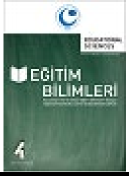
AUJES

Adiyaman University Journal of Educational Sciences

ISSN:2149-2727

DOI: http://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.456722



Students' Quantitative Reasoning while Engaging in a Mathematical Modeling Task Designed for Learning Linear Function

Aytuğ Özaltun Çelik[1], Esra Bukova Güzel[2]

[1] Pamukkale University, Faculty of Education, Mathematics Education
[2] Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Faculty of Education Faculty, Mathematics Education

ARTICLE INFO

Article History:
Received 02.09.2018
Received in revised form 27.11.2018
Accepted 28.11.2018
Available online 30.11.2018

ABSTRACT

It is important for students to think the quantities related to the linear functions, to construct new quantities and to relate the different representations of linear functions through quantitative reasoning. The purpose of this study is to examine the students' quantitative reasoning while engaging in the mathematical modeling task, which was designed, for learning the linear function. The participants of the study conducted with a teaching experiment were consisted of ten 10th grade students with three girls and seven boys. The students engaged in the written task in pairs. The data were gathered from each group's written solutions and the transcriptions of the camera recordings of the process of enagaging in the task. The data were analysed by ongoing and retrospective analyses in the direction of the students' quantitative reasoning. Based on the data analysis, it was seen that students were cognitively more active while they were working on a situation which they had experienced or which was meaningful for them. It could be said that designing the task by considering the quantitative reasoning to trigger reflective abstraction was important factor for students to be supported for constructing the quantities. In this context, it is suggested to benefit from mathematical modeling tasks while teaching the concepts.

Keywords: Linear Function, Mathematical Modeling, Quantitative Reasoning, Teaching Experiment

Extended Abstract

Purpose

The relationship between a quantity and a new quantity that is formed based on changing simultaneously with the former quantity can be expressed by the concept of function. The students first encounter linear functions (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990), and notice that the function is an interdependent relationship between the two variables during learning linear functions (Wang, Barmby, & Bolden, 2017). When examined the high school mathematics curriculum (Ministry of National Education [MNE], 2018), which just started to be implemented in our country, it is seen that there are learning outcomes related to the linear functions. One of them is "The students should explain injective function, surjective function, bijective function, equal function, identity function, constant function, linear function, odd function, even function and piecewise-defined function.” and the other is “The students should make graphical representations of the situations which can be expressed through linear functions in real life". In the direction of these learning outcomes, it is evident that there is not any critical quantity related to the linear function in the curriculum and thus, the curriculum do not support mathematics teachers to conduct their teaching. It is thought that the teachers teach the linear functions by direction instruction without focusing on the quantities such as covariation, the amount of changing, line, slope and the relationships among these quantities. In this context, it is clear that it is necessary to design a mathematical modeling task to support students to think the quantities related to the linear functions, to construct new quantities and to relate the different representations of linear functions through quantitative reasoning. Because students can construct the relationship between two quantities and realize mathematical abstraction based on their experiences on real life situations. Considering this necessity, a mathematical modeling task was designed to support the students’ reflective abstraction in a design-based study. The purpose of this study is to examine the students’ quantitative reasoning while engaging in the mathematical modeling task, which was designed, for learning the linear function.

Method

The study was conducted through a teaching experiment because it was aimed for the students to learn linear functions. Steffe and Thompson (2000) expressed that teaching experiments were used with aim of producing and testing hypotheses and assumptions during each teaching episode. The participants of the study consisted of ten 10th grade students with three girls and seven boys. The task implementation was carried out within the "Selective Mathematics" course in which the ten students were engaged. The students engaged in the written task in pairs during the four-hour lesson. While students were engaging in the task, two researchers questioned the underlying reasons of the students’ thinking. The working process of each group was recorded with a camera. The data were each group’s written solutions and the transcriptions of the camera recordings. The collected data were analysed in two stages as ongoing analyses and retrospective analyses in the direction of the students' quantitative reasoning.

Results

Based on the data analysis, it was seen that the all groups carried out the cognitive actions of determining direction of changing, covarying change, matching a quantity to another quantity, matching two quantities to the independent and dependent variables, matching quantities to axes of coordinate systems and constructing points by matching the values of the quantities. However, three groups additively and multiplicatively compared the amounts of changing and determined that the rate of change was constant. As the students could not construct all quantities in the concept of linear function, they had several difficulties. These difficulties were, not identifying amounts of changing and rate of changing, thinking the algebraic expression representing the linear relation as f(x)=mx, plotting the graph as curve, not considering starting point of the function for graphical representation, thinking the quantities independent of the context and not relating the different representations.

Discussion

The students easily identified the variables and they taken them together and formed the models representing their relations since the data necessary for constructing the concept were presented to the students. Oehrtman, Carlson, and Thompson (2008) concluded that that students had mental actions of coordinating the dependence of one variable on another variable and coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable in the context of dynamically changing events. However, researchers stated that students could not make effective reasoning that relate the amounts of change of variables to each other. These results suggested that the content of teaching should be supportive of students' reasoning on the rate of change. In this study, the students examined the direction of changing and the amounts of changing after they had identified the variables. Then, they tried to reveal the relation between the amounts of change. Because they could understand that the model they reached did not explain the situation without considering the amounts of changing. The table values given in the context of real life supported them to validate the model. If the students were presented with data on two variables having a linear relationship without context, they would not be able to examine the amounts of change because they would not consider the dynamic of change. It can be said that the structure of context led students to interpret the model they formed.

Conclusion

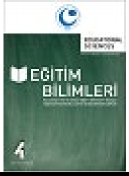
The students constructed the quantities related to the linear function through their active cognitive processes since the task was designed by taking into account the quantities and concepts that would allow the students to construct the mathematical concepts. Thinking about the situations they were trying to explain with mathematical models supported their quantitative reasoning. Additionally, they gained conceptual understandings by engaging in a process which supported them perform the steps of the modeling process, such as mathematization, interpretation, and validation. Students were cognitively more active while they were working on a situation, which they had experienced or which was meaningful for them. In this context, it is important to utilize the modeling activities in teaching a mathematical concept.

ADYÜEBD

Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi

ISSN:2149-2727

DOI: http://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.456722



Doğrusal Fonksiyonun Öğrenilmesine Yönelik Tasarlanan Matematiksel Modelleme Etkinliği Üzerine Çalışan Öğrencilerin Nicel Muhakemeleri*

Aytuğ Özaltun Çelik[1], Esra Bukova Güzel[2]

[1] Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi
[2] Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi

MAKALE BİLGİ

Makale Tarihçesi:
Alındı 02.09.2018
Düzeltilmiş hali alındı 27.11.2018
Kabul edildi 28.11.2018
Çevrimiçi yayınlandı 30.11.2018

ÖZET

Öğrencilerin nicel muhakeme yoluyla doğrusal fonksiyondaki temel nicelikleri düşünmeleri, yeni nicelikler oluşturmaları ve farklı gösterimler arasında ilişkilendirmeler yapmaları fonksiyonların kavramsal öğrenme süreci için önemlidir. Bu çalışmada doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine yönelik tasarlanan bir modelleme etkinliği üzerinde çalışan öğrencilerin nicel muhakemelerini incelemek amaçlanmıştır. Öğretim deneyine dayalı gerçekleştirilen çalışmanın katılımcılarını bir fen lisesinde öğrenim gören on tane 10.sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrenciler verilen etkinlik üzerinde kendi belirledikleri ikişer kişilik gruplar halinde çalışmışlardır. Grupların çözüm kâğıtları ve etkinlik çalışmaları boyunca alınan video kamera kayıtlarının transkriptleri araştırmanın veri kaynaklarını oluşturmuştur. Toplanan veriler öğrencilerin nicel muhakemeleri doğrultusunda devam eden analizler ve geriye dönük analizler olarak iki aşamada analiz edilmiştir. Analizler, öğrencilerin deneyimledikleri ya da anlam yükleyebildikleri bir durum üzerinde çalışırlarken zihinsel olarak daha aktif eylemler sergilediklerini göstermiştir. Etkinliğin yansıtıcı soyutlamayı destekleyecek nicel muhakemeleri göz önüne alarak tasarlanmasının öğrencilerin nicelikleri oluşturmalarını desteklemede önemli bir etken olduğu söylenebilir. Bu bağlamda modelleme etkinliklerinden kavram öğretimi süreçlerinde yararlanılması önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Fonksiyon, Matematiksel Modelleme, Nicel Muhakeme, Öğretim Deneyi

Giriş

Gerçek yaşamda karşılaştığımız birbirine bağlı olayları içeren birçok durum fonksiyon kavramı ile açıklanabilmektedir. Çünkü bir nicelik (quantity, çokluk) ile bu niceliğin değişimine bağlı olarak oluşan yeni bir niceliğin arasındaki ilişki fonksiyon kavramına karşılık gelmektedir. Wilkie (2016) dünyamızdaki birçok ilişkiyi ifade etmenin güçlü bir yolu olan fonksiyonel düşünmenin, iki ya da daha fazla değişen nicelik arasındaki ilişkilere odaklanan gösterimsel düşünmenin bir türü olduğunu ifade etmektedir. Fonksiyonun kavramsal anlamasını desteklemek için, kümedeki öğelerin diğer kümedeki öğelerle eşlenmesi olarak ifade edilen eşleme fikri (Thompson, 1994) ile bir niceliğin her bir değerinin diğer niceliğin değerini belirlemesi şeklinde ifade edilen eş zamanlı değişim fikrinin (Thompson & Carlson, 2017) birlikte ele alınması gerekmektedir. İlişkisel düşünmeyi gerektiren fonksiyonların kavramsal anlamasına sahip olma matematiksel akıl yürütmeyi desteklerken ileriki düzeylerde ele alınacak birçok matematiksel kavramın öğrenilmesine de temel hazırlamaktadır. Paralel olarak, fonksiyonların matematiğin diğer alanları için temel olduğunu ifade eden Leinhardt, Zaslavsky ve Stein (1990) öğrencilerin fonksiyonları ve grafikleri öğrenme süreçlerinin diğer alanlarda edinecekleri anlamlarını geliştirmek için sembolik sistemi kullandıkları kritik anlarından biri olarak açıklamaktadırlar. Bu doğrultuda fonksiyonların öğretiminde ele alınması gereken fikirlerin, kavramların ve niceliklerin ayrıntılandırılması önemli hale gelmektedir.

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Mathematics Teachers [NCTM], 2000) raporunda, 9-12. sınıf düzeylerinde öğrencilerin fonksiyonları ve farklı gösterimlerini anlamaları, farklı gösterimler için değişim oranını tahmin edip yorumlamaları, farklı gösterimler arasında esnek geçişler yapmaları ve bir durumdaki nicel ilişkileri tanımlayarak bu ilişkileri fonksiyonları kullanarak modellemeleri gerekliliğine vurgu yapılmaktadır. Dolayısıyla, öğrencilerin günlük yaşamlarındaki problemlerde fonksiyonel ilişkileri fark edebilmeleri, farklı fonksiyonları birbirleriyle ilişkilendirebilmeleri, gösterimler arası geçişleri yaparken gösterimlerin kendine özgü özelliklerini yorumlayabilmeleri ve fonksiyonu her özelliği ile bir bütün olarak kavrayabilmeleri öğretim süreçlerinde göz önüne alınması gereken hususlar olarak karşımıza çıkmaktadır. Diğer taraftan, ülkemiz Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) incelendiğinde, öğrencilerin fonksiyon kavramı ile ilk olarak 9.sınıf düzeyinde karşılaştıkları görülmektedir. Fonksiyon öğrenme alanının altında öğrencilerin tanım kümesi, değer kümesi, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişki gibi kavramlar açısından incelemeler yapmaları ve fonksiyonların türleri ve özelliklerini bilmeleri ile ilgili kazanımlara yer verilmektedir. Ek olarak, fonksiyon aileleri kapsamında ise doğrusal fonksiyon ve farklı gösterimlerini açıklamaları ve gerçek yaşam durumlarını doğrusal fonksiyonlarla modellemeleri beklenmektedir. NCTM'den (2000) farklı olarak ülkemiz öğretim programının doğrusal fonksiyonun içerdiği niceliklere değinmediği ve uygulayıcılara doğrusal fonksiyonun öğretilmesine yönelik fikirler vermediği görülmektedir. Oysaki öğrenciler fonksiyon ailelerinden ilk olarak doğrusal fonksiyonlar üzerinde çalıştıkları (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990) ve bu esnada fonksiyon ile ilgili fikirlerin birçoğunu açık bir şekilde görebildikleri için doğrusal fonksiyonlardaki öğrenmeleri diğer fonksiyonların inşa edilmesinde önemli bir zemin hazırlamaktadır. Örneğin, doğrusal fonksiyonları inceleyerek fonksiyonun iki değişkenin birbirlerine bağlı bir ilişki olduğunu fark etmektedirler (Wang, Barmby, & Bolden, 2017).

