big) \end{matrix} \right\|$$
$$= \|z_n - x_n\| + (1-b_n\epsilon_n)\|T_nx_n - x_n\| + \|\tilde{\tilde{e}}_n\| \tag{5.20}$$

ve

$$\|z_n - x_n\| = \left\|(1-b_n)x_n + b_n\big((1-\epsilon_n)x_n + \epsilon_nT_nx_n\big) + \tilde{\tilde{e}}_n - x_n\right\|$$
$$= b_n\epsilon_n\|T_nx_n - x_n\| + \|\tilde{\tilde{e}}_n\|. \tag{5.21}$$

(5.21)'i (5.20)'de yerine yazarsak

$$\|T_nz_n - z_n\| \leq b_n\epsilon_n\|T_nx_n - x_n\| + (1-b_n\epsilon_n)\|T_nx_n - x_n\| + \|\tilde{\tilde{e}}_n\| + \|\tilde{\tilde{e}}_n\|$$
$$= \|T_nx_n - x_n\| + 2\|\tilde{\tilde{e}}_n\| \tag{5.22}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_nx_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|\tilde{\tilde{e}}_n\| = 0$ olduğunu kullanarak $\lim_{n\to\infty}\|T_nz_n - z_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|z_n - x_n\| = 0$ olduğunu buluruz. (5.19) eşitsizliğinin her iki tarafının limitini aldığımızda, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_nx_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|T_nz_n - z_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|z_n - x_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|\tilde{e}_n\| = 0$ eşitliklerini kullanarak $\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$ elde ederiz. (5.18)'in her iki tarafının limitini aldığımızda ise $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_nx_n\| = 0$,

$\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|e_n\| = 0$ olduğunu kullanarak $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0$ olduğunu elde ederiz. Artık $\omega_w(x_n) \subset S$ olduğunu gösterebiliriz. $x_* \in \omega_w(x_n)$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin x_*'e zayıf yakınsak bir $\left\{x_{n_j}\right\}_{n=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Ayrıca $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlı bir dizi olduğu için yakınsak bir alt diziye sahiptir. Dolayısıyla, $\left\{\gamma_{n_j}\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$'nin γ'ya yakınsak bir alt dizisi olarak düşünebiliriz. $T = P_C(I - \gamma\nabla f)$ olsun. $T = P_C(I - \gamma\nabla f)$ dönüşümünün bir genişlemeyen dönüşüm olduğu açıktır. Üçgen eşitsizliği, P_C'nin genişlemeyen dönüşüm olması ve ∇f'nin L −Lipschitzian olduğu gerçeği ile

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\right\| &\leq \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|x_{n_{j+1}} - Tx_{n_j}\right\| \\
&\leq \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| \\
&\quad + \left\|P_C\begin{pmatrix} y_{n_j} + \beta_{n_j}v_{n_j} \\ -\gamma_{n_j}\nabla f\left(y_{n_j} + \beta_{n_j}v_{n_j}\right)\end{pmatrix} - P_C\left(x_{n_j} - \gamma\nabla f(x_{n_j})\right)\right\| \\
&\leq \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|\begin{matrix} y_{n_j} + \beta_{n_j}v_{n_j} - \gamma_{n_j}\nabla f\left(y_{n_j} + \beta_{n_j}v_{n_j}\right) \\ -x_{n_j} + \gamma\nabla f(x_{n_j})\end{matrix}\right\| \\
&\leq \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|y_{n_j} - x_{n_j}\right\| + \beta_{n_j}\left\|v_{n_j}\right\| \\
&\quad + \left\|\gamma_{n_j}\nabla f\left(y_{n_j} + \beta_{n_j}v_{n_j}\right) - \gamma\nabla f(x_{n_j})\right\| \\
&\leq \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|y_{n_j} - x_{n_j}\right\| + \beta_{n_j}\left\|v_{n_j}\right\| \\
&\quad + \gamma_{n_j}\left\|\nabla f\left(y_{n_j} + \beta_{n_j}v_{n_j}\right) - \nabla f(x_{n_j})\right\| + \left|\gamma_{n_j} - \gamma\right|\left\|\nabla f(x_{n_j})\right\| \\
&\leq \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|y_{n_j} - x_{n_j}\right\| + \beta_{n_j}\left\|v_{n_j}\right\| \\
&\quad + \gamma_{n_j}L\left\|y_{n_j} + \beta_{n_j}v_{n_j} - x_{n_j}\right\| + \left|\gamma_{n_j} - \gamma\right|\left\|\nabla f(x_{n_j})\right\| \\
&\leq \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|y_{n_j} - x_{n_j}\right\| + \beta_{n_j}\left\|v_{n_j}\right\|
\end{aligned}$$

