Adıyaman University Journal of Educational Sciences, 2016, 6(2), 198-230

AUJES

Adıyaman University Journal of Educational Sciences

ISSN:2149-2727
DOI:

Examining of Secondary School Students' Transition to Algebra in the context of Making Properties in Natural Number System Visible via Generalization

Yaşar AKKAN[1*] **Adnan BAKİ[2]**

[1]*Gümüşhane University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Mathematical Engineering, Gümüşhane, Turkey.*
[2]*Karadeniz Technical University Fatih Faculty of Education, Secondary School Science and Mathematics Education Department, Trabzon, Turkey.*

ARTICLE INFO

Article History:
Received 22.08.2016
Received in revised form 14.11.2016
Accepted 11.12.2016
Available online 30.12.2016

ABSTRACT

The purpose of this study is to examine secondary school students' transition from arithmetic to algebra in the context of making properties in natural number system visible via generalization. The cross-sectional study, which is one of the developmental research methods, was used in this study. Open-ended written tests were applied to 285 secondary school students from different grades (5th-8th Grades), and 24 students were interviewed clinically. Three questions and additional other questions were prepared to collect the data for this study in which the transition from arithmetic to algebra was investigated; and the data were assessed according to the characterization table prepared. In addition, the changes and developments in the transition process of the students of different grades from arithmetic to algebra data have been investigated with the clinical interview. As a conclusion, it has been observed that as the educational level of the students increase, the transition from arithmetic to algebra changed and developed in a positive manner in the context of generalization of the properties of the natural number system; however, this change and development has been realized at a little rate. There is not a clear differentiation between the 5th and 6th and between the 6th and 7th graders; and the most distinctive change and development among the educational levels has been observed between the 7th and 8th Graders.

Keywords:
Transition to algebra, Commutative, associative and distributive properties, Natural number system, Generalization, Secondary school students

Extended Abstract

It is important to reveal the changes in the students during the transition process from arithmetic to algebra about generalization. Because the basic ideas of algebra -as a generalized arithmetic- must be perceived by students with activities in the first years of the primary education, and must be taught until the end of the secondary education. In this context,

*Corresponding author's address: Gümüşhane University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Mathematical Engineering, Gümüşhane
e-mail: akkanyasar61@hotmail.com

the aim of the study is to investigate secondary school students' transition from arithmetic to algebra in the context of making properties in natural number system visible via generalization.

In this study, the cross-sectional method, which is one of the developmental research methods, was used. In cross-sectional studies, simultaneous studies may be conducted that might be identical to the sampling in its lifetime instead of revealing the development level of the same topic with a sampling. The sampling of the study consisted of 5th-8th grade students studying at a city in Eastern Black Sea Region of Turkey. The written tests consisting of open-ended questions were applied to all of the students at the school except for the 24 students to whom clinical interviews were applied. The data collection tools consisted of three questions that were prepared after a review of the literature and with the help of teachers and for which the students from different educational levels could produce solutions. The viewpoints of two mathematics instructors and two mathematics teachers were asked for the written tests that consisted of open-ended questions and for the clinical interview questions; and all the language, level and coverage validity of all the questions were ensured. For the reliability of the data collection tools, half of the student papers were taken randomly and the author of the study and another researcher made encodings. At the end of the encodings, 79% conformity level was obtained between the two researchers. On the other hand, in order to reach the wealth in the viewpoints of the secondary school students in the transition process from arithmetic to algebra, the clinical interview method, which is a qualitative study method, was used. The data were assessed with the characterization tables that included the properties of arithmetic, pre-algebra and algebra that were prepared with the support of the literature.

The percentage values of the students at different educational levels that reached true generalizations (showing algebraic properties) on commutative, associative and distributive properties of the natural number system were found to be extremely lower than those of the students who could not make generalizations (who showed arithmetic properties). However, although the 5th - 8th grade students can make true generalizations about the commutative property compared to both associative and distributive properties in a better manner, the rate of the students who reached true generalizations about the distributive property is extremely lower. There might especially appear two reasons in the appearance of this result: The first one is that the students met the mathematical (arithmetical) structures that included commutative properties in an informal manner before, - for example the "$2 \times 3 = 6 = 3 \times 2$" expression in the multiplication table; and the second one is that the use of parentheses both in associative and in distributive property. Although there is a very little increase between the 5th and 6th grade students who reached generalization about this property, the increases between the 6th and 7th graders and between the 7th and 8th graders are more. However, although the increase between the 7th and 8th graders is not in the expected level, it is extremely higher than those between the other educational levels.

Two of the 5th grade students, who received clinical interviews, expressed that there is commutative and associative property in addition-multiplication; however, none of the 5th grade students could express that the multiplication had distributive property on the addition and subtraction. Since one of the students, who showed arithmetic properties among the other students, was focused on mere numerical processes and replies, s/he failed in making generalization; and student $S6_5$, who was at a good success level and who showed algebraic properties, considered only the relations between the numbers and the process methods of them; and therefore, expressed the generalizations on the commutative and associative property of the addition-multiplication in an algebraic manner. As a matter of fact, the data obtained from the written test papers of the students reveal the inadequacy of the 5th grade students on these three properties. The result obtained in our study on 5th graders is consistent with the results of other researchers. There are 4 6th grade students, who stated that there is commutative property in addition-multiplication; and there is one student, who stated that there is associative property. However, there are no students, who stated or generalized that the addition has distributive property on addition and subtraction, which is the case in 5th graders. In this context, the fact that very few students have understanding on distributive property among the 6th grade students, who start to learn the unknown and variable concepts in a formal manner, is an alarming result. Again, three 6th grade students, who showed arithmetic properties, could not make any generalizations; and Student $S12_6$, who showed algebraic property, expressed the generalizations on commutative and associative property in addition-multiplication in algebraic terms. The data on the test papers of 6th grade students and the interview data show parallelism. In addition, it is observed that 5th and 6th grade students mostly preferred expressions like "addition has the commutative property, multiplication has associative property, it has commutative property" in the sections about generalizations in test papers. This might be related with the desires of the students, who believe that they will have difficulty in using expressions with letters, to express the generalizations with words or sentences. There are three 7th grade students, who are in a better position than the 5th and 6th grade students in reaching true generalizations, and who stated that there is commutative property in addition-multiplication; two students, who stated that there is associative property; and two students, who stated that multiplication has distributive property on addition-subtraction. Student $S18_7$ expressed the generalizations about commutative, associative and distributive properties in an algebraic manner; and $S17_7$ expressed the generalization about commutative property in an algebraic manner. These students reached generalizations because they took the relations between the numbers and the processing methods of these numbers into consideration. The other students, on the other hand, failed in generalizations because they generally focused on the answers of the numerical solutions and numerical processes.

Here, very few 7th grade students, who are in a better situation in terms of mathematical experience and cognitive development, made generalizations about commutative, associative and distributive properties. In addition, the little increase about making generalizations observed among 6th and 7th graders in the answers in the interview is observed in written test paper. Among the 8th grade students, who are more successful in making generalizations than the other three graders; there are four students, who stated that there is commutative property in addition-multiplication; three students who stated that is associative property; and two students, who stated that multiplication has distributive property on addition-subtraction. $S23_8$ and $S24_8$ stated the generalizations on commutative, associative and distributive properties in an algebraic manner. It is observed in the data obtained from the test papers that 8th Grade students are more successful in making generalizations. However, the failure of last grade secondary school students in making generalization about commutative, associative and distributive properties is a negative result for their future educational processes.

In addition, it has been observed that the transition from the solutions that included arithmetic properties to solutions that included algebraic properties developed in a positive manner; however, the development in the other educational levels -except for the 7th and 8th graders- is at a very low level. Students from different educational levels made true generalizations an-on commutative property in a better manner when compared with the associative and distributive property. The number of the students, who stated that multiplication had distributive property on addition and subtraction and who made generalizations, is extremely low at all educational levels. Similarly, the number of the students, who made true generalizations on commutative property, is more than the number of the students, who made generalizations on associative and distributive property. A few of the 5th grade and 6th grade students stated that addition-multiplication had commutative and associative properties; however, none of the 5th and 6th graders could state that multiplication had distributive property on addition and subtraction. The majority of the 7th and 8th graders stated that addition-multiplication had commutative and associative property. However, the number of the 7th and 8th grade students, who stated that multiplication had distributive property on addition and subtraction is extremely low. In addition, the number of the students, who stated that multiplication had distributive property on addition and h-who made generalizations, is much more at all educational levels than the students, who stated that multiplication had distributive property on subtraction. Here, the number of the students, who stated that multiplication has distributive property on subtraction, is extremely low. As the educational level decreased, the number of the students, who stated generalizations in a verbal or written manner increased. However, although the number of the 7th and 8th grade students, who expressed generalizations in a verbal or written manner, is very few; these students mostly tried to express generalizations with letters. The students at different educational levels have similar difficulties and mistakes in generalizing the properties about the four operations.

On the other hand, some students at different educational levels stated that there are commutative and associative properties in division and subtraction operations; and some others stated that there is distributive property in division. In addition, most students from different educational levels had difficulty in producing more examples about the commutative, associative and distributive properties. Although it was asked from the students to write at least two more examples in the second part of the question, many students wrote only one example and most of these were wrong. This situation might have two reasons: The first one is the wrong use of mathematical structures in the first part of the question by the students; and the second one is the limited experiences of the students on the “equal” sign. In addition, the successful students at different educational levels are more successful in making generalization than the other students.

As a conclusion, it has been observed that as the educational levels of the students increased, the transition from arithmetic to algebra developed and changed in a positive way in terms of making generalizations on the properties in natural numbers. However, this change and development among different educational levels have been at a very low level. Although there are no clear change and development (differentiation) among 5^{th} and 6^{th}; and between 6^{th} and 7^{th} graders, the most distinctive change and development among educational levels have been detected between 7^{th} and 8^{th} graders.

ADYÜEBD

Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi

ISSN:2149-2727
DOI:

Doğal Sayı Sistemindeki Özellikleri Genelleme Yoluyla Görünür Kılma Bağlamında Ortaokul Öğrencilerinin Cebire Geçişlerinin İncelenmesi

Yaşar AKKAN[1*] **Adnan BAKİ[2]**

[1] *Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği, Gümüşhane, Türkiye*
[2] *Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü, Trabzon, Türkiye*

MAKALE BİLGİ

Makale Tarihçesi:
Alındı 22.08.2016
Düzeltilmiş hali alındı 14.11.2016
Kabul edildi 11.12.2016
Çevrimiçi yayınlandı 30.12.2016

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, doğal sayı sistemindeki bazı özellikleri genelleme yoluyla görünür kılma bağlamında farklı öğrenim seviyesindeki ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçişlerini incelemektir. Gelişimci araştırmaların bir türü olan enlemesine çalışmanın kullanıldığı bu çalışmada, farklı öğrenim seviyelerindeki 285 ortaokul (5-8.sınıf) öğrencisine açık-uçlu yazılı sınavlar uygulanmış, 24 öğrenciyle ise klinik mülakatlar yürütülmüştür. Veri toplamak amacıyla aritmetikten cebire geçişin inceleneceği bu iki konuyu içeren 3 soru ile ek sorular hazırlanmış ve elde edilen veriler hazırlanan karakterizasyon tablosuna göre değerlendirilmiştir. Ayrıca elde edilen klinik mülakat verileriyle farklı öğrenim seviyelerindeki ortaokul öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş sürecindeki değişim ve gelişimleri incelenmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça doğal sayı sistemi ile ilgili özellikleri genelleme bağlamında aritmetikten cebire geçişin olumlu yönde değiştiği ve geliştiği görülmüş, ancak bu değişim ve gelişim çok az olmuştur. Özellikle 5 ile 6 ve 6 ile 7.sınıf öğrencileri arasında çok belirgin bir farklılaşma olmamakla birlikte, öğrenim seviyeleri arasındaki en belirgin değişim ve gelişim 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasında gerçekleşmiştir.