Öğretmenler öğretimlerini planlarken en temel kaynak olarak öğretim programını dikkate almakta ve öğretim programının gerektirdiklerini bir yol gösterici olarak kullanmaktadırlar. Bu bakış açısından, ülkemizde matematik öğretmenlerinin doğrusal fonksiyonları eş zamanlı değişim, değişim miktarı, değişim oranı, doğru, eğim gibi niceliklere ve bu nicelikler arası ilişkilendirmelere odaklanmadan daha çok işlemsel anlamayı temel alan bir yaklaşım ile öğretebilecekleri öngörülebilir. Bu düşüncenin altında yatan neden fonksiyonların kavramsal anlaşılmasını destekleyen eş zamanlı değişim fikrinin fonksiyon kavramı oluşturulurken ele alınmaması olarak söylenebilir. Bu eksik yaklaşım ise fonksiyonların kavramsal yapısının anlaşılmasında problemlere yol açmakta ve bu problemler ilk olarak doğrusal fonksiyonların öğrenilmesi sürecinde karşımıza çıkabilmektedir. Oysa doğrusal fonksiyonlar eş zamanlı değişim fikrine dayalı olarak oluşturulduğunda sabit değişim oranı fark edilebilmektedir. Confrey ve Smith (1995) fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrine sahip olan öğrencilerin doğrusal fonksiyonlardaki değişim miktarlarının birbiriyle orantılı olduğunu açık bir şekilde görebileceklerini ifade etmektedirler. Fonksiyonun değerleri arasındaki değişimin girdi değerleri arasındaki değişime oranını inceleyen öğrenciler değişim oranının sabit olduğunu fark edebilmektedirler. İki niceliğin eş zamanlı değişimi ile sabit değişim oranını fark eden öğrenciler bu sabit oran ile eğim kavramını ilişkilendirebilmekte ve cebirsel ve grafiksel gösterimler arasındaki geçişleri anlamlandırabilmektedirler. Bu doğrultuda, öğrencilerin nicel muhakeme yoluyla doğrusal fonksiyondaki temel nicelikleri düşünmelerini, yeni nicelikler oluşturmalarını ve farklı gösterimler arasında ilişkilendirmeler yapmalarını destekleyen etkinliklerin matematik öğretiminde kullanılmasının gerekliliği aşikardır. Bu etkinliklerin gerçek yaşam durumlarını içermesinin öğrencilerin anlamlı durumlar üzerinde muhakeme etmelerini sağlayarak doğrusal fonksiyonu anlamalarına yardımcı olacağı düşünülmektedir. Smith ve Thompson (2008) nicel muhakemenin büyük oranda günlük deneyimlere dayandığını ve karmaşık problemlerin çözümünde matematiksel notasyonların gücünden yararlanılabilmesi için bu notasyonların temelinde yatan anlamları kazandırdığını belirtmektedirler. Bu bağlamda gerçek yaşam durumlarını içeren matematiksel modelleme etkinlikleri üzerinde çalışmanın nicel muhakemeyi destekleyeceği düşünülmektedir.

Modelleme etkinlikleri öğrencilerin gerçek yaşam durumlarını anlamlandırarak, matematiksel yapılarını açığa çıkardıkları, geliştirdikleri ve düzenledikleri etkinliklerdir (Kaiser & Sriraman 2006). Alanyazında model oluşturma etkinlikleri olarak da adlandırılan (Kertil, Çetinkaya, Erbaş, & Çakıroğlu, 2016; Lesh & Doerr, 2003; Lesh & Harel, 2003; Lesh, Hoover, Hole, Kelly, & Post, 2000; Lesh & Yoon, 2004; Şahin & Eraslan, 2016; Tekin Dede & Bukova Güzel, 2014) modelleme etkinlikleri gerçek yaşam problemlerinin çözümü için model/ler oluşturulmasını gerektirmektedir. Modelleme etkinliklerinde öğrenciler gerçek yaşam durumlarını anlamlandırmak için halihazırda bildikleri formülleri kullanmak yerine kendi modellerini oluşturmaktadırlar (Lesh & Zawojewski 2007). Lesh ve Doerr (2003) modelleme etkinlikleri üzerinde çalışan öğrencilerin matematiksel kavramlarla gerçek yaşam arasındaki ilişkiden yaralanarak kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirebileceklerini ifade etmektedirler. Bu doğrultuda, bir kavramın oluşturulması/öğrenilmesi esnasında öğrencilerin kavramsal anlamalarını sağlamada bir araç olarak model oluşturma etkinliklerinin kullanılması önerilmektedir (Lesh & Harel, 2003).

Bu çalışma, yukarıda ifade edilen perspektiflere dayalı olarak, ikinci dereceden fonksiyon kavramının oluşturulması sürecinde bir dizi modelleme etkinliği uygulamasının gerçekleştirildiği tasarım tabanlı araştırmanın bir bölümüne odaklanmaktadır. Tasarım tabanlı araştırmada onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal öğrenmelerini sağlayacak bir öğretim dizisi tasarlanmış ve bu süreçte öğrencilerin anlamalarının gelişiminin nicel muhakeme bağlamında nasıl şekillendiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Tasarım tabanlı araştırma kapsamında öğrenme süreci yapılandırmacı bilgi kuramına dayalı ele alınmış, öğrenenlerin aktif bir şekilde bilgilerini yapılandırmaları için modelleme etkinliklerinden yararlanarak yansıtıcı soyutlamalar yapmalarına imkân sağlanmıştır. Yapılandırmacı bilgi kuramına göre öğrenme sürecini açıklayan Simon (2000) öğrenmenin uyum sağlayıcı değişimleri içerdiğini ve öğrenenlerin aktif bir şekilde mevcut bilgilerine dayalı olarak yeni bilgilerini oluşturduklarını ve düzenlediklerini ifade etmektedir. Bir başka ifadeyle, matematiği öğrenme bir kişinin (kavramları) bilme ve gerçekleştirme yollarının dönüştürülmesi sürecidir (Simon, Tzur, Heinz, & Kinzel, 2004). Öğrenenleri daha gelişmiş anlayışlar geliştirmeleri için mevcut anlayışlarını dönüştürmeye teşvik etmek matematiğin öğretilmesinin problemli bir yönü olup kavramsal yapılardaki değişikliklerin gerçekleşmesi sürecinin açıklanması yansıtıcı soyutlama yapısı ile açıklanmaktadır (Simon vd., 2004). Konold ve Johnson (1991) Piaget'in yansıtıcı soyutlama yapısının matematiksel düşüncenin gelişiminin yapılandırmacı uygulamalarında önemli bir rol oynadığını ifade etmektedirler. Bu doğrultuda tasarlanan matematiksel modelleme etkinlikleri aynı zamanda öğrencilerin öğrenme aşamasında onların yansıtıcı soyutlama yapacak sürece dâhil olmalarını sağlamasıyla mantıksal matematiksel etkinlikler gerçekleştirmelerine ortam hazırlamaktadır. Bir başka deyişle, öğrenenler bu etkinlikler üzerinde çalışırlarken bir amaç belirlemekte, belirledikleri amaca yönelik çalışmakta, amaçları ile ilişkili bir şekilde sürecin etkilerini dikkate alarak bir takım zihinsel yapılar oluşturmakta ve böylelikle yansıtıcı soyutlama yapmaktadırlar.

Öğrencilerin mevcut bilgilerinden yararlanarak bizi dizi etkinlikler gerçekleştirdikleri bu süreç onların ikinci dereceden fonksiyon kavramını oluşturma sürecini desteklemektedir. İkinci dereceden fonksiyonlara ilişkin temel fikir ve kavramları öğrenmeleri için öğrencilerin doğrusal fonksiyonlara ilişkin ön öğrenmelerini harekete geçirecek bir ekinlik ile başlanması önemli görülmüştür. Böylece öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin kavramsal yapıları inşa etmelerini ve temel fikirleri bağlam içinde yorumlamalarını sağlamak amaçlanmıştır. Bir başka deyişle, doğrusal fonksiyonlar ikinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi için bir ön gereklilik (Nielsen, 2015) olarak kabul edildiği için tasarım tabanlı araştırmanın ilk aşamasında doğrusal fonksiyonların öğrenilmesini destekleyecek Dünya'nın Dibi isimli modelleme etkinliği uygulaması gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın amacı, doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine yönelik tasarlanan modelleme etkinliği üzerinde çalışan öğrencilerin süreç boyunca ortaya çıkan nicel muhakemelerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda araştırmada "Dünya'nın Dibi etkinliği ile çalışan öğrencilerin model/ler oluştururlarken ortaya çıkan nicel muhakemeleri nasıldır?" sorusuna yanıt aranmıştır.

Kavramsal Çerçeve

Matematik için Ortak Temel Eyalet Standartları'nda (2010) [The Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)] öğrencilerin problem durumlarındaki nicelikleri ve bu nicelikler arasındaki ilişkileri anlamlandırmalarına bir başka deyişle, matematiği öğrenme için gerekli zihinsel eylemler olarak tanımlanan nicel muhakeme gerçekleştirmelerine vurgu yapılmaktadır. Thompson (1990) nicel muhakemeyi, bir durumu nicelikler ve nicel ilişkiler ağı içerisinde analiz etme olarak tanımlamaktadır. Weber, Ellis, Kulow ve Özgür (2014) de nicel muhakemeyi bir durumu anlayan, duruma ilişkin nicelikleri oluşturan, problem durumunu anlamlı hale getirmek için bu nicelikleri ilişkilendiren, düzenleyen ve kullanan bir öğrencinin zihinsel eylemlerini tanımlamanın bir yolu olarak açıklamaktadırlar. Thompson (1995) karmaşık durumların kavranmasının nicel ilişki ağlarının yapılandırılmasıyla gerçekleştirildiğine değinmektedir. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri zihinsel eylemler onların farklı kavramlar arasındaki ilişkilendirmeleri yapmalarına ve durumları nicel yapılar içerisinde değerlendirmelerine imkan vererek kavramsal öğrenmelerini desteklemektedir. Bu doğrultuda, nicel muhakeme öğretimin bir amacı olarak ele alınmalı ve nicel muhakemenin gerçekleşmesini sağlayan zihinsel operasyonlar ve kavramsal yapılar detaylandırılmalıdır (Thompson, 1990).

Thompson (1994) niceliğin, bir nesne, nesnenin niteliği/özelliği, niteliğin uygun birim ya da boyut ile ölçülebilirliği ve niteliğin ölçülebilirliğini belirten sayısallaştırma sürecinden oluştuğunu ifade etmektedir. Bir kavramı anlamlandırırken birden fazla nicelik üzerine incelemeler yapılabilmekte ve incelenen bir nicelik yeni niceliklerin oluşturulmasını tetiklemektedir. Thompson (1994) bir nicelikten yeni bir nicelik elde etme sürecinde gerçekleştirilen zihinsel eylemleri nicel operasyon olarak tanımlamaktadır. Nicel operasyonlar matematiksel kavramların doğasına uygun olarak öğrenme sürecinde gerçekleştirilmekte ve çeşitlenmektedir. Örneğin, iki niceliğin toplamsal birleştirilmesindeki nicel operasyon, bir araya getirerek bir bütün yapma ve bir bütünü parçalarına ayırmadan meydana gelirken, iki niceliğin toplamsal karşılaştırılmasındaki nicel operasyon, fazlalığı ya da eksikliği belirlemek amacı ile iki niceliğin eşleştirilmesinden meydana gelir (Thompson, 1994, s. 185-186). Bu zihinsel eylemler toplama ve çıkarmanın kavramsal temellerini oluşturmaktadır. Benzer şekilde, birbiriyle ilişkili iki niceliğin değişimini göstermenin bir yolu olan eş zamanlı değişim fikri fonksiyonu anlamak için güçlü bir mekanizmadır (Ellis, 2011). İki niceliğin birbirine bağlı olarak değişimini inceleyen birçok araştırmacı (Ellis, 2011; Johnson, 2013; Lobato & Siebert, 2002; Moore, 2014; Moore, Carlson, & Oerthman, 2009; Oerthman, Carlson, & Thompson, 2008; Thompson, 1994) fonksiyonel ilişkilerin öğrenilmesinde öğrencilerin nicel muhakemelerinin önemli olduğunu dile getirmiştir. Bu araştırmacılardan biri olan Thompson (1994), öğrencilerin eş zamanlı değişim, nicel gösterimler, sayısal ilişkiler ve bu ilişkiler ile ilgili akıl yürüterek soyutlamalar gerçekleştirmeleri halinde fonksiyon kavramını öğreneceklerini dile getirmektedir. Dolayısıyla fonksiyon kavramının öğrenilmesinde eş zamanlı değişim fikrini kazandıracak bağlamlardan yararlanılması önemli hale gelmektedir. Öğrenciler eş zamanlı değişen iki nicelik arasındaki ilişkiyi gerçek yaşam durumlarına yükledikleri anlamlarla oluşturabilmekte ve yansıtıcı soyutlamayı gerçekleştirebilmektedirler. Oerthman, Carlson ve Thompson (2008) dinamik değişimi modelleyen gerçek yaşam durumlarıyla fonksiyon kavramının anlaşılmasının ileriye dönük olarak matematikte başarılı olmak için önemli bir köprü oluşturacağını belirtmektedirler. Matematiksel modellemenin matematik yapma ve matematiği öğrenme için bir uygulama olduğunu ifade eden Weber, Ellis, Kulow ve Özgür (2014), öğrencilerin nicelikleri kavramsallaştırmalarına dayanan modelleme etkinliklerinin öğrencilerin matematiksel fikirleri ve ilişkileri keşfederlerken muhakeme ve anlam oluşturmalarını destekleyen güçlü bir yol olduğunu belirtmektedirler. Bu doğrultuda, çalışma kapsamında bir öğretim perspektifi olan Gerçekçi Matematik Eğitimi [GME (Realistic Mathematics Education)] ile ilişkili modelleme yaklaşımı (*emergent modeling*) temel alınmıştır. Bu modelleme yaklaşımına göre matematiksel bilginin gelişimi, mevcut anlamalara dayalı matematiksel modellerin ortaya çıkarılması ve bu modellerin soyut hale getirilmesiyle gerçekleşir (Kertil vd., 2016). Van den Heuvel-Panhuizen (2003) GME kapsamında, öğrencilere model/ler oluşturmayı gerektiren etkinlikler gerçek bir bağlam içerisinde sunularak onların bu süreçte ilgili bağlama gömülen fikirler üzerinde çalışmaları yoluyla yeni matematiksel kavramları oluşturmalarının tetiklendiğini ifade etmektedir. Çalışmada GME benimsenerek tasarlanan modelleme etkinliği ile öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin nicel muhakemelerinin güçlendirileceği ve kavramsal öğrenmelerinin destekleneceği düşünülmüştür.