$$+\gamma_{n_j}L\left[\left\|y_{n_j}-x_{n_j}\right\|+\beta_{n_j}\left\|v_{n_j}\right\|\right]+\left|\gamma_{n_j}-\gamma\right|\left\|\nabla f(x_{n_j})\right\|$$

$$=\left\|x_{n_j}-x_{n_{j+1}}\right\|+(\gamma_{n_j}L+1)\left\|y_{n_j}-x_{n_j}\right\|+(\gamma_{n_j}L+1)\,\beta_{n_j}\left\|v_{n_j}\right\|$$

$$+\left|\gamma_{n_j}-\gamma\right|\left\|\nabla f(x_{n_j})\right\|$$

$$\leq\left\|x_{n_j}-x_{n_{j+1}}\right\|+(\gamma_{n_j}L+1)\left\|y_{n_j}-x_{n_j}\right\|+(\gamma_{n_j}L+1)\,\beta_{n_j}\mathrm{K}$$

$$+\left|\gamma_{n_j}-\gamma\right|\left\|\nabla f(x_{n_j})\right\| \tag{5.23}$$

eşitsizliği elde edilir. $\{\|x_n-x_*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin sınırlılığını ve ∇f'nin L −Lipschitzian olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned}\left\|\nabla f(x_{n_j})\right\| &= \left\|\nabla f(x_{n_j})-\nabla f(x_*)+\nabla f(x_*)\right\|\\ &\leq \left\|\nabla f(x_{n_j})-\nabla f(x_*)\right\|+\|\nabla f(x_*)\|\\ &\leq L\left\|x_{n_j}-x_*\right\|+\|\nabla f(x_*)\|\\ &\leq N\end{aligned}$$

olacak şekilde bir N reel sayısının olduğunu görürüz.

(5.23)'in her iki tarafının limitini alalım, $\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$, $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$ ve $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ olduğunu kullanarak $x_{n_j}-Tx_{n_j}\to 0$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla, $x_{n_j}\rightharpoonup x_*$ iken $x_{n_j}-Tx_{n_j}\to 0$ olur. Lemma 4.1.3.2.2.'den, $x_*\in F_T$'dir. $F_T=S$ olduğundan $x_*\in S$'dir.

1.Adım ve 2. Adım'da $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin Lemma 4.1.3.2.3'ün şartlarını sağladığı gösterilmiştir. Bu nedenle $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi S'deki bir noktaya zayıf yakınsar.

Sonsuz Boyutlu Bir Hilbert Uzayında Bir Örnek

Sonlu boyutlu normlu uzaylarda zayıf ve güçlü yakınsaklığın birbirine denk olduklarını biliyoruz. Sonsuz boyutlu normlu uzaylarda ise zayıf yakınsaklık güçlü yakınsaklıktan daha geneldir. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse, güçlü yakınsak bir dizi, zayıf yakınsaktır fakat zayıf yakınsak bir dizi güçlü yakınsak olmayabilir. Ayrıca her daraltan dönüşümünün aynı zamanda bir genişlemeyen dönüşüm olduğunu biliyoruz. Eğer ∇f kuvvetli monoton ve Lipschtzian bir dönüşüm ise, $P_C(I-\gamma\nabla f)$ dönüşümü bir daraltan dünüşüm olacağından Banach daraltan dönüşüm teoremine göre $P_C(I-\gamma\nabla f)$'nin bir tek sabit noktası vardır ve (2.2) algoritması (2.1)'in bir çözümüne kuvvetli yakınsak olacaktır. Eğer ∇f kuvvetli monoton değilse, bu durumda $P_C(I-\gamma\nabla f)$ daraltan olmayan bir genişlemeyen dönüşüm olacaktır. Bir genişlemeyen dönüşüm Picard tipli bir iteratif algoritma için sabit noktaya güçlü yakınsamayabileceğinden dolayı, f'yi $P_C(I-\gamma\nabla f)$'yi genişlemeyen dönüşüm yapacak şekilde seçerek üstünleştirilmiş (5.1) algortimasının zayıf yakınsaklığını çalışacağız. Bunun için [43]'de Example 2'de yer alan f fonksiyonunu ele alacağız. Ele alınan bu f fonksiyonu yardımıyla, Teorem 5.1'in şartlarının sağlanması durumunda, (5.1) ile verilen üstünleştirimliş algoritmanın (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bunu yaparken aşağıdaki teoremi kullanacağız.