Anahtar Kelimeler:
Cebire geçiş, Değişme, birleşme ve dağılma özellikleri, Doğal sayı sistemi, Genelleme, Ortaokul öğrencileri

Giriş

Cebir geleneksel anlamda “genelleştirilmiş aritmetik” olarak tanımlanır (Tabach ve Friedlander, 2003). Vance (1998) cebiri, genelleştirilmiş aritmetik veya aritmetiği genelleştirmek için gerekli bir dil olarak tanımlamıştır. Yani cebir genellikle sayıların, genelleştirilmiş ifadelerin sıkça ve faydalı olarak kullanıldığı bir dildir. Carpenter, Franke ve Levi (2003) genelleştirilmiş aritmetiği ise sayılarla ilgili işlemler, sayıların

[*]Sorumlu yazarın adresi: Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği, Gümüşhane.
e-posta:akkanyasar61@hotmail.com

özellikleri ve sayılar arası ilişkiler hakkında muhakeme yapma olarak ifade etmiştir. Genelleştirilmiş aritmetik, belirli sayılarla ilgili hesaplamaların ötesine geçip, aritmetikteki örüntüleri tanımlamak suretiyle aritmetiğin temelindeki matematiksel yapı hakkında düşünme (sayılarla ilgili işlemler ve sayıların özellikleri hakkında genellemeler oluşturma) ile ilgilidir.

Bununla birlikte matematiksel ilişkileri belirlemek ve genellemeleri oluşturmak, ifade etmek ve doğrulamak cebirsel düşünmenin merkezindedir (Kaput, 2008). Çünkü cebirsel düşünme; aritmetik işlemlerdeki örüntüleri tanıyıp analiz etmeyle, bu örüntüleri genellemeyle ve bilinmeyen niceliklerle işlem yapmayla ilgilidir. Öğrenciler cebirsel muhakeme yaparken, sayılarla yapılan işlemlerin yanı sıra, sayılarla ilgili özellikleri ve ilişkileri de keşfedilebilirler. Öğrenciler sayıları içeren toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde deneyimler kazandıkça, bu dört işlemin özellikleriyle ilgili belli örüntüleri, düzenleri veya ilişkileri fark etmeye başlayabilir. Örneğin toplanan iki sayının sırasının önemli olmaması çocukların gözlemleyebileceği düzenlerden biridir. Öğrenciler toplanan sayıların düzeninin, hangi iki sayı eklenirse eklensin toplamı değiştirmediğini fark ettikleri zaman, kullandıkları belirli sayılardan çok, ilişkinin yapısına odaklanıyorlar demektir. Toplama işleminin genelleme özelliği üzerindeki bu odaklanma (değişme özelliği; $5 + 7 = 7 + 5$) cebirsel muhakemedir (Akkan, 2016). Çocuklar başlangıçta değişme özelliğini ifade etmeyi doğal dillerini (sayıları herhangi bir sırayla toplayabilirsiniz) kullanarak öğrenirler. Çocuklar matematiksel olarak olgunlaştıkça ve ustalaştıkça, herhangi iki sayıyı temsil etmek için semboller kullanarak daha formel yollarla bu düşüncelerini ifade etmeyi öğrenirler: " Her a, b reel sayısı için $\mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{b} + \mathrm{a}$ " cümlesi bu genellemenin formal bir ifadesidir. Daha sonra benzer bir düzeni iki sayının çarpımında da keşfedebilirler ($a \times b = b \times a$) (Akkan, 2016). Nitekim Denmana ve Leitlez (1988) işlemsel kurallar ile ilgili kusursuz bir anlamanın olması için (değişme, birleşme, dağılma, ters ve işlem sırası) sayılar arasındaki örüntülerin tanınması ve genelleştirilmesinin önemine vurgu yapmıştır. Bunlar aritmetikten cebire geçiş odaklı konulardandır ve cebirsel denklemlerin çözümü için gereklidir.

Ancak yapılan araştırmalar öğrencilerin farklı sayı sistemlerindeki özellikleri (değişme, birleşme, dağılma vb.) genellemede sıkıntı yaşadıklarını ifade etmişlerdir. Stacey (2008) 5-8. sınıf öğrencilerinin bölme işlemi ile ilgili değişme ve birleşme özelliklerinde zorluklar yaşadıklarını belirtmiş ve bu zorluklarında kesirler ve rasyonel sayılarla ilgili hesaplamaları olumsuz yönde etkilediğine vurgu yapmıştır. Warren (2003) aritmetikten cebire başarılı bir geçiş yapmada öğrencilerin sayı sistemlerinin özellikleri (değişme, birleşme ve dağılma gibi) ile ilgili anlamalarının önemli olduğunu belirtmiş ve 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin birleşme ve değişme özelliği ile genel süreçler olarak toplama ve bölme işlemi ile ilgili anlamalarını araştırmıştır. Çalışma sonucunda çoğu öğrencinin genelleme süreci olarak bölme ve toplamayla ilgili anlamaları sergilemediklerini, hem birleşme hem de değişme özelliğiyle ilgili genel bir ifade yazmada başarısız olduklarını ve birleşme özelliğinde öğrencilerin bazılarının parantez kullanımından kaynaklanan hatalar yaptıklarını ifade etmiştir. Ayrıca bu hataların sayı sistemleri (doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, vb…) arasındaki geçişten kaynaklandığını belirtmiştir. Carpenter, Levi, Franke ve Zeringue (2005) ortaokul öğrencilerinin özellikle dağılma özelliğinde zorluklara sahip olduklarına vurgu yapmışlardır. Cooper, Baturo ve Williams (1999) çalışmalarında işlemsel kurallar ile ilgili 7.sınıf öğrencilerinin anlamaları üzerine odaklanmışlardır. 51 öğrenciye aynı sırada verilmek koşuluyla benzer etkinlikler uygulanmış ve etkinliklerde kullanılan sorular kartlar üzerine yazılmıştır. Sonuç olarak bazı öğrencilerin değişme ve birleşme özelliğinde yetersiz oldukları ortaya çıkmıştır. Bir diğer sonuçta bazı öğrencilerin bölme işleminde dağılma özelliği olduğunu belirtmeleridir. Warren ve English (1998) çalışmalarında öğrencilerin aritmetik yapılarla ilgili genelleme problemlerine dair bilgi ve anlamalarını araştırmışlardır. Çalışma ilköğretim birinci kademesinin son sınıf öğrencilerinden toplam 92 öğrenci ile yürütülmüştür. Öğrencilerin değişme ve birleşme özelliği ile ilgili bilgilerini araştırmak için bir test geliştirmişlerdir. Daha sonra araştırmacılar öğrencilerin test sorularına vermiş oldukları cevapları analiz etmiş ve öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte başarılı olması için gerekliliğine inanılan aritmetikteki bazı matematiksel yapıları soyutlamada ve genellemede birçok öğrencinin başarısız olduğunu saptamışlardır.

Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde; araştırmacılar, aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiye değinmemenin erken yaşlarda öğrencileri matematiksel düşünmeden yoksun bırakacağına vurgu yapmış, ilköğretim seviyesinde bu ilişkiye önem verilmesini önermişlerdir. Bu bağlamda araştırmacılar ilköğretim seviyesinde cebirsel düşünmeyi sağlamak için genelleme yapmanın ve genellemeleri cebirsel olarak ifade etmenin önemine işaret etmişler ve cebirsel düşünmenin ancak aritmetikten cebire geçişin düzgün bir şekilde yürütülmesiyle sağlanacağını belirterek bu geçişte örüntülerin ve farklı sayı sistemlerindeki özellikleri genellemenin köprü rolü oynayabileceğini ifade etmişlerdir (Tall, 1992; Armstong, 1995; Linchevski, 1995; Mason, 1996; Orton ve Orton, 1999; Carpenter ve Levi, 2000; Bishop, 2000; Smith, 2003; Lanin, 2003; Gürbüz ve Akkan, 2008). Bu nedenle aritmetikten cebire geçiş sürecinde öğrencilerin genelleme yapma ile ilgili değişimlerini ortaya koymak önemlidir. Çünkü genelleştirilmiş aritmetik olarak cebir'in temel fikirleri, ilkokulun ilk yıllarında etkinlikler ile sezdirilmiş ve ortaokul sonuna kadar öğretilmiş olmalıdır (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001). Bu bağlamda çalışmanın amacı, "*doğal sayı sistemindeki bazı özellikleri genelleme yoluyla görünür kılma bağlamında farklı öğrenim seviyelerindeki ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçişlerini incelemektir.*"

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmada; ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçişlerini doğal sayı sisteminin değişme, birleşme ve dağılma özellikleri bağlamında incelemek amacıyla, gelişimci araştırmaların bir çeşidi olan "enlemesine (cross-sectional)" yöntem kullanılmıştır. Enlemesine yürütülen çalışmalarda, aynı konunun bir örneklemle uzun süre çalışılarak gelişim düzeyinin ortaya çıkarılması yerine, örneklemin takip edeceği yaşam sürecinde ona eşdeğer olabilecek örneklem üzerinde aynı zamanda çalışmalarda yürütülebilir. Bu yolla, bir çalışmayı tamamlamak için aynı örneklemi takip etmek yerine, farklı yıllardaki örneklemlerle çalışılarak araştırma en kısa sürede tamamlanabilir (Çepni, 2007).

Çalışma Grubu

Bu çalışmanın örneklemini Doğu Karadeniz Bölgesinin bir ilindeki ortaokulda öğrenim gören 5- 8. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Üç açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar klinik mülakat yapılan 24 öğrenci hariç (okulun diğer tüm öğrencilerine uygulanmıştır. Bu üç sorunun aynısının klinik mülakatlarda kullanılması veri kaybını neden olacağı düşünüldüğünden, bu 24 öğrenciye açık uçlu sınavlar uygulanmamıştır. Klinik mülakatlar için seçilen 24 öğrenci okul yöneticilerinin ve öğretmenlerinin tavsiyeleri doğrultusunda, benzer ve farklı sınıflandırmaları temsil edecek şekilde ve başarı durumları dikkate alınarak seçilmiştir. Başarı durumunun dikkate alındığı seçme aşamasında, öğretmenden öğrencilerin bir yıl önceki matematik dersinden aldığı notlar istenmiş ve bu öğrenci notlarına göre örneklem üç gruba ayrılmıştır. Ayrıca düşüncelerini rahatlıkla ifade etme becerisine sahip ve çalışmaya gönüllü öğrenciler tercih edilmiştir.

Tablo 1. Çalışmanın örneklemi

Yazılı Sınavlar		Klinik Mülakatlar			
Sınıf	Öğrenci Sayıları	Öğrenci Durumları ve Sayıları			Toplam
		Zayıf	Orta	İyi	
5.sınıf	70	2 (Ö1_5, Ö2_5)	2 (Ö3_5, Ö4_5)	2 (Ö5_5, Ö6_5)	6
6.sınıf	72	2 (Ö7_6, Ö8_6)	2 (Ö9_6, Ö10_6)	2 (Ö11_6, Ö12_6)	6
7.sınıf	70	2 (Ö13_7, Ö14_7)	2 (Ö15_7, Ö16_7)	2 (Ö17_7, Ö18_7)	6
8.sınıf	73	2 (Ö19_8, Ö20_8)	2 (Ö21_8, Ö22_8)	2 (Ö23_8, Ö24_8)	6
Toplam	285	8	8	8	24

Verilerin Toplanması

Veri toplama araçları; literatür ve öğretmen desteğiyle hazırlanan, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin çözüm üretebileceği üç sorudan oluşmaktadır. Hazırlanan bu üç sorunun içeriği ve özellikleri aşağıdaki Tablo 2 de sunulmuştur.

Tablo 2. Soruların içerikleri ve özellikleri

	Soruların İçeriği	**Soruların Özelliği**
1.Soru	43 ♥ 45 = 45 ♥ 43 1. ♥ sembolü yerine dört işlemlerden (+, – , × , ÷) hangileri gelir? Neden? Açıklayınız. 2. Yukarıdaki soruda doğru olarak düşündüğünüz işlemler için; a) Benzer iki ifade de siz yazınız. b) Elde ettiğiniz sonuçlardan yola çıkarak sayılar yerine herhangi bir harf kullanarak bir kural yazınız veya bir genelleme yapınız.	Bu sorular doğal sayı sistemindeki özellikleri (değişme, birleşme ve dağılma) genelleme yoluyla görünür kılma bağlamında ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçişlerinin incelenmesi amacıyla hazırlanmıştır.
2.Soru	16 ♥ (12 ♥ 17) = (16 ♥ 12) ♥ 17 1. ♥ sembolü yerine dört işlemlerden (+, – , × , ÷) hangileri gelir? Neden? Açıklayınız. 2. Yukarıdaki soruda doğru olarak düşündüğünüz işlemler için; a) Benzer iki ifade de siz yazınız. b) Elde ettiğiniz sonuçlardan yola çıkarak sayılar yerine herhangi bir harf kullanarak bir kural yazınız veya bir genelleme yapınız.	
3.Soru	12 × (? ♥ 25) = (12 × 24) ♥ (12 × 25) 1. ? işareti yerine gelebilecek sayıyı bularak, ♥ sembolü yerine dört işlemlerden (+, – , × , ÷) hangilerinin gelebileceğini yazınız? Açıklayınız. 2. Yukarıdaki soruda doğru olarak düşündüğünüz işlemler için; a) Benzer iki ifade de siz yazınız. b) Elde ettiğiniz sonuçlardan yola çıkarak sayılar yerine herhangi bir harf kullanarak bir kural yazınız veya bir genelleme yapınız.	

