T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ARALIK SAYI DİZİLERİNİN YENİ BİR SINIFI VE UYGULAMALAR

ZEYNEP TOPRAKTAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2020

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ARALIK SAYI DİZİLERİNİN YENİ BİR SINIFI VE UYGULAMALAR

ZEYNEP TOPRAKTAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 03/02/2020 tarihinde asagıdaki jüri üyeleri tarafından oybirligi/~~oyçoklugu~~ ile kabul edilmistir.

Prof. Dr. Ayhan ESİ
Danışman

Prof.Dr.M.Kemal ÖZDEMİR **Doç.Dr.Tayfun SERVİ**

Üye **Üye**

Prof. Dr. Murat KOCA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ARALIK SAYI DİZİLERİNİN YENİ BİR SINIFI VE UYGULAMALAR

Zeynep TOPRAKTAN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ayhan ESİ
Yıl : 2020, Sayfa Sayısı : 38

Jüri : Prof.Dr.Ayhan ESİ
Prof.Dr.M.Kemal ÖZDEMİR
Doç. Dr. Tayfun SERVİ

Bu tez çalışmasında Orlicz fonksiyonu yardımıyla aralık dizi uzaylarının yeni bir sınıfını tanımlayarak bu uzayın çeşitli topolojik ve cebirsel özellikleri incelemek ve uygulamaları ile birlikte ϕ-yakınsaklığı hakkında çalışmaktır. Literatürde 1950'li yıllardan itibaren nümerik analizin bir alt kolu olarak çalışılmaya başlanan aralık sayıları ve son yıllarda çalışılmaya başlanan aralık sayı dizi uzayları ve orijinal olarak Orlicz fonksiyonu yardımıyla aralık sayı dizilerinin ϕ-yakınsaklığı hakkında bir çalışma olacaktır.

Anahtar Kelimeler : Aralık sayısı, aralık sayılarının dizi uzayları, Orlicz fonksiyonu.

ABSTRACT

MSc THESIS

ON A NEW CLASS OF INTERVAL NUMBER SEQUENCES DEFINED BY ORLICZ FUNCTION AND APPLICATIONS

Zeynep TOPRAKTAN
Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ayhan ESİ
Year : 2020, Number of pages: 38

Jury : Prof. Dr. Ayhan ESİ
Prof.Dr.M.Kemal ÖZDEMİR
Assoc.Prof.Dr.Tayfun SERVİ

In this thesis, with the help of Orlicz function, it is aimed to define a new class of range array spaces and to examine various topological and algebraic properties of this space and to work on ϕ-convergence together with its applications. In the literature, there will be a study on the number of intervals that have been studied as a sub-branch of numerical analysis since the 1950s, and the range number sequence spaces that have been studied in recent years and the ϕ-convergence of interval number sequences originally with the help of the Orlicz function.

Key Words : Interval numbers, sequence spaces of interval numbers, Orlicz function.

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tez çalışmamı tamamlamamda benden yardımlarını esirgemeyen T.C. Adıyaman Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Öğretim Üyesi saygı değer hocam Prof. Dr. Ayhan ESİ ‘ye teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

$I\mathbb{R}$: Aralık sayıları cümlesi

sup : En küçük üst sınır

c : Yakınsak diziler uzayı

c_0 : Sıfıra yakınsak diziler uzayı

l_∞ : Sınırlı diziler uzayı

w : Reel terimli diziler uzayı

$\overline{c}$: Yakınsak aralık sayı dizileri uzayı

$\overline{c}_0$: $\overline{0} = [0, 0]$ aralık sayısına yakınsak aralık sayı dizileri uzayı

$\overline{l}_\infty$: Sınırlı aralık sayı dizileri uzayı

$\overline{w}$: Reel terimli tüm aralık sayı dizlerinin uzayı

1. GİRİŞ

Sayısal analizde sayılar yerine reel sayıların kapalı aralıklarının hesaplamada kullanıldığı alanlardan birisi aralık sayılarının incelenmesi analizidir. Aralık sayılarının analizi kesinlikle doğru olan hesaplama sonuçlarını elde etmek için başvurulan yöntemlerden birisidir. Alışılagelmiş bir hesaplamanın sonucu reel eksen üzerinde doğru yanıttan bilinmeyen uzaklıkla bulunan bir noktadır ve sorulan, bu uzaklığın tam olarak ne kadar olması gerektiğidir. Birçok durumda verilen yanıt "oldukça küçük" şeklindedir. Ancak bu küçüklüğün ne kadar olduğu açık değildir. Bazı çalışmalarda bu uzaklığın değerinin bilinmesi oldukça önemli olmasından dolayı hesaplamalarda hata analizinin yapılması gerekir. Bir aralık hesabının sonucunda elde edilen aralık, bir sayı çifti ile oluşturulan bir alt sınır ve bir üst sınır olarak cevabı kesin olarak sağlayabilir. Buna rağmen gerçek yine de bilinmeyebilir, fakat en azından ne kadarının bilinmediğini bilme şansı elde edilir [1]. "Aralık analizi ile hesaplanan sonucun doğru olduğundan nasıl emin olabiliriz?" sorusunun yanıtı oldukça basittir, zira hataların birçok türü aralık analizi kullanılarak her adımda tahmin edilebilir. Örneğin veri girişi hataları, yuvarlama hataları ve kesme hataları gibi.

Sayısal hesaplamalarda hatanın nasıl hesaplanabileceği, aşağıda vereceğimiz örnek aralık analizini kullanarak gösterilmektedir. Bu örnek ile yuvarlama hatasının etkisi gösterilmektedir.

$x = -0.315$ için,

$$y = 1 + \frac{x^2}{2}$$

ifadesini hesaplayacağız.

$$y = 1 + \frac{(-0.315)^2}{2} = 1.0496125$$

Bu ifade üç ondalıklı olarak yuvarlama yapılırsa $y = 1.05$ elde edilir. Bu durumda hatanın büyüklüğü $y = 1.05 - 1.0496125 = 0.0003875$ olur.

Aralıklar kullanarak bu hesaplamayı aynı makinede üç ondalığa kadar yeniden yapalım. Öncelikle

$x^2 = (-0.315)^2 = 0.099225\ olup\ bu\ sayı$ $[0.09, 0.10]$ aralığı içinde olup elde edilen bu aralığı hesaplamanın her adımında kullanalım. Böylece,

$$y = 1 + \frac{(-0.315)^2}{2} \in 1 + \frac{1}{2}[0.09, 0.10]$$

$$\in 1 + [0.045, 0.050] = [1.045, 1.050]$$

elde edilir. Dikkatli bir inceleme ile y' nin doğru değeri kesinlikle $[1.045, 1.050]$ aralığına ait olduğu görülmektedir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Yeni bir yapı olan aralık analizi, sayısal analiz içinde ortaya çıkmıştır. 1950 yılı ortalarında, aralık aritmetiğinin temel ilkeleri birbirlerinden bağımsız ve eş zamanlı olarak Amerika Birleşik Devletleri'nde Paul S. Dwyer (1951, [2]) ve Ramon E. Moore (1959, [3]), Polonya' da Mieczyslaw Warnus (1956, [5]) ve Japonya' da Teruo Sunaga (1958, [6]) tarafından atılmıştır. Çalışmaları makine hesaplamalarında büyük bir gelişme sağlayan ve aralık analizini ilk çalışanlardan kabul edilen R.E. Moore'un aralık metotları üzerindeki çalışmaları ve bunların uygulamaları günümüzde halen devam etmektedir. Aralık analizi 1950 yılından sonra sayısal analizde bazı felaket teorilerine dayalı yüzen nokta (floating-point) aritmetiğinin hesaplamalarında bu konu ile ilgilenenler için oldukça önemli hale gelmiştir.