Teorem 5.2. $1<p<\infty$ için,

$$l_p=\left\{x=(x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots):\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p<\infty \text{ ve her } n \text{ için } x_n\in\mathbb{R}\right\}$$

olsun. l_p'de $x_n=\left(\alpha_0^{(n)},\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\alpha_2^{(n)},\cdots\right)$ dizisini göz önüne alalım. $x=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots)\in l_p$ olsun. Bu takdirde $x_n\rightharpoonup x$ olması için gerek ve yeter şartlar,

- **i.** $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır, yani, her n için $\|x_n\|\le N$ olacak şekilde bir $N\ge 0$ vardır.
- **ii.** Her bir i için, $n\to\infty$ iken $\alpha_i^{(n)}\to\alpha_i$'dir [20].

Örnek 5.1. $H = l_2 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots): \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ ve her n için $x_n \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ iç çarpımdan üretilen norm ile H bir reel Hilbert uzayıdır. $C = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots): \|x\| \leq 1\}$ kümesi H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesidir. [43]'de C üzerinde

$$f((x_0, x_1, x_2, \ldots)) = \|(x_1, x_2, \ldots)\|^2$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunu H üzerinde tanımlayalım. Yani $f: H \to \mathbb{R}$,

$$f((x_0, x_1, x_2, \ldots)) = \|(x_1, x_2, \ldots)\|^2$$

şeklinde tanımlana fonksiyonu göz önüne alalım. Lemma 4.1.3.2.1'i kullanarak, aşağıdaki gibi f'nin bir konveks fonksiyon olduğunu görürüz:

$$f(\eta x + (1-\eta)y) = f((\eta x_1 + (1-\eta)y_1, \eta x_2 + (1-\eta)y_2, \eta x_3 + (1-\eta)y_3, \ldots))$$

$$= \|\eta(x_1, x_2, \ldots) + (1-\eta)(y_1, y_2, \ldots)\|^2$$

$$= \eta\|(x_1, x_2, \ldots)\|^2 + (1-\eta)\|(y_1, y_2, \ldots)\|^2 - \eta(1-\eta)\|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots)\|^2$$

$$\leq \eta\|(x_1, x_2, \ldots)\|^2 + (1-\eta)\|(y_1, y_2, \ldots)\|^2$$

$$= \eta f((x_0, x_1, x_2, \ldots)) + (1-\eta) f((y_0, y_1, y_2, \ldots))$$

$S = \{(a, 0, 0, \ldots): a \in [-1, 1]\}$ kümesi, f fonksiyonunun C'deki minimumlarının kümesidir. Ayrıca, herhangi bir karışıklığa meydan vermemek için, l_2'deki bir diziyi $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterelim.

1. Adım: $P_C(I - \gamma \nabla f)$ dönüşümünün daraltan olmayan bir genişlemeyen dönüşüm olduğunu göstereceğiz. Bunun için sırasıyla aşağıdaki aşamaları yapalım:

i. f, Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $\nabla f(x) = (0,2x_1, 2x_2, \dots)$'dir [43]. Gerçekten, eğer f, bir x noktasında diferansiyellenebilirse,

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{|f(x+y) - f(x) - \langle y, j\rangle|}{\|y\|} = 0 \tag{5.24}$$

olacak şekilde bir $j = \nabla f \in l_2$ vardır. $t > 0$ olmak üzere herhangi bir $z \neq (0,0,0,\dots)$ için $y = tz$ alalım. (5.24)'ü kullanarak,