Açık-uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar ve klinik mülakat soruların ölçme amacına uygun olup olmadığı, ölçülmek istenen alanı temsil edip etmediği sorunu ile ilgili olup, "uzman görüşüne" göre saptanır (Karasar, 1995). Bu amaç kapsamında, iki matematik eğitimcisinin ve iki matematik öğretmeninin görüşlerine başvurulmuş ve tüm soruların dil ve seviye geçerliliği sağlanmıştır. Sonra hazırlanan soruların gerçek sınıf ortamlarında uygulanması, araştırmacının deneyim kazanması, soruların düzenlemesi ve veri toplama araçlarının geçerlilik ve güvenirliğinin belirlenmesi amacıyla pilot çalışma yapılmıştır. Asıl uygulamanın yapılacağı okula benzer özelliklere sahip bir okulun öğrencileriyle pilot çalışma yürütülmüştür. Okulda 263 öğrenciye açık uçlu sorulardan oluşan sınavlar uygulanırken 12 öğrenciyle klinik mülakatlar yürütülmüştür. Sınav ve klinik mülakatlar esnasında alınan notlar, yapılan gözlemler ve öğretmenlerle yürütülen informal mülakatlar asıl çalışmada kullanılacak sorulara son şeklinin verilmesinde yararlı olmuştur. Hazırlanan soruların geçerlilik ve güvenirliği konusunda bir problem olmaması için bu konu ile ilgili yapılan araştırmalarla ilgili literatür taramasından elde edilen soruların aynısı veya benzerleri kullanılmıştır. Güvenirlik kavramı, araştırmanın farklı zamanlarda ya da farklı kişiler aracılığıyla yürütülmesi durumunda aynı ya da benzer sonuca ulaşılmasıyla ilgilidir. Bu, araştırma sırasında ya da araştırmanın sonucunda birden fazla araştırmacının araştırılan konuyu incelemesini içerir. Veri toplama araçlarının güvenirliği için öğrenci kâğıtlarının rastgele yarısı alınmış ve araştırmacı ile başka bir araştırmacı kodlamalar yapmıştır. Yapılan kodlamalar sonucunda iki araştırmacı arasında %79 uyum çıkmıştır. Asıl uygulamayı içeren çalışmanın bir diğer aşamasında açık uçlu sorulardan oluşan sınavların ortaokulda öğrenim gören toplam 285 öğrenciye uygulaması esnasında sınıflar arası bilgi alış verişini engellemek amacıyla sınavların aynı gün içerisinde uygulanmasına dikkat edilmiş ve Rehberlik derslerinde uygulamalar yürütülmüştür. Aynı okuldan seçilen 24 öğrenciyle klinik mülakatlar yürütülmüş ve her bir öğrenciyle yürütülen klinik mülakatlar yaklaşık olarak bir saat sürmüştür.

Bununla birlikte aritmetikten cebire geçiş sürecinde ortaokul öğrencilerinin düşüncelerindeki zenginliklere ulaşmak, nitel bir araştırma yöntemi olan klinik mülakat ile mümkün olacaktır. Zazkis ve Hazzan (1999) klinik mülakatı öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeler olarak tanımlamıştır. Bu mülakat çeşidinin esas amacı; bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Hunting 1997; Goldin 1998; Zazkis ve Hazzan, 1999). Öğrencilerin süreç boyunca ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini ve neden öyle düşündüklerini ortaya çıkarmayı amaçlayan bu çalışma için klinik mülakat metodunun yukarıda açıklanan niteliği ile en uygun metot olduğuna karar verilmiştir. Klinik mülakatlar yapılırken yukarıda belirtilen üç soru dışında ek sorular öğrencilere yönlendirilmiş, elde dilen veriler Tablo 3 de sunulan karakterizasyon tablosuna göre yorumlanmıştır. Ayrıca bu çalışmanın nitel verilerinin sunulduğu ikinci kısmında katılımcı öğrencileri nitelemek için “Ö1$_5$,Ö2$_5$, …, Ö23$_8$, Ö24$_8$” şeklinde takma isimler kullanılmıştır.

Verilerin Analizi

Elde edilen veriler; literatür destekli hazırlanan ve aritmetik, cebir öncesi ve cebirle ilgili özellikleri içeren aşağıdaki karakterizasyon tablosuyla (Gürbüz ve Akkan, 2008; Akkan, 2009) değerlendirilmiştir.

Tablo 3. Genelleme yapma ile ilgili üç alanı içeren karakterizasyon tablosu

Genelleme yapma			
	Aritmetik	Cebir öncesi	Cebir
Göstergeler	Problemlerin çözümleri belirli durumlarla ilgili sayısal çözümlerin keşfine odaklıdır yani genel amaç sayısal bir çözüm bulmadır. Bu seviyedeki öğrenciler iki veri arasındaki ilişkiden ziyade yalnızca bir veriye odaklanır ve onlar üzerine sayısal hesaplamalarla çözüme ulaşmaya çalışır. Bu aşamada öğrenciler gelişi güzel denem-yanılma stratejisini vb kullanabilir	Öğrencilerin sayı yapılarıyla ilişkileri ile ilgili genelleme yapmaları öğrencilerde soyut düşüncelerin gelişmesine yardım eder. Bu nedenle amaç öğrencilerin belirli sayı durumları arasındaki ilişkileri keşfetmesi ve genelleme yapmaya doğru aşamalı bir ilerlemenin ilk adımını gerçekleştirmesidir.	Cebirde ise problemlerin çözümü genellikle ilişkiyi veya yöntemi belirlemeye ve keşfetmeye yani yöntemin arkasına bakmaya odaklıdır. Bu bağlamda genel amaç problemdeki sayılar arasındaki ilişkileri/ yöntemleri sembolleştirme ve genelleştirme yani cebirsel olarak ifade etmedir. Benzer şekilde sayılar ile sayıların işlem yolları arasındaki ilişkileri genelleştirmede önemlidir.

Bulgular

Değişme Özelliğine Dair Bulgular

Ortaokul öğrencilerinin değişme özelliğine dair açık-uçlu soruya verdiği cevaplar dört kategoriye göre– boş, yanlış, kısmen doğru, doğru- değerlendirilmiş, frekans ve yüzde değerleri Tablo 4 de sunulmuştur.

Tablo 4. Değişme özelliğine dair açık-uçlu yazılı sınav sorusundan elde edilen veriler

Tablonun Birinci Kısmı											
Değişme Özelliğinin Olup Olmadığı İle İlgili Görüş Bildiren Öğrencilerin Dağılımı											
Kategoriler		Boş		Yanlış		Kısmen Doğru				Doğru	
						Sadece Toplama		Sadece Çarpma		Toplama-Çarpma	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Sınıflar	5.sınıf	10	14	20	29	20	29	8	11	12	17
	6.sınıf	7	10	18	25	21	29	7	10	19	26
	7.sınıf	5	7	16	23	21	30	6	9	22	31
	8.sınıf	4	5	12	16	18	25	5	7	34	47
Tablonun İkinci Kısmı											
Değişme Özelliği İle İlgili Genelleme Yapmaya Çalışan Öğrencilerin Dağılımı											
Kategoriler		Yanlış Genelleme Yapanlar		Doğru Genelleme Yapanlar						Genelleme Yapmaya Çalışanların Toplamı	
				Sadece Toplama		Sadece Çarpma		Toplama-Çarpma			
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Sınıflar	5.sınıf	2	3	5	7	3	4	6	9	16	23
	6.sınıf	5	7	7	10	4	6	8	11	24	34
	7.sınıf	7	10	10	14	6	9	11	16	34	49
	8.sınıf	10	14	14	19	9	12	17	23	50	70

Tablo 4'ün birinci kısmı incelendiğinde toplama ve çarpma işlemleri dışındaki işlemlerinde değişme özelliği vardır diyen 5.sınıf öğrencileri %29, 6.sınıf öğrencileri %25, 7.sınıf öğrencileri %23 ve 8.sınıf öğrencileri %16 dır. Sadece toplama işleminin değişme özelliği vardır diyen öğrencilerin yüzdeleri karşılaştırıldığında 5., 6. ve 7. sınıf öğrencilerin yüzde değerleri birbirine yakın değerler (%29, %29 ve %30) iken, 8. sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri %25 dir. 5.sınıf öğrencilerinin %11'i sadece çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu belirtirken, 6., 7.ve 8. sınıf öğrencilerinin sırasıyla %10, %9 ve %7'i sadece çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu belirtmişlerdir. Doğru cevap veren öğrenci yüzdeleri karşılaştırıldığında, 5.sınıf öğrencilerin %17'i, 6.sınıf öğrencilerinin %26, 7.sınıf öğrencilerinin %31'i toplama ve çarpmanın değişme özelliği olduğunu belirtirken, 8. sınıf öğrencilerin yaklaşık yarısı (%47) toplama ve çarpmanın değişme özelliği olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerden değişme özelliği ile ilgili sayı durumlarını genellemeleri veya harfli ifade etmelerinin istendiği tablonun ikinci kısım incelendiğinde herhangi bir genelleme yapan 5.sınıf öğrencileri %23, 6.sınıf öğrencileri %34, 7.sınıf öğrencileri %49, 8. sınıf öğrencileri ise %70 dir. Farklı öğrenim seviyelerindeki bu öğrencilerden yanlış genelleme yapan öğrencilerin yüzde değerleri ise %3 ile %14 arasındadır. Sadece toplama işleminin değişme özelliği olduğunu ya da sadece çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu ifade edip genelleyen 5, 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri sırasıyla %7-%4, %10-%6, %14-%9 ve %19-%12 dir. Hem toplama hem de çarpma işleminin değişme özelliğiyle ilgili genellemeleri yapan 5.sınıf öğrencileri %9, 6.sınıf öğrencileri %11, 7.sınıf öğrencileri%16 iken, 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri %23 gibi diğer üç sınıfa göre daha yüksek bir değerdir.

Bununla birlikte doğal sayı sisteminde değişme özelliği ile ilgili durumu tespit etmek için hazırlanan birinci soruya ilişkin öğrencilerle yapılan mülakatlardan elde edilen sonuçlar aşağıda değerlendirilmiştir:

Ö1$_5$, Ö2$_5$, Ö5$_5$, Ö7$_6$ ve Ö13$_7$ öğrencileri birinci soruya yanlış cevap vermiştir. Bu öğrencilerden Ö2$_5$, Ö5$_5$ ve Ö7$_6$ kendilerinden en az iki benzer örnek bulmaları istenmesine rağmen çoğu yanlış olmakla birlikte sadece birer örnek bulmaya çalışmışlardır. Bu öğrencilere ait diyaloglardan bazı bölümler aşağıda verilmiştir.