1951 yılında, ilk olarak Dwyer [2] tarafından aralık aritmetiği kavramı ortaya konmuş, 1959 yılında Moore [3] ve 1962 yılında Moore ve Yang [4] aralık aritmetiğinin gelişimini biçimsel bir sistem olarak değerini hesaplamışlardır. Daha sonra Chiao [21] 2002 yılında aralık sayı dizilerini inşa etti ve aralık sayıları için klasik anlamda yakınsaklık kavramını tanımlamış ve sırasıyla Şengönül ve Eryılmaz [22] aralık sayılarının sınırlı ve yakınsak dizilerini tanımladıktan sonra, bunların üzerinde tanımlı doğal metriklerine göre bir tam metrik uzay olduğunu ve Esi [7-13] ve Esi ve arkadaşları [14-16] aralık sayı dizilerinin farklı yakınsaklık tanımlarını verdiler ve bu dizi uzaylarınının birçok özelliklerini incelediler.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 3.1.1. [17] $X \neq \emptyset$ ve K ise $\mathbb{R}$ reel sayılar (veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar) cismi olsun. Bu durumda $\forall\, x, y, z \in X\ ve\ \forall\, a, b \in K$ için

$$+ : X \text{ x } X \to X$$

$$(x, y) \to x + y$$

$$\cdot : K \text{ x } X \to X$$

$$(a, x) \to ax\ ,$$

işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\forall\, x \in X$ için $x + 0 = x$ olacak biçimde sadece bir $0 \in X$ vardır
4. $\forall\, x \in X$ için $x + (-x) = 0$ olacak biçimde sadece bir $-x \in X$ vardır
5. $\forall\, x \in X$ için $1.x = x$
6. $a(x + y) = ax + ay$
7. $(a + b)x = ax + bx$
8. $a(bx) = (ab)x$

X cümlesinin herbir elemanı bir vektör (ya da bir nokta) olarak adlandırılır. K cismi yerine $\mathbb{R}$ alınırsa X bir reel vektör uzayı, $\mathbb{C}$ alınırsa X bir kompleks vektör uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.2. [17] Boştan farklı bir X cümlesi ile birlikte bir

$$d : X \text{ x } X \to \mathbb{R}^{+}$$

$$(x, y) \to d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. $\forall x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri aksiyomu)

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği aksiyomu)

özelliklerini sağlıyan bir d fonksiyonuna X cümlesi üzerinde bir metrik fonksiyonu denir ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay adı verilir.

Tanım 3.1.1. [17] X bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq Y \subset X$ olsun. Y, X vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y' e X' in bir (lineer) alt uzayı denir.

Tanım 3.1.2. [17] X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$$

$$x \to \|x\|,$$

dönüşümü verilsin. $\forall\, x, y \in X\ ve\ \forall\, a \in K$ için

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$,

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyan $\|\cdot\|$ dönüşümü X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisi de bir normlu vektör uzay olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.3. [17] (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yine X içinde bir limite sahipse, (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 3.1.4. [17] (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $f\colon \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu X içinde bir dizi olarak adlandırılır ve $f(n) = (x_n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. $K = \mathbb{R}$ ya da $K = \mathbb{C}$ olmak üzere her $n = 1,2,\ldots$ için $x_n \in K$ olan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ (veya kısaca $x = (x_n)$) olacak biçimdeki tüm dizilerin kümesi w ile gösterelim. Böylece aşağıdaki dizi uzayları tanımlanabilir:

$$c_0 = \left\{x = (x_n) \in w : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$$

$$c = \{x = (x_n) \in w : (x_n)\ yakınsak\}$$

$$l_\infty = \{x = (x_n) \in w : (x_n) \; sınırlı\}.$$

Tanım 3.1.6. $M: [0, \infty) \to [0,\infty)$ olsun. Eğer azalmayan, sürekli ve konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \longrightarrow \infty$ iken $M(x) \longrightarrow \infty$ şartlarını sağlıyan bir M fonksiyonu **Orlicz fonksiyonu** olarak adlandırılır. Birçok yazar tarafından Orlicz fonksiyonu yardımıyla çeşitli dizi uzayları tanımlanmış ve bu dizi uzaylarının sağladığı özellikler incelenmiştir, detaylı bilgi için [18], [19] ve [20] nolu referanslar incelenebilir.

Lemma 3.1.1. Her k için $p_k > 0$ ve $H = \sup_k p_k < \propto, a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C[|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}]$$

$C = \max(1, 2^{H-1})$ dir.

Lemma 3.1.2. [17] $a_k, b_k \geq 0, k = 1,2, \dots, n$ olmak üzere

a) $0 < p_k \leq 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k} + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^{p_k}$$

ve

b) $p_k \geq 1$ ise

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p_k}\right\}^{1/p_k} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k}\right\}^{1/p_k} + \left\{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^{p_k}\right\}^{\frac{1}{p_k}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Lemma 3.1.3. [17] Normlu vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma (yani lineer uzay işlemleri) bu uzaydaki norm metriğine göre süreklidir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Aralık Sayıları

Yüksek lisans tez çalışmamız boyunca $a \leq x \leq b$ olacak şekilde tüm x reel sayılarıyla oluşturulan her kapalı aralığı bir aralık sayısı olarak tanımlayacağız. Böylece reel aralıklar birer cümle olarak düşünülebilir ve bu sayede üzerinde cümle işlemleri ve aritmetik işlemler tanımlanabilir. Iℝ ile tüm aralık sayılarının cümlesini göstereceğiz. $X = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ olmak üzere Iℝ nin elemanlarını temsil etmek üzere $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ gösterimini kullanacağız. Burada $\underline{X}$, aralık sayısının başlangıç noktasını ve $\overline{X}$ ise aralık sayısının bitim noktasını göstermektedir.

Tanım 4.1.1 (Aralık Sayılarının Eşitliği). $X, Y \in$ Iℝ aralık sayıları için,

$$X = Y \Leftrightarrow \underline{X} = \underline{Y}\,,\ \overline{X} = \overline{Y} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.2 (Dejenere Aralık). Eğer $\underline{X} = \overline{X}$ ise X aralığına dejenere aralık denir. Bir $[X, X]$ dejenere aralığı X ile gösterilir.

$$\overline{0} = [0, 0]$$

Tanım 4.1.3 (Kesişim ve Birleşim). X ve Y iki aralık sayısının kesişimi

$$X \cap Y = \left[max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, min\{\overline{X}, \overline{Y}\}\right]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\overline{Y} < \underline{X}\ veya\ \overline{X} < \underline{Y} \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$ dir.

X ve Y iki aralık sayısının birleşimi ise

$$X \cup Y = \left[min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, max\{\overline{X}, \overline{Y}\}\right]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.1. $X = [-1,3]\ ve\ Y = [2,4]$ aralık sayıları için,

$$X \cap Y = [max\{-1,2\}, min\{3,4\}] = [2,3]$$

$$X \cup Y = [min\{-1,2\}, max\{3,4\}] = [-1,4]$$

Kesişimin Önemi : Kesişim aralık analizinde önemli bir rol oynar. Bir hesaplama sonucunda iki aralık sayısı elde edildiği zaman kesişim daha dar bir sonuç verebilir.

Örnek 4.1.2. Kabul edelimki fiziksel bir q niceliğinin birbirinden bağımsız bir ölçümü olsun. Birinci ölçüm 0.2' den az bir hata payı ile $q = 10.3$ olsun. İkinci ölçüm ise 0.2' den az bir hata payı ile $q = 10.4$ olsun. Bu ölçümleri sırasıyla $X = [10.1\,,10.5]$ ve $Y = [10.2\,,10.6]$ aralık sayıları olarak yazabiliriz. Bu q değeri $X \cap Y = [10.2\,,10.5]$ aralığında olur.

