**T.C.**
**ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# QUASİ SABİT EĞRİLİKLİ HEMEN HEMEN PARAKONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

**ADNAN ÇELİK**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ADIYAMAN, 2019**

**T.C.**
**ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# QUASİ SABİT EĞRİLİKLİ HEMEN HEMEN PARAKONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

**Adnan ÇELİK**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Geometri Bilim Dalı**

Bu tez 17/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Dr. Öğr. Üyesi Bilal Eftal ACET**
**Danışman**

**Doç. Dr. Selcen Yüksel PERKTAŞ**
**Üye**

**Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR**
**Üye**

**Prof. Dr. Murat KOCA**
**Enstitü Müdürü**

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**QUASİ SABİT EĞRİLİKLİ HEMEN HEMEN PARAKONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI**



**Adnan ÇELİK**

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı



Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Bilal Eftal ACET
Yıl : 2019, 39+VI

Jüri : Dr. Öğr. Üyesi Bilal Eftal ACET
Doç. Dr. Selcen Yüksel PERKTAŞ
Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR



Bu tezin amacı quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlarda bazı eğrilik şartlarını çalışmaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümü giriş bölümüne ayrılmış olup bu bölümde hemen hemen parakontakt manifoldlarla ilgili yapılan çalışmalara değinilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümde semi-Riemann manifoldları tanıtılmış, concircular eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörü kavramları incelenmiştir. Ayrıca hemen hemen parakontakt manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde quasi-sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlardaki Riemann eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörü tanıtılmıştır.

Son bölümde ise bazı eğrilik şartlarını sağlayan quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlar sınıflandırılmıştır.



**Anahtar Kelimeler:** Hemen Hemen Parakontakt Manifold; Eğrilik Tensörü; Quasi-Sabit Eğrilik.

## ABSTRACT

**MSc Thesis**

**SOME CURVATURE CONDITIONS ON ALMOST PARACONTACT MANIFOLDS WİTH QUASI CONSTANT CURVATURE**

**Adnan ÇELİK**

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET
Year : 2019, 39+VI

Jury : Assist. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET
Assoc. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR

The aim of this thesis is to study some curvature conditions on almost paracontact manifolds with the quasi constant curvature.

This thesis has five chapters.

In the first chapter of thesis is reserved for entry and the studies on almost paracontact manifolds are mentioned.

In the second and third section, semi-Riemannian manifolds are introduced, concircular curvature tensor and projective curvature tensor are examined. Also basic definitions and theorems about almost paracontact manifolds are given.

In the fourth section, Riemannian curvature tensor, concircular curvature tensor and projective curvature tensor on almost paracontact manifolds with quasi constant curvature are introduced.

In the last section some curvature conditions on almost paracontact manifolds with quasi constant curvature are classified.

**Key Words:** Almost Paracontact Manifold; Curvature Tensor; Quasi Constant Curvature.

## BEYAN

“Quasi Sabit Eğrilikli Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlarda Bazı Eğrilik Şartları” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Adnan ÇELİK

imza

**TEŞEKKÜR**

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca desteklerini esirgemeyen, yol gösteren başta Sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI olmak üzere Sayın Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmanın gerçekleştirmesinde gerekli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabır ve ilgiyle bana faydalı olmak için elinden gelenden fazlasını sunan Sayın Dr. Öğr. Üyesi Bilal Eftal ACET'e teşekkürlerimi sunarım.