Ö1$_5$: Artı ve eksi gelir. Çünkü 43'e 2 eklendiğinden 45, 45'den 2 çıkarıldığında 43 eder…

Ö2$_5$: Artı ve eksi gelir. Çünkü biri arttı, biri azaldı, yani birinin sonucu ötekine eşit olduğundan…

Ö7$_6$: Öğretmenim hiçbirinde değişmez yani hepsi gelir. Çünkü sayılar aynıdır, değişmiyor ki, O halde sonuçlar aynıdır…

Ö13$_7$: Zaten burada eşitlik verilmiş, o halde hepsi olur, Zaten sonuçlarda aynı olur…

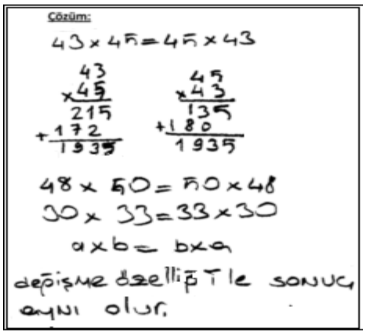
Ö3$_5$, Ö8$_6$, Ö14$_7$, Ö19$_8$, Ö20$_8$ (toplama) ile Ö15$_7$ (çarpma) öğrencileri ise sadece toplama işleminin değişme özelliği olduğunu ya da sadece çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerden Ö3$_5$ ve Ö19$_8$ öğrencileri sayısal işlemler sonucunda bu kanıya varmışlar ve sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı da doğal sayı sistemi ile ilgili bu özelliği genellemede başarısız olmuşlardır.

Ö8$_6$, Ö15$_7$ ile Ö20$_8$ öğrencileri ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri dikkate alarak doğal sayı sistemi ile ilgili işlemle ilgili genellemeleri yapmışlardır. Örneğin Ö3$_5$, Ö14$_7$, Ö15$_7$ ve Ö20$_8$ öğrencilerine ait diyaloglar ile etkinlik kartlarına yazdıkları cevaplar aşağıda verilmiştir.

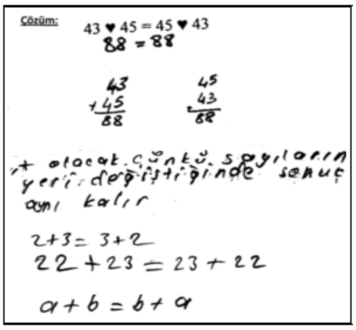
Ö3$_5$: Sadece artı gelir… [A: Niçin?]. Toplamları aynıdır, çünkü işlem yaptım aynı sayılar çıkıyor. Zaten eksi koysak 43 den 45 çıkmaz ki… [A: Bunlar her sayı için doğru mu?]. Öğretmenim işlem yaparız sonuçlar aynı ise doğru olur… Tahminim her sayı için doğru değildir… [A: Peki bunu genelleyebilir miyiz?]. Genelleme ne anlama geliyor… [A: Yani harflerle *yazılan bir kural?]. Edemeyiz ki, harflerle nasıl işlem yapacaksın, sayı yok bir şey yok.*

Ö14$_7$: Sadece artı gelir… [A: Neden artı?]. İki sayıyı topla, yer değiştir topla sonuç aynı... [A: Nasıl yani?]. 2 ile 3 ün toplamı 5, 3 ile 2 nin toplamı da beş… [A: Başka örnek verebilir misin?]. "8 + 5 = 5 + 8" ya da "3 + 7 = 7 + 3" sonuçları aynı. Sayılar aynı sadece yerleri değişti... [A: Bu ne anlama geliyor?]. Toplamada değişme özelliği var, her sayı için geçerlidir… [A: Nasıl genelleyebiliriz?]. Toplamanın değişme özelliği var deriz…

Ö15$_7$: Sadece çarpma işlemi gelir... [A: Neden çarpma işlemi?]. İki sayıyı çarpalım aynı sonucu buluyoruz… [A: Başka örnek verebilir misin?]. "48 × 50 = 50 × 48" ya da "30 × 33 = 33 × 30" sonuçları aynı. Sayılar aynı sadece yerleri değişti. Öğretmenim çarpmanın değişme özelliği var her sayı için geçerlidir… [A: Nasıl genelleyebiliriz?]. Öğretmenim "a × b = b × a" eşittir… değişme özelliğinden dolayı.

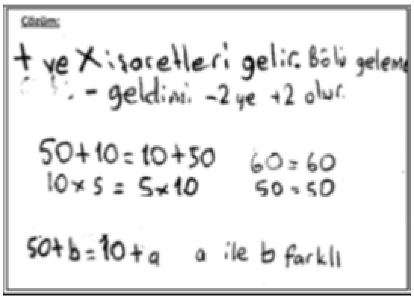


Ö20$_8$: Sadece artı gelir… [A: Niçin sadece artı?]. Toplama işleminde sayıların yeri değişse bile sonuç aynı olur… [A: Nasıl yani, başka örnek verebilir misin?]. Mesela "2 + 3 = 3 + 2" ya da "22 + 23 = 23 + 22". Burada hem sayılar aynı hem de aynı işlem var… [A: Peki bu yazdığın her sayı için doğru mudur?]. Öğretmenim bu her sayı için doğrudur… [A: Peki bu ifadeyi genelleyebilir miyiz?]. Harflerle mi yazacağım? ...[A: Onun gibi]. O halde a + b = b + a yazabiliriz. Bunu mu istedin öğretmenim? ... [A: Evet.]. Zaten toplamanın değişme özelliği vardır. Aynısı öğrenmiştik…



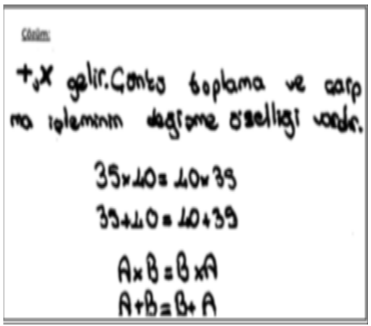
Ö4$_5$, Ö6$_5$, Ö9$_6$, Ö10$_6$, Ö11$_6$, Ö12$_6$, Ö16$_7$, Ö17$_7$, Ö18$_7$, Ö21$_8$, Ö22$_8$, Ö23$_8$ ve Ö24$_8$ öğrencileri ise hem toplama hem de çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat bu öğrencilerden Ö4$_5$, Ö9$_6$, Ö10$_6$, Ö11$_6$, Ö16$_7$ ve Ö21$_8$ öğrencileri sırasıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini deneyerek elde ettikleri cevapları karşılaştırmışlar yani sayısal işlemler sonucunda bu kanıya varmışlar ve sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı da doğal sayı sistemi ile ilgili bu özelliği genellemede başarısız olmuşlardır. Ancak Ö6$_5$, Ö12$_6$, Ö17$_7$, Ö18$_7$, Ö22$_8$, Ö23$_8$ ve Ö24$_8$ öğrencileri sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri dikkate alarak bu özelliğe dair genellemeleri yapmışlardır. Örneğin Ö10$_6$ ve Ö18$_7$ öğrencilerine ait diyaloglar ile etkinlik kartlarına yazdıkları cevaplar aşağıda verilmiştir.

Ö10$_6$: Sadece artı ile çarpı işareti gelir... [A: Niçin?]. Bu sayıları topladığımızda ve çarptığımızda aynı soncu buluyoruz. Ama bu araya bölü gelseydi 43, 45'e tam bölünmez, ayrıca eksi gelseydi "–2 ile +2" olurdu bunlarda eşit olmazdı... [A: Bunlar her sayı için doğru mu?]. Öğretmenim işlem yaparız sonuçlar aynı ise doğru olur. Demek ki sonuçlar aynı olduğundan her sayı için doğrudur... [A: Peki bu sayılar yerine harfler yazarsak doğru olur mu?]. Öğretmenim onların her ikisi de sayı, ama bunlarda harfler var. Harflerin değeri bilinmiyor ki, ya farklı sayılar olursa, o zaman eşit olmaz.



…

Ö18$_7$: Hem artı hem de çarpma gelir, başka gelmez... [A: Niçin sadece ikisi gelir?]. Toplama ve çarpmanın değişme özelliği var. Şimdi bu sayıları toplayalım çarpalım aynı sonuçlar olur… [A: Başka sayılar için de doğru olur mu?]. Evet, öğretmenim, "35 × 40 = 40 × 35" ya da"35 + 40 = 40 + 35" olur. Öğretmenim bu işlemler her sayı için doğrudur… [A: Bunu genelleyebilir miyiz?]. Tamam yazalım, "A × B = B × A" ve "A + B = B + A" olur. Toplama ve çarpmanın değişme özelliği vardır.



Sonuç olarak Ö1$_5$, Ö2$_5$, Ö3$_5$, Ö4$_5$, Ö7$_6$, Ö9$_6$, Ö10$_6$, Ö11$_6$, Ö13$_7$, Ö14$_7$, Ö16$_7$, Ö19$_8$ ve Ö21$_8$ öğrencileri değişme özelliği ile ilgili birinci soruda sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı bu öğrencilerin genel amaç sayısal bir çözüm bulmadır, genelleme yapma değildir. Bu nedenle bu öğrenciler aritmetik özellikleri göstermektedir.

Bununla birlikte Ö5$_5$, Ö6$_5$, Ö8$_6$, Ö12$_6$, Ö15$_7$, Ö17$_7$, Ö18$_7$, Ö20$_8$, Ö22$_8$, Ö23$_8$ ve Ö24$_8$ öğrencileri ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri göz önüne alarak genelleme yapmaya çalışmışlardır. O halde bu öğrencilerin amacı, sayılar arasındaki ilişkileri genelleştirme yani kuralı cebirsel olarak ifade etmedir. Bu nedenle bu öğrenciler de cebirsel özellik gösteren sınıflamanın içinde yer almaktadır. Cebir öncesi özellik gösteren Ö11$_6$, Ö14$_7$ ve Ö21$_8$ öğrencileri ise sayısal işlemlerle değişme özelliğinin varlığını kanıtlamış fakat genellemeleri cebirsel olarak değil doğal dille ifade etmişlerdir. Ö3$_5$ ve Ö4$_5$ öğrencileri ise belli sayılar için ifadenin doğru olacağını yani sonsuz sayı gelemeyeceğini iddia etmişlerdir.

Birleşme Özelliğine Dair Bulgular

Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin doğal sayı sistemindeki matematiksel özellikleri genellemeleri ile ilgili ikinci soruya ilişkin çözümleri dört kategoride – boş, yanlış, kısmen doğru, doğru- incelenmiş, frekans ve yüzde değerleri Tablo 5 de sunulmuştur.

Tablo 5. Birleşme özelliğine dair açık-uçlu yazılı sınav sorusundan elde edilen veriler

Tablonun Birinci Kısmı											
Birleşme Özelliğinin Olup Olmadığı İle İlgili Görüş Bildiren Öğrencilerin Dağılımı											
Kategoriler		Boş		Yanlış		Kısmen Doğru				Doğru	
						Sadece Toplama		Sadece Çarpma		Toplama-Çarpma	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Sınıflar	5.sınıf	13	19	28	40	16	23	5	7	8	11
	6.sınıf	9	13	24	33	18	25	6	8	15	21
	7.sınıf	7	10	20	29	17	24	7	10	19	27
	8.sınıf	6	8	19	26	15	21	6	8	27	37
Tablonun İkinci Kısmı											
Birleşme Özelliği İle İlgili Genelleme Yapmaya Çalışan Öğrencilerin Dağılımı											
Kategoriler		Yanlış Genelleme Yapanlar		Doğru Genelleme Yapanlar						Genelleme Yapmaya Çalışanların Toplamı	
				Sadece Toplama		Sadece Çarpma		Toplama-Çarpma			
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Sınıflar	5.sınıf	2	3	4	6	2	3	4	6	12	18
	6.sınıf	4	6	5	7	3	4	6	8	18	25
	7.sınıf	5	7	8	11	5	7	8	11	26	36
	8.sınıf	8	11	10	14	7	10	14	19	39	54

Tablo 5'in birinci kısmı incelendiğinde toplama ve çarpma işlemleri dışındaki işlemlerinde birleşme özelliği vardır diyen 5.sınıf öğrencileri %40, 6.sınıf öğrencileri %33, 7.sınıf öğrencileri %29 ve 8.sınıf öğrencileri %26 dır. Sadece toplama işleminin veya sadece çarpma işleminin birleşme özelliği vardır diyen öğrencilerin yüzdeleri toplamları karşılaştırıldığında 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerin yüzde değerleri toplamları birbirine yakın değerler olup sırasıyla %30, %33, %34 ve %29 dur. Doğru olan iki işlemi belirten öğrencilerin yüzdeleri karşılaştırıldığında, 5.sınıf öğrencilerin %11'i, 6.sınıf öğrencilerinin %21, 7.sınıf öğrencilerinin %27'i toplama ve çarpmanın bir özelliği olduğunu belirtirken, 8. sınıf öğrencilerinin %37 toplama ve çarpmanın birleşme özelliği olduğunu belirtmişlerdir. Tablonun ikinci kısım incelendiğinde doğru veya yanlış bir genelleme yapan farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin yüzdeleri %18 ile %54 arasında değerlerdir. Bu öğrencilerden 5.sınıf öğrencilerinin %3, 6.sınıf öğrencilerinin

%6, 7.sınıf öğrencilerinin %7 ve 8.sınıf öğrencilerinin ise %11'i ise yanlış genellemeler yapmışlardır. Sadece toplama işlemiyle ya da sadece çarpma işlemiyle ilgili birleşme özelliğine ait genelleme yapan 5, 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri sırasıyla %6-%3, %7-%4, %11-%7 ve %14-%10 dur. Hem toplama hem de çarpma işleminin birleşme özelliği genelleyen 5.sınıf öğrencileri %6, 6.sınıf öğrencileri %8, 7.sınıf öğrencileri %11 iken, 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değeri %19 dur.