Tanım 4.1.4 (Genişlik, Mutlak Değer, Orta Nokta). Bir X aralık sayısının genişliği

$$w(X) = \overline{X} - \underline{X} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir X aralık sayısının mutlak değeri $|X|$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$|X| = max\{|\underline{X}|\,,|\overline{X}|\} \tag{4.3}$$

Bir X aralık sayısının orta noktası

$$m(X) = \frac{1}{2}(\overline{X} + \underline{X})$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.3. $X = [0{,}5]$ ve $Y = [-2{,}4]$ olsun.

$$w(X) = 5 - 0 = 5$$

$$w(Y) = 4 - (-2) = 6$$

$$|X| = max\{|0|\,,|5|\} = 5$$

$$|Y| = max\{|-2|\,,|4|\} = 4$$

$$m(X) = \frac{1}{2}(0 + 5) = \frac{5}{2}$$

$$m(Y) = \frac{1}{2}(-2 + 4) = \frac{2}{2} = 1$$

4.2. Aralık Aritmetiği

Aralık sayıları üzerinde aritmetik işlemler tanımlanabilir. Aralık sayıları üzerinde yapılan işlemler aslında cümle üzerinde yapılan işlemlerdir. Örneğin iki aralık sayısını topladığımızda sonuç olarak ortaya çıkan aralık sayısı bu aralık sayılarının içindeki tüm ikili sayıların toplamından oluşan bir cümledir. $X \; ve \; Y$ aralık sayıları ve $\odot \in \{+\,,-\,,\cdot\,,:\}$ olsun. Aritmetik işlemlerin kümesi

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X\,, y \in Y\}$$

şeklinde genel bir form ile tanımlanır.

Tanım 4.2.1 (Aralık Sayılarının Toplamı). $X = [\underline{X}, \overline{X}] \; ve \; Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ aralık sayılarının toplamı aşağıdaki şekilde elde edilir :

$x \in X \Longrightarrow \underline{X} \leq x \leq \overline{X}$ ve $y \in Y \Longrightarrow \underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$ olduğundan dolayı eşitsizlikler toplanırsa

$$\underline{X} + \underline{Y} \leq x + y \leq \overline{X} + \overline{Y}$$

ve

$$x + y \in X + Y$$

elde edilir. Buradan iki aralık sayısının toplamı

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y}\,, \overline{X} + \overline{Y}\,] \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.1. $X = [-2,4] \; ve \; Y = [-2,2]$ olsun.

$$X + Y = [(-2) + (-2)\,, 4 + 2] = [-4,6]$$

Tanım 4.2.2 (Aralık Sayılarının Farkı). $X = [\underline{X}, \overline{X}] \; ve \; Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ aralık sayılarının farkı toplama işlemine benzer şekilde aşağıdaki şekilde elde edilir :

$\underline{X} \leq x \leq \overline{X} \; ve - \overline{Y} \leq -y \leq -\underline{Y}$ olduğundan dolayı eşitsizlikler toplanırsa

$$\underline{X} - \overline{Y} \leq x - y \leq \overline{X} - \underline{Y}$$

elde edilir ve buradan iki aralık sayısının farkı

$$X - Y = \left[\underline{X} - \overline{Y}\,, \overline{X} - \underline{Y}\right]$$

şeklinde tanımlanır. $X - Y = X + (-Y)$ olduğu dikkate alındığında burada

$$-Y = \left[-\overline{Y}\,, -\underline{Y}\right] = \{y :\ -y \in Y\}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.2. $X = [-2{,}1]\ ve\ Y = [2{,}3]$ olsun.

$-Y = [-3, -2]$ ve

$X - Y = X + (-Y) = [-2\,, 1] + [-3\,, -2] = [-5\,, -1]$ elde edilir.

Tanım 4.2.3 (Aralık Sayılarının Skalerle Çarpımı). $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ herhangi bir aralık sayısı ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$\alpha \geq 0\ ise\ \alpha X = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \underline{X} \leq x \leq \overline{X}\right\} = [\alpha\underline{X}, \alpha\overline{X}]$$

ve

$$\alpha < 0\ ise\ \alpha X = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \overline{X} \leq x \leq \underline{X}\right\} = [\alpha\overline{X}, \alpha\underline{X}]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.3. $X = [1, 2]$ olsun.

$\alpha = 2$ için $2.[1{,}2] = [2.1, 2.2] = [2, 4]$

$\alpha = -2$ için $-2.[1, 2] = [-2.2, -2.1] = [-4, -2]$ olur.

Tanım 4.2.4 (Aralık Sayılarının Çarpımı). $X = \left[\underline{X}, \overline{X}\right]\ ve\ Y = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]$ iki aralık sayısı için çarpma işlemi,

$$S = \left\{\underline{XY}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{XY}\right\} \text{ olmak üzere } X.Y = [minS, maxS]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.4. $X = [-3, -1]\ ve\ Y = [0{,}2]$ olsun.

$S = \{-3.0, -3.2, -1.0, -1.2\} = \{-6, -2, 0\}$ ve $X.Y = [minS, maxS] = [-6, 0]$ elde edilir.

Tanım 4.2.5 (Aralık Sayılarının Bölümü). $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ iki aralık sayısı için bölme işlemi,

$$X/Y = X.(1/Y)$$

$$Y \neq \overline{0} \text{ } için \text{ } 1/Y = \{y : 1/y \in Y\} = [1/\overline{Y}, 1/\underline{Y}]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.5. $X = [-2,3]$ ve $Y = [2,5]$ olsun.

$$\frac{1}{Y} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right], \qquad X/Y = X.(1/Y) = [-2,3].\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right] = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$$

elde edilir.

4.3. Aralık Aritmetiğinin Cebirsel Özellikleri

Aralık aritmetiğinin işlemleri, $X\ ve\ Y$ aralık sayıları ve $\odot \in \{+\,,-\,,\cdot\,,:\}$ olmak üzere

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X\,, y \in Y\} \tag{4.5}$$

şeklinde genel bir formda tanımlanmıştı. Bu aritmetik işlemlerin bazı cebirsel özelliklerini inceleyelim.

Teorem 4.3.1. X, Y, Z aralık sayıları olmak üzere

Değişme özelliği : $X + Y = Y + X, \qquad X.Y = Y.X$ (4.6)

Birleşme özelliği : $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z, \qquad X.(Y.Z) = (X.Y).Z$ (4.7)

Toplama işleminin birim elemanı : $X + \overline{0} = \overline{0} + X = X$ (4.8)

Çarpma işleminin yutan elemanı : $X.\overline{0} = \overline{0}.X = \overline{0}$ (4.9)

Çarpma işleminin birim elemanı : $X.\overline{1} = \overline{1}.X = X$ (4.10)

Soldan dağılım : $Z(X + Y) \subseteq ZX + ZY$ (4.11)

a) $\overline{Z} = [Z, Z]$ bir dejenere aralık,
b) $X = Y = \overline{0}$,
c) $\forall\, x \in X\ ve\ \forall\, y \in Y$ için $xy \geq 0$.

Bu durumlar hariç $Z(X + Y) \neq ZX + ZY$ dir.

İspat.