Değerli eşim Elif ÇELİK'e, annem Zahide ÇELİK'e ve babam Tevfik ÇELİK'e öğrenimim boyunca bana sağladıkları her türlü destekten ötürü teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

| | |
|---|---|
| $\eta$ | : 1-form |
| $\tau$ | : Skaler Eğrilik |
| $[,]$ | : Lie Parantez Operatörü |
| $P$ | : Projektif Eğrilik Tensörü |
| $Z$ | : Concircular Eğrilik Tensörü |
| $C^{\infty}$ | : Differansiyellenebilme |
| $\xi$ | : Karekteristik vektör alanı |
| $J$ | : Kompleks yapı |
| $T_s^r M$ | : M üzerinde $(r,s)-$tipindeki tensör |
| $\nabla$ | : M üzerindeki Afin Konneksiyon |
| $T_p M$ | : M'nin bir $P$ noktasındaki teğet uzayı |
| $\chi(M)$ | : M'nin teğet vektör alanlarının uzayı |
| $M$ | : Manifold |
| $g$ | : Metrik Tensör |
| $R$ | : Riemann Eğrilik Tensörü |
| $\phi$ | : $(1,1)-$tipinde tensör alanı |
| $\mathbb{Q}$ | : Ricci Operatörü |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |

# 1. GİRİŞ

Manifold teorisi modern diferansiyel geometrinin en geniş ve en önemli konularından biridir. Manifold üzerinde yapıların daha basit ve kolay anlaşılabilir uzaylar cinsinde ifade edilebilir olması, bu kavramı bilim dünyası için oldukça ilginç bir çalışma haline getirmiştir. Zaman içinde bilim insanının ortak çalışma sahalarının artması manifold kavramını sadece geometrinin çalışma sahası olmaktan çıkarıp matematiğin ve fiziğin birçok alanında çalışan ve her geçen gün yeni bilgilerin elde edildiği bir alan haline gelmiştir.

Günümüzde birçok bilim dalında farklı yapı ve isimlere sahip manifold çeşitlerinin olduğu bilinmektedir. Bunlardan biride kontakt (değme) manifoldlardır. Bir kontakt manifold boyutu tek olan bir $(2n+1)-$ boyutlu diferansiyellenebilir manifolddur ve bu manifold üzerinde tanımlı bir diferansiyellenebilir $\eta$ $1-$formu yardımıyla tanımlanır öyle ki bu $\eta$ $1-$form manifoldun her noktasında

$$(\eta \Lambda d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlar. $\eta$ $1-$form yardımıyla kontrakt distrübüsyon olarak adlandırılan ve

$$D = \left\{ X \in TM^{2n+1} : \eta(X) = 0 \right\}$$

şeklinde $2n-$ boyutlu bir $D$ distrübüsyonu tanımlanır $D$ distrübüsyonunun yönlendirilebilir olması

$$\eta(\xi) = 1, \qquad d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak şekilde $D$ nin $TM^{2n+1}$ tümleyeni olan bir $\xi$ vektör alanının varlığını garanti eder. Bu vektör alanına $M^{2n+1}$ manifoldunun karakteristik vektör alanı denir. Böylece bir kontakt manifold $\eta$ $1-$formu ve $\xi$ karakteristik vektör alanı ile karakterize edilir.

$\phi$, $M^{2n+1}$ üzerinde bir $(1,1)-$tensör alanı ve $\xi$, $M^{2n+1}$ üzerinde bir vektör alanı olmak üzere $\eta(\xi)=1$ ve $\phi^2=-I+\eta\otimes\xi$ şartlarını sağlanıyor ise $M^{2n+1}$ manifolduna $(\phi,\xi,\eta)$ hemen hemen kontakt yapısına sahiptir denir.

$M^{2n+1}$, $(\phi,\xi,\eta)$ hemen hemen kontakt yapısına sahip olan bir hemen hemen kontakt manifold ise $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde $(\phi,\xi,\eta)$ yapısı yardımıyla bir $J$ hemen hemen kompleks manifold olur. Bu durumda $J$ ile birlikte $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ hemen hemen kompleks manifold olur. Eğer $J$ integrallenebilir ise $(\phi,\xi,\eta)$ yapısına normaldir denir. Normal kontakt metrik manifoldlar ise Sasakian manifodlar olarak adlandırılır [1].