Somut durumlardan yararlanarak bilgiyi yapılandırma, somuttan soyuta doğru ilerleyen matematiksel araçları geliştirme, bağımsız sonuçlara ulaşmaya ve yansıtmaya teşvik etme ve etkileşim yoluyla öğrenenleri sosyal etkinliklere teşvik etme prensipleri etrafında düzenlenen GME, yapılandırmacılık bilgi kuramına dayanan bir öğretim yaklaşımıdır (Simon, 2000). Gravemeijer ve Doorman (1999) bu öğretim yaklaşımında öğrencilerin hipotezler geliştirerek ve bu hipotezleri test ederek temel fikirler üzerine çalışabilecekleri bir öğrenme ortamı yaratılacağını ve kendi anlamalarına temel oluşturabilecek kavramları geliştirmelerine imkan verileceğine değinmektedirler. Bu sayede öğrenciler kendi informel bilgilerini matematiksel kavramlarla ilişkilendirebilmektedirler. Matematiği bir insan aktivitesi olarak düşünen ve matematiksel öğrenmeyi GME bakış açısına dayandıran Freudenthal (1973, 1991) matematiksel öğrenmenin gerçek yaşam durumlarını matematikselleştirmeyi içermesi gerektiğini ifade etmektedir (Gravemeijer, 1999). Bu süreci de öğrencilerin gerçek yaşam problemini düzenlemeleri ve çözmeleri için matematiği kullandıkları yatay matematikselleştirme (*horizontal mathematization*) ve yatay matematikselleştirmeye bağlı olarak oluşturdukları matematiksel ifadelerin üzerinde çalıştıkları dikey matematikselleştirme (*vertical mathematization*) şeklinde kademeli ilerleyen matematikselleştirme (*progressive mathematization*) (Alacacı, 2016; García, Maass, & Wake, 2010) olarak ele almaktadır. Bu süreçlerde öğrenciler ilk olarak bağlamı açıklayan somut bir model (*model of*) oluşturmaktadırlar. Sonrasında bu modeli bağlama ihtiyaç duymadan genelleyerek ve ilgili durumlara uyarlayarak kullanabilir (*model for*) hale getirmektedirler.

Çalışmada tasarlanan modelleme etkinliğinde ilk olarak öğrencilerin gerçek yaşam bağlamlarını incelemeleri ve bu durumları sistematik hale getirerek matematiksel kavramlarla ilişkilendirmeleri beklenmiştir. İlişkilendirdikleri fikirler ve kavramlardan yararlanarak gerçek yaşam bağlamını matematiksel olarak açıklamaları istenmiştir. Sonrasında oluşturdukları matematiksel modelleri değerlendirerek matematiksel genellemelere ulaşmaları ve kendi etkinlikleri üzerine soyutlamalar yapmaları amaçlanmıştır. Bu doğrultuda etkinlikler tasarlanırken öğrencilerin nicel muhakemelerini tetikleyerek yansıtıcı soyutlama yapmalarını destekleyen mantıksal-matematiksel yapılar göz önünde bulundurulmuştur. Simon (2006) öğretimsel tasarım bağlamında yansıtıcı soyutlama için amaca yönelik etkinlik yapısına vurgu yapmakta ve bu mantıksal-matematiksel etkinliklerin hem zihinsel hem de fiziksel etkinlikleri içerdiğini ifade etmektedir. Çalışmada bu yapıya dayalı olarak tasarlanan etkinliklerin her bir adımında öğrencilerin deneyimledikleri durumların ve bu sayede oluşturdukları zihinsel yapıların bir sonraki adımdaki fikirlerini oluşturmaları için önemli olduğu düşüncesi ön planda tutulmuştur. Bu sebeple, öncelikle öğrencilerin etkinliklerdeki fikirlere ilişkin belirli durumlara ve örneklere yönelik sonuçlar çıkarmaları, ardından belirli bir duruma özgü olmadan genel olarak fikirlere ve kavramlara ilişkin çıkarımlar ve soyutlamalar yapmaları beklenmiştir.

Yöntem

Doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine yönelik tasarlanan modelleme etkinliği üzerinde çalışan öğrencilerin süreç boyunca ortaya çıkan nicel muhakemelerinin incelendiği bu çalışma tasarım tabanlı bir araştırma kapsamında gerçekleştirilen öğretim deneyine dayandırılmıştır.

Öğretim Deneyi

Tasarım tabanlı araştırmaların en temel aşaması olan öğretim deneyi klinik mülakat yöntemine dayandırılmakta ancak, öğrencilerin bilgilerini etkileme yollarını ve araçlarını deneyimlemeyi içermesi sebebiyle klinik mülakattan daha fazlası olarak görülmektedir (Steffe, 2002). Klinik mülakat ile öğrencilerin mevcut bilgileri ortaya çıkarılması amaçlanırken, öğretim deneyi ile öğrenci anlamalarının geliştirilmesi ve bu anlamalarının nasıl ilerlediğinin ortaya çıkarılması amaçlanmaktadır (Steffe & Thompson, 2000). Steffe ve Thompson (2000), öğretimle sağlanan deneyimler olmadan, öğrencilerin oluşturacakları güçlü matematiksel kavramları ve işlemleri anlamanın ve bu kavramların ve işlemlerin araştırmacılarınkinden farklı olduğunu ortaya koyabilmelerinin mümkün olmayacağını dile getirmektedirler. Öğretimsel müdahale döngüleri ve devam eden analizler sürecini içeren öğretim deneyi araştırmacıların kavramlara ilişkin öğrenci öğrenmelerine yönelik anlayışlar oluşturmalarını sağlamaktadır (Simon, 2018). Çalışmada öğrencilerin doğrusal fonksiyonları öğrenmelerini destekleyecek bir etkinlik üzerinde çalışmaları sürecindeki nicel muhakemeleri ve bu muhakemeleri aracılığıyla öğrenme süreçleri ayrıntılı olarak incelendiği için öğretim deneyi yönteminden yararlanılmıştır. Bu çalışmada sunulan öğretim deneyi iki döngüden oluşan tasarım tabanlı araştırmanın ilk döngüsünde gerçekleştirilmiştir.

“Dünya’nın Dibi” isimli etkinlik (bkz. Ek 1) öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin temel fikirleri anlamalarını ve kavramsal öğrenmelerini desteklemek amacıyla araştırmacılar tarafından tasarlanmıştır. Etkinlik tasarlanırken doğrusal fonksiyon ile ilgili eş zamanlı değişen ve aralarında sabit değişim oranı olan iki sürekli nicelik içeren bağlam dikkate alınmıştır. İki aşamayı içeren etkinliğin birinci aşamasında derinlik-basınç, basınç-oksijenin kanda çözünme miktarı nicelikleri arasındaki ilişkinin modellemesini içeren yatay matematikselleştirmenin gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir.

İlk olarak dünyanın en derin noktası olarak bilinen Mariana Çukuru ile ilgili gerçek yaşamdan bilgilendirmeler yapılmış ve dalışlardaki vurgun olayına değinilmiştir. Vurguna uğrayan kişilerin tedavisi için hiperbarik ortamlardan yararlanıldığı açıklanmıştır. Bu gerçek yaşam durumu bağlamında öğrencilerden ilk olarak problem metni içerisinde sözel olarak verilen "her 10 metrede basıncın 1 ATM artması" ifadesini göz önüne alarak basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi oluşturmaları istenmiştir. Bu sözel ifadede değişim oranının doğrudan verilmesinin öğrencilerin duruma ilişkin herhangi bir irdeleme yapmadan ilişkiyi doğru bir şekilde yazmalarına imkan vereceği fikrine dayalı olarak tablo değerlerinin incelenmesini ve değişim oranının belirlenmesini gerektiren sorularla etkinliğe devam edilmiştir. Aynı bağlam içerisinde basınca bağlı olarak normal bir ortamda kanda çözünen oksijen miktarına ilişkin veriler ve basınca bağlı olarak hiperbarik bir ortamda kanda çözünen oksijen miktarına ilişkin veriler tablo gösterimi yardımıyla sunulmuştur. Bu ilişkiyi kurduktan sonra öğrencilerin fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirlemeleri ve devamında basınç ile çözünen oksijen miktarı arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği çizmeleri beklenmiştir. Bir sonraki soruda Mariana Çukuru'na serbest dalış yapıldığı düşünüldüğünde kanda çözünen oksijen miktarının sorulması öğrencileri oluşturmuş oldukları matematiksel modelleri kullanmaya yönlendirmiştir. Etkinliğin 1.aşamasının son sorusunda öğrencilerin tabloda hiperbarik ortamdaki kanda çözünen oksijen miktarlarına ilişkin verileri inceleyerek basınç ile hiperbarik ortamda kanda çözünen oksijen miktarı arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmeleri hedeflenmiştir.

Etkinliğin ikinci aşaması öğrencilerin irdeledikleri ve üzerinde çalıştıkları kavramlara ve modellere ilişkin genellemeler yapmalarını sağlayacak dikey matematikselleştirme sürecini içermiştir. Bu süreçte, ilk olarak, öğrencilerin ilk aşamada oluşturdukları üç matematiksel modelin genel ifadesini bir başka deyişle doğrusal fonksiyonun genel ifadesini yazmaları istenmiştir. Sonrasında yazdıkları genel ifade yer alan değişkenlerin ve katsayıların anlamlarını açıklamaları beklenmiştir. İkinci soru kapsamında öğrencilerin x'in katsayısının değişim oranı olduğunu düşünmeleri ve x'in artmasının ya da azalmasının y'yi nasıl değiştireceği ile fonksiyondaki "a" katsayısını ilişkilendirmeleri beklenmiştir. Sonraki sorularda öğrencilerin $ax + b = 0$ denklemi ile $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun ilişkisini doğru bir şekilde kurabilmelerini ve farklılıklarını anlamlandırmalarını sağlamak amaçlanmıştır. Etkinlik kapsamında öğrencilerin doğrusal fonksiyon ile ilgili olarak eşleme, eş zamanlı değişim, dönüşüm, değişim oranının sabit olması ve eğimin değişim oranı ile ilişkilendirilmesi gibi kritik fikirleri oluşturmaları hedeflenmiştir.