(4.6) : $\odot \in \{+\,,\ \cdot\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} X \odot Y &= \{x \odot y : x \in X\,, y \in Y\} \\ &= \{y \odot x : y \in Y\,, x \in X\} = Y \odot X \end{aligned}$$

(4.7) : $\odot \in \{+\,,\ \cdot\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (X \odot Y) \odot Z &= \{a \odot z : a \in X \odot Y\,, z \in Z\} \\ &= \{(x \odot y) \odot z : x \in X\,, y \in Y\,, z \in Z\} \\ &= \{x \odot (y \odot z) : x \in X\,, y \in Y\,, z \in Z\} \end{aligned}$$

$$= \{x \odot b : x \in X, b \in Y \odot Z\} = X \odot (Y \odot Z)$$

(4.8) ve (4.9) için $\odot \in \{+, \cdot\}$ olsun. Bu durumda,

$$X \odot \overline{0} = \{x \odot 0 : x \in X, 0 \in \overline{0}\}$$

$$= \{0 \odot x : 0 \in \overline{0}, x \in X\} = \overline{0} \odot X$$

(4.10) :

$$X.\overline{1} = \{x.1 : x \in X, 1 \in \overline{1}\}$$

$$= \{1.x : 1 \in \overline{1}, x \in X\}$$

$$= \{x : x \in X\} = X$$

(4.11) :

a) : $\overline{Z} = [Z, Z]$ bir dejenere aralık olmak üzere

$$\overline{Z}.(X + Y) = \{z.a : a \in X + Y\}$$

$$= \{z.(x + y) : x \in X, y \in Y\}$$

$$= \{z.x + z.y : x \in X, y \in Y\} = \overline{Z}X + \overline{Z}Y$$

elde edilir.

b) : $X(\overline{0} + \overline{0}) = X\overline{0} = \overline{0} = X\overline{0} + X\overline{0}$

c) : $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ aralık sayıları için genelliği bozmadan $\underline{X} \geq 0$ ve $\underline{Y} \geq 0$ durumunu düşünelim. $Z = [\underline{Z}, \overline{Z}]$ aralık sayısı için eğer $\underline{Z} \geq 0$ ise,

$$Z(X + Y) = [\underline{Z}(\underline{X} + \underline{Y}), \overline{Z}(\overline{X} + \overline{Y})]$$

ve

$$ZX + ZY = [\underline{ZX} + \overline{ZX}] + [\underline{ZY} + \overline{ZY}]$$

$$= [\underline{Z}(\underline{X} + \underline{Y}), \overline{Z}(\overline{X} + \overline{Y})]$$

Eğer $\overline{Z} \leq 0$ ise $-Z$ durumu dikkate alınırsa $\underline{Z} \geq 0$ ile aynı durum ve sonuç olur. Eğer $\underline{Z}\overline{Z} < 0$ ise

$$Z(X+Y) = \left[\underline{Z}\left(\underline{X}+\underline{Y}\right), \overline{Z}\left(\overline{X}+\overline{Y}\right)\right]$$

ve

$$ZX + ZY = \left[\underline{ZX}, \overline{ZX}\right] + \left[\underline{ZY}, \overline{ZY}\right]$$

$$= \left[\underline{Z}\left(\underline{X}+\underline{Y}\right), \overline{Z}\left(\overline{X}+\overline{Y}\right)\right]$$

elde edilir ve bu ise ispatı verir.

Örnek 4.3.1. $Z = [1,2]\,, X = \overline{1} = [1,1]\ ve\ Y = -\overline{1} = [-1,-1]$ aralık sayıları için

$$Z(X+Y) = [1,2].\left(\overline{1}-\overline{1}\right) = [1,2].\,\overline{0} = \overline{0}$$

$$ZX + ZY = [1,2].\,[1,1] + [1,2].\,[-1,-1] = [-1,1] \neq \overline{0}$$

$Z(X+Y) \neq ZX + ZY$ olur.

Teorem 4.3.2. Herhangi $X, Y\ ve\ Z$ aralık sayıları için,

$X + Z = Y + Z \Longrightarrow X = Y$ dir.

İspat. Herhangi $X = \left[\underline{X}, \overline{X}\right], Y = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]\ ve\ Z = \left[\underline{Z}, \overline{Z}\right]$ aralık sayıları için,

$$X + Z = Y + Z$$

ise

$$\left[\underline{X}, \overline{X}\right] + \left[\underline{Z}, \overline{Z}\right] = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] + \left[\underline{Z}, \overline{Z}\right]$$

$$\left[\underline{X}+\underline{Z}, \overline{X}+\overline{Z}\right] = \left[\underline{Y}+\underline{Z}, \overline{Y}+\overline{Z}\right]$$

elde edilir. Aralık sayılarının eşitliği tanımındaki (4.1) ifadesinden

$$\underline{X}+\underline{Z} = \underline{Y}+\underline{Z}\ ve\ \overline{X}+\overline{Y} = \overline{Y}+\overline{Z}$$

olur. $\underline{X}, \overline{X}, \underline{Y}, \overline{Y}, \underline{Z}, \overline{Z} \in \mathbb{R}$ olduğundan reel sayıların kısaltma özelliğinden

$\underline{X} = \underline{Y}\ ve\ \overline{X} = \overline{Y}$ elde edilir.

Aralık sayılarının eşitliği tanımındaki (4.1) ifadesinden $X = [\underline{X}, \overline{X}] = [\underline{Y}, \overline{Y}] = Y$ olur.

Teorem 4.3.3. Herhangi $X, Y\ ve\ Z$ aralık sayıları için,

$$ZX = ZY$$

ise $X = Y$ eşitliği her zaman doğru olmayabilir.

İspat. Varsayalım ki herhangi $X, Y\ ve\ Z$ aralık sayıları için $ZX = ZY$ olsun. $X = Y$ eşitliğinin sağlamabileceğini aşağıdaki örnekle gösterelim.

$X = [0,1],\ Y = [1,1]\ ve\ Z = [0,2]$ aralık sayılarını alalım. Bu durumda,

$$[0,2].[0,1] = [0,2].[1,1]$$

$$[0,2] = [0,2]$$

elde edilir. Ancak $[0,1] \neq [1,1]$ olduğundan varsayamımızla çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.3.1 (Simetrik Aralıklar). Herhangi bir X aralık sayısı verildiğinde bu aralığın simetrik aralığı

$$\underline{X} = -\overline{X}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin $[-2, 2]\ ve\ [-\pi, \pi]$ aralık sayıları simetrik aralıklardır. Her simetrik aralık 0 orta noktasına sahiptir. X bir simetrik aralık ise (4.2) ve (4.3) ifadelerinden

$$|X| = \frac{1}{2} w(X)\ ve\ X = |X|[-1, 1]$$

eşitlikleri yazılabilir.

Teorem 4.3.4. $X, Y, Z\ , T$ aralık sayıları ve $\odot \in\ \{+\ , -\ ,\ \cdot\ ,\ /\}$ olsun.

$$A \subseteq C\ ve\ B \subseteq D \Longrightarrow A \odot B \subseteq C \odot D$$

ifadesi yazılabilir.

İspat. $A \subseteq C\ ve\ B \subseteq D$ olsun.

$$A \odot B = \{a \odot b : a \in A\ , b \in B\}$$

$$\subseteq \{c \odot d : c \in C, d \in D\}$$

$$= C \odot D$$

4.4. Aralık Sayı Dizileri

Tanım 4.4.1. $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $[\underline{Y}, \overline{Y}]$ iki aralık sayısı olmak üzere aralarındaki uzaklık,

$$\overline{d}(X,Y) = max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $X = [x,x]$ ve $Y = [y,y]$ dejenere aralıkları özel olarak seçilirse X ve Y arasındaki uzaklık reel sayılar arasındaki uzaklığa indirgenir ve ℝ' nin mutlak değer metriği

$$\overline{d}(x,y) = d(x,y) = |a - b|$$

elde edilir.