Hemen hemen kontakt manifoldlara benzer şekilde diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde

$$\eta(\xi)=1,$$
$$\phi^2=I-\eta\otimes\xi$$

şartlarını sağlayan ve hemen hemen parakontakt yapı olarak adlandırılan bir $(\phi,\xi,\eta)$ üçlüsü ilk kez I. Sato [2,3] tarafından tanımlanmıştır. Hemen hemen parakontakt yapı, hemen hemen kontakt yapının [4,5] bir benzeridir. Ancak, hemen hemen parakontakt yapı ile yakından ilgili olan kontakt yapının tersine, hemen hemen parakontakt çarpım yapısı ile ilgilidir. Hemen hemen kontakt manifoldlar daima tek boyutludur. I. Sato [2] tarafından tanımlanan hemen hemen parakontakt manifoldlar ise çift boyutlu da olabilir.

Neill [6] manifold üzerinde metrik tensörün negatif olma durumunu göz önüne alarak yarı-Riemann manifoldları tanımladı. Eğer bir yarı-Riemann manifoldun bir alt manifoldu üzerine indirgenen metrik tensör pozitif tanımlı ise spacelike, negatif tanımlı ise timelike (zaman benzeri) alt manifold denir. Timelike veya spacelike alt manifoldlar nondejenere (yarı-Riemann) alt manifoldlar olarak adlandırılır.

Hemen hemen kontakt yapı ile birleşen bir yarı-Riemann metriğe sahip hemen hemen kontakt manifoldlar ilk kez Takahashi [7] tarafından tanımlandı. 1989' da ise Matsumoto [8] hemen hemen parakontakt manifold üzerinde karakteristik vektör alanı $-\xi$ vektör alanı ile değiştirip oluşan yeni yapı ile birleşen Lorentzian metriği gözönüne alarak Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı kavramını ortaya attı. Açıktır ki, hemen hemen parakontakt manifoldlar üzerinde ki yarı-Riemann metriğinin indeksi 1 dir ve karekteristik vektör alanı $\xi$ daima timelikedır.

Yukarıda anlatılan bir hemen hemen parakontakt manifoldu hemen hemen parakontakt Riemann manifoldu yapan Riemann metriğini ve Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldu üzerindeki Lorentz metriğini içerecek şeklide yarı-Riemann metriğe sahip hemen hemen parakontakt manifoldlar ilk kez Tripathi, Keleş, Kılıç ve Perktaş [9] tarafından tanımlandı ve bu tip manifoldlar belirsiz parakontakt manifoldlar olarak adlandırıldı.

1985' te Kaneyuki ve Konzai [10] $(2n+1)-$ boyutlu bir yarı-Riemann manifold üzerinde hemen hemen parakontakt yapıyı tanımlayarak $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ bir hemen hemen parakompleks yapı kurdu. Zamkovoy [11] ise Kaneyuki ve Konzai [10] tarafından verilen hemen hemen parakontakt yapıyı

$$g(\phi X,\phi W)=-g(X,W)+\eta(X)\eta(W)$$

ile tanımlanan $(n+1,n)$ işaretli bir yarı-Riemann metrik ile ilişkilendirerek herhangi bir hemen hemen parakontakt yapının uyumlu metrik olarak adlandırılan bu tipte bir yarı-Riemann metriği tanımlamaya imkan verdiğini gösterdi.

Bu çalışmada ilk üç bölümde çalışmamızın son bölümünde kullanılacak olan yarı-Riemann manifoldlar, hemen hemen parakontakt manifoldlar ve quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlar ile ilgili temel bilgiler verilip son bölümde ise quasi-sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlar üzerinde bazı eğrilik şartları elde edilmiştir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1. Yarı-Riemann Manifoldlar

**Tanım 2.1.1.** $V$ bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü her $r, s, t \in V$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

**i.** $g(r,s) = g(s,r)$

**ii.** $g(ar+bs,t) = ag(r,t) + bg(s,t)$,

**iii.** $g(r,as+bt) = ag(r,s) + bg(r,t)$

özelliklerine sahip ise $g$ ye $V$ üzerinde simetrik bilineer form denir [6].