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\|(x_1 + tz_1, x_2 + tz_2, x_3 + tz_3, \dots)\|^2 - \|(x_1, x_2, x_3, \dots)\|^2 - t\langle z, j\rangle|}{t\|z\|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|\sum_{n=1}^{\infty} [(x_n + tz_n)^2 - x_n^2] - t\langle z, j\rangle|}{t\|z\|} \tag{5.25}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|\sum_{n=1}^{\infty} [t^2 z_n^2 + 2t x_n z_n] - t\langle z, j\rangle|}{t\|z\|}$$

$$= 0$$

olduğu elde edilir. (5.25)'ten, f'nin $x = (x_0, x_1, \dots)$'deki Fréchet türevi $\nabla f(x) = (0,2x_1, 2x_2, \dots)$ olarak hesaplanır [43].

ii. ∇f'nin kuvvetli monoton olmadığını gösterelim:

Eğer ∇f kuvvetli monoton ise, her $x, y \in C$ için,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle = \langle (0,2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4, \dots) - (0,2y_1, 2y_2, 2y_3, 2y_4, \dots), x - y\rangle$$

$$\geq \eta \|x - y\|^2 \tag{5.26}$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı var olmalıdır. Herhangi bir $\eta > 0$ için, $x = (1,0,0,0,0, \dots)$ ve $y = (-1,0,0,0,0,0, \dots)$ alarak,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle = \langle (0,0,0,0,\dots) - (0,0,0,0,\dots), (2,0,0,0\dots) \rangle$$

$$= 0 \leq \eta \|x - y\|^2 = 4\eta$$

olduğunu görürüz. Bu durumda, (5.26) sağlanmaz. Böylece ∇f, kuvvetli monoton değildir.

iii. ∇f, $2-$Lipschitzian bir dönüşümdür. Çünkü her $x, y \in C$ için,

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 &= \|(0, 2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4, \dots) - (0, 2y_1, 2y_2, 2y_3, 2y_4, \dots)\|^2 \\
&= \|(0, 2x_1 - 2y_1, 2x_2 - 2y_2, 2x_3 - 2y_3, \dots)\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2x_n - 2y_n)^2 \\
&= 4\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \leq 4\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \\
&= 4\|x - y\|^2
\end{aligned}$$

dir.

iv. $P_C(I - \gamma_n \nabla f)$ bir daraltan dönüşüm değildir. Eğer $P_C(I - \gamma_n \nabla f)$ bir daraltan dönüşüm olsaydı, her $x, y \in C$ için

$$\|P_C(I - \gamma_n \nabla f)x - P_C(I - \gamma_n \nabla f)y\| \leq \delta \|x - y\|. \tag{5.27}$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0,1)$ sayısını bulmamız gerekirdi. $P_C : H \to C$'nin

$$P_C(x_0, x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} (x_0, x_1, x_2, \dots), & (x_0, x_1, x_2, \dots) \in C \\ \dfrac{1}{\|x\|}(x_0, x_1, x_2, \dots), & (x_0, x_1, x_2, \dots) \notin C \end{cases} \tag{5.28}$$

şeklinde olduğunu göz önüne alalım. $x = \left(\frac{1}{2}, 0,0,0, \dots\right)$ ve $y = \left(-\frac{1}{2}, 0,0, \dots\right)$ alarak ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $\gamma_n < \frac{2}{L} = \frac{2}{2} = 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için

$$\|P_C(I - \gamma_n \nabla f)x - P_C(I - \gamma_n \nabla f)y\|$$

$$= \left\| P_C\left(\left(\frac{1}{2}, 0,0, \dots\right) - \gamma_n(0,0,0, \dots)\right) - P_C\left(\left(-\frac{1}{2}, 0,0, \dots\right) - \gamma_n(0,0, \dots)\right) \right\|$$

$$= \|(1,0,0, \dots)\| = 1,$$

ve

$$\delta\|x - y\| = \delta$$

olduğunu görürüz. (5.27)'yi sağlayan bir $\delta \in [0,1)$ sayısının bulunamayacağı açıktır. Bu yüzden, T bir daraltan dönüşüm değildir.

2. Adım: (5.1) ile verilen üstünleştirilmiş algoritmanın (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğunu gösterelim:

$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, l_2'de bir dizi olduğundan, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerin bir dizisi olacaktır.