Örnek 4.4.1. $X = [3,4]$ ve $Y = [6,8]$ iki aralık sayısı arasındaki uzaklık

$$\overline{d}(X,Y) = max\{|3 - 6|, |4 - 8|\} = 4$$

olur.

İki aralık arasındaki uzaklık fonksiyonu olarak tanımlanan d fonksiyonunun Iℝ üzerinde bir metrik tanımladığı kolaylıkla gösterilebilir :

i) $\overline{d}(X,Y) \geq 0$,

ii) $\overline{d}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$,

iii) $\overline{d}(X,Y) \leq \overline{d}(X,Z) + \overline{d}(Z,Y)$.

Üçgen eşitsizliğinin sağlandığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir :

$$\begin{aligned}
\overline{d}(X,Z) + \overline{d}(Z,Y) &= max\{|\underline{X} - \underline{Z}|, |\overline{X} - \overline{Z}|\} + max\{|\underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{Z} - \overline{Y}|\} \\
&\geq max\{|\underline{X} - \underline{Z}| + |\underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Z}| + |\overline{Z} - \overline{Y}|\} \\
&\geq max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\
&= \overline{d}(X,Y)
\end{aligned}$$

Tanım 4.4.2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ile $k \to f(k) = \overline{x}_k$ $olmak$ $üzere$ $, \overline{x} = (\overline{x}_k)$ dönüşümünü tanımlayalım. $\overline{x} = (\overline{x}_k)$ aralık sayı dizisi ve $\overline{x}_k$ bu aralık sayı dizisinin $k.$ terimi olarak adlandırılır.

Tanım 4.4.3. Her $\varepsilon > 0$ ve $k \geq k_0$ için $\overline{d}(\overline{x}_k, \overline{x}_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ tamsayısı var ise $\overline{x} = (\overline{x}_k)$ aralık sayı dizisi $\overline{x}_0 = [\overline{x}_{0_l}, \overline{x}_{0_r}]$ aralık sayısına yakınsıyor denir ve $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}_0$ şeklinde gösterilir. Böylelikle

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k_l} = x_{0_l} \; ve \; \lim_{k\to\infty} x_{k_r} = x_{0_r}.$$

Örnek 4.4.2. $(\overline{x}_k) = \left[-\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right]$ olmak üzere $(\overline{x}_k)$ aralık sayı dizisini göz önüne alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right] = [0,0] = \overline{0}$$

olup $(\overline{x}_k)$ dizisi $[0,0] = \overline{0}$ aralık sayısına yakınsar.

$\overline{w}$, tüm reel terimli aralık sayı dizilerinin kümesini göstersin. $\overline{w}$ dizi uzayı, aşağıdaki şartları sağladığından bir vektör uzayıdır.

1. $(\overline{x}_k) + (\overline{y}_k) = (\overline{y}_k) + (\overline{x}_k)$

2. $(\overline{x}_k) + \left((\overline{y}_k) + (\overline{z}_k)\right) = \left((\overline{x}_k) + (\overline{y}_k)\right) + (\overline{z}_k)$

3. $(\overline{x}_k) + (\overline{y}_k) = (\overline{x}_k) + (\overline{z}_k)$ ise $(\overline{y}_k) = (\overline{z}_k)$

4. $\alpha\left((\overline{x}_k) + (\overline{y}_k)\right) = \alpha(\overline{x}_k) + \alpha(\overline{y}_k)$

5. $(\alpha + \beta)(\overline{x}_k) = \alpha(\overline{x}_k) + \beta(\overline{x}_k)$

6. $\alpha\left(\beta(\overline{x}_k)\right) = \left(\alpha\beta(\overline{x}_k)\right), \alpha\beta \geq 0$

7. $(\overline{x}_k) = [1,1](\overline{x}_k)$

$\overline{w}$ nin sıfır elemanı $\overline{0} = [0, 0]$ şeklindedir.

4.5. Aralık Sayılarının Bazı Dizi Uzayları

Sırasıyla sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı aralık sayı dizilerinin uzayları olarak adlandırılan $\overline{c}_0\,, \overline{c}\; ve\; \overline{l}_\infty$ aralık dizi uzayları aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$\overline{c}_0 = \left\{\overline{x} = (\overline{x}_k) \in w^i \;:\; \lim_k \overline{x}_k = \theta\,, \theta = \;[0,0]\right\},$$

$$\overline{c} = \left\{\overline{x} = (\overline{x}_k) \in w^i \;:\; \lim_k \overline{x}_k = \overline{x}_0\,, \overline{x}_0 \in \mathrm{I}\mathbb{R}\right\},$$

$$\overline{l}_\infty = \left\{\overline{x} = (\overline{x}_k) \in w^i \;:\; \sup_k\{|x_{k_l}|\,, |x_{k_r}|\,\} < \infty\right\}.$$

$\overline{c}_0\,, \overline{c}\; ve\; \overline{l}_\infty$ aralık dizi uzayları $\overline{w}$ dizi uzayının alt uzaylarıdır. Bununla beraber her $(\overline{x}_k), (\overline{y}_k) \in \overline{c}_0$ (veya $\overline{c}\; ve\; \overline{l}_\infty$) için :

$$\overline{d}(\overline{x}_k, \overline{y}_k) = \sup_k \max\{|x_{k_l} - y_{k_l}|\,, |x_{k_r} - y_{k_r}|\} \tag{4.13}$$

olarak tanımlanan $\overline{d},$ metrik aksiyomlarını sağlar [18]. Böylece $(\overline{c}_0\,, \overline{d})$ $(veya\; (\overline{c}\,, \overline{d})\,, (\,\overline{l}_\infty\,, \overline{d})$ bir metrik uzaydır.

Tanım 4.5.1. $\overline{y} \in \overline{w}, \overline{y} = [y_{k_l}, y_{k_r}]$ olduğunu kabul edelim. Eğer $y_{k_l} = y_{k_r}$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $\overline{y} = (\overline{y}_k)$ dizisine dejenere aralık dizisi denir.

$\overline{x} = (\overline{x}_k)\; ve\; \overline{y} = (\overline{y}_k)$ dejenere aralık dizisi ise (3.7.1) ifadesinde tanımlanan $\overline{d}$ metriği aşikar reel veya kompleks sayıların sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarındaki

$$\overline{d}(\overline{x}_k, \overline{y}_k) = \sup_k |x_{k_l} - y_{k_l}|$$

metriğine indirgenir.

Her reel sayı bir dejenere aralık olarak ifade edilebileceğinden tüm reel dizilerin uzayı olan w uzayının bir dejenere aralık dizi uzayı olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece w dizi uzayının her bir alt uzayı bir dejenere dizi uzayı olarak adlandırılır. c, c_0, l_∞ dizi uzayları, sırasıyla bütün dejenere yakınsak, dejenere sıfıra yakınsak, dejenere sınırlı dizi uzayları olarak düşünülebilir.

Tanım 4.5.2. $\overline{x} = (\overline{x}_k) \in \overline{w}, \forall\, \varepsilon > 0$ için $n, m \geq k_0\; için\; \overline{d}(\overline{x}_n, \overline{x}_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ mevcut ise $\overline{x} = (\overline{x}_k)$ aralık sayı dizisine aralık Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.5.1. (4.13) ifadesinde tanımlanan metrik ile $(\overline{c}_0, \overline{d}), (\overline{c}, \overline{d})$ ve $(\overline{l}_\infty, \overline{d})$ uzayları birer tam metrik uzaydır.