**Tanım 2.1.2.** $V$ vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda

$\forall r \in V$ ve $r \neq 0$ için $g(r,r) > 0$ ise $g$ ye pozitif tanımlı,

$\forall r \in V$ ve $r \neq 0$ için $g(r,r) < 0$ ise $g$ ye negatif tanımlı,

$\forall r \in V$ ve $r \neq 0$ için $g(r,r) \geq 0$ ise $g$ ye pozitif yarı tanımlı,

$\forall r \in V$ ve $r \neq 0$ için $g(r,r) \leq 0$ ise $g$ ye negatif yarı tanımlı denir [6].

**Tanım 2.1.3.** $V$ vektör uzayı ve

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun. O halde

$$g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu $W$ alt uzayının boyutuna $g$ nin indeksi denir. $W$ alt uzayı üzerine indirgenmiş $g|_W$ simetrik bilineer formuna ise indirgenmiş simetrik bilineer form adı verilir ve kısaca $g$ ile gösterilir [6].

**Tanım 2.1.4.** $V$ vektör uzayı ve $g$ , $V$ üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu durumda

**i.** $g\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=0,\ i\neq j$

**ii.** $g\left(\alpha_i,\alpha_i\right)=1,\ \ 1\leq i\leq\gamma$

**iii.** $g\left(\alpha_i,\alpha_i\right)=-1,\ \ \gamma+1\leq i\leq\gamma+v,$

**iv.** $g\left(\alpha_i,\alpha_i\right)=0,\ \ \gamma+v+1\leq i\leq n=\gamma+v+\mu$

olacak şekilde $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ bazı vardır [6].

**Tanım 2.1.5.** $V$ reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma $V$ üzerinde bir skalar çarpım (yarı-Öklid metriği) denir. $V$ üzerinde bir skalar çarpım $g$ ise $(V,g)$ ye de skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir [12].

**Tanım 2.1.6.** $M$ diferansiyellenebilir manifoldunun $p\in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_PM$ ise

$$g:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$
$$(X_p,V_p)\to g(X_p,V_p)$$

ile tanımlı indeksi sabit, bilineer, simetrik ve non-dejenere $(0,2)-$ tipindeki $g$ , tensör alanına $M$ üzerinde bir metrik tensör ve $g$ , metrik tensörü ile donatılmış bir $M$ manifolduna ise yarı-Riemann manifoldu denir [6].

**Tanım 2.1.7.** $M$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $g$ , $M$ üzerinde metrik tensör olsun. $g$ nin indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve $indM$ ile gösterilir [6].

**Tanım 2.1.8.** $M$ bir diferansiyellenebilir yarı-Riemann manifoldu ve $g$ , $M$ üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun. Eğer her $p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ için

$$g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

**i.** $g(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ ise $X_p$ vektörüne spacelike (uzay benzeri),

**ii.** $g(X_p, X_p) < 0$ ise $X_p$ vektörüne timelike (zaman benzeri),

**iii.** $g(X_p, X_p) = 0,\ X_p \neq 0$ ise $X_p$ vektörüne lightlike (ışık benzeri veya null) vektör denir [6].

**Tanım 2.1.9.** $\{u_1, ..., u_n\}$ $\mathbb{R}^n_v$ üzerinde standart koordinat sistemi, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial_{u_i}}$ olsun. $\mathbb{R}^n_v$ de $V$ ve $W$ için

$$\nabla_V W = V(W_i)\partial_i$$

şeklinde tanımlanan $\nabla_V W$ vektör alanına $W$ nın $V$ ye göre kovaryant türevi denir [6]. Burada $W = w_i \partial_i$ dir.

**Tanım 2.1.10.** $M$ bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

fonksiyonuna $M$ üzerinde bir lineer konneksiyon denir.