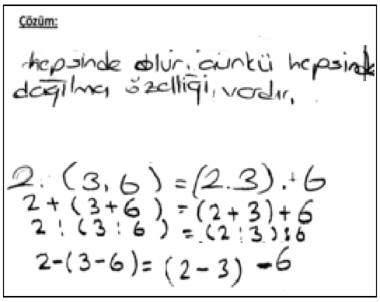
Bununla birlikte birleşme özelliğine ilişkin ikinci soru ile ilgili klinik mülakatlardan elde edilen sonuçlar aşağıda sunulmuştur:

Buna göre Ö1$_{5}$, Ö2$_{5}$, Ö3$_{5}$, Ö5$_{5}$, Ö7$_{6}$, Ö11$_{6}$, Ö13$_{7}$ ve Ö19$_{8}$ öğrencileri ikinci soruya yanlış cevap vermiştir. Bu öğrencilerden sadece Ö11$_{6}$ öğrencisi genelleme için bir ifade yazmıştır. Özellikle bu öğrencilerin çoğu kendilerinden en az iki örnek yazmaları istenmesine rağmen birçoğu yanlış olmakla beraber birer örnek yazmışlardır. Bu öğrencilere ait diyaloglardan bazı bölümler ile Ö3$_{5}$ öğrencisinin etkinlik kâğıdındaki çözümü aşağıda verilmiştir.

Ö1$_{5}$: Öğretmenim parantez içine artı dışına eksi gelir…

Ö2$_{5}$: Artı ve eksi gelir. Çünkü biri artı, biri azaldı, yani birinin sonucu ötekine eşit olduğundan…

Ö13$_{6}$: Hepsi gelir çünkü hepsinde dağımla özelliği vardır…

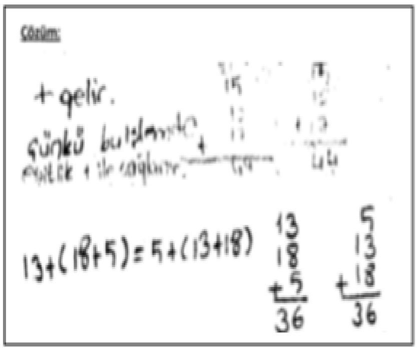


Ö11$_{6}$, Ö14$_{7}$ ve Ö21$_{8}$ öğrencileri sayısal işlemlerle birleşme özelliğinin varlığını kanıtlamış, fakat genellemeleri cebirsel olarak değil doğal dille ifade etmişlerdir. Ö3$_{5}$ ve Ö4$_{5}$ öğrencileri ise belli sayılar için ifadenin doğru olacağını yani sonsuz sayı gelemeyeceğini iddia etmişlerdir.

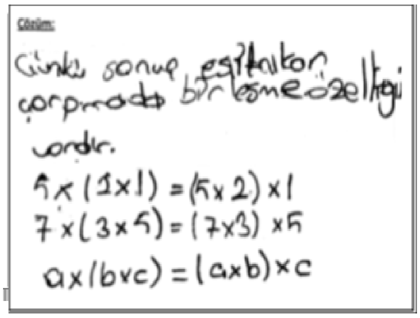
Ö8$_{6}$, Ö9$_{6}$, Ö14$_{7}$, Ö17$_{7}$, Ö20$_{8}$ öğrencileri sadece toplama işleminin birleşme özelliği olduğunu; Ö4$_{5}$, Ö10$_{6}$, Ö15$_{7}$ ve Ö22$_{8}$ öğrencileri ise sadece çarpma işleminin birleşme özelliği olduğunu ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerden Ö4$_{5}$, Ö8$_{6}$, Ö9$_{6}$, Ö10$_{6}$ ve Ö14$_{7}$ öğrencileri sayısal işlem yaparak ve sayısal bir sonuca odaklanarak bu fikre varmışlar ve sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı da toplama ve çarpma işleminin birleşme özelliği ile ilgili genellemeleri yapmada başarısız olmuşlardır. Bununla birlikte Ö15$_{7}$, Ö17$_{7}$, Ö20$_{8}$ ve Ö22$_{8}$ öğrencileri ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri dikkate alarak genellemeleri yapmışlardır. Örneğin bu iki grup öğrencilerden olan Ö9$_{6}$, Ö14$_{7}$ ve Ö22$_{8}$ öğrencilerine ait diyaloglar ile etkinlik kartlarına yazdıkları cevaplar aşağıda verilmiştir.

Ö9$_6$: Sadece artı gelir... [A: Niçin?]. İşlem yaparsak olur, denk oluyorlar. Yani topladığımızda sonuç aynı oluyor... [A: Her sayı için artı işaretinin gelmesi doğru mu?]. Öğretmenim kolayı var, işlem yaparız, eğer sayılar eşit oluyorsa olur... [A: Nasıl yani?]. Bir deneme yapalım doğru ise olur. Tamam, sonuçlar aynı demek ki her sayı için olabilir… [A: Peki harfleri içeren bir kural yani genelleme yapabilir miyiz?]. Harflere bağlı öğretmenim. Harflerin bir tane değeri vardır. Ama harflere gerek yok onların sayı değerleri var.

Ö14$_7$: Sadece artı gelir… [A: Niçin?]. Sayıları toplarsak sonuç aynı oluyor. Ama öğretmenim gerek yok ki… [A: Neden?]. Bu dağılma yok yok. Öğretmenim birleşim özelliği. Toplama işleminin de var zaten… [A: Peki her sayı için artı gelir mi?]. Tam emin değilim, ama gelir herhalde. Çünkü birleşim özelliği var... [A: Peki bir kural yazabilir miyiz yani genelleme yapabilir miyiz?]. Tamam toplama işleminin birleşim özelliği vardır söylemek yeterlidir… [A: Yok, öyle değil harflerle bir kural yazabilir miyiz?]. Öyle bir şey yok ki. Diyoruz ya toplama birleşim özelliği vardır bu da yeterlidir herhalde.

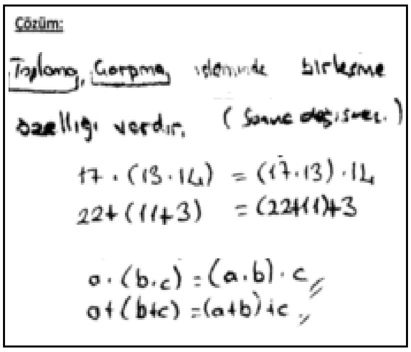


Ö22$_8$: Çarpma işlemi gelir... [A: Niçin çarpma işlemi?]. Çünkü eşit olması için çarpma gelmeli. Zaten işlem yaparsak da eşit oluyor… [A: Bana iki örnek yazabilir misin?]. "5 × (2 × 1) = (5 × 2) × 1" ya da "7 × (3 × 5) = (7 × 3) × 5" sonuçları aynı olur. Sayıların sırası değişmedi, aynı kaldı, sadece parantezlerin yeri değişti… [A: Burada bir genelleme yapabilir miyiz?]. Öğretmenim harflerle şöyle yazılabilir: "a × (b × c) = (a × b) × c".



Benzer şekilde Ö6$_5$, Ö12$_6$, Ö16$_7$, Ö18$_7$, Ö21$_8$, Ö23$_8$ ve Ö24$_8$ öğrencileri ise hem toplama ve çarpma işleminin birleşme özelliği olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat bu öğrencilerden Ö16$_7$ ve Ö21$_8$ öğrencileri dört işlemle ilgili hesaplamaları içeren denemelerle elde ettikleri cevapları karşılaştırmışlar. Onlar sayısal işlemler sonucunda bu kanıya varmışlar ve sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı da doğal sayı sistemi ile ilgili bu özelliği genellemede başarısız olmuşlardır. Bununla birlikte Ö6$_5$, Ö12$_6$, Ö18$_7$, Ö23$_8$ ve Ö24$_8$ öğrencileri ise sayılar arasındaki ilişkileri genelleştirmiş yani kuralı cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Örneğin Ö16$_7$ ve Ö24$_8$ öğrencilerine ait diyaloglar ile Ö24$_8$ öğrencisinin etkinlik kartına yazdığı cevap aşağıda verilmiştir.

Ö16$_7$: Artı ile çarpı gelir… [A: Neden?]. Bu sayıları topladığımızda ve çarptığımızda aynı soncu buluyoruz. Diğerleri olmaz. Çünkü çıkarmada *küçükten büyük çıkmaz. Bölmede ise sonuç sonsuz çıkabilir… [A: Bunlar her sayı için doğru mu?]. Evet. Çünkü işlemlerin birbirine eşit olması için bu işlemlerin yapılması gerekir… [A: Peki bu sayılar yerine harfler yazarsak doğru olur mu?]. Öğretmenim genel de sayılar için doğru ama bilmiyorum. Olabilir de olmayabilir de.*



Ö24$_{8}$: Toplam ve çarpma işlemi gelir... [A: Niçin ikisi gelir?]. Toplama ve çarpmanın birleşme özelliği vardır. Burada sayıların sıralaması aynen duruyor. Parantezin yeri ile sayıların yeri değişse de sonuç değişmez. Buradaki sayıları toplasak ve çarparsak sonuç değişmez… [A: Başka sayılar için de doğru olur mu?]. Evet öğretmenim, dedim ya hangi sayıyı yazarsan yaza sadece parantez yer değiştiriyor. Örneğin “17.(13.14) = (17.13).14” ya da “22 + (11 + 3) = (22 + 11) +3” eşittir... [A: Bunu genelleyebilir miyiz?]. Evet genelleyebiliriz, doğal sayılarda toplama ve çarpmanın değişme özelliği vardır. Şöyle de yazabiliriz. “a . (b . c) = (a . b) . c” ve “a + (b + c) = (a + b)+ c” olur.

Buna göre Ö1$_{5}$, Ö2$_{5}$, Ö3$_{5}$, Ö4$_{5}$, Ö5$_{5}$, Ö7$_{6}$, Ö8$_{6}$, Ö9$_{6}$, Ö10$_{6}$, Ö13$_{7}$, Ö14$_{7}$, Ö16$_{7}$, Ö19$_{8}$ ve Ö21$_{8}$ öğrencileri ikinci soruda sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı bu öğrencilerin genel amaç sayısal bir çözüm bulmadır, genelleme yapma değildir. Bu nedenle bu öğrenciler aritmetik sınıflamanın içinde yer almaktadır. Ö6$_{5}$, Ö11$_{6}$, Ö12$_{6}$, Ö15$_{7}$, Ö17$_{7}$, Ö18$_{7}$, Ö20$_{8}$, Ö22$_{8}$, Ö23$_{8}$ ve Ö24$_{8}$ öğrencileri ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri göz önüne alarak genelleme yapmaya çalışmışlar ve bu genellemelerini harfli ifadelerle göstermişlerdir. O halde bu öğrencilerin amacı, sayılar arasındaki ilişkileri genelleştirme yani kuralı cebirsel olarak ifade etmedir. Bu nedenle bu öğrenciler cebirsel sınıflamanın içinde yer almaktadır. Ayrıca Ö10$_{6}$, Ö11$_{6}$, Ö14$_{7}$ ve Ö21$_{8}$ öğrencileri sayısal işlemlerle birleşme özelliğinin varlığını kanıtlamış fakat genellemeleri cebirsel olarak değil kendi doğal dilleriyle sözlü ifade etmişlerdir. Ö3$_{5}$, Ö4$_{5}$ ve Ö14$_{7}$ öğrencileri ise belli sayılar için ifadenin doğru olacağını yani sonsuz sayı gelmeyeceğini iddia etmişlerdir.