İspat. $(\overline{c}_0, \overline{d})$ metrik uzayının bir tam uzay olduğunu gösterelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(\overline{x}^n) = (\overline{x}_k^n) = (\overline{x}_0^n, \overline{x}_1^n, \overline{x}_2^n, \ldots) \in \overline{c}_0$ ve $(\overline{x}^n)$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısını $n, m \geq k_0$ için $\overline{d}(\overline{x}_k^n, \overline{x}_k^m) < \varepsilon$ olacak şekilde bulabiliriz. Buradan,

$$\overline{d}(\overline{x}_k^n, \overline{x}_k^m) = \sup_{n,m}\max\{|\overline{x}_{kl}^n - \overline{x}_{kl}^m|, |\overline{x}_{kr}^n - \overline{x}_{kr}^m|\} < \varepsilon$$

ve

$$|\overline{x}_{kl}^n - \overline{x}_{kl}^m| < \varepsilon, \qquad |\overline{x}_{kr}^n - \overline{x}_{kr}^m| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $(\overline{x}_k^n)$ $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olup $\mathbb{R}$ de bir Banach uzayı olduğundan $(\overline{x}_k^n)$ yakınsak olacağı söylenebilir. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_k^n = \overline{x}_k$ diyelim. Böylece her $n, m \geq k_0$ için $\overline{d}(\overline{x}_k^n, \overline{x}_k^m) < \varepsilon$ olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} \overline{d}(\overline{x}_k^n, \overline{x}_k^m) = \overline{d}\left(\overline{x}_k^n, \lim_{m\to\infty} \overline{x}_k^m\right) = \overline{d}(\overline{x}_k^n, \overline{x}_k) < \varepsilon.$$

olup $n \to \infty$ için $\overline{x}^n \to \overline{x}$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\overline{d}(\overline{x}_k, \overline{x}_k^n - \overline{x}_k^n) &= \sup_k \max\left\{\left|x_{k_l} - |x_{k_l}^n - x_{k_l}^n|\right|, \left|x_{k_r} - |x_{k_r}^n - x_{k_r}^n|\right|\right\} \\ &\leq \sup_k \max\{|x_{k_l} - x_{k_l}^n| + |x_{k_l}^n|, |x_{k_r} - x_{k_r}^n| + |x_{k_r}^n|\} \\ &\leq \sup_k \max\{|x_{k_l} - x_{k_l}^n|, |x_{k_r} - x_{k_r}^n|\} + \sup_k \max\{|x_{k_l}^n|, |x_{k_r}^n|\}\end{aligned}$$

olduğundan $\overline{x} \in \overline{c}_0$ dir.

Klasik dizi uzayları için tanımlanan norm fonksiyonunun, aralık sayılarının dizi uzaylarına aşağıdaki gibi bir genişlemesi verilebilir.

Tanım 4.5.3. $\overline{\lambda}$, $\overline{w}$ nin alt cümlesi olsun. $\overline{\lambda}$ üzerindeki negatif olmayan$\|\cdot\|_{\overline{\lambda}} : \overline{\lambda} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ normu aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in \overline{\lambda}\; ve\; \forall\, a \in \mathbb{R}\,, \overline{x} \in \overline{\lambda} \setminus \{0\}\; için$

N1) $\|\overline{x}\|_{\lambda^i} > 0$,

N2) $\|\overline{x}\|_{\lambda^i} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \theta = [0,0]$,

N3) $\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\lambda^i} \leq \|\overline{x}\|_{\lambda^i} + \|\overline{y}\|_{\lambda^i}$,

N4) $\|\alpha\overline{x}\|_{\lambda^i} = |\alpha|\|\overline{x}\|_{\lambda^i}$.

$\|x\|$ normunun reel sayılar dizi uzayındaki x ile 0 arasındaki uzaklık olduğunu biliyoruz. O halde $(\overline{c}_0\,, \overline{d})\,, (\overline{c}\,, \overline{d})\; ve\; (\,\overline{l}_\infty\,, \overline{d})$ metrik uzayları da birer normlu uzay yapılabilir. Burada

$$\overline{d}(\overline{x}_k\,, \theta) = \sup_k \max\{|x_{k_l} - \theta_{k_l}|\,, |x_{k_r} - \theta_{k_r}|\} = \sup_k \max\{|x_{k_l}|\,, |x_{k_r}|\}$$

$\theta = [0,0]$ elemanı $\overline{c}_0\,, \overline{c}\; ve\; \overline{l}_\infty$ uzaylarının birim elemanıdır.

Teorem 4.5.2. $\overline{c}_0\,, \overline{c}\; ve\; \overline{l}_\infty$ uzayları

$$\|\overline{x}\| = \sup_k \max\{|x_{k_l}|\,, |x_{k_r}|\}$$

normuyla normlu aralık uzaylarıdır.

İspat. $\overline{\lambda} = \overline{c}_0\; (\overline{c}\; veya\; \overline{l}_\infty)\; ve\; x, y \in \overline{\lambda}$ olsun.

N1) $\|\overline{x}\|_{\overline{\lambda}} = \sup_k \max\{|x_{k_l}|\,, |x_{k_r}|\}$ olduğu için $\forall\, \overline{x} \in \overline{\lambda} \setminus \{0\}\; için\; \|\overline{x}\|_{\overline{\lambda}} > 0$ olduğu kolayca görülür.

N2) $\|\overline{x}\|_{\overline{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow \sup_k \max\{|x_{k_l}|\,, |x_{k_r}|\} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \theta = [0,0]$

N3)

$$\begin{aligned}\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\overline{\lambda}} &= \sup_k \max\{|x_{k_l} + y_{k_l}|\,, |x_{k_r} + y_{k_r}|\} \\ &\leq \sup_k \max\{|x_{k_l}| + |y_{k_l}|, |x_{k_r}| + |y_{k_r}|\}\end{aligned}$$

$$= \sup_k \max\{(|x_{k_l}|, |x_{k_r}|) + (|y_{k_l}|, |y_{k_r}|)\}$$

$$\leq \sup_k \max\{(|x_{k_l}|, |x_{k_r}|)\} + \sup_k \max\{(|y_{k_l}|, |y_{k_r}|)\} = \|\overline{x}\|_{\overline{\lambda}} + \|\overline{y}\|_{\overline{\lambda}}$$

N4)

$$\|\alpha\overline{x}\|_{\overline{\lambda}} = \sup_k \max\{|\alpha x_{k_l}|, |\alpha x_{k_r}|\}$$

$$= |\alpha| \sup_k \max\{|x_{k_l}|, |x_{k_r}|\}$$

$$= |\alpha|. \|\overline{x}\|_{\overline{\lambda}}$$

Böylece $\|\overline{x}\|_{\overline{\lambda}}$, $\overline{\lambda}$ üzerinde bir normdur.

4.6. Orlicz fonksiyonu yardımıyla tanımlanan yeni bir aralık dizi uzayı

Bir M Orlicz fonksiyonu, $p = (p_k)$ dizisi pozitif sayıların $0 < h = inf_k p_k \leq p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$ şartını sağlayan bir dizi, φ doğal sayılar cümlesinin eleman sayısı s∈**N** sayısını geçmeyen altcümlelerinin bir ailesi ve her bir $s \in \mathbb{N}$ için $s\phi_{s+1} \leq (s+1)\phi_s$ olacak biçimdeki pozitif sayıların azalmayan bir (ϕ_s) dizisi için

$$\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) = \{(\bar{x}_k) \in \overline{w} : sup_{s\geq 1, \sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} \left[M\left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} < \infty, \mathrm{r} > 0 \}$$

aralık değerli dizi uzayını tanımlayalım.

Örnek 4.6.1 $M(x) = x$, $\phi_s = s$ ve her k için p_k=2 olmak üzere $\bar{x}_k = [-\frac{1}{k^2}, 0]$ olacak şekilde bir $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisi tanımlayalım. Böylece

$$\lim_k \bar{x}_k = \lim_k [-\frac{1}{k^2}, 0] = \bar{0} \quad = [0,0]$$

olup, $$sup_{s\geq 1, \sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} [M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k} = sup_{s\geq 1, \sigma\in\varphi} \frac{1}{s} \sum_k k^{-4} < \infty$$

olup, $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p})$ elde edilir.