**i.** $\nabla_V W,\ V$ ye göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir.

**ii.** $\nabla_V W,\ W$ ye göre $\mathbb{R}$ lineerdir.

**iii.** $\nabla_V (fW) = V(f)W + f\nabla_V W,\ \ \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

dir [6].

**Tanım 2.1.11.** $M$ bir yarı-Riemann manifold olsun. Bu durumda $M$ üzerinde her $U,V \in \Gamma(TM)$ için

**i.** $[U,V] = \nabla_U V - \nabla_V U$

**ii.** $Ug(V,Z) = g(\nabla_U V,Z) + g(V,\nabla_U Z)$

şartlarını sağlayan bir tek $\nabla$ Levi-Civita konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V,Z) &= Ug(V,Z) + Vg(Z,U) - Zg(U,V) \\ &\quad + g([U,V],Z) + g([Z,U],V) \\ &\quad - g([V,Z],U) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile tek türlü bellidir [6].

**Tanım 2.1.12.** $M$ , Levi-Civita konneksiyonu $\nabla$ olan bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Her $U,V,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(U,V,Z) \to R(U,V)Z = \nabla_U \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_U Z - \nabla_{[U,V]} Z$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına $M$ nin Riemann eğrilik tensörü denir [6].

**Teorem 2.1.1.** $R$, $M$ yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörü olmak üzere her $U,V,W,Z \in \Gamma(TM)$ için

**i.** $g(R(U,V)Z,W) = -g(R(V,U)Z,W)$,

**ii.** $g(R(U,V)Z,W) = -g(R(U,V)W,Z)$,

**iii.** $R(U,V)Z + R(V,Z)U + R(Z,U)V = 0$

**iv.** $g(R(U,V)Z,W) = g(R(Z,W)U,V)$

dir [6].

**Tanım 2.1.13.** $M$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$ , $T_pM$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$Ric : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \to Ric(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i, X_p)Y_p, e_i)$$

veya

$$Ric(X_p, Y_p) = iz\left\{Z_p \to R(Z_p, X_p)Y_p\right\}$$

şeklinde tanımlı Ricci tensörüne $M$ yarı-Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü ve $Ric(X_p, Y_p)$ değerine de Ricci eğriliği denir [6].

**Tanım 2.1.14.** $M$ bir yarı-Riemann manifold ve $\{e_1,...,e_n\}$ , $T_pM$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere $M$ nin skaler eğriliği

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır [6].

**Tanım 2.1.15.** $M$ , $(2n+1)-$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, V \in \chi(M)$ için $M$ nin concircular eğrilik tensör alanı

$$Z(X,Y)V = R(X,Y)V - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\left[g(Y,V)X - g(X,V)Y\right] \tag{2.1}$$

dir [15].

**Tanım 2.1.16.** $M$ , $(2n+1)-$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X,Y,V \in \chi(M)$ için $M$ nin projektif eğrilik tensör alanı

$$P(X,Y)V = R(X,Y)V - \frac{1}{2n}\left[S(Y,V)X - S(X,V)Y\right] \tag{2.2}$$

dir [15].

**Tanım 2.1.17.** $M$ , $n \geq 2$ boyutlu $C^{\infty}$ sınıfından bağlantılı bir Riemann manifold olsun. $M$ üzerinde tanımlı $(0,2)-$ tipinde bir simetrik tensör alanı $A$ olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi

$$(U \wedge_A V)Z = A(V,Z)U - A(U,Z)V \tag{2.3}$$

şeklindedir. Eğer $A = g$ alınırsa

$$(U \wedge_g V)Z = g(V,Z)U - g(U,Z)V \tag{2.4}$$

şeklindedir. Bundan sonra $(X \wedge_g Y)$ yerine kısaca $X \wedge Y$ kullanılacaktır.