Çalışma Grubu

Çalışmanın katılımcılarını, amaçlı örnekleme türlerinden kolay erişilebilir ve ölçüt örnekleme ile seçilen, İzmir ilindeki bir fen lisesinde öğrenim gören ve 10.sınıf seçmeli matematik dersine kayıtlı üçü kız ve yedisi erkek olmak üzere on öğrenci oluşturmuştur. Uygulamanın yürütüldüğü okulun Fen Lisesi olarak seçilmesinin nedenleri şu şekildedir: Çalışmanın felsefi bakış açısı doğrultusunda, öğrencilerin yeni bir kavramı öğrenebilmeleri için kavrama ilişkin ön kavramları öğrenmiş olmaları gerekmektedir. Bu doğrultuda diğer okullardaki öğrencilerle karşılaştırıldığında, fen lisesi öğrencilerinin ön bilgilerinin daha güçlü olduğu varsayımı fen lisesinde öğrenimi sürdürmekte olan onuncu sınıf öğrencilerinin çalışma grubu olarak belirlenmesinde etkili olmuştur. Tasarlanan etkinliklerde ele alınan fen, fizik, spor, mimari, astronomi gibi farklı disiplinlerle ilişkili bağlamlarda fen lisesi öğrencilerinin ilişkilendirmelerinin güçlü olabileceği düşüncesi de bu grup ile çalışılmasında bir diğer etken olmuştur. Öğrencilerin tasarlanan gerçek yaşam bağlamlı etkinlikleri uygulayabilmeleri ve modellere dayalı olarak yansıtıcı soyutlama yapabilmeleri için matematiksel modelleme sürecine kısa süre içerisinde uyum sağlayabilmeleri ve fizik, kimya gibi içerikleri olan etkinliklere ilişkin akıl yürütebilmeleri önemliydi. Fen lisesi öğrencilerinin matematiksel modelleme sürecine daha hızlı adapte olabilecekleri düşünülmüştür. Ek olarak, fen lisesindeki onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin formal bir öğretim sürecine dâhil olmamaları ölçüt olarak belirlenmiştir. Çalışma etiği kapsamında öğrencilerden elde edilen veriler sunulurken gerçek isimler gizli tutularak kendilerine verilen takma isimler kullanılmıştır. Gruplardaki öğrencilerin takma isimleri ve cinsiyetleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Çalışma Grubuna İlişkin Bilgiler

Grup	İsim	Cinsiyet
Grup 1	Emre Onur	Erkek Erkek
Grup 2	Enis Asya	Erkek Kız
Grup 3	Furkan Zeynep	Erkek Kız
Grup 4	Ece Umut	Kız Erkek
Grup 5	Meriç Mete	Erkek Erkek

Veri Toplama Süreci

Etkinlik uygulaması on öğrencinin bulunduğu "seçmeli matematik" dersi kapsamında gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyi uygulamaları haftanın bir gününde iki ders saatinde yürütüldüğü için öğrenciler etkinliğin ilk aşamasının çözümünü iki ders saati, ikinci aşamasının çözümünü ise bir sonraki haftanın iki ders saati olarak toplam iki hafta ve dört ders saati süresince tamamlamışlardır. Verilen etkinlik kağıdı üzerinde öğrenciler kendi belirledikleri ikişer kişilik gruplar halinde çalışmışlardır. Etkinliğin ilk aşamasının tamamlanmasının ardından öğrenci gruplarının kavramlara ilişkin düşünceleri ele alınarak sınıfça tartışılmış ve böylelikle gruplar kendi anlayışlarını değerlendirme fırsatları yakalamışlardır. Güçlükler yaşayan gruplar da bu süreçte kendi etkinliklerini tekrar gözden geçirerek uygun fikirleri oluşturma imkanı yakalamışlardır. Öğretim deneyleri sırasında iki araştırmacı ayrı ayrı grupların çözümlerini anlamak için gözlemler yapmışlar ve öğrenci düşüncelerinin altında yatan nedenleri sorgulamışlardır. Uygulama esnasında her gruba kamera yerleştirilmiş ve bu sayede öğrenci-öğrenci ve öğrenci-araştırmacı etkileşimleri kayıt altına alınmıştır. Grupların çözüm kağıtları ve kamera kayıtlarının transkriptleri araştırmanın verilerini oluşturmuştur.

Verilerin Analizi

Toplanan veriler öğrencilerin yatay matematikselleştirme ve dikey matematikselleştirme aşamalarındaki zihinsel eylemleri açısından analiz edilmiştir. Veri toplama aşamasıyla eş zamanlı bir şekilde *devam eden analizler (ongoing analysis)*, veri toplama sürecinin tamamlanmasının ardından *geriye dönük analizler (retrospective analysis)* yapılmıştır. Öğrenci etkinlikleri incelenirken yapılandırılmamış bir şekilde gerçekleştirilen devam eden analizlerde öğrenci anlamaları bağlamında etkinlikte ortaya çıkan değişim miktarı, değişim oranı, eğim, katsayı gibi niceliklere ve eşleme, eş zamanlı değişim, toplamsal karşılaştırma, çarpımsal karşılaştırma gibi nicel operasyonlara odaklanılmıştır.

Geriye dönük analizler ise tüm döngünün tamamlanmasının ardından tüm sürece yönelik gerçekleştirilmiş ve bu süreçte Dünya'nın Dibi etkinliği üzerindeki öğrenci düşünceleri analiz edilmiştir. Steffe (2002) öğretim deneylerinde kamera kaydına alınan ve kaydedilen her bir öğretim sürecinin öğretim deneyinin ardından geriye dönük olarak incelendiğini vurgulamaktadır. Geriye dönük analiz yöntemi, bir sınıf-içi öğretim deneyi verilerini analiz etme yöntemi (Cobb & Steffe, 1983; Steffe, 1991) olup farklı öğrencilerin düşüncelerini birbirleriyle karşılaştırarak genel olarak nasıl düşündüklerini ve bu düşüncelere hangi süreçlerin etki ettiğini incelemeyi sağlamaktadır (Battista ve Clement, 2000). Bu süreçte tüm veri başlangıçtan sona ve sondan başlangıca doğru bir bütünsellik aranarak değerlendirildiği ve öğrencilerin matematiksel kavramları bu yapıya uyularak açıklandığı için geriye dönük analiz yöntemi hipotez üreten doğurgan bir yapıya sahiptir (Battista & Clement, 2000; Cobb, 2000).

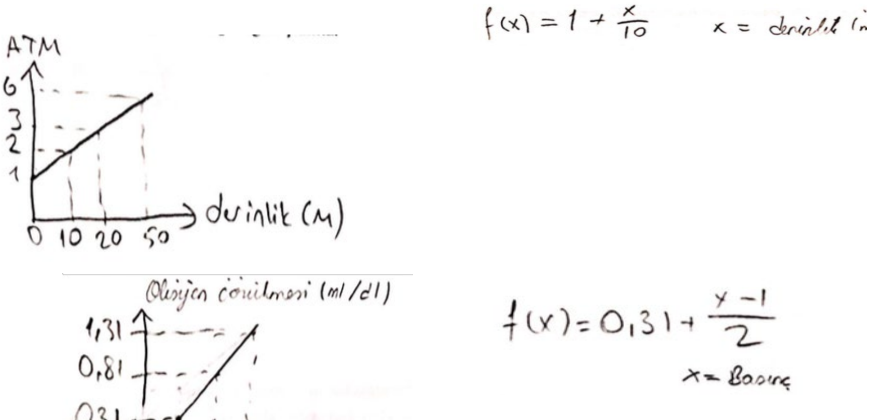
Geriye dönük analiz aşamasında ele alınan analiz birimleri, gerçekleştirilen öğretim deneyi boyunca öğrencilerin konuşmalarını içeren transkript metinleri ve grupların yazılı çözüm kağıtları olarak belirlenmiştir. Bu süreçte ilk olarak araştırmacılar tarafından ayrı ayrı öğrencilerin niceliklere değindikleri, niceliklere ulaşmalarını tetikleyen söylemlerin yer aldığı ya da nicel operasyonları gerçekleştirmelerini sağlayan etkileşimlerin olduğu transkript bölümleri belirlenmiştir. Araştırmacılar bir araya gelerek belirlenen bu transkript bölümlerini karşılaştırmışlar ve farklılıklar konusunda tartışmışlardır. Bu tartışmalara dayalı hemfikir olunan transkript bölümlerini öğrencilerin doğrusal fonksiyon ile ilişkili zihinsel eylemleri açısından sürekli karşılaştırarak açık kodlama yöntemiyle birbirlerinden bağımsız bir şekilde analiz etmişlerdir. Tüm transkript bölümlerini inceledikten sonra nicel muhakeme bağlamında odak kodlama ile analiz etmişler ve her transkript bölümünü karşılaştırarak öğrencilerin muhakemelerine ilişkin notlar almışlardır. Nicel muhakemeleriyle birlikte öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri de devam eden analiz aşamasında belirledikleri güçlükleri göz önüne alarak ortaya çıkarmışlardır. Araştırmacılar bireysel olarak gerçekleştirdikleri kodlama sürecinin ardından tekrar bir araya gelerek yaptıkları kodlamaları karşılaştırmışlar ve öğrencilerin nicel muhakemelerine ve güçlüklerine yönelik fikir birliğine ulaşarak analiz sürecini tamamlamışlardır.

Bulgular

Öğrencilerin Dünya'nın Dibi etkinliğindeki nicel muhakemeleri, yatay matematikselleştirme sürecindeki zihinsel eylemler, yatay matematikselleştirme sürecindeki güçlükler ve dikey matematikselleştirme sürecindeki zihinsel eylemler başlıkları doğrultusunda sunulmaktadır.

Yatay Matematikselleştirme Sürecindeki Zihinsel Eylemler

Grupların etkinlik kapsamında verilen gerçek bağlamları temsil eden farklı doğrusal fonksiyonları oluşturma sürecinde bir başka deyişle yatay matematikselleştirme aşamasında modelleri oluştururken ortaya çıkan zihinsel eylemlerinde benzerliklerin ve farklılıkların olduğu görülmüştür. Bu süreçte tüm gruplar değişim yönünü belirleme, iki niceliği eşleme, eş zamanlı değişim, nicelikleri bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile eşleme, nicelikleri analitik düzlemin eksenleri ile eşleme ve niceliklerin değerlerini eşleyerek analitik düzlemde noktalar oluşturma zihinsel eylemlerini gerçekleştirmişlerdir. Bu eylemler yatay matematikselleştirmede ilk aşama olarak karşımıza çıkmıştır. Ancak sadece üç grup (G3, G4, G5) değişim miktarlarını toplamsal ve çarpımsal olarak karşılaştırma nicel operasyonlarını gerçekleştirmiş ve iki niceliğin değişim oranının sabit olduğunu belirleyerek derinlik-basınç ve basınç-oksijenin kanda çözünme miktarı arasındaki ilişkiyi gösteren matematiksel modelleri (model of) elde etmişlerdir. (bkz. Şekil 1). Böylece G3, G4 ve G5 yatay matematikselleştirme bağlamında bu ilişkileri doğrusal fonksiyonlar ile temsil eden cebirsel ve grafiksel modelleri oluşturmuşlardır.



Şekil 1. G4'ün Zihinsel Eylemlerine Dayalı Yatay Matematikselleştirme Sürecinde Oluşturduğu Modeller

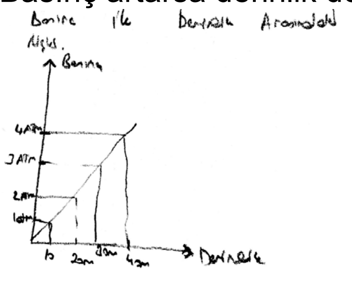
G1 ve G2'nin doğrusal fonksiyonun içerdiği tüm nicelikleri ve aralarındaki ilişkileri oluşturamamaları onların yatay matematikselleştirme sürecini etkili bir şekilde gerçekleştirememelerine neden olmuştur. Tüm grupların bu süreçte ortaya çıkan zihinsel eylemleri Tablo 2'de verilmektedir.

Tablo 2. Dünya'nın Dibi Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler

Grupların Zihinsel Eylemleri	Grup Numaraları
Değişim yönünü belirleme	G1, G2, G3, G4, G5
İki niceliği eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Eş zamanlı değişim	G1, G2, G3, G4, G5
Nicelikleri bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Değişim miktarlarını toplamsal karşılaştırma	G3, G4, G5
Değişim miktarlarını çarpımsal karşılaştırma	G3, G4, G5
İki niceliğin değişim oranının sabit olduğunu belirleme	G3, G4, G5
Nicelikleri analitik düzlemin eksenleri ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Niceliklerin değerlerini eşleyerek analitik düzlemde noktalar oluşturma	G1, G2, G3, G4, G5

Grupların tamamı iki nicelik arasındaki ilişkiyi incelerken niceliklerin değişimlerinin yönünü uygun bir şekilde belirlemişler ve ilişkili nicelikleri birbiriyle eşlemişlerdir. Dinamik olarak değişen iki niceliğin (derinlik-basınç gibi) ilişkisini incelemeye başladıklarında bir nicelik (derinlik) değişirken diğerinin de (basınç) eş zamanlı olarak değiştiğini ifade etmişlerdir. Eş zamanlı değişim fikri gerçek yaşam bağlamı içerisinde yer alan nicelikleri incelerken doğası gereği kendiliğinden ortaya çıkmıştır. Aşağıdaki alıntıda görülebileceği gibi, ikinci gruptaki öğrenciler etkinlik kapsamında derinlik-basınç ilişkisini temsil eden grafiği çizmeye çalışırlarken değişimin yönünü dikkate almışlar ve eş zamanlı değişim fikrini grafiklerine yansıtmışlardır.

Asya: Basınçla derinlik arasındaki ilişki.
Enis: Grafiği çiziniz diyor.
Asya: Basınç artarsa derinlik de artar.



G2'deki öğrenciler grafiği çizerlerken değişimin yönüne odaklanmışlar [3] ve analitik düzlemde x eksenini derinlik ve y eksenini basınç ile eşlemişlerdir. Öğrenciler hem sözel ifadelerine [3] hem de grafiğe eş zamanlı değişim fikrini yansıtmışlardır. Bu fikir grafiksel gösterimde niceliklerin değerlerini analitik düzlemin eksenlerindeki değerlerle eşlerlerken de kendini göstermiştir [4-10]. Derinlik-basınç bağlamına ait fonksiyonun grafiğini çizerlerken bağlamı yorumlamışlardır. Derinlikteki değişimle birlikte basınçta meydana gelen düzenli değişim iki nicelik arasındaki ilişkinin grafiğinin bir doğru olacağı fikrini vermiştir.