Dağılma Özelliğine Dair Bulgular

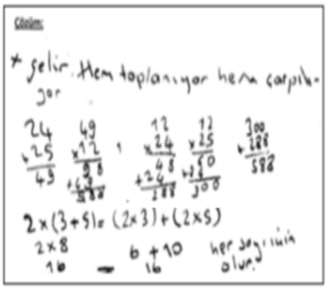
5, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin üçüncü soruya ilişkin çözümleri “boş, yanlış, kısmen doğru, doğru” kategorilerine göre değerlendirilmiş frekans ve yüzde değerleri Tablo 6 da sunulmuştur.

Tablo 6. Dağılma özelliğine dair açık-uçlu yazılı sınav sorusundan elde edilen veriler

Tablonun Birinci Kısmı											
Dağılma Özelliğinin Olup Olmadığı İle İlgili Görüş Bildiren Öğrencilerin Dağılımı											
	Kategoriler	Boş		Yanlış		Kısmen Doğru				Doğru	
						Sadece Toplama		Sadece Çıkarma		Toplama-Çıkarma	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Sınıflar	5.sınıf	19	27	34	49	15	21	2	3	1	1
	6.sınıf	18	25	29	40	19	27	4	6	2	3
	7.sınıf	9	13	23	33	19	27	5	7	14	20
	8.sınıf	8	11	21	29	20	27	5	7	19	26
Tablonun İkinci Kısmı											
Dağılma Özelliği İle İlgili Genelleme Yapmaya Çalışan Öğrencilerin Dağılımı											
	Kategoriler	Yanlış Genelleme Yapanlar		Doğru Genelleme Yapanlar						Genelleme Yapmaya Çalışanların Toplamı	
				Sadece Toplama		Sadece Çıkarma		Toplama-Çıkarma			
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Sınıflar	5.sınıf	2	3	2	3	-	-	-	-	5	7
	6.sınıf	3	4	4	6	1	1	-	-	8	11
	7.sınıf	3	4	8	11	2	3	8	11	21	29
	8.sınıf	6	8	11	15	3	4	12	16	32	43

Tablo 6'nın birinci kısmı incelendiğinde toplama ve çıkarma işlemleri dışındaki diğer iki işlemin de üzerine dağılma özelliği vardır diyen 5, 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri %49 ile %29 arasındadır. Sadece toplama işleminin veya çıkarma işleminin üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden öğrencilerin yüzdeleri dikkate alındığında 5. sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri %21 ile %3, 6. sınıf öğrencilerin yüzde değerleri %27 ile %6 iken, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri aynı olup %27 ile %7 dir. Toplama-çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu belirten farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin yüzdeleri ise sırasıyla %1, %3, %20 ve %26 dır. Tablonun ikinci kısım incelendiğinde 5.sınıf öğrencilerinin %7'i, 6.sınıf öğrencilerinin %11'i, 7.sınıf öğrencilerinin %29'u, 8.sınıf öğrencilerinin ise %43'ü doğru veya yanlış bir genelleme yazmıştır. Bu öğrencilerden yanlış genelleme yapan 5, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin yüzde değerleri ise sırasıyla %3, %4, %4 ve %8 dir. Sadece toplama veya çıkarma işleminin üzerine dağılma özelliği ile ilgili genellemeleri yapan farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin yüzde değerleri ise sırasıyla %3-%0, %6-%1, %11-%3 ve %15-%4 dür. Toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği ile ilgili genellemeleri yazan 7.sınıf öğrencileri %11 ve 8.sınıf öğrencileri %16 iken 5 ve 6.sınıf hiçbir öğrenci genelleme yapamamıştır.

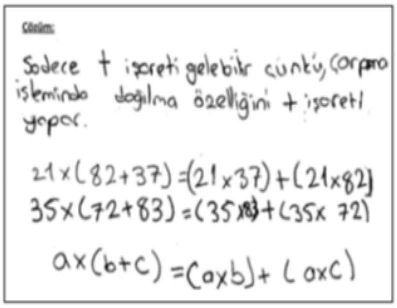
Bununla birlikte üçüncü soruya ilişkin öğrencilerle yapılan mülakatlardan belirli alıntılar aşağıda sunulmuştur: Ö1$_{5}$, Ö2$_{5}$, Ö3$_{5}$, Ö4$_{5}$, Ö5$_{5}$, Ö7$_{6}$, Ö8$_{6}$, Ö9$_{6}$, Ö13$_{7}$ ve Ö19$_{8}$ öğrencileri üçüncü soruya yanlış cevap vermiştir. Bu öğrencilerden Ö11$_{6}$ ve Ö15$_{7}$ öğrencileri ise genelleme için bir ifade yazmıştır. Bu öğrencilere ait diyaloglardan bazı bölümler aşağıda verilmiştir.



Ö1$_{5}$: Çarpmanın tersi bölme, toplamının tersi çıkarma olduğu için çıkarma ve bölme gelir...
Ö2$_{5}$: Hepsi gelir, çünkü hepsinin sonucu aynı çıkmalı, sayılar aynı çünkü…
Ö7$_{6}$: Artı gelir, çünkü parantez yaydığı için…
Ö13$_{7}$:Parantezin yayılmasından dolayı çarpma gelir. Çünkü parantezi yaydık…

Ö6$_{5}$, Ö12$_{6}$, Ö14$_{7}$, Ö16$_{7}$, Ö20$_{8}$, Ö22$_{8}$ (çarpmanın toplama üzerine) ile Ö10$_{6}$ (çarpmanın çıkarma üzerine) öğrencileri ise sadece toplama işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu ya da sadece çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerden Ö10$_{6}$, Ö14$_{7}$, Ö16$_{7}$ ve Ö20$_{8}$ öğrencileri sayısal işlemler sonucunda bu kanıya varmışlar ve sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı da dört işlemle ilgili genelleme yapmada başarısız olmuşlardır. Bununla birlikte Ö12$_{6}$ ve Ö22$_{8}$ öğrencileri ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri dikkate alarak genellemeleri yapmışlardır. Örneğin Ö10$_{6}$ ve Ö22$_{8}$ öğrencilerine ait diyaloglar ile etkinlik kartlarına yazdıkları cevaplar aşağıda verilmiştir.

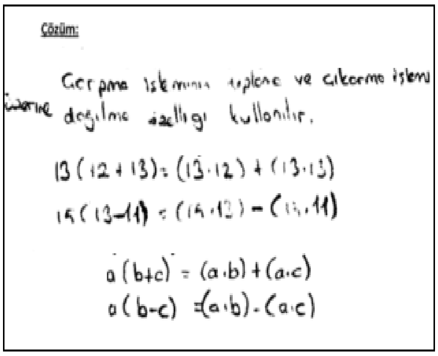
Ö10$_{6}$: Sadece artı gelir… [A: Niçin?]. Hem toplanıyor hem de çarpılıyor. Ayrıca artı yazıp işlemleri yaparsak işlemler eşit olur. Ondan dolayı sadece artı gelir… [A: Ya sayıları değiştirsek yine sadece artı işareti mi gelir?]. Öğretmenim bilmiyorum, ama işlem yaparız. Sonuçlar aynı olursa olur herhalde... [A: Peki harfleri içeren genel bir ifade yazabilir miyiz?]. Yazılmaz herhalde. Çünkü harfleri bilmiyoruz ki. Her harfin değeri farklıdır. Nasıl olacak bilmiyorum.



Ö22$_{8}$: Sadece artı işlemi gelir… [A: Niçin artı işlemi?]. Çünkü sonuçların eşit olması gerekir. Zaten çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği var. Ondan dolayı tek tek dağıtılıyor… [A: Her sayı için doğru olur mu?]. Evet öğretmenim. Sadece sayılar değişecekse olur. Ama işlemler değişirse eşit olmaz herhalde... [A: Bana bir örnek yazabilir misin?]. "3 . (7 + 4) = (3. 7) + (3. 4) olur. Burada 3'ü tek tek sayılara dağıtırız... [A: Peki bu

> *yaptıklarımızdan bir genelleme yazabilir miyiz?]. Evet. "a × (b + c) = (a × b) + (a × c)" olur.*

Benzer şekilde Ö17$_{7}$, Ö18$_{7}$, Ö21$_{8}$, Ö23$_{8}$ ve Ö24$_{8}$ öğrencileri ise hem toplama hem de çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat bu öğrencilerden Ö17$_{7}$ ve Ö21$_{8}$ öğrencileri sırasıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini deneyerek elde ettikleri cevapları karşılaştırmışlar yani sayısal işlemler sonucunda bu kanıya varmışlar ve sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı da ilgili genellemeyi yapmada başarısız olmuşlardır. Ö18$_{7}$, Ö23$_{8}$ ve Ö24$_{8}$ öğrencileri ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri dikkate alarak genellemeleri yapmışlardır. Örneğin Ö24$_{8}$ öğrencisine ait diyalog ile bu öğrencisinin etkinlik kartına yazdığı cevap aşağıda verilmiştir.



> *Ö24$_{8}$: Toplam ve çıkarma işlemi gelir… [A: Niçin sadece toplama ile çıkarma gelir?]. Öğretmenim çarpmanın toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Ona benziyor. Ondan dolayı ikisi gelir. Olmazsa öğretmenim Artı ve eksi yazalım ve işlem yapalım. Sonuçlar aynı çıkarsa söylediğimiz doğru olur… [A: Tamam, farklı sayılar alsak yine doğru olur mu?]. Evet öğretmenim, hangi sayıyı alırsan al, sonuçta sayıyı diğer sayılarla çarpacağız. Dedim ya, bu bir kuraldır. Dağılma özelliği… [A: Bir örnek verebilir misin?]. Mesela "4. (5 + 7) = 4.5 + 4.7" olur. Böyle yazabiliriz... [A: Peki burada bir genelleme yapabilir miyiz?]. Evet genelleyebiliriz. Çarpmanın toplama ve çıkram üzerine dağılma özelliğidir bu. Buradan "a × (b + c) = (a × b) + (a × c)" ve "a × (b - c) = (a × b) - (a × c)" şeklinde yazabiliriz.*

O halde Ö1$_{5}$, Ö2$_{5}$, Ö3$_{5}$, Ö4$_{5}$, Ö5$_{5}$, Ö7$_{6}$, Ö8$_{6}$, Ö9$_{6}$, Ö10$_{6}$, Ö13$_{7}$, Ö14$_{7}$, Ö16$_{7}$, Ö17$_{7}$, Ö19$_{8}$, Ö20$_{8}$ ve Ö21$_{8}$ öğrencileri üçüncü soruda sadece sayısal çözümlerin keşfine odaklandıklarından dolayı bu öğrencilerin genel amaç sayısal bir çözüm bulmadır, genelleme yapma değildir. Bu nedenle bu öğrenciler aritmetik sınıflamanın içinde yer almaktadır. Ö6$_{5}$, Ö11$_{6}$, Ö12$_{6}$, Ö15$_{7}$, Ö18$_{7}$, Ö22$_{8}$, Ö23$_{8}$ ve Ö24$_{8}$ öğrencileri ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri göz önüne alarak genelleme yapmaya çalışmışlardır. O halde bu öğrencilerin amacı, sayılar arasındaki ilişkileri genelleştirme yani kuralı cebirsel olarak ifade etmedir. Bu nedenle bu öğrenciler cebirsel sınıflamanın içinde yer almaktadır. Ayrıca Ö14$_{7}$ ve Ö20$_{8}$ öğrencileri sayısal işlemlerle dağılma özelliğinin varlığını kanıtlamış fakat genellemeleri cebirsel olarak değil doğal dille ifade etmişlerdir. Ö3$_5$, Ö4$_5$, Ö8$_6$ ve Ö13$_7$ öğrencileri ise belli sayılar için ifadenin doğru olacağını yani sonsuz sayı gelmeyeceğini iddia etmişlerdir.