$M$ üzerinde $(0,k)-$ tipindeki $k \geq 1$ bir $T$ tensör alanı ve $(0,2)-$ tipindeki bir simetrik $A$ tensör alanı verildiğinde $R \cdot T$ ve $\mathbb{Q}(A \cdot T)$ tensörleri sırası ile

$$\begin{aligned}(R\cdot T)(U_1,...,U_k;U,Y) &= -T(R(U,Y)U_1,...U_k) - ... \\ &-T(U_1,U_2,...,R(U,Y)U_k)\end{aligned} \tag{2.5}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(A\cdot T)(U_1,...,U_k;U,Y) &= -T((U \wedge_A Y)(U_1,...U_k) - ... \\ &-T(U_1,U_2,...,(U \wedge_A Y)U_k)\end{aligned} \tag{2.6}$$

Biçiminde tanımlanır [16]. Böylece (2.5) ve (2.6) denkleminde $T = R$ ve $A = g$ alındığında;

$$(R\cdot R)(U_1,...,U_k;U,Y) = -R(R(U,Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.7}$$
$$-R(U_1,..., R(U,Y)U_k)$$
$$\mathbb{Q}(g\cdot R)(U_1,...,U_k;U,Y) = -R(U\wedge_g Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.8}$$
$$-R(U_1,..., R(U\wedge_g Y)U_k)$$

$T = Z$ ve $A = g$ alındığında;

$$(R\cdot Z)(U_1,...,U_k;U,Y) = -Z(R(U,Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.9}$$
$$-Z(U_1,..., R(U,Y)U_k)$$
$$\mathbb{Q}(g\cdot Z)(U_1,...,U_k;U,Y) = -Z(U\wedge_g Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.10}$$
$$-Z(U_1,..., R(U\wedge_g Y)U_k)$$

$T = P$ ve $A = g$ alındığında;

$$(R\cdot P)(U_1,...,U_k;U,Y) = -P(R(U,Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.11}$$
$$-P(U_1,..., R(U\wedge_g Y)U_k)$$

$A = P,\ T = R$ için (2.6) denkleminden;

$$\mathbb{Q}(P\cdot R)(U_1,...,U_k;U,Y) = -R(U\wedge_p Y)U_1,...,U_k) - ... \tag{2.12}$$
$$-R(U_1,..., R(U\wedge_p Y)U_k)$$

olarak elde edilir.

$M$ manifoldu üzerinde

i) Eğer $R\cdot R = 0$ ise $M$ ye yarı simetriktir denir [16].

ii) Eğer $R\cdot P = 0$ ise $M$ ye projektif yarı simetriktir denir [16].

iii) Eğer $R\cdot Z = 0$ ise $M$ ye concircular yarı simetriktir denir [15].

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1. Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlar

Bu kısımda üzerinde eğrilik tensörleriyle ilgili şartlar çalışacağımız hemen hemen parakontakt manifold tanıtılarak, temel özellikleri verilecektir.

**Tanım 3.1.1.** $M^{2n+1}$ diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde $\phi$, $(1,1)-$tipindeki bir tensör alanı, $\eta$ $1-$form ve $\xi$ de bir vektör alanı olmak üzere

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \tag{3.1}$$

$$\eta(\xi) = 1 \tag{3.2}$$

şartları sağlanıyor ise $(\phi, \xi, \eta)$ üçlüsüne $M$ üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı ve $(M, \phi, \xi, \eta)$ ya da bir hemen hemen parakontakt manifold denir [10].

**Önerme 3.1.1.** $M^{2n+1}$ bir $(\phi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi\xi &= 0, \\ \eta o \phi &= 0, \\ rank\phi &= 2n \end{aligned} \tag{3.3}$$

dir [10].

**Tanım 3.1.2.** $(M, \phi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer üzerinde

$$g(\phi X, \phi W) = -g(X, W) + \eta(X)\eta(W) \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $g$ yarı-Riemann metriği var ise $M$ ye hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $g$ metriğine bağdaşabilir metrik denir.
Açık olarak $g$ metriği indeksi $n$ olan bir yarı-Riemann metriktir [11].