$v^{(n)} = \frac{1}{(n+2)^{k+1}}$, $k = 0,1,2, \dots$ seçelim ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini daha açık bir şekilde yazalım:

$$v^{(n)} = (v_n^0, v_n^1, v_n^2, \dots, v_n^k, \dots) = \left(\frac{1}{(n+2)}, \frac{1}{(n+2)^2}, \frac{1}{(n+2)^3}, \dots, \frac{1}{(n+2)^{k+1}}, \dots\right).$$

$\left\{v^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlı bir dizidir, çünkü her n için

$$\left\|v^{(n)}\right\|_2^2 = \left\|\frac{1}{(n+2)^{k+1}}\right\|_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{2k+2}} = \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((n+2)^2)^k}$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(n+2)^2}} = \frac{1}{n^2 + 2n + 3} < 1$$

dir. $\beta_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$ olduğu açıktır.

Şimdi Teorem 5.1'in i. şartını sağlayan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri için $a_n = \frac{2n+1}{10n+3}$ ve $b_n = \frac{n+1}{n+2}$ olsun. (5.1) algoritmasında her n için $\gamma_n = \frac{1}{2}$ ve $\gamma_n = \frac{1}{3}$ olacak şekilde Teorem 5.1'in ii. şartını sağlayan farklı iki $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi alarak, (5.1)'in yakınsaklık davranışını inceleyelim. Bu durumda (5.1) iteratif algoritması için sırasıyla aşağıdaki iteratif algoritmaları elde ederiz:

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = P_C\left((y_n^0 + \beta_n v_n^0, 0,0,0, \dots)\right) \\ y^{(n)} = \left(1 - \dfrac{2n+1}{10n+3}\right) P_C\left((x_n^0 + \beta_n v_n^0, 0,0,0, \dots)\right) \\ + \dfrac{2n+1}{10n+3} P_C\left((z_n^0 + \beta_n v_n^0, 0,0,0, \dots)\right) \\ z^{(n)} = \left(1 - \dfrac{n+1}{n+2}\right)(x_n^0 + \beta_n v_n^0, x_n^1 + \beta_n v_n^1, \dots) \\ + \dfrac{n+1}{n+2} P_C\left((x_n^0 + \beta_n v_n^0, 0,0,0, \dots)\right) \end{cases} \tag{5.29}$$

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = P_C\left(\left(y_n^0 + \beta_n v_n^0, \dfrac{1}{3}(y_n^1 + \beta_n v_n^1), \dfrac{1}{3}(y_n^2 + \beta_n v_n^2), \dots\right)\right) \\ y^{(n)} = \left(1 - \dfrac{2n+1}{10n+3}\right) P_C\left(\left(x_n^0 + \beta_n v_n^0, \dfrac{1}{3}(x_n^1 + \beta_n v_n^1), \dfrac{1}{3}(x_n^2 + \beta_n v_n^2), \dots\right)\right) \\ + \dfrac{2n+1}{10n+3} P_C\left(\left(z_n^0 + \beta_n v_n^0, \dfrac{1}{3}(z_n^1 + \beta_n v_n^1), \dfrac{1}{3}(z_n^2 + \beta_n v_n^2), \dots\right)\right) \\ z^{(n)} = \left(1 - \dfrac{n+1}{n+2}\right)(x_n^0 + \beta_n v_n^0, x_n^1 + \beta_n v_n^1, x_n^2 + \beta_n v_n^2, \dots) \\ + \dfrac{n+1}{n+2} P_C\left(\left(x_n^0 + \beta v_n^0, \dfrac{1}{3}(x_n^1 + \beta_n v_n^1), \dfrac{1}{3}(x_n^2 + \beta_n v_n^2), \dots\right)\right) \end{cases} \tag{5.30}$$

Biri C kümesinden, biri de C kümesinin tümleyeninden olmak üzere

$$x^{(0)} = (x_0^0, x_0^1, x_0^2, \dots, x_n^k, \dots) = \begin{cases} 5, k = 0 \\ \dfrac{1}{k}, k \neq 0 \end{cases} = \left(5,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)$$

ve

$$x^{(0)} = (x_0^0, x_0^1, x_0^2, \dots, x_n^k, \dots) = \left(\frac{1}{10}, 0,0,0, \dots\right)$$

şeklinde farklı iki başlangıç noktası alalım. (5.29) ve (5.30) iteratif algoritmalarının yakınsaklık davranışları aşağıda verilen çizelgedeki gibidir:

Çizelge 5.1. (5.29) ve (5.30) iteratif algoritmalarının yakınsaklık davranışı.