Sonuç olarak doğal sayı sistemindeki özellikleri genelleme başlığı altında sunulan üç soruya ait farklı öğrenim seviyelerindeki 24 öğrenci ile yürütülen klinik mülakatlardan elde edilen bulgular bir bütün olarak değerlendirilmiş ve Tablo 7 de sunulmuştur.

Tablo 7. Üç soruya ait 24 öğrenci ile yürütülen mülakatlardan elde edilen veriler

Özellikler	Sınıflar	Yanlış Cevap	*Doğru Cevap*	*Genelleme Yapan*	*Doğru Cevap*	*Genelleme Yapan*	*Doğru Cevap*	*Genelleme Yapan*
			Sadece Toplama		*Sadece Çarpma*		*Toplama-Çarpma*	
Değişme	5.	Ö1$_5$,Ö2$_5$ Ö5$_5$	Ö3$_5$	-	-	-	Ö4$_5$, Ö6$_5$	Ö6$_5$
	6.	Ö7$_6$	Ö8$_6$	Ö8$_6$	-	-	Ö9$_6$,Ö10$_6$ Ö11$_6$,Ö12$_6$	Ö12$_6$
	7.	Ö13$_7$	Ö14$_7$	-	Ö15$_7$	Ö15$_7$	Ö16$_7$,Ö17$_7$ Ö18$_7$	Ö17$_7$ Ö18$_7$
	8.	-	Ö19$_8$ Ö20$_8$	Ö20$_8$	-	-	Ö21$_8$,Ö22$_8$ Ö23$_8$,Ö24$_8$	Ö22$_8$, Ö23$_8$ Ö24$_8$
			Sadece Toplama		*Sadece Çarpma*		*Toplama-Çarpma*	
Birleşme	5.	Ö1$_5$,Ö2$_5$ Ö3$_5$, Ö5$_5$	-	-	Ö4$_5$	-	Ö6$_5$	Ö6$_5$
	6.	Ö7$_6$ Ö11$_6$	Ö8$_6$ Ö9$_6$	-	Ö10$_6$	-	Ö12$_6$	Ö12$_6$
	7.	Ö13$_7$	Ö14$_7$ Ö17$_7$	Ö17$_7$	Ö15$_7$	Ö15$_7$	Ö7$_7$ Ö18$_7$	Ö18$_7$
	8.	Ö19$_8$	Ö20$_8$	Ö20$_8$	Ö22$_8$	Ö22$_8$	Ö21$_8$, Ö23$_8$ Ö24$_8$	Ö23$_8$ Ö24$_8$
			Sadece toplama üzerine		*Sadece çıkarma üzerine*		*Toplama-Çıkarma üzerine*	
Dağılma	5.	Ö1$_5$, Ö2$_5$ Ö3$_5$, Ö4$_5$ Ö5$_5$	Ö6$_5$	-	-	-	-	-
	6.	Ö7$_6$, Ö8$_6$ Ö9$_6$, Ö11$_6$	Ö12$_6$	Ö12$_6$	Ö10$_6$	-	-	-
	7.	Ö13$_7$ Ö15$_7$	Ö14$_7$ Ö16$_7$	-	-	-	Ö17$_7$ Ö18$_7$	Ö18$_7$
	8.	Ö19$_8$	Ö20$_8$ Ö22$_8$	Ö22$_8$	-	-	Ö21$_8$, Ö24$_8$,Ö23$_8$	Ö23$_8$ Ö24$_8$

Tablo 7 incelendiğinde öğrenim seviyesi arttıkça doğal sayı sistemi ile ilgili sayı genellemelerini tam olarak yapan öğrencilerin sayısı da artmaktadır. Özellik tüm sorularda 5 ile 6.sınıf öğrencileri arasında pek fark görülmemekle birlikte 6 ile 7.sınıf ve 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasında farklar vardır. Fakat en çok fark 7 ile 8.sınıflar arasında vardır. Üç özellik kendi içinde değerlendirildiğinde öğrencilerin değişme özelliği ile ilgili genellemeleri yapmada daha başarılı oldukları görülmektedir. Dağılma özelliğinde ise genelleme yapan öğrencilerin sayısı birleşme ve değişme özellikleri ile ilgili genellemeleri yapan öğrencilerden çok daha azdır. Bunun yanında farklı öğrenim seviyesindeki başarılı öğrencilerin genelleme yapmada diğer öğrencilere göre daha başarılıdırlar.

Tartışma ve Sonuçlar

Doğal sayı sistemi ile ilgili değişme, birleşme ve dağılma özelliklerine ait doğru genellemelere ulaşan (cebirsel özellik gösteren) farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin yüzde değerleri genelleme yapamayan (aritmetik özellik gösteren) öğrencilerin yüzde değerlerinden oldukça düşüktür. Nitekim birçok araştırmacıda ilköğretimin farklı seviyelerindeki öğrencilerin sayı sistemleri ile ilgili özellikleri genellemede başarısız olduğuna vurgu yapmıştır (Kieran, 1992; Linchevski, 1995; Warren, 2003). Fakat 5-8.sınıf öğrencileri değişme özelliği ile ilgili doğru genellemeleri hem birleşme hem de dağılma özelliğine göre daha iyi yapmakla birlikte dağılma özelliğine ait doğru genellemelere ulaşan öğrencilerin oranı çok daha azdır. Bu sonucun oluşmasında özellikle iki neden ön plana çıkabilir: Birincisi öğrencilerin daha önce değişme özelliğini içeren matematiksel (aritmetik) yapılarla informel olarak karşılaşmaları - örneğin, çarpım tablosundaki “2 × 3 = 6 = 3 × 2” ifadesi gibi-, ikincisi ise hem birleşme hem de dağılma özelliğindeki parantez kullanımı. Linchevski ve Hersovics (1994) de değişme ve birleşme özellikleri arasındaki farkın, sayıların ve parantezlerin diziliş pozisyonlarından kaynaklandığını ifade etmiştir. Bunun yanında öğrenim seviyesi arttıkça değişme, birleşme ve dağılma özellikleri ile ilgili sayı durumlarını genelleyen yani aritmetik özelliklerden cebirsel özelliklere geçiş yapan öğrencilerin sayısı çok az artmıştır. Warren (2003) de farklı öğrenim deneyimlerine sahip öğrenci grupları arasında aritmetik yapılarla ilgili genellemeleri yapmada fazla bir farkın olmadığını ifade etmiştir. Bu üç özellikle ilgili genellemeye ulaşan 5 ile 6.sınıf öğrencileri arasında çok az artış olmakla beraber 6 ile 7.sınıf ve 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasındaki artışlar daha fazladır. Fakat 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasındaki artış beklenen düzeyde olmamakla beraber diğer öğrenim seviyeleri arasındaki artışlardan oldukça fazladır.

Klinik mülakat yürütülen 5.sınıf öğrencilerinden ikisi toplama-çarpma işlemlerinde değişme ve birleşme özelliğinin olduğunu ifade etmiş fakat hiçbir 5.sınıf öğrencisi çarpmanın toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade edememiştir. Bu öğrencilerden aritmetik özellik gösteren bir öğrenci sadece sayısal işlemlere ve cevaplara odaklandığından genelleme yapmada başarısız olmuş, cebirsel özellikleri gösteren iyi düzeydeki Ö6_5 öğrenci ise sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri dikkate aldığından toplama-çarpmanın değişme ve birleşme özelliği ile ilgili genellemelerini cebirsel olarak ifade etmiştir. Nitekim yazılı sınav kâğıtlarından elde edilen verilerde 5. sınıf öğrencilerinin bu üç özellikle ilgili yetersizliklerini ortaya koymaktadır. Warren ve English (1998) ilköğretim 5.sınıf öğrencilerinden toplam 92 öğrenci ile yürüttüğü çalışmalarında aritmetikten cebire geçiş için gerekliliğine inanılan aritmetikteki bazı matematiksel yapıları-değişme ve birleşme özelliği- genellemede birçok öğrencinin başarısız olduğunu ifade etmişlerdir. Çalışmamızda 5.sınıf öğrencilerinden elde edilen sonuç araştırmacıların sonuçları ile tutarlıdır. 6.sınıf öğrencilerinden toplama-çarpma işlemlerinde değişme özelliği olduğunu ifade eden dört, birleşme özelliği olduğunu ifade eden bir öğrenci vardır. Ancak tıpkı 5.sınıf öğrencileri gibi çarpmanın toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden veya genelleyen hiçbir öğrenci yoktur. Milgram (2005) sayı sistemleri arasındaki geçişlerin önemine değinmiş ve sayı sistemindeki "$6\times(5 + 3)= (6 \times 5) + (6 \times 3)$" şeklindeki dağılma özelliğinin "$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$" şeklinde genelleştirmenin değişkenlere geçişte ve işlem yapmada anahtar rol oynadığını belirtmiştir. Linchevski ve Livneh (1999) 6.sınıf öğrencilerinin cebirsel yapılarda zorlanmalarının nedenini zayıf sayısal içeriklere ve matematik yapı bilgisindeki işlemlerin grup özelliklerine bağlamıştır. Bu bağlamda bilinmeyen ve değişken kavramını formal olarak öğrenmeye başlayan 6.sınıf öğrencilerinden çok az öğrencinin dağılma özelliği ile ilgili anlamalara sahip olması düşündürücü bir sonuçtur. Yine 6.sınıf öğrencilerden aritmetik özellik gösteren üç öğrenci herhangi bir genelleme tanımlayamamış, cebirsel özellik gösteren Ö12_6 öğrencisi ise toplama-çarpma işlemlerinde değişme ve birleşme özelliği ile ilgili genellemeleri cebirsel olarak ifade etmiştir. 6.sınıf öğrencilerine ait sınav kâğıtlarındaki verilerle mülakat verileri paralellik göstermektedir. Ayrıca 5 ile 6.sınıf öğrencilerinin sınav kağıtlarında soruların genelleme yapma ile ilgili kısımlarında daha çok öğrencilerin cevap olarak; "*toplama işleminin değişme özelliği vardır, çarpma birleşme özelliğine sahiptir, değişme özelliği vardır*,…" gibi yazılı ifadeleri seçtikleri görülmektedir. Bu ise harfli ifadeleri kullanmada zorluk yaşayacaklarına inanan öğrencilerin genellemeleri kelimelerle veya cümlelerle ifade etme istekleriyle ilgili olabilir. Doğru genellemelere ulaşmada 5 ve 6. sınıf öğrencilerinden daha iyi durumda olan 7.sınıf öğrencilerinden toplama-çarpma işlemlerinde değişme özelliği olduğunu ifade eden üç, birleşme özelliği olduğunu ifade eden iki, çarpmanın toplama-çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden yine iki öğrenci vardır. Bu öğrencilerden Ö18$_7$ öğrencisi değişme, birleşme ve dağılma özellikleriyle ilgili genellemeleri, Ö17$_7$ öğrencisi ise sadece değişme özelliği ile ilgili genellemeleri cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler sayılar ile sayıların işlem yöntemleri arasındaki ilişkileri dikkate aldıklarından dolayı genellemelere ulaşmışlardır. Diğer öğrenciler ise genel olarak sayısal işlemlere ve sayısal çözümlerin cevaplarına odaklandıklarından dolayı genellemelerde başarısız olmuşlardır. Burada matematiksel deneyim ve bilişsel gelişim açısında daha iyi düzeyde olan 7.sınıf öğrencilerinden çok az öğrenci değişme, birleşme ve dağılma işlemi ile ilgili genellemeleri yapmıştır. Birçok araştırmacı 7. sınıf öğrencilerinin değişme ve birleşme özelliği ile ilgili genellemeleri yapmada başarısız olduklarına vurgu yapmıştır (Cooper vd., 1999; Warren, 2003; Okazaki, 2006). Ayrıca mülakat cevaplarında 6 ile 7.sınıf öğrencileri arasında görülen genelleme yapma ile ilgili çok az olan artış, yazılı sınav kâğıtlarında görülmektedir. Diğer üç sınıfa göre genelleme yapmada daha başarılı olan 8.sınıf öğrencilerinden toplama-çarpma işlemlerinde değişme özelliği olduğunu ifade eden dört, birleşme özelliği olduğunu ifade eden üç, çarpmanın toplama-çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden iki öğrenci vardır. Bu öğrencilerden Ö23$_8$ ve Ö24$_8$ öğrencileri değişme, birleşme ve dağılma özellikleri ile ilgili genellemeleri cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Sınav kâğıtlarından elde edilen verilerden 8.sınıf öğrencilerinin genelleme yapmada daha başarılı olduğu görülmektedir. Ancak son sınıfa gelmiş ortaokul öğrencilerinin birçoğunun değişme, birleşme ve dağılma özelliği ile ilgili durumları genellemede başarısız olmaları daha sonraki öğrenimleri için olumsuz bir sonuçtur. Pillay, Wilss ve Boulton-Lewis (1998) birçok öğrencinin ilkokul ve ortaokul öğrenimlerinin sonunda hem birleşme hem de değişme özelliği ile ilgili durumları genelleştirmede başarısız olduklarını belirtmişlerdir. Warren (2003) de birçok öğrencinin genelleme süreçlerini anlamadan ortaokulu bitirdiğini ifade etmiştir. Elde edilen sonuç araştırmacıların çalışmaları ile benzerlik göstermektedir.