Diğer taraftan yatay matematikselleştirmeyi gerçekleştiren üç gruptaki (G3, G4, G5) öğrenciler değişim miktarlarını dikkate alarak niceliklerin değişim miktarlarını toplamsal ve çarpımsal olarak karşılaştırmışlardır. Aşağıdaki alıntıda görülebileceği gibi, üçüncü gruptaki öğrenciler tablo değerlerini yorumlarken ve bu değerler arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışırken değişim miktarlarını dikkate almışlardır.

Zeynep: Normal ortam verilerine göre oksijenin çözünmesi ile basınç arasında nasıl bir ilişki olduğunu düşünelim. Önce sözel ifade edelim, sonra sayısal ifade ederiz zaten.
Furkan: Basınç arttıkça çözünürlük artacak ama nasıl olacak?
Zeynep: [yazıyor]
Furkan: Ben de onu dedim ya başta, basınç artıyor çözünme de artmış ama birbiri ile oranlı artmamış onu bir formülle gösteremeyiz yani.
Zeynep: Öyle diyorsun..
Furkan: Dedim ya işte, burada 1'e 0,31 iken 1,3'e 0,46 1,5'e 0,56 yani orantılı artmamış o yüzden bunu nasıl cebirsel ifade ile gösteririz bilmiyorum. O yüzden oranlarına baktım.
Zeynep: Hiç böyle düşünmemiştim. Bence orantılı artmış ya bir daha hesaplayalım.1 atmosfer basınçta 0,31 artıyormuş, 2 atmosferde kaç artar diye hesaplayalım. 0,4 de kaç arttı.
Furkan: 0,3 artışta 25 artmış 2,1 7 katı, [hesaplama yapıyor kendi] doğru oranlar doğru ama nasıl doğru biliyor musun? 1 de 0,31, 1,3 de 0,46 şeklinde değil. Mesela 1'den 1,3'e geçerken 0, 15 artmış, 1'den 3,1 e geçtiğinde 2,1 arttığında 1,05 artmış. 7 katı iken 7 katı olmuş bunu yapacağız.
Zeynep: Bunu anladın mı? Ben anlamadım. Yani eklemiş üstüne diyorsun katı değil.
Furkan: Kat değil, eklemeler oranlar.

G3'teki öğrenciler iki değişken arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmeden önce sözel olarak ifade etmenin kendilerine kolaylık sağlayacağını düşünmüşlerdir. Bu süreçte ilk olarak değişimin yönünü dikkate aldıklarını gösteren açıklamalarda bulunmuşlar [4-7]. Furkan iki değişken arasında herhangi bir kat bulamadıkları için [9-12] iki nicelik arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade edemeyeceklerini belirtmiştir [7]. Ancak Zeynep sezgisel olarak iki değişkenin orantılı olarak değiştiği fikri ile tablodaki verileri tekrar incelemeye yönelmiştir. Bu aşamada bağımsız değişkendeki 2 birimlik artışa karşılık bağımlı değişkende ne kadarlık bir artış olduğu sorusuna yanıt aramış ve değişim miktarlarını çarpımsal karşılaştırmıştır [13-15]. Furkan da Zeynep'in bu fikrine dayalı olarak tablodaki değerlerin değişimini toplamsal karşılaştırmış [16-21] ve böylelikle iki değişkenin değişimleri arasında bir ilişki olduğu sonucuna ulaşmışlardır. G3'teki öğrenciler bu süreçte gerekli nicel muhakemeleri yapabildikleri için yatay matematikselleştirmeye dayalı matematiksel modelleri başarılı bir şekilde oluşturmuşlardır.

Doğrusal fonksiyonun kavramsal öğrenilmesi için önemli olan değişim oranının sabit olduğu fikrini belirleyen gruplar da değişkenler arasındaki değişim miktarlarını çarpımsal olarak karşılaştıran gruplar (G3, G4, G5) olmuştur. Aşağıdaki alıntıda görülebileceği gibi, dördüncü gruptaki öğrenciler basınç ve kandaki oksijenin çözünme miktarı arasındaki matematiksel ilişkiyi oluşturmaya çalışırken değişim yönünü dikkate almışlar ve değişim miktarlarını incelemişlerdir. Grubun nicel muhakemeleri, etkinliğin bir önceki bağlamı kapsamında gerçekleştirilen yatay matematikselleştirme sürecine benzer şekilde ortaya çıkmıştır.

Umut:	Basınç arttıkça bu da artıyor. Nasıl matematiksel olarak, şimdi biraz yarısından biraz az gibi değil mi?
Ece:	1,5'a bakalım, 1'e bakalım mesela, yarım arttığı zaman ne kadar artmış bu?
Umut:	25 artmış.
Ece:	0,25 artmış
Umut:	Bence 1'de bir istisna vardı. Gerisi düz geliyordur mesela.
Ece:	Bakalım, 1,3'e bakalım.
Umut:	Şuradaki arasıyla [1-2], şuradaki [2-3] arasına bakalım. Burada 15 var, burada 10 var. Evet, evet 1'de yine bir istisna var. Evet, evet, bitti soru bitti.
Ece:	Şurada mesela 2 artmış, 0,2 artmış [1-2], şurada da 0,2 artmış [2-3] değil mi, ama şurada 15, şurada 10 artmış
Umut:	Hayır burada 3 [1-2], bitti bitti., soru bitti.
Ece:	Dur, şurada 9 mu artmış, [3-4],
Umut:	Burada 2 ATM de 0,10 artıyor,
Ece:	Şuna bak. Burada 9 artmış, yani 0,9 artmış. Şunun üç katı artmış dimi.
Umut:	Evet, Evet yine 45
Ece:	Ne 45 i, 5 artmış.
Umut:	Ne 5i, 45 işte.
Ece:	Pardon.
Umut:	Bak burada 7, burada 35, tamam bitti, soru bitti şuan. Şimdi artık anladık. Fonksiyon gelsin şimdi. Yine 1+ var, 1+kesin var.
Ece:	[yazıyor] x'in 5 katı dimi her zaman. O zaman 5x olacak, şuradaki x de basınç artış miktarı.
Umut:	5 katı değil, 2'ye bölünmüş hali.
Ece:	Hıı doğru, bekle dur.
Umut:	x/2 bence.
Ece:	Evet, evet, bir dakika.
Umut:	Çünkü bak, 0,1 arttığında, 0,05 artıyor.

G4’teki öğrenciler ilk olarak eş zamanlı değişen iki niceliğin değişim yönünü belirlemişler ve basınç arttıkça oksijenin çözünme miktarının arttığını ifade etmişlerdir [1]. Ardından tablodaki değerleri eşleme fikrine dayalı olarak incelemeye başlamışlardır [2]. Ancak bu fikrin üzerinde çok durmayıp değişim miktarlarını incelemeye yönelmişlerdir. Basınç değerlerinin artışına karşılık oksijenin çözünme miktarında ne kadarlık bir değişim olduğunu hesaplamaya çalışmışlar ve bu süreçte ilk olarak değişim miktarlarını toplamsal olarak karşılaştırmışlardır [9-15]. Değişim miktarlarını çarpımsal karşılaştırarak aralarındaki oranın sabit olduğunu fark eden öğrenciler bu değişim oranını ½ olarak hesaplamışlardır [24-30]. Bu orana dayalı olarak doğrusal fonksiyonun cebirsel ifadesini aşağıdaki gibi oluşturmuşlardır.

$$f(x) = 0{,}31 + \frac{x-1}{2}$$

x= Basınç

Etkinlik kapsamında öğrenciler yatay matematikselleştirme aşamasını tamamlayan gruplarla sınıf tartışması yapılmış ve bu tartışmalarda bağlamları açıklayan matematiksel modeller üzerine değerlendirmeler yapılmıştır. Böylelikle yatay matematikselleştirme sürecinde güçlüklerle karşılaşan gruplar bu güçlüklerinin nedenlerini anlama, bu güçlükleri giderme ve doğrusal fonksiyonu derinlik-basınç ve basınç-oksijenin çözünme miktarı bağlamlarına dayalı olarak yorumlayabilme imkanı bulmuşlardır.

Yatay Matematikselleştirme Sürecindeki Güçlükler

İki grup (G1 ve G2) yatay matematikselleştirme sürecinde karşılaştıkları güçlükleri sebebiyle modelleri oluşturmada sınırlı eylemlerde bulunmuşlar ve bağlamları temsil eden doğrusal fonksiyonları oluşturmada problemler yaşamışlardır. Bu güçlükleri, iki niceliğin değişim miktarlarını ve değişim oranını belirlememe, doğrusal ilişkiyi temsil eden cebirsel ifadeyi sadece $f(x) = mx$ olarak düşünme, grafiği eğri olarak çizme, fonksiyonun başlangıç noktasını grafiksel gösterimde dikkate almama, cebirsel ifadede yer alan katsayıları anlamlandıramama, nicelikleri ve aralarındaki ilişkiyi bağlamdan bağımsız düşünme ve farklı gösterimleri ilişkilendirmeme olarak ortaya çıkmıştır (bkz Tablo 3).

Tablo 3. G1 ve G2’nin Dünya’nın Dibi Etkinliğinde Karşılaştıkları Güçlükler

İki niceliğin değişimin miktarlarını belirlememe/belirleyememe
İki niceliğin değişim oranı belirlememe/belirleyememe
Doğrusal ilişkiyi temsil eden cebirsel ifadeyi $\mathrm{f(x) = mx}$ olarak düşünme
Grafiği eğri olarak çizme
Fonksiyonun başlangıç noktasını grafiksel gösterimde dikkate almama
Cebirsel ifadede yer alan katsayıları anlamlandıramama
Nicelikleri ve aralarındaki ilişkiyi bağlamdan bağımsız düşünme
Farklı gösterimleri ilişkilendirmeme/ilişkilendirememe

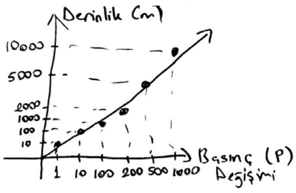
Niceliklerin değişim miktarlarını irdelemeyen, değişim oranına odaklanmayan ve sabit değişim miktarını belirleyemeyen grupların bu etkinlikte iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkiyi oluşturmada güçlükler yaşadıkları görülmüştür. Bu öğrenciler doğrusal fonksiyonun sadece $f(x) = mx$ formuna uygun olarak oluşturulabileceği düşüncesiyle bağımlı değişkenin bağımsız değişkenin doğrudan bir katı olduğu gösteren "m" değerini bulmaya çalışmışlardır. Ancak, bağımsız değişkenin bir değeri ile ona karşılık gelen bağımlı değişkenin değerini eşleyerek aralarındaki katı gösteren sabit bir "m" değeri bulamamışlardır. Bu doğrultuda iki niceliğin ilişkisini temsil eden grafiği doğru olarak değil eğri olarak çizmişlerdir. İkinci gruptaki öğrenciler basınç ve oksijenin çözünme miktarına ilişkin tablodaki verileri incelerken bu eylemlerde bulunarak nicelikler arasındaki doğrusal fonksiyon ilişkisini oluşturamamışlardır.

Asya:	Ben hepsini oranladım. Yaklaşık bir değer bulmak lazım. 100/31, 130/46, 150/56 hepsini oranlayalım diye düşündüm. Bunu oranlasak 65/23, 75/28 [hepsini oranlayarak bir kat bulmaya çalışıyor.]
Enis:	Direkt şöyle yapsak, olmuyor ki.
Asya:	Yaklaşığı işte.
Enis:	Bu [0,31] bunun [1] katı gibi duruyor ya 3'te biri gibi duruyor ya, şurada durmuyor işte, [1.36-3.1 kıyaslıyor] iki katı kadar duruyor.
Asya:	3 kat.
Enis:	Bunların ortak katını bulacağız. Yani ortak bölenini
Asya:	2.5 olsun. 2.5, 3 katı. 2.5 diyeyim. 3 de olabilir.
Enis:	Acaba parabolik bir şey olabilir mi, dimdik bir şey aramıyoruz da grafikte. Hani çünkü mesela. Şu şunun 3 katı ya üçte biri kadar. Böyle düşünelim. Şurada da iki katına yakın bir değer oluyor yani git gide eşitlenmeye başlıyor sonra geçmeye başlıyor. Hep 3 katı kadar sabit kalmıyor, şurada [sonraki diğerleri tabloda gösteriyor] iki oluyor.

Yukarıda sunulan alıntıda görüldüğü gibi, G2'deki öğrenciler basınç ile oksijenin çözünme miktarı ile ilgili verilen değerleri incelerken hem normal ortam için hem de hiperbarik ortam için bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi $f(x) = mx$ formunda düşünmüşler ve her bir satırdaki basınç ile oksijenin çözünmesine ilişkin değerler arasında bir oran bulmaya çalışmışlardır [1-3]. Her satırdaki veriler arasında farklı bir oran çıkması sebebiyle ilişkiyi gösteren grafiğin parabolik olabileceğini ifade etmişlerdir. Bu yaklaşımları öğrencilerin bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki oranın her değer için sabit olmasının doğrusal grafik için bir gösterge olduğunu düşündüklerini göstermiştir [13-16]. Grafiğin doğrudan farklı olacağını düşünmelerine karşın ilişkinin cebirsel ifadesini $f(x) = mx$ olarak ele almışlardır. Bu ifade için "m" değerini oranların yaklaşık değerlerini tahmin ederek hepsini temsil edeceğini düşündükleri bir ara değer belirlemişlerdir [6-19].