Teorem 4.6.1. M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere $\bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p})$ aralık değerli dizi uzayı koordinatsal toplama ve çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır.

İspat :

$$+\bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p}) \text{ x } \bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p}) \rightarrow \bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p}) ,$$

$$\bullet : \mathbb{R} \text{ x } \bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p}) \rightarrow \bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p})$$

işlemlerini tanımlayalım, Şimdi $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p})$ alalım. Böylece

$$sup_{s\geq 1, \sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} [M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k} < \infty,$$

$$sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}\left[M\left(\frac{\bar{d}(\bar{y}_k,\bar{0})}{r}\right)\right]^{p_k}<\infty$$

yazabiliriz. Böylece

$\bar{d}(\bar{x}_k+\bar{y}_k,\bar{0})\leq\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0})+\ \bar{d}(\bar{y}_k,\overline{0})$ olduğundan

ve M Orlicz fonksiyonunun artanlığını kullanarak

$$M\ (\bar{d}(\bar{x}_k+\bar{y}_k,\bar{0}))\leq M\ (\ \bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0})+\ \bar{d}(\bar{y}_k,\bar{0}))$$

$$\leq M\ (\ \bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0}))+M(\bar{d}(\bar{y}_k,\bar{0}))$$

elde edilir. Ayrıca pozitif terimli p=(p_k) dizisi için $0\ \leq\ \mathrm{h}=inf_k p_k\leq\ p_k\leq\ sup_k p_k=H<\infty$ ve $\mathrm{C}=\max(1,2^{H-1})$ olduğundan Lemma 3.3.1 gereğince

$$[\mathrm{M}(\bar{d}(\bar{x}_k+\bar{y}_k,\bar{0}))]^{p_k}\leq[\mathrm{M}(\ \bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0}))+\mathrm{M}(\bar{d}(\bar{y}_k,\bar{0}))]^{\ p_k}$$

$$\leq\mathrm{C}[\mathrm{M}(\ \bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0}))]^{p_k}+\mathrm{C}[\mathrm{M}(\bar{d}(\bar{y}_k,\bar{0}))]^{p_k}$$

olur. Böylece

$$sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k+\bar{y}_k,\bar{0})}{r})]^{p_k}\leq$$

$$Csup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0})}{r})]^{p_k}+Csup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}(\bar{y}_k,\bar{0})}{r})]^{p_k}\ <\infty.$$

Böylece $\bar{x}+\bar{y}\in\bar{l}_\infty(M,\phi,\mathrm{p})$ olur.

Şimdi de $\bar{x}\in\bar{l}_\infty(M,\phi,\mathrm{p})$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ alalım. Bu durumda

$$sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0})}{r})]^{p_k}<\infty$$

yazabiliriz. $\bar{d}(\alpha\bar{x}_k,\bar{0})=|\alpha|\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0})$ ve M bir Orlicz fonksiyonu olduğundan

$\mathrm{M}(\bar{d}(\alpha\bar{x}_k,\bar{0}))\ =\mathrm{M}(\ |\alpha|\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0}))\leq|\alpha|\ M(\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0}))$ ve $\mathrm{p}=(p_k)$ pozitif sayıların bir sınırlı dizisi olduğundan

$[\mathrm{M}(\bar{d}(\alpha\bar{x}_k,\bar{0}))]^{p_k} \leq |\alpha|^{p_k}[M(\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0}))]^{p_k}$ elde edilir. Buradan da

$$sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}(\alpha\bar{x}_k,\bar{0})}{r})]^{p_k}$$

$$\leq |\alpha|^{p_k} sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{0})}{r})]^{p_k}$$

$$< \infty$$

olup $\alpha\bar{x} \in \bar{l}_\infty(M,\phi,\mathrm{p})$ elde edilir. Dolayısıyla $\bar{l}_\infty(M,\phi,\mathrm{p})$ aralık değerli dizi uzayı bir lineer uzaydır.

Teorem 4.6.2 $\bar{l}_\infty(M,\phi,\mathrm{p})$ aralık değerli dizi uzayı

$$\bar{d}\ \ (\bar{x},\bar{y}) = inf\{r^{\frac{p_k}{T}} : sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k,\bar{y}_k)}{r})]^{p_k} \leq 1\}$$

metriği ile birlikte tam bir metrik uzaydır. Burada $\mathrm{T} = \max(1, sup_k p_k = H < \infty)$ olarak verilmektedir.

İspat : $\bar{l}_\infty(M,\phi,\mathrm{p})$ aralık değerli dizi uzayının tam olduğunu gösterebilmek için $\bar{l}_\infty(M,\phi,\mathrm{p})$ uzayında herhangi bir $(\bar{x}_k^i) = \{\bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i, \ldots\}$ Cauchy dizisini alalım. Böylece $\mathrm{i,j}\rightarrow\infty$ için $\bar{d}(\bar{x}^i\ ,\bar{x}^j\ )\rightarrow 0$ yazabiliriz. O halde verilen $\varepsilon > 0$ için $\frac{\varepsilon}{rx_0} > 0$ ve $M(\frac{rx_0}{2}) \geq 1$ olacak biçimde $r > 0$ ve $\mathrm{x}_0 > 0$ sayılarını seçelim.

Böylece $\mathrm{i,j}\geq \mathrm{n}_0$ olmak üzere $\bar{d}(\bar{x}^i\ ,\bar{x}^j\ ) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$ olacak şekilde n_0 tamsayısını bulabiliriz. Buradan

$$inf\{r^{\frac{p_k}{T}}:\ \ sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi}\frac{1}{\phi_s}\sum_{k\in\sigma}[M(\frac{\bar{d}\ \ (\bar{x}^i\ ,\bar{x}^j\ )}{r})]^{p_k} \leq 1\} < \frac{\varepsilon}{rx_0}\quad \text{elde edilir.}$$

Şimdi, $M\left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k^i,\bar{x}_k^j)}{r}\right) \leq 1 \leq M(\frac{rx_0}{2})$ olduğundan, bu ifadeden

Böylece $\bar{d}(\bar{x}_k^i,\bar{x}_k^j) < \frac{rx_0}{2}\frac{\varepsilon}{rx_0} = \frac{\varepsilon}{2}$ olup bu ise $(\bar{x}_k^{(i)})$ dizisinin her bir k sabit için $\mathbb{IR}$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{IR}$ uzayı $\bar{d}$ metriği ile tam metrik uzay olduğundan

$i \to \infty$ için $\bar{x}_k^i \to \bar{x}_k$ diyelim. Bu biçimde tanımlanan sonsuz çoklukta limitle $\bar{x}$ =($\bar{x}_k$)=($\bar{x}_0, \bar{x}_1$, ...) dizisini tanımlayalım. Böylece

$$\lim_{j\to\infty} sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} [M(\frac{\bar{d}\ \ (\bar{x}^i, \bar{x}^j)}{r})]^{p_k} \leq 1, \text{ yani}$$

$$sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} [M(\frac{\bar{d}\ \ (\bar{x}^i, \bar{x}\ )}{r})]^{p_k} \leq 1$$

elde edilir. Şimdi i≥ n_0 seçelim ve r sayıları üzerinden infimum alırsak,

$$\bar{d}\ \ (\bar{x}^i, \bar{x}) < \varepsilon$$

elde ederiz. Böylece $\bar{d}$ metriği için üçgen eşitsizliğini kullanılarak

$$\bar{d}\ \ (\bar{x}, \bar{0}\ \ ) \leq \bar{d}\ \ (\bar{x}, \bar{x}^i\ ) + \bar{d}\ \ (\bar{x}^i, \bar{0})$$

ifadesi $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p})$ olduğunu gösterir. $(\bar{x}_k^{(i)})$ keyfi bir Cauchy dizisi olduğundan $\bar{l}_\infty(M, \phi, \mathrm{p})$ bir tam uzaydır.