İterasyon Sayısı	(5.29) iteratif algoritması	(5.30) iteratif algoritması
0	$\left(5,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right)$	$\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10^2},0,0,0,\ldots\right)$
1	$(1,0,0,0,\ldots)$	$(0.193589744,0,0,0,\ldots)$
3	$(1,0,0,0,\ldots)$	$(0.202589829,0,0,0,\ldots)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$(1,0,0,0,\ldots)$	$(0.208671563,0,0,0,\ldots)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
300	$(1,0,0,0,\ldots)$	$(0.20879244,0,0,0,\ldots)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
700	$(1,0,0,0,\ldots)$	$(0.20874294,0,0,0,\ldots)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelgeden görüleceği üzere (5.29) ve (5.30) ietratif algoritmaları Teorem 5.2'nin tüm şartlarını sağlar. Dolayısıyla (5.29) ve (5.30) algoritmaları sırasıyla S kümesinin $(1,0,0,0,\ldots)$ ve $(0.20874294,0,0,0,\ldots)$ noktalarına zayıf yakınsar.

Sonuç 5.1. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, negatif olmayan reel sayıların $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$ şartını sağlayan bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de H'de sınırlı bir dizi olsun Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

i. $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2}{\|A\|^2+\varepsilon}$,

ii. $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n < 1$ ve $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

Bu durumda,

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C\big((1-\gamma_n\varepsilon)(y_n+\beta_n v_n) - \gamma_n A^*A(y_n+\beta_n v_n) + \gamma_n A^*b\big) \\ y_n = (1-a_n)P_C\big((1-\gamma_n\varepsilon)(x_n+\beta_n v_n) - \gamma_n A^*A(x_n+\beta_n v_n) + \gamma_n A^*b)\big) \\ +a_n P_C\big((1-\gamma_n\varepsilon)(z_n+\beta_n v_n) - \gamma_n A^*A(z_n+\beta_n v_n) + \gamma_n A^*b)\big)\big) \\ z_n = (1-b_n)(x_n+\beta_n v_n) + b_n P_C\big((1-\gamma_n\varepsilon)(x_n+\beta_n v_n) - \gamma_n A^*A(x_n+\beta_n v_n) + \gamma_n A^*b)\big) \end{cases}$$

ile verilen algoritma (4.8) ile verilen problemin bir çözümüne zayıf yakınsaktır.

İspat: (4.8) ile verilen problemde $\nabla f_\varepsilon(x) = A^*(Ax-b) + \varepsilon x$ ve $L(f_\varepsilon) = \|A\|^2 + \varepsilon$ olduğunu göz önüne alınırsa, Teorem 5.1'den gösterilmek istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, negatif olmayan reel sayıların $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$ şartını sağlayan bir dizisi ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de H'de sınırlı bir dizi olsun Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

i. $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2}{\|A\|^2}$,

ii. $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n < 1$ ve $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

Bu durumda,

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C\big(y_n+\beta_n v_n - \gamma_n A^*(I-P_Q)A(y_n+\beta_n v_n)\big) \\ y_n = (1-a_n)P_C\big(x_n+\beta_n v_n - \gamma_n A^*(I-P_Q)A(x_n+\beta_n v_n)\big) \\ +a_n P_C\big(z_n+\beta_n v_n - \gamma_n A^*(I-P_Q)A(z_n+\beta_n v_n)\big) \\ z_n = (1-b_n)(x_n+\beta_n v_n) + b_n P_C\big(x_n+\beta_n v_n - \gamma_n A^*(I-P_Q)A(x_n+\beta_n v_n)\big) \end{cases}$$

ile verilen algoritma (4.9) ile verilen SFP'nin bir çözümüne zayıf yakınsaktır.