Öğrencilerin bir bağlamı temsil eden farklı gösterim şekilleri arasındaki geçişi yapamadıkları görülmüştür. Grafiksel gösterimde başlangıç noktasını dikkate almama, cebirsel gösterimdeki katsayıların grafiksel gösterimde karşılıklarını ifade etmeme gibi güçlükleri ortaya çıkmıştır. Bu güçlüklerin öğrencilerin her bir gösterimi ayrı ayrı birbirleriyle ilişkilendirmeksizin incelemelerinden kaynaklandığı söylenebilir. Birinci gruptaki öğrenciler derinlik ve basınç arasındaki ilişkinin grafiğini çizerken cebirsel ifadeyi göz önüne almamışlardır.

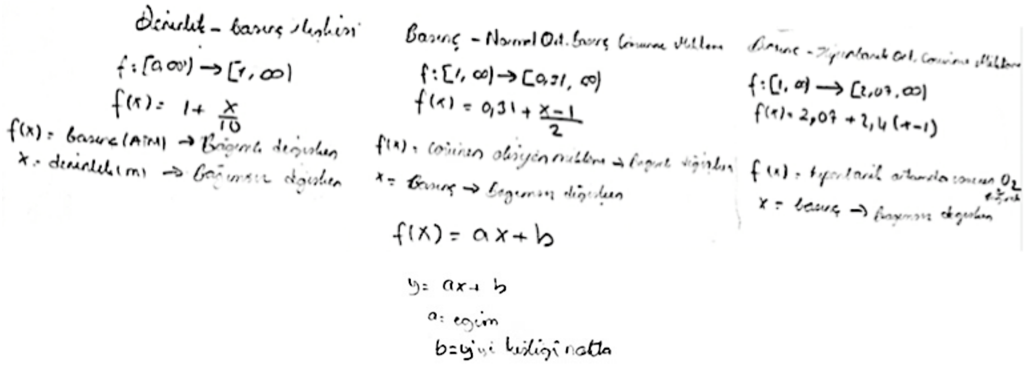
Onur: Tekrar çizeceğiz grafik.
Emre: Tamam da basınç ve derinlik arasında diyor, burada [tabloyu gösteriyor] bunu veriyor.
Onur: Oksijenin normal ortamda hiperbarik ortamda çözünmesi
Emre: Evet işte, 10 metrede azalmasını çizeceğiz, 10 yaz 100 yaz 1000 yaz.
Onur: 10, 20 30,100, 1000
Emre: O zaman 10, 20 30 100 yaz.
Onur: Basınç aşağıda mı yukarıda mı? [x ekseni ya da y eksenine mi yazacağını soruyor.]
Emre: Fark etmez.
Onur: [çiziyor]



G1'deki öğrenciler doğrusal grafiği çizerlerken derinlik için farklı değerler alarak bu derinliklere karşılık gelen basınç değerleri ile eşleme yapmışlardır [5-8]. Öğrenciler grafik çizerlerken ilk olarak derinliğe değerler atamışlar ve buna bağlı olarak basınç değerlerini bulmuş olsalar da grafiği bir fonksiyonun gösterimi olarak düşünmedikleri için bağımlı ve bağımsız değişkenleri anlamlandırmadan eksenlere rastgele yerleştirmişlerdir. Ayrıca başlangıç değeri olan (0,1) noktasını da dikkate almadan (0,0) noktasından geçecek şekilde bir başka deyişle $f(x) = mx + n$ şeklindeki fonksiyonu $f(x) = mx$ olarak düşünerek grafiğini çizmişler [12-16] ve deniz seviyesini göz ardı etmişlerdir. Bu yaklaşımları öğrencilerin nicelikleri ve ilişkilerini bağlamdan bağımsız bir şekilde düşündüklerini göstermiştir.

Dikey Matematikselleştirme Süreci

Etkinliğin ikinci aşamasında gerçekleştirilen öğretim deneyi boyunca tüm gruplar bağlama özgü modellere dayalı olarak dikey matematikselleştirme aşamasına geçiş yapmışlardır. Yatay matematikselleştirme süreci tüm sınıf ile tartışıldığı için, gruplar yatay matematikselleştirmeye dayalı oluşturulan bağlamsal modelleri yeniden inceleyip birbirleriyle ilişkilendirmişlerdir. Örneğin derinlik-basınç arasındaki ilişkiyi bağlam içinde ayrıntılı olarak incelerken ortaya çıkan zihinsel eylemlere yeniden değinerek doğrusal fonksiyona ilişkin genellemeler yapmışlardır. Böylelikle değişim miktarları sabit olan iki niceliğin eş zamanlı değişim fikrini içeren tüm bağlamlar için doğrusal fonksiyon modelinin kullanılabilir olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu süreçte çizdikleri grafikler ile oluşturdukları fonksiyonları tekrar ele almışlar ve bu fonksiyonları genel anlamda temsil eden doğrusal fonksiyon ifadesini $f(x) = ax + b$ gibi yazmışlar. Doğrusal fonksiyon ifadesindeki "a" ve "b" katsayılarının anlamlarını yorumlayarak artış miktarı, eğim, kesen vb. nicelikleri ortaya çıkarmışlardır.



Şekil 2. G4'ün dikey matematikselleştirme sürecinde çözüm kağıdından bir kesit

Şekil 2 incelendiğinde, G4'teki öğrencilerin her bir bağlama ilişkin fonksiyonları tekrar yazıp birbirleriyle karşılaştırarak üç fonksiyonu da gösteren genel bir doğrusal fonksiyon ifadesi yazdıkları görülmüştür. Bu aşamada fonksiyonlar için eşleme fikri, eş zamanlı değişim fikri, tanım ve değer kümeleri, grafikteki eğim ile cebirsel ifadedeki "a" katsayısının sabit değişim oranı ile ilişkisi gibi genellemelere ulaşmışlardır.

Dikey matematikselleştirmede öğrenciler oluşturdukları fonksiyonların tümü için değişim miktarlarının oranının sabit olmasını doğrusal fonksiyon ile ilişkilendirmiş ve bu değişimin eğimin sabit olmasıyla ilişkisini ifade etmişlerdir. Aşağıda verilen alıntıda görülebileceği gibi, G3'teki öğrenciler doğrusal fonksiyonun içerdiği niceliklerin etkinlikte yer alan bağlamların ötesinde yorumlayabilmişlerdir.

Araştırmacı: Normalde doğrusal fonksiyon dediğimizde zihninizde ne oluşuyor? Nasıl bir ifade oluşuyor?
Zeynep: Oranı sabit.
Furkan: Arttıkça artıyor.
Zeynep: Orantısal olarak. Sabit oran var.
Araştırmacı: O sabit oran nedir doğru için grafiği düşünürseniz?
Furkan: Artış oranı.
Zeynep: Artış miktarı.
Araştırmacı: Sabit bir artışı var. ooo Bu grafikte neye karşılık geliyor?
Zeynep: Hımm. a eğim, b y'yi kestiği nokta.
Furkan: Aynen öyle.

G3'teki öğrenciler doğrusal fonksiyonda sabit bir oran olduğunu [3] ve bu oranın artış miktarları ile ilişkili olduğunu [7-8] bağlamdan bağımsız bir şekilde yorumlamışlardır. Ek olarak, grafiksel gösterimde sabit değişim miktarının eğime karşılık geldiğini [11] ve cebirsel olarak da x'in katsayısı olduğunu ifade etmişlerdir.

Tartışma

Doğrusal fonksiyon kavramının öğrenilmesine ilişkin hazırlanan etkinlikte öğrenciler ilk olarak derinlik ve basınç değerlerinin eş zamanlı olarak değiştikleri düşüncesiyle iki değişkeni birbiri ile eşlemişler ve aralarındaki ilişkiyi doğrusal olarak ifade etmişlerdir. Etkinliğin bağlamı içerisinde sözel olarak ifade edilen değişim oranı öğrencilerin değişim oranı üzerine inceleme yapmadan doğrusal ilişkiyi oluşturabilmelerine neden olmuştur. Bu aşamada bazı grupların bağımsız değişkeni basınç ile bağımlı değişkeni derinlik ile eşledikleri görülmüştür. Grupların bu tür bir eşleme yapmalarının nedeninin bağlamı yorumlamadan matematiksel ifadeye odaklanmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu gruplar değişim oranını 10 olarak ele alarak cebirsel ifadeyi oluşturmuşlardır. İlişkinin grafiksel gösterimini yaparken de x eksenini basınç y eksenini derinlik ile eşlemişlerdir. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen ve Hsu (2002) fonksiyon kavramı için genellikle x-koordinatı bağımsız değişken olmasına karşın, y-koordinatını bağımsız değişken olarak ele alan ve grafik çiziminde y eksenini bağımsız değişken ile eşleyen öğrencilerin olduğunu ifade etmektedirler. Bağlam içindeki değişkenlerin matematiksel olarak uygun şekilde eşleştirilmesi, öğrencilerin doğrusal fonksiyon kavramının içerdiği niceliklere yönelik etkili zihinsel eylemleri gerçekleştirebilmelerinin ilk aşaması olduğu için oldukça kritiktir. Bu sebeple bağlam kapsamında hangi değişkenin değerinin diğer değişkenin değerini etkilediği vurgusunun açık bir şekilde yapılması gerekmektedir.

Etkinlikteki önemli aşamalardan biri öğrencilerin tablo değerlerini inceleyerek basınç ile normal ortam içerisinde kanda oksijenin çözünme miktarı arasındaki ilişkiyi oluşturmaya çalıştıkları süreç olmuştur. Bu süreçte grupların bir kısmı bir niceliğin değeri artarken diğerinin değerinin artmasını iki nicelik arasında doğru orantı olduğunun göstergesi olarak kabul etmişlerdir. 9.sınıf düzeyinde oran-orantı kavramlarını konuşan öğrenciler etkinlik kapsamında bir niceliğin artması halinde diğerinin de artması durumunu doğru orantı ile ilişkilendirmişlerdir. Öğrencilerin sadece değişimin yönünü dikkate alarak doğru orantı çıkarımında bulunmaları onların doğrusal fonksiyonun yanı sıra doğru orantı kavramına ilişkin eksik bilgilerinin olduğunu da göstermiştir. Doğan ve Çetin (2009) öğrencilerin oran ve orantı konusundaki kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin nicelikler arasındaki artışı çarpımsal olarak düşünmediklerini, sadece değişim yönüne bağlı olarak doğru ya da ters orantılı olduklarına yönelik çıkarımlar yaptıkları sonucuna ulaşmışlardır. Bu yanlış anlamaların nedeni, öğrencilerin çarpımsal akıl yürütmelerinin güçlü olmasının aksine toplamsal akıl yürütme ile sınırlı kalmalarından ve oran kavramına ilişkin eksik anlamalarından kaynaklanabilir. Karagöz Akar (2013) niceliklere karşılık gelen tüm ikililer arasında aynı çarpımsal ilişkinin olduğu farkındalığını gerektiren genelleştirilmiş oranın doğrusal fonksiyondaki y ile x arasındaki ilişkiyi bir başka ifadeyle y değerinin x değeri cinsinden ölçümünü ifade ettiğini (s. 117) açıklamaktadır. Dolayısıyla doğrusal fonksiyonların oran kavramının üzerine temellendirildiği ve öğrencilerin doğrusal fonksiyonları kavramsal öğrenmelerinde oran kavramının ve çarpımsal akıl yürütme becerisinin oldukça kritik olduğu söylenebilir.