Ayrıca aritmetik özellikleri içeren çözümlerden cebirsel özellikleri içeren çözümlere olan geçişin olumlu yönde geliştiği ancak 7 ile 8. sınıf öğrencileri arasındaki gelişim hariç diğer öğrenim seviyeleri arasındaki gelişimin çok az olduğu görülmüştür. Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler değişme özelliği ile ilgili doğru genellemeleri hem birleşme hem de dağılma özelliğine göre daha iyi yapmışlardır. Tüm öğrenim seviyelerinde çarpmanın toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden ve genelleyen öğrencilerin sayısı oldukça azdır. Benzer şekilde değişme özelliği ile ilgili doğru genellemeleri yapan öğrencilerin sayısı birleşme ve dağılma özelliği ile ilgili genellemeleri yapan öğrencilerin sayısından daha fazladır. 5 ile 6.sınıf öğrencilerinin bir kaçı toplama-çarpma işlemlerinde değişme ve birleşme özelliği olduğunu ifade etmiş, fakat hiçbir 5 ile 6.sınıf öğrencisi çarpmanın toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade edememiştir. 7 ile 8.sınıf öğrencilerinin çoğu toplama-çarpma işlemlerinde değişme ve birleşme özelliğinin olduğunu ifade etmiştir. Fakat çarpmanın toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden 7 ile 8. sınıf öğrencilerin sayısı oldukça azdır. Bunun yanında tüm öğrenim seviyelerinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden ve genelleyen öğrencilerin sayısı, çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden öğrencilerin sayısından çok daha fazladır. Burada özellikle çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu ifade eden öğrencilerin sayısı oldukça azdır. Öğrenim seviyesi azaldıkça genellemeleri sözlü veya yazılı ifade eden öğrencilerin sayısı artmıştır. Ancak genellemeleri sözlü veya yazılı cümlelerle ifade eden 7 ile 8.sınıf öğrencilerinin sayısı çok az olmakla beraber, bu öğrenciler daha çok genellemeleri daha çok harflerle ifade etmeye çalışmışlardır. Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler dört işlemle ilgili özellikleri genellemede benzer zorluklara ve hatalara sahiptirler.

Bununla birlikte farklı öğrenim seviyelerindeki bazı öğrenciler bölme ve çıkarma işlemlerinde de değişme ve birleşme özelliği olduğunu, bazıları ise bölme işleminde dağılma özelliği olduğunu belirtmişlerdir. Bu sonuçlarla paralellik gösteren birçok çalışma mevcuttur (MacGregor, 1998; Cooper vd., 1999; Warren, 2003). Ayrıca farklı öğrenim seviyelerindeki çoğu öğrenci değişme, birleşme ve dağılma özellikleriyle ilgili daha fazla örnek üretmede zorlanmışlardır. Sorunun ikinci kısmında öğrencilerden en az iki tane daha örnek yazmaları istenmesine rağmen birçok öğrenci çoğu yanlış olmakla birlikte birer tane örnek yazmışlardır. Bunun iki nedeni olabilir: Birincisi öğrencilerin sorunun ilk kısmında yanlış matematiksel yapıları kullanması, ikincisi ise öğrencilerin eşittir işareti ile ilgili sınırlı deneyimleri. Bunun yanında farklı öğrenim seviyesindeki başarılı öğrencilerin genelleme yapmada diğer öğrencilere göre daha başarılıdırlar.

Sonuç olarak öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça doğal sayı sistemi ile ilgili özellikleri genelleme açısından aritmetikten cebire geçişin olumlu yönde değiştiği ve geliştiği görülmüştür. Ancak farklı öğrenim seviyeleri arasındaki bu değişim ve gelişim çok az olmuştur. Özellikle 5 ile 6 ve 6 ile 7.sınıf öğrencileri arasında çok belirgin bir değişim ve gelişim (farklılaşma) olmamakla birlikte, öğrenim seviyeleri arasındaki en belirgin değişim ve gelişim 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasında gerçekleşmiştir.

Öneriler

Son yıllarda ilkokul ve ortaokul matematik öğretim programlarında, örüntüleri ve sayı sistemlerindeki ilişkileri tanımlama ve genellemenin önemi gittikçe artmaktadır. Çalışma sonucunda farklı öğrenim seviyelerindeki ortaokul öğrencilerin doğal sayı sistemindeki işlemlerle ilgili özellikleri (değişme, birleşme ve dağılma gibi…) tanımlama ve genellemede genel olarak yetersiz oldukları tespit edilmiştir. Bu nedenle ortaokulda görev yapan öğretmenlerin; örüntü ve farklı sayı sistemlerindeki işlem özellikleri ile ilgili genellemelere daha çok önem vermesi, bu yetersizliğin giderilmesinde etkili olabilir. Çünkü örüntü ve farklı sayı sistemlerindeki özellikleri genelleme, sadece aritmetikten cebire geçişin değil aynı zamanda cebirsel düşünmenin de önemli göstergelerinden biridir ve bunlar erken yaşlardaki öğrencilerin cebirsel olarak düşünme yeteneklerini geliştirmektedir. Birçok araştırmacıda aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiye değinmemenin erken yaşlarda öğrencileri matematiksel düşünmeden yoksun bırakacağına vurgu yapmış, ilköğretim seviyesinde bu ilişkiye önem verilmesini önermişlerdir (Tall, 1992; Orton ve Orton, 1999; Carpenter ve Levi, 2000). Bu araştırmacılar ilköğretim seviyesinde cebirsel düşünmeyi sağlamak için genelleştirme yapmanın ve sembol kullanımının önemine işaret etmişler ve cebirsel düşünmenin ancak aritmetikten cebire geçişin düzgün bir şekilde yürütülmesiyle sağlanacağını belirterek bu geçişte örüntüleri ve farklı sayı sistemlerindeki özellikleri veya ilişkileri genellemenin köprü rolü oynayabileceğini ifade etmişlerdir. Bu nedenle öğrencilere kuralları ve özellikleri ezberletmekten ziyade, öğrencilerin matematiksel genellemelerin altında yatan düşünceyle ilgili çoklu örnekler hakkında düşünmelerin ötesine geçmelerine yardım eden, birçok spesifik durumu analiz etmelerine imkan sağlanmalıdır (Beatty ve Bruce, 2012). Bu yaklaşım, öğrencilerin böyle spesifik durumları örüntülere dönüştürmesine yardım eder. Sonuç olarak bu tür genellemeler değişkenlere geçişte anahtar rol oynayan cebirsel ifadelerdir (Milgram, 2005).

Kaynaklar

Akkan, Y. (2009). *İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi.* Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Akkan, Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan & İ., Ö. Zembat (Ed.), *Matematik Eğitim Teorileri, (s.43-64),* Ankara, Pegem Akademi.

Armstrong, B., E. (1995). Teaching patterns, relationships and multiplication as worthwhile mathematical tasks, *Teaching Children Mathematics*, 1, 446-450.

Beatty, R., & Bruce, C. (2012). *From patterns to algebra: Lessons for exploring linear relationships*. Toronto, ON: Nelson Education.

Bishop, J., W. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies, *Mathematics Education Research Journa*l,12, 2,107-126.

Carpenter, T., P., Levi, L., Franke, M., L. & Zeringue, J., K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking, *International Review on Mathematics Education*, 31, 1, 53-59.

Carpenter, T., P. & Levi, L. Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Research Report Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. www.wcer.wisc.edu/ncisla /publications/index.html adresinden Aralık 2008'te ulaşılmıştır.

Carpenter, T. P., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cooper, T., J., Baturo, A., R. & Williams, A., M. (1999). Unknowns, patterns, relationships, concrete materials and teaching the meaning of the algebraic expressions, 3 x. In E. B. Ogena & E. F. Golla (Eds.), *Mathematics for the 21st century, Proceedings of the 8th South East Asian Conference on Mathematics Education*, (pp. 127-136). Manila, Philippines: SEACME.

Çepni, S. (2007). *Arastırma ve proje çalısmalarına giriş*, Celepler Matbaacılık, Genişletilmiş 3. Baskı, Trabzon.

Demana, F. & Leitzel, J. (1988). Establishing fundamental concepts through numerical problem solving, In A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12*, (pp. 61-68), Reston, VA: NCTM.

Goldin, G., A. (1998). Observing mathematical problem solving through task-based interviews, In A.R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Mathematics Education*, NCTM.

Gürbüz, R. ve Akkan, Y. (2008). A comparision of different grade students' transition levels from arithmetic to algebra: A case for 'Equation' subject. *Education and Science*, 33(148), 64-76.

Hunting, R., P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice, *Journal of Mathematical Behaviour*, 16, 2, 145-165.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Karasar, N. (1995). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: 3A Araştırma Eğitim Danışmanlık.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp.390-419). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lannin, J., K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8, 7, 342-348.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. In J.P da Ponte & J. F. Matos (Eds.). *Proceedings of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, (pp.176-183).

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Sctructure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts, *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173-196.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra, *The Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.

MacGregor, M. (1998). How students interpret equations: Intuition versus taught procedures. In H. Steinberg, M.G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language communication in the mathematics classroom*, (pp. 262-270). Reston, VA: NCTM.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, &L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra*, (pp.65-111). London: Kluwer Academic Publishers.

Milgram, R., J. (2005). *The mathematics preservice teachers need to know*. Stanford, CA: Stanford University.

Okazaki, M. (2006). Semiotic chaining in an expression constructing activity aimed at the transition from arithmetic to algebra, In Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlıkova, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (pp. 257-264). Prague: PME. 4- 257.

Orton, A.& Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Eds.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, (pp. 104–120). Cassell, London.

Pillay, H., Wilss, L.& Boulton-Lewis, G. (1998). Sequential development of algebra knowledge: A cognitive analysis, *Mathematics Education Research Journal,*10, 87–102.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.

Stacey, K. The transition from arithmetic thinking to algebraic thinking, University of Melbourne, Australia, staff.edfac.unimelb.edu.au/~kayecs/IMECstacey ALGEBRA.doc adresinden Mart 2008'te ulaşılmıştır.

Tabach, M. & Friedlander, A. (2003). The role of context in learning beginnig algebra, *Proceedings of the Third Conference of theEuropean Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italia.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 495-514). Macmillan Publishing Company, Newyork.

Vance, J. (1998). Number operations from an algebraic perspective, *Teaching Children Mathematics*, 4, 282-285.

Warren, E. (2003). Young children's understanding of equals: A longitudinal study. In N. Pateman, G. Dougherty, J. Zilliox (Eds*.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, 4, (pp.379-387). College of Education: University of Hawaii.

Warren, E. & Cooper, T., J. (2008). Generalising the pattern role of visual growht patterns: Actions that support 8 year olds' thinking, *Educational Studies Mathematics*, 67, 2, 171- 185.

Zaskıs, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions, *Journal of Mathematical Behaviour*, 17, 4, 429-439.

Kaynak Gösterme

Akkan, Y., Baki, A. (2016). Doğal Sayı Sistemindeki Özellikleri Genelleme Yoluyla Görünür Kılma Bağlamında Ortaokul Öğrencilerinin Cebire Geçişlerinin İncelenmesi. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi,* 6(2), 198-230.

Citiation Information

Akkan, Y., Baki, A. (2016). Examining of Secondary School Students' Transition to Algebra in the context of Making Properties in Natural Number System Visible via Generalization. *Adiyaman University Journal of Educational Sciences,* 6(2), 198-230.