İspat: (4.9) ile verilen SFP'nin bir minimizasyon problemi olarak (4.10) biçiminde yazıldığını tezin 4.bölümünde ifade etmiştik. $\nabla f = A^{*}(I - P_Q)A$ dönüşümünün $\|A\|^2$ −Lipschitzian dönüşüm olduğunu göz önüne alarak, Teorem 5.1.'den istenen sonuç elde edilir.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde, Xu'nun ortalamalı dönüşüm yaklaşımı aracılığıyla, Ertürk ve ark. [1], konveks minimizasyon problemi için önermiş oldukları gradient projeksiyon algoritmasının üstünleştirilmiş algoritmasının sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençli olduğu, yani, orijinal algoritmanın yaptığı gibi konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğu gösterildi. İspatladığımız teoremin çeşitli uygulamalarda kullanılan SFP ve lineer ters problemler için uygulaması verildi. Sonsuz boyutlu bir reel Hilbert uzayında, ele aldığımız üstünleştirilmiş algoritmanın zayıf yakınsaklığı bir örnek üzerinde gösterildi. (2.1) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsaklığını çalıştığımız bu gradient projeksiyon algoritmasının üstünleştirilmiş versiyonunu modifiye ederek konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne hangi koşullar altında güçlü yakınsak olduğu araştırılabilir. Ayrıca, iterasyonların üstünleştirilmiş versiyonunun daha genel formlarının sınırlı pertürbasyon dirençliliği araştırılmaya değer bir konudur.

KAYNAKLAR

[1] M. Erturk, F. Gursoy, Q. H. Ansari, and V. Karakaya, “Picard type iterative method with applications to minimization problems and split feasibility problems,” *J. Nonlinear Convex Anal.*, 2020.

[2] Y. Censor, R. Davidi, and G. T. Herman, “Perturbation resilience and superiorization of iterative algorithms,” *Inverse Probl.*, 2010, doi: 10.1088/0266-5611/26/6/065008.

[3] W. Jin, Y. Censor, and M. Jiang, “Bounded perturbation resilience of projected scaled gradient methods,” *Comput. Optim. Appl.*, vol. 63, no. 2, pp. 365–392, 2016, doi: 10.1007/s10589-015-9777-x.

[4] R. Davidi, G. T. Herman, and Y. Censor, “Perturbation-resilient block-iterative projection methods with application to image reconstruction from projections,” *Int. Trans. Oper. Res.*, vol. 16, no. 4, pp. 505–524, 2009, doi: 10.1111/j.1475-3995.2009.00695.x.

[5] R. Davidi, R. W. Schulte, Y. Censor, and L. Xing, “Fast superiorization using a dual perturbation scheme for proton Computed Tomography,” 2012.

[6] E. S. Levitin and B. T. Polyak, “Constrained minimization methods,” *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1966, doi: 10.1016/0041-5553(66)90114-5.

[7] H. K. Xu, “Averaged Mappings and the Gradient-Projection Algorithm,” *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 150, no. 2, pp. 360–378, 2011, doi: 10.1007/s10957-011-9837-z.

[8] G. T. Herman, E. Garduño, R. Davidi, and Y. Censor, “Superiorization: An optimization heuristic for medical physics,” *Med. Phys.*, vol. 39, no. 9, pp. 5532–5546, 2012, doi: 10.1118/1.4745566.

[9] G. T. Herman, “Superiorization for image analysis,” *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*, vol. 8466 LNCS, pp. 1–7, 2014, doi: 10.1007/978-3-319-07148-0_1.

[10] Y. Censor, “Weak and strong superiorization: Between feasibility-seeking and minimization,” *Analele Stiint. ale Univ. Ovidius Constanta, Ser. Mat.*, 2015, doi: 10.1515/auom-2015-0046.

[11] H. He and H. K. Xu, “Perturbation resilience and superiorization methodology

of averaged mappings," *Inverse Probl.*, vol. 33, no. 4, 2017, doi: 10.1088/1361-6420/33/4/044007.

[12] H.-K. Xu, "Bounded Perturbation Resilience And Superiorization Techniques For Projected Scaled Gradient Method," *Inverse Probl.*, vol. 33, no. 4, p. 19, 2017, doi: 10.1080/02331934.2019.1686631.

[13] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*. 1978.

[14] Ö. Çakar, "Fonksiyonel Analize Giriş 1," no. 13, 2007.

[15] I. J. Maddox, *Elements Of Functional Analysis*, Second Edi. Cambridge University Press, 1988.

[16] İ. Karaca, *Topoloji Ders Notları*. 2018.

[17] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Erzurum, 1987.