Çalışmada bazı gruplar iki nicelik arasında doğrudan sabit bir kat bulmaya çalışmışlar ve bu sabit katı bulamadıkları için iki nicelik arasında doğrusal olmayan bir ilişki olduğunu ifade etmişlerdir. Hohensee (2016) öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin akıl yürütmelerini ortaya çıkardığı çalışmasında $y = ax + b$ fonksiyonunda $b \neq 0$ olması halinde öğrencilerin doğrusal ilişkiyi fark edemediklerine ulaşmıştır. Bu çalışmada da bu yaklaşımı sergileyen grupların olduğu görülmüştür. Ancak etkinliğin bağlamı ve aşamaları öğrencilerin doğrusal ilişkinin kat ilişkisi ile açıklanmadığını, değişim oranının sabit olması ile açıklandığını fark etmelerine yardımcı olmuştur. Tabloda verilen değerler $f(x) = mx$ ifadesine uygun olmuş olsaydı öğrenciler değişim miktarlarını ve dolayısıyla değişim oranını inceleme gereksinimi duymayacaklardı. Bu durumun öğrencilerin doğrusal ilişkiyi sadece iki değişken arasındaki bir kat ilişkisi olarak ele almalarına neden olacağı düşünülmektedir. Etkinlik kapsamında verilen tablodaki değerlerin $f(x) = mx + n$ formatına uygun olması gruplardaki değişim miktarlarını incelemeye yönlendirmiştir. Etkinlikte verilen tablo değerlerini inceleme ve bu değerleri toplamsal ve ardından çarpımsal karşılaştırma ile aralarındaki ilişkiyi belirleme sürecinde ortaya çıkan zihinsel eylemler öğrencilerin değişim oranı niceliğini oluşturmalarını sağlamıştır. Fonksiyon tablolarına ilişkin öğrencilerin fonksiyonel düşünme yollarını araştıran Tanışlı (2011) öğrencilerin fonksiyon tablolarını incelerken tekrarlayan bir örüntü aradıklarına ulaşmış ve tablolardaki bağımsız değişkenin birer birer artmasının öğrencilerin bağımlı değişkeni bu yaklaşımla ele almalarına neden olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacı öğrencilerin tekrarlayan örüntü arama yaklaşımlarının onların fonksiyonel düşünmelerini engelleyeceğini dile getirmiştir. Dünya'nın Dibi etkinliği kapsamındaki tablo verileri bu doğrultuda değerlendirildiğinde, tablodaki sayıların ondalık gösterim halinde olması ve belirli bir düzen içerisinde verilmemesinin öğrencilerin değişim miktarları arasındaki ilişkiyi incelemeye yönlendirmiştir. Bu incelemeyi yapan grupların da uygun fonksiyon modelini oluşturdukları görülmüştür. Tasarlanan bu etkinlikte doğrusal fonksiyon için kritik bir kavram olan sabit değişim oranına ulaşamayan öğrenciler için farklı yönlendirme soruları eklenebileceği düşünülmektedir. Basınç ve oksijenin çözünme miktarı arasında doğrusal bir ilişkiyi olduğunu ifade edilmesi ve bu doğrusal ilişkinin göstergesinin ne olduğunun bulunmasının istenmesi öğrencileri değişim miktarlarını incelemeye yönlendirebilir. Bu aşamadaki ek soruların öğrencilerin seviyelerine ya da ön bilgilerine göre şekillendirilebileceği ve ek sorularla öğrenme süreçlerinin desteklenebileceği düşünülmektedir.

Gruplardaki öğrenciler değişim oranının sabit olduğu sonucuna ulaştıktan sonra iki niceliği birbiriyle tekrar eşlemişler ve matematiksel modeli yazmaya çalışmışlardır. Bu aşamada bağlam doğrultusunda başlangıç noktasının üzerine oksijenin çözünme miktarında değişimin olacağı fikriyle sabit katsayıyı elde etmişlerdir. Bu aşamada $f(x) = mx + n$ formatını dikkate alarak ulaştıkları değişim oranını m ile eşleyip tablodaki herhangi bir basınç değerini ve bu değere karşılık gelen oksijenin çözünme miktarı değerini kullanarak n katsayısını bulabilirlerdi. Grupların iki nicelik arasındaki matematiksel ilişkiyi oluşturma sürecinde ifade etmeye çalıştıkları matematiksel modeli tablodaki verilerin cebirsel ifadesi olarak düşünmemelerinin "n" katsayısını bulmak için deneme yanılma yöntemini kullanmalarına neden olduğu düşünülmektedir. Buna karşın, tüm katsayılarının değerlerine ulaşıp matematiksel modeli oluşturduktan sonra tablodaki değerler ile doğrulama yapmışlardır. Modeli oluşturma aşamasında tablodaki verilerden yararlanmaları daha hızlı çözüme ulaşmalarını destekleyebilirdi.

İki nicelik arasındaki ilişkiyi temsil eden matematiksel modelin cebirsel olarak ifade edilmesinin ardından öğrenciler ilişkiyi grafiksel olarak göstermişlerdir. Johnson (2015) gerçekleştirdiği durum çalışmasında durumu öğrencilerin farklı bağlamları ve gösterimleri içeren etkinlikler üzerine çalışırlarken değişim oranı ile ilgili niceliklere yönelik muhakemelerini incelemiştir. Öğrencilerin dört farklı şişenin doldurulması sırasında yüksekliğin değişmesi ile hacminin nasıl değişeceğini tanımlamalarını istemiş ve bir grafik vererek şişelerden biri ile bu grafiği eşlemelerini istemiştir. Bu şekilde öğrencilerin değişim oranına ilişkin fikirlerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Johnson (2015), araştırmasında öğrencilerin var olan muhakemelerini ortaya çıkarmaya çalışırken, bu çalışmadan farklı olarak öğrencilerin nicel muhakemelerini destekleyecek etkinlik geliştirmiş ve bu etkinliği öğretim deneyi yöntemi ile uygulayarak öğrencilerin öğrenme süreçlerini incelemiştir. Çalışmada gruplardaki öğrencilerin grafikleri kendilerinin çizmelerinin istenmesi ile fonksiyonel ilişkilere yönelik nicel operasyonlar gerçekleştirerek muhakemeleri hem geliştirilmiş hem de grafik oluşturma sürecindeki bu muhakemelerinin açıklanması cebirsel gösterimlerdeki düşüncelerinin ayrıntılandırılmasına imkan vermiştir. Moore, Carlson ve Oehrtman (2009) öğrencileri niceliklerin eş zamanlı değişiminin grafiksel gösterimlerini oluşturmaya ve açıklamaya teşvik etmenin onların niceliklere ilişkin muhakeme becerilerini daha fazla anlamayı sağladığını açıklamışlardır.

Gruplar ilk olarak bağımsız değişken ve bağımlı değişken olarak belirledikleri nicelikleri analitik düzleme yerleştirmişler ve doğrusal ilişkilerin grafiklerini çizerken zorluk yaşamamışlardır. Grafik çizimine ek olarak öğrencilerin sabit değişim oranını grafik ile ilişkilendirmeleri beklenmiştir. Gruplardaki öğrenciler bağlamdaki nicelikleri temsil eden grafikleri çizerken değişim oranına ya da eğime değinmemişlerdir. Dolayısıyla sabit değişim oranı kavramının grafiksel ve cebirsel anlamları ilişkilendirilmemiştir. Eş zamanlı değişimi zihinsel eylemler açısından karakterize eden Oerthman, Carlson ve Thompson (2008) öğrencilerin çoğunun dinamik bir fonksiyon durumunun grafiğini oluştururken bir değişkenin değişim miktarı ile diğer değişkendeki değişim miktarını koordine etme aşamasında esnek olmadıklarını dile getirmişlerdir. Çalışmada tablodaki değerler arasındaki ilişkiyi belirleyerek yatay matematikselleştirmeyi gerçekleştirebilen öğrenciler modellerin farklı gösterimlerini yapabilmişlerdir. Ancak öğrenciler doğrusal fonksiyonu ve içerdiği fikirleri ve nicelikleri dikey matematikselleştirme aşamasında ilişkilendirmişlerdir. Öğretim sürecinde bağlam kapsamında da bu niceliklerin farklı gösterimleri arası ilişkilendirmelerin yapılması için ek sorular sorulabilir. "İki nicelik arasında doğrusal ilişki olduğunu düşündüren fikri grafikte nasıl yorumlarsınız?" şeklindeki bir soru ile öğrencilerin değişim oranını grafiksel gösterim, tablo gösterimi ve cebirsel gösterim bağlamında daha önceki süreçlerde ilişkilendirmeleri desteklenebilir.

Öğrenciler etkinlik kapsamında üç farklı doğrusal fonksiyon ifadesi oluşturmuşlar ve bu ifadelerin farklı gösterimleri üzerine incelemeler yapmışlardır. Farklı gösterimler üzerine incelemeler yapmaları dikey matematikselleştirme aşamasında doğrusal fonksiyonun içerdiği nicelikleri kavramsal olarak anlamalarını desteklemiş ve bu nicelikleri sonraki etkinlikler kapsamında istedikleri gösterimlerden yararlanarak kullanabilmelerine imkan vermiştir. Acevedo Nistal, Van Dooren ve Verschaffel (2014) doğrusal fonksiyona ilişkin problemlerde öğrencilerin gösterimsel esnekliklerinin gelişiminin bir gösterimin ne zaman kullanılabileceği ve belirli durumlarda belirli bir gösteriminin kullanımının neden daha uygun olabileceği sorularını sistematik bir şekilde ele alan öğretim ile sağlanabileceğini dile getirmişlerdir. Bunlara ek olarak, öğrencilerin doğrusal fonksiyona ve içerdiği fikirlere ilişkin genellemelere ulaşmaları da kavramları farklı durumlarda kullanabilmeleri ve kavramsal öğrenmeleri için önemli olarak düşünülmektedir. Bu doğrultuda yer verilen sorularda öğrenciler bağımlı ve bağımsız değişken, sabit değişim oranı, eğim kavramlarına ilişkin genellemelerde bulunmuşlardır. Bağlamdan bağımsız bir şekilde düşündüklerinde matematiksel olarak bu niceliklerin aynı fikre karşılık geldiği sonucuna ulaşmışlardır. Bu sürecin bağlamları açıklayan modeller üzerine sınıf tartışması yapılmasının ardından gerçekleştirilmesi öğrencilerin doğrusal fonksiyonlara yönelik genellemelerini desteklemiştir. Aksi halde yatay matematikselleştirme sürecinde güçlükler yaşayan gruplar doğrusal fonksiyon kavramına ilişkin eksik anlayışlarla sürece devam edebilirlerdi.

Öğrenciler, denklem ve fonksiyon kavramlarının birbirleriyle ilişkisine, birbirlerinden farklılaşan yönlerine ve farklı temsiller doğrultusundaki anlamlarına ilişkin çıkarımlarını da yapmışlardır. Öğrenciler fonksiyon ilişkilerini değişen niceliklere ilişkin oluşturmalarına rağmen zaman zaman fonksiyon yerine denklem kavramını kullanmışlardır. Bunun nedeninin öğrencilerin kavramlar arasındaki ayrımı daha önce düşünmemiş olmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Etkinlikte denklem ve fonksiyon kavramlarını birbiri ile ilişkili olarak yorumlamalarının istenmesi öğrencilerin uygun çıkarımlar yapmalarını desteklemiştir. Böylelikle ikinci dereceden fonksiyon kavramında bu kavramları kullanabilecek fikirleri oluşturmuşlardır. Denklem ve fonksiyon arasındaki ilişki tepe noktası, simetri ekseni gibi niceliklerin cebirsel anlamlarını ve parabolün x-eksenini kestiği noktaları yorumlayabilme kapsamında önemli olacağı için vurgulanması önerilmektedir.

Etkinlikte kavramın oluşturulması için gerekli olan veriler öğrencilere sunulduğu için öğrenciler değişkenleri kolaylıkla belirlemişler ve bu değişkenleri birlikte ele alarak ilişkilerini gösteren modelleri oluşturmuşlardır. Oehrtman, Carlson ve Thompson (2008) öğrencilerin dinamik olarak değişen durumlarla ilgili akıl yürütmeyi içeren eş zamanlı düşünmeye yönelik bir değişkeni bağımlı olduğu diğer bir değişken ile koordine etme ve bir değişkenin değişim yönünü diğer değişkendeki değişimlerle koordine etme zihinsel eylemlerini gerçekleştirdiklerine ulaşmışlardır. Ancak araştırmacılar öğrencilerin değişkenlerin değişim miktarlarını birbirleriyle ilişkilendiren etkili muhakemeler yapamadıklarını belirtmişlerdir. Bu sonuçlar öğretimin içeriğinin öğrencilerin değişim oranına ilişkin muhakemelerini destekleyici nitelikte olması gerekliliğini göstermiştir. Çalışmamızda öğrenciler değişkenleri belirledikten sonra değişimin yönünü ve değişim miktarlarını incelemişlerdir. Sonrasında da değişim miktarlarının birbiri ile ilişkisini ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Çünkü değişim miktarlarını incelememeleri halinde ulaştıkları modelin bağlamı açıklayamadığını görebilmişlerdir. Gerçek yaşam bağlamının içerisinde verilen tablo değerleri de öğrencilerin oluşturdukları modeli doğrulamada yardımcı olmuştur. Öğrencilere bağlam verilmeden sadece doğrusal ilişki içeren iki değişkene ait veriler sunulmuş olsaydı değişimin dinamikliğini düşünmeyecekleri için değişim miktarlarını incelemeyebilirlerdi. Bağlamın yapısının aynı zamanda öğrencileri oluşturdukları modeli yorumlamaya yönlendirdiği görülmüştür.

Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada etkinliğin yansıtıcı soyutlamayı destekleyecek nicel muhakemeleri göz önüne alarak tasarlanmasının öğrencilerin nicelikleri oluşturmalarını desteklemede önemli bir etken olduğu söylenebilir. Öğrenciler etkinlik boyunca farklı yönlerden güçlükler yaşamış olsalar bile doğrusal fonksiyonun temel niceliklerini anlamlandırmak için zihinsel olarak aktif çalışma gerçekleştirmişlerdir. Matematik öğretim programı kapsamında vurgu yapılmayan bir kavram olan değişim oranı kavramını farklı gösterimler açısından ele almaları güçlü ilişkilendirmeler yapabilmelerine destek olmuştur. Bu ilişkilendirmeler sadece doğrusal fonksiyon kavramı için değil aynı zamanda farklı matematiksel kavramlar için de önemli olmaktadır. Bu kapsamdan öğrencilerin cebir ve analiz için önemli olan değişim oranı fikrini zihinsel olarak oluşturmaları için etkinliklerle desteklenmelerinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu etkinliğe dahil edilen basınç-derinlik, basınç-oksijen değişim miktarı yerine fark ilişkili farklı iki niceliği ele alarak eş zamanlı değişim fikrini kazanmaları için farklı bağlamlar da kullanılabilir. Bununla birlikte ortaokul düzeyinde cebir öğrenme alanı kapsamında da öğrencilerin değişim oranı fikrini sezmeleri için bu tür etkinliklerden yararlanılması önerilmektedir.

Bununla birlikte, etkinlik öğrencilerin belirlenen matematiksel kavramları yapılandırmalarını sağlayacak nicelikler ve kavramlar göz önüne alınarak tasarlandığı için öğrenciler aktif zihinsel süreçleri yardımıyla gerçekleştirdikleri nicel operasyonlar ile nicelikleri oluşturmuşlardır. Matematiksel modellerle açıklamaya çalıştıkları durumlar üzerine düşünmek ve yatay matematikselleştirme süreçleri öğrencilerin nicel muhakemelerini desteklemiştir. Öğretim süreçlerinde kavramların kritik noktalarına ilişkin öğrencilerin düşünme süreçlerinin nasıl olduğu, hangi zihinsel eylemleri gerçekleştirdikleri ve hangi bilgileri ile ilişkilendirdiklerini ortaya çıkarabilmek amacıyla matematiksel modelleme etkinliklerinin kullanılması önerilmektedir. Öğrenciler deneyimledikleri ya da anlam yükleyebildikleri bir durum üzerinde çalışırken zihinsel olarak daha aktif eylemler sergilemektedirler. Bu bağlamda modelleme etkinliklerinden kavram öğretimi süreçlerinde de yararlanılması önemli görülmektedir.

Kaynaklar

Acevedo Nistal A., Van Dooren W. & Verschaffel L. (2014). Improving students' representational flexibility in linear-function problems: An intervention. *Educational Psychology, 34*(6) , 763-786.

Alacacı, C. (2016). Gerçekçi matematik eğitimi. E. Bingölbali, S. Arslan, & İ. Ö. Zembat, (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (pp. 341-354). Ankara: Pegem Akademi Kitabevi Yayınları.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (2000). Mathematics curriculum development as a scientific endeavor. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 737-760). Mahwah: Erlbaum.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A.E. Kristin & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*(2), 83-94.

Common Core State Standards Initiative [CCSSI]. (2010). *The common core state standards for mathematics.* Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. Retrieved April 4, 2016 from http://www.corestandards. org/the-standards/mathematics.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66–86.

Doğan, A. , & Çetin, İ. (2009). Doğru ve ters orantı konusundaki 7. ve 9. Sınıf öğrencilerinin kavram yanılgıları. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi 2*(2), 118-128.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215-235). New York: Springer.

García, F. J., Maass, K., & Wake, G. (2010). Theory meets practice: Working pragmatically within different cultures and traditions. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). Boston, MA: Springer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 111-129.

Hohensee, C. (2016). Student noticing in classroom settings: A process underlying influences on prior ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 42*(2), 69-91.

Johnson, H. L. (2013). Reasoning about quantities that change together. *Mathematics Teacher, 106*(9), 704-708.

Johnson, H. L. (2015). Secondary students' quantification of ratio and rate: A framework for reasoning about change in covarying quantities. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 64-90.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of ınternational perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310.

Karagöz Akar, G. (2013). Oran-orantı kavram tanımları, rasyonel sayılar içerisindeki yeri ve doğrusallık kavramı ile ilişkisi, I. O. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, & A. Delice (Eds), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar*, (pp.111-126). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Kertil, M., Çetinkaya, B., Erbaş, A. K., & Çakıroğlu, E. (2016). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme. In E. Bingölbali, S. Arslan, & İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 539–563). Ankara: Pegem Akademi.

Konold, C., & Johnson, D. K. (1991) Philosophical and psychological aspects of constructivism. In Steffe L. P. (Ed.) *Epistemological foundations of mathematical experience* (s. 1-13). Springer, New York.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lesh, R. A., & Doerr, H. (2003). Foundations of model and modelling perspectives on mathematic teaching and learning. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspectives on mathematics teaching, learning and problem solving* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrance Erlbauum.

Lesh, R. A., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual developing, *Mathematical Thinking and Learning. 5*(2&3),157-189.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind-in which development involves several interacting and simultaneously development strands. *Mathematical Thinking and Learning. 6*(2), 205-226.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. In A. Kelly, & R. Lesh. (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Lobato, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 87-116.

Metcalf, R. C. (2007). *The nature of students' understanding of quadratic functions*, Yayınlanmamış doktora tezi, The State University of New York at Buffalo, ABD.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 102-138.

Moore, K. C., Carlson, M. P., & Oehrtman, M. (2009). The role of quantitative reasoning in solving applied precalculus problems. *Proceedings of the Twelfth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Raleigh, NC: North Carolina State University.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nielsen, L. E. J. (2015). *Understanding quadratic functions and solving quadratic equations: An analysis of student thinking and reasoning.* Yayınlanmamış doktora tezi, Washington Üniversitesi, Missouri, ABD.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 150-171). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Simon, M. A. (in press). An emerging methodology for studying mathematics concept learning and instructional design. *Journal of Mathematical Behavior. x*(x), xx-xx.

Simon, M. A. (2000). Constructivism, mathematics teacher education, and research in mathematics teacher development. In L.P. Steffe, & P.W. Thompson (Eds.). *Radical constructivism in action: Building on the pioneering work of Ernst von. Glasersfeld* (pp. 213-230). London: Routledge-Falmer.

Simon, M., Tzur, R., Heinz, K. & Kinzel, M., (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305-329.

Smith, J., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York: Erlbaum.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 102*, 1-41.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. R. Lesh, & A. E. Kelly (Ed.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L.P. (1991). *Epistemological foundations of mathematical experience*, New York: Springer.

Şahin, N., & Eraslan, A. (2016). İlkokul öğrencilerinin modelleme süreçleri: Suç problemi. *Eğitim ve Bilim, 41*(183), 47-67.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Tekin Dede, A., & Bukova Güzel, E. (2014). Model oluşturma etkinlikleri: Kuramsal yapısı ve bir örneği. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 33*(1), 95-112.

Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic.* Progress report to the National Science Foundation. San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 4, pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (1995). Notation, convention, and quantity in elementary mathematics. J. Sowder & B. Schapelle (Ed.), *Providing a foundation for teaching middle school mathematics* (pp. 199-221). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2013). Why use f (x) when all we really mean is y. *OnCore, The Online Journal of the AAMT*, 18-26.

Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: foundational ways of thinking mathematically. J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Wang, Y., Barmby, P., & Bolden, D. (2017). Understanding linear function: a comparison of selected textbooks from England and Shanghai. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 131-153.

Weber, E., Ellis, A., Kulow, T., & Ozgur, Z. (2014). Six principles for quantitative reasoning and modeling. *Mathematics Teacher, 108*(1), 24-30.

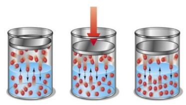
Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 333-361.

Ek 1. Etkinlik: Dünya'nın Dibi

1.Aşama

Kanadalı yönetmen James Cameron, 1989 yılında çektiği ve okyanusların derinliklerinde keşif yapan bir araştırma ekibini anlattığı Abyss filmine konu olan, "Dünya'nın Dibi" olarak bilinen 10.994 metre derinlikteki Mariana Çukuru'na 2012 yılında özel yapım Challenger Deep isimli denizaltı ile dalış yapmış ve dip noktasında 6 saat kalmıştır. Denizaltı olmadan bu dalışı yapmaya kalksaydı derinlerden su yüzeyine çıktığında ani basınç değişiminden dolayı vurgun (dekompresyon hastalığı) yiyebilirdi.

Bunun nedeni ise derinliklere inildiğinde her 10 metrede basıncın 1 ATM artmasına bağlı olarak oksijen, karbondioksit ve azot gibi gazların dokularda ve kanda daha fazla çözünmesidir. Yüksek basınçlı derinliklerden aniden düşük basınçlı ortama geçildiğinde, kanda ve dokulardaki çözünmüş gazlar, çözünmüş durumdan çıkıp, kabarcıklar şekline dönüşür. Bu kabarcıkların genişlemesiyle hücre şişer ve patlayarak ortadan kalkar ve vücutta çeşitli hasarlara neden olabilir. Scuba (Self Contained Underwater Breathing Aparatus- Su altında kendi kendine yetebilen soluma donanımı) dalışı yani tüplü dalış yapanların da bu basınç değişikliğini dikkate almadıkları durumlarda kötü sonuçlarla karşılaştıkları görülmektedir. 2006 yılında Fenerbahçe Kulübü eski Başkanı Ali Şen ile birlikte tüplü dalış yapan Bodrum Clup Flipper'ın sahibi Ahmet Bayer 53 metreye inmiş ve vurgun yemiştir. Ardından basınç odasına alınarak hiperbarik tedavisine başlanmıştır.



Hiperbarik tedavisinde tamamen kapalı bir basınç odasında 1atmosfer basınçtan daha yüksek bir basınç altında, maske, başlık veya endotrakeal tüple (solunumu güvenlik altına almak veya solunumu kontrol etmek amacıyla trakea yerleştirilen içine tüp) aralıklı olarak oksijen solutulmaktadır. Bu ortamda % 100 oksijen solunduğunda plazmada oksijenin çözünürlüğü artar. Bunun yanında, hacmi genişleyen nitrojen kabarcıklarının yeniden erimiş nitrojen duruma geçmesi sağlanır.

Oksijenin normal ortamda ve hiperbarik ortamda bazı basınçlarda kandaki çözünme miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Basınç (ATM)	Normal ortam (ml/dl)	Hiperbarik ortam (ml/dl)
1	0.31	2.07
1.3	0.46	2.79
1.5	0.56	3.27
2.4	1.01	5.43
3.1	1.36	7.11

a) Basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz.

b) Basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi gösteren grafiğini çiziniz. Grafiği cebirsel karşılaştırarak yorumlayınız.

c) Tablodaki normal ortam verilerine göre oksijenin çözünmesi ile basınç arasında nasıl bir ilişki vardır? Matematiksel olarak ifade ediniz. Oluşturduğunuz matematiksel ifadenin bütün değerler için uygun olup olmadığını inceleyiniz.

d) Bu ilişkinin grafiğini çiziniz ve nasıl çizdiğinizi açıklayınız. Grafiği cebirsel ifadeyle ve tabloyla karşılaştırarak yorumlayınız.
e) Mariana Çukuruna serbest dalış yaptığında/yapabildiğini düşündüğümüzde dokularında çözünen oksijen miktarı ne kadar olur?
f) James Cameron hiperbarik bir ortamda olsaydı aynı derinlikte dokularında çözünen oksijen miktarı ne kadar olurdu?

2.Aşama

a) Etkinliğin birinci aşamasında oluşturmuş olduğunuz üç fonksiyonu temsil edecek genel ifadeyi x, $f(x)$ değişkenlerini ve a, b katsayılarını kullanarak yazınız. a ve b katsayılarının ve x ve $f(x)$ değişkenlerinin anlamları doğrultusunda fonksiyonu yorumlayınız. Bu değerler grafiksel gösterimde neye karşılık gelmektedir? Açıklayınız.
b) Yazmış olduğunuz doğrusal fonksiyon ifadesinde x'in katsayısının $2a$ olduğunu düşününüz. İlk fonksiyon ile karşılaştırarak farklılıklarını ve benzerliklerini nedenleriyle birlikte yorumlayınız.
c) $\square\square + \square = 0$ gösterimine uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yazınız ve bu denklemle ilişkili bir doğrusal fonksiyon oluşturarak aralarındaki fark ve benzerlikleri inceleyiniz.
d) Yazdığınız denklemle çözüm kümesi aynı olacak farklı denklemler oluşturunuz ve bu denklemler arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.
e) Bu denklemlerin tümünü gösteren genel bir matematiksel ifade yazınız.
f) Yazdığınız fonksiyonun (c basamağında) x eksenini kestiği noktadan geçen başka doğrusal fonksiyonlar yazınız. Bu fonksiyonları karşılaştırınız, farklılık ve benzerliklerini yazınız.
g) (e) ve (f) basamaklarında ulaştığınız sonuçları dikkate alarak ne gibi çıkarımlarda bulunursunuz?
h) Doğrusal fonksiyon ve kritik özelliklerine yönelik her aşamada yaptıklarınızla ilgili olarak bir genelemeye ulaşabilir misiniz? Ayrıntılarıyla yazınız.