Teorem 4.6.3 M ve N birer Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) \cap \bar{l}_\infty(\mathrm{N}, \phi, \mathrm{p}) \subset \bar{l}_\infty(\mathrm{M} + \mathrm{N}, \phi, \mathrm{p})$$

İspat : a) $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) \cap \bar{l}_\infty(\mathrm{N}, \phi, \mathrm{p})$ olsun. Bu durumda $\mathrm{C} = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere Lemma 3.1.1. den yararlanılarak

$$[(\mathrm{M} + \mathrm{N})(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} = [\mathrm{M}\left(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})\right) + \mathrm{N}\left(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})\right)]^{p_k}$$

$$C[\mathrm{M}(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} + \mathrm{C}[\mathrm{N}(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}\ \ ))]^{p_k}$$

elde edilir. Böylece

$$sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} [(M + N)(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k} \leq$$

$$\mathrm{C} sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} [M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k} + \mathrm{C}\ sup_{s\geq 1,\sigma\in\varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k\in\sigma} [N(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k}$$

olur. $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) \cap \bar{l}_\infty(\mathrm{N}, \phi, \mathrm{p})$ olduğundan kolayca $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(\mathrm{M} + \mathrm{N}, \phi, \mathrm{p})$ elde edilir.

Teorem 4.6.4 M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki içerme bağıntıları sağlanır:

a) Eğer $0 < inf_k p_k = h \leq p_k \leq 1$ ise $\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) \subset \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi)$,

b) Eğer $1 \leq p_k \leq sup_k p_k$ ise $\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi) \subset \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p})$,

c) $\forall \mathrm{k} \in \mathrm{N}$ için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ olsun. Bu taktirde $\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) \subset \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{q})$.

İspat: a) Bu kısmın ispatı

$$[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})] \quad \leq [M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k}$$

eşitsizliğinden açıktır.

b) Bu kısmın ispatı ise

$$[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k} \leq [M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]$$

eşitsizliğinden açıktır.

Herhangi bir $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p})$ alalım. Bu taktirde

$$sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} [M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k} < \infty$$

yazabiliriz, k'nın yeter derece büyük değerleri için

$$[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k} \leq 1$$

yazabiliriz. M Orlicz fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$[M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{q_k} \leq [M(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r})]^{p_k}$$

yazabiliriz ki bu da $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{q})$ demektir.

Teorem 4.6.5 M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere

a) $\bar{l}_\infty \subset \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p})$,

b) Eğer M sınırlı bir Orlicz fonksiyonu ise $\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) = \overline{w}$ dir.

İspat : a) $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty$ olsun. Bu takdirde $sup_k \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) < \infty$ olduğundan $\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) \leq G$ olacak biçimde $G \geq 0$ sayısı bulunabilir. M bir Orlicz fonksiyonu olduğundan $(\mathrm{M}(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})))$ dizisi de sınırlıdır. Böylece

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{M}(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} &\leq [\mathrm{M}(G)]^{p_k} \\
&\leq [\mathrm{M}(G)]^{H} < \infty
\end{aligned}
$$

olur. Bu ise $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p})$ olmasını gerektirir.

b) M sınırlı bir Orlicz fonksiyonu olsun. Aralık dizi uzayının tanımı gereğince $\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) \subset \overline{w}$ *olduğu açıktır*. Tersine $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \overline{w}$ için M Orlicz fonksiyonu sınırlı olduğundan $[\mathrm{M}(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} \leq L^{p_k} \leq L^H < \infty$ olacak şekilde L>0 sayısı bulunabilir. Böylece $\overline{w} \subset \bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p})$ elde edilir. Dolayısıyla $\bar{l}_\infty(\mathrm{M}, \phi, \mathrm{p}) = \overline{w}$ elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Hayes, B., 2003. Lucid interval, American Scientist, 91(6), 484-488.

[2] Dwyer, P.S., Linear Computations, John Wiley and Sons, New York, 1951.

[3] Moore, R.E., Automatic error analysis in digital computation, LMSD Technical report 48421, 1959.

[4] Moore R.E., and Yang, C.T., Interval analysis I, LMSD Technical report 285875, 1959.

[5] Warmus, M., Calculus of approximations, Bulletin de I'Academia Polonaise de Sciences, 4(5)(1956),253-257.

[6] Sunaga, T., Theory of intervall algebra and its application to numerical analysis, RAAG Memoirs, Ggujustsu Bungen Fukuy-Tokyo 2(1958), 29-48.

[7] A.Esi, On a class of new type difference sequences related to the space l_p, Far East J.Math.Sci. 13(2)(2004), 167-172.

[8] A. Esi, λ-Sequence spaces of interval numbers, Appl.Math.Inf.Sci.8(3)(2014), 1099-1102.

[9] A. Esi, *A new class of interval numbers*, Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science, (2012), 98-102.

[10] A. Esi, *Lacunary sequence spaces of interval numbers*, Thai Journal of Mathematics, 10(2),(2012),445-451.

[11] A. Esi, *Double lacunary sequence spaces of double sequence of interval numbers*, Proyecciones Journal of Mathematics, 31(1)(2012), 297-306.

[12] A.Esi, *Strongly almost λ-convergence and statistically almost λ-convergence of interval numbers,* Scientia Magna, 7(2)(2011), 117-122.

[13] A.Esi, Statistical and lacunary statistical convergence of interval numbers in topological groups, Acta Scientarium Technology, 36(3)(2014), 491-495.

[14] A.Esi ve N.Braha, *On asymptotically λ-statistical equivalent sequences of interval numbers*, Acta Scientarium Technology, 35(3)(2013), 515-520.

[15] A.Esi ve A.Esi, *Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences of interval numbers*, International Journal of Mathematics and Its Applications, 1(1)(2013), 43-48.

[16] A.Esi ve B.Hazarika, *Some ideal convergence of double $\wedge$-interval number sequences defined by Orlicz function*, Global Journal of Mathematical Analysis, 1(3)(2013), 110-116.

[17] E. Kreyzing, *Introduction Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons, Inc, Canada 1978.

[18] J.Lindenstrauss ve L.Tzafriri, On Orlicz sequence spaces, Israel J.Math.101 (1971), 379-390.

[19] A.Esi, Some new sequence spaces defined by Orlicz functions, Bull. Inst.Math.Acad.Sinica, 27 (1999), 71-76.

[20] A.Esi ve M.Et, Some new sequence spaces defined by Orlic functions, Indian J.Pure Appl.Math., 31(8)(2000), 967-972.

[21] Kuo-Ping Chiao, *Fundamental properties of interval vector max-norm*, Tamsui Oxford Journal of Mathematics, **18(2)**(2002), 219-233.

[22] M.Şengönül ve A. Eryılmaz, *On the sequence spaces of interval numbers*, Thai Journal of Mathematics, **8(3)**(2010), 503-510.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeynep TOPRAKTAN

Doğum Yeri : Adıyaman Merkez

Doğum Tarihi : 14.03.1991

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Adıyaman Bilgi Anadolu Lisesi-2009

Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Mat.Böl-2014

Yüksek Lisans : Adıyaman Üniversitesi – 2020

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:Kuruköy Mah. Ortaokulu-Yüksekova-Hakkari 2018-Devam ediyor.