[18] R. P. Agarwal, D. O'Regan, and D. R. Sahu, "Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings," *J. Nonlinear Convex Anal.*, vol. 8, no. 1, pp. 61–79, 2007, doi: 10.1016/0022-247X(91)90245-U.

[19] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics*. 2007.

[20] D. R. Sahu, D. O'Regan, and R. P. Agarwal, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*. 2009.

[21] S. Banach, "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales," *Fundam. Math.*, vol. 3, no. 1, pp. 133–181, 1922.

[22] M. A. Krasnoseslkij, "Two remarks on the method of successive approximations," *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 10, pp. 123–127, 1955.

[23] W. R. Mann, "Mean Value Methods in Iteration," *Am. Math. Soc.*, vol. 4, no. 3, pp. 506–510, 1953.

[24] S. Ishikawa, "Fixed Points By A New Iteration Method," *Am. Math. Soc.*, vol. 44, no. 1, pp. 147–150, 1974.

[25] M. A. Noor, "New approximation schemes for general variational inequalities," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 251, no. 1, pp. 217–229, 2000, doi: 10.1006/jmaa.2000.7042.

[26] F. Gürsoy and V. Karakaya, "A Picard-S Hybrid Type İteration Method For Solving A Differential Equation With Retarded Argument," pp. 1–16, 2014,

[Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1403.2546.

[27] F. Gürsoy, “A Picard-S iterative method for approximating fixed point of weak-contraction mappings,” *Filomat*, 2016, doi: 10.2298/FIL1610829G.

[28] A. Cegielski, *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*. 2012.

[29] Q. H. Ansari, *Nonlinear Analysis: Approximation Theory, Optimization and Applications*. 2014.

[30] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: III: Variational Methods and Optimization*. 1985.

[31] C. Byrne, “A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction,” vol. 103, 2004, doi: 10.1088/0266-5611/20/1/006.

[32] P. L. Combettes, *Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators*, vol. 53, no. 5–6. 2004.

[33] C. Martinez-Yanes and H. K. Xu, “Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes,” *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, vol. 64, no. 11, pp. 2400–2411, 2006, doi: 10.1016/j.na.2005.08.018.

[34] A. Nagurney, *Network Economics: A Variational İnequality Approach*, Revised Se. Boston, MA: Springer US, 1999.

[35] Q. H. Ansari, *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization*. World Education, 2011.

[36] J.-B. Baillon and G. Haddad, “Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés etn-cycliquement monotones,” *Isr. J. Math.*, vol. 26, no. 2, pp. 137–150, Jun. 1977, doi: 10.1007/BF03007664.

[37] L.-C. Ceng, S.-M. Guu, and J.-C. Yao, “Hybrid methods with regularization for minimization problems and asymptotically strict pseudocontractive mappings in the intermediate sense,” 2013, doi: 10.1007/s10898-013-0087-5.

[38] Z. Opial, “Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings,” *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 73, no. 4, pp. 591–597, 1967, doi: 10.1090/S0002-9904-1967-11761-0.

[39] B. T. Polyak, *Introduction To Optimization*. New York: Optimization

Software, 1987.

[40] Y. Censor and T. Elfving, "A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space," *Numer. Algorithms*, vol. 8, pp. 221–239, 1994.

[41] Y. Censor, T. Elfving, N. Kopf, and T. Bortfeld, "The multiple-sets split feasibility problem and its," *Inverse Probl.*, vol. 2071, no. 21, pp. 2071–2084, 2005, doi: 10.1088/0266-5611/21/6/017.

[42] H.-K. Xu, "A variable Krasnosel'skii – Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem," *Inverse Probl.*, no. 22, pp. 2021–2034, 2006, doi: 10.1088/0266-5611/22/6/007.

[43] F. Gürsoy, M. Ertürk, and M. Abbas, "A Picard-type iterative algorithm for general variational inequalities and nonexpansive mappings," *Numer. Algorithms*, vol. 83, no. 3, pp. 867–883, 2020, doi: 10.1007/s11075-019-00706-w.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ahmet SALKIM

Doğum Yeri : Kayseri

Doğum Tarihi : 08.07.1987

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ahmetsalkim@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Marmara Üniversitesi	2014
Lise	Fen Bilimleri	Aksaray Fen Lisesi	2004