**Sonuç 3.1.1.** $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ , $(2n+1)-$ boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda

$$g(\phi X,W)=-g(X,\phi W) \tag{3.5}$$

ve

$$\eta(X)=g(X,\xi) \tag{3.6}$$

dir [11].

**Tanım 3.1.3.** $M$ , $(\phi,\xi,\eta,g)$ yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda $M$ üzerinde

$$\Phi(X,W)=g(X,\phi W), \quad \forall X,W\in\Gamma(TM) \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanan $\Phi$ dönüşümüne, $(\phi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontakt yapısının temel iki formu denir [11].

**Tanım 3.1.4.** $M$ , $(\phi,\xi,\eta,g)$ yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer her $X,W\in\Gamma(TM)$ için

$$g(X,\phi W)=d\eta(X,W) \tag{3.8}$$

ise $M$ ye parakontakt metrik manifold ve $\eta$ ya $M$ nin parakontakt formu denir. Burada

$$d\eta(X,W)=\frac{1}{2}\left\{X\eta(W)-W\eta(X)-\eta([X,W])\right\} \tag{3.9}$$

dir.

$(2n+1)-$ boyutlu bir $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontakt metrik manifold için bir lokal ortonormal baz inşa edilebilir. Kabul edelim ki $U$ , $M$ üzerinde bir koordinat komşuluğu ve $X_1$, $\xi$ ye dik olacak şekilde $U$ üzerinde herhangi bir birim vektör alanı olsun. Bu durumda $\phi X_1$, $X_1$ ve $\xi$ ye ortogonal vektör alanı ve $|\phi X_1|^2=-1$ dir. $\xi$, $X_1$ ve $\phi X_1$ e ortogonal olacak şekilde bir $X_2$ ve birim vektör alanı seçilirse $\phi X_2$, $X_1$, $\phi X_1$, $X_2$ ve $\xi$ ye ortogonal vektör alanı ve $|\phi X_2|^2=-1$ olur. Bu şekilde devam ederek $\phi-$ bazı olarak adlandırılan bir $\{X_i,\phi X_i,\xi\}$, $(i=1,...,n)$ lokal ortonormal bazı elde edilir [11].

**Örnek 3.1.1.** $\mathbb{R}^{2n+1}$ $(u_i,v_i,z)$, $(i=1,...,n)$, standart koordinat sistemi ile verilen reel uzay olsun. $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde

$$\phi\frac{\partial}{\partial u_i}=\frac{\partial}{\partial v_i},\ \phi\frac{\partial}{\partial v_i}=\phi\frac{\partial}{\partial u_i},\ \phi\frac{\partial}{\partial z}=0$$

$$\eta=dz,\xi=\frac{\partial}{\partial z}$$

$$g=\eta\otimes\eta+\sum_{i=1}^{n}du_i\otimes du_i-\sum_{i=1}^{n}dv_i\otimes dv_i$$

olacak şekilde $\phi$ $(1,1)-$ tensör alanını $\eta$ , $1-$ formunu, $\xi$ vektör alanını ve $g$ metriğini tanımlayalım. Bu durumda

$$\eta(\xi)=dz(\frac{\partial}{\partial z})=1$$

dir.

Her $U,V \in \Gamma(TM)$ için

$$U = a_i \frac{\partial}{\partial u_i} + b_i \frac{\partial}{\partial v_i} + c \frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(TM), (i = 1,...,n)$$

$$V = d_i \frac{\partial}{\partial u_i} + e_i \frac{\partial}{\partial v_i} + f \frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(TM), (i = 1,...,n)$$

olmak üzere

$$\eta(U) = c, \quad \eta(V) = f$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\phi^2(U) &= \phi(\phi(U)) \\
&= \phi(\phi(a_i \frac{\partial}{\partial u_i} + b_i \frac{\partial}{\partial v_i} + c \frac{\partial}{\partial z})) \\
&= \phi(a_i \frac{\partial}{\partial v_i} + b_i \frac{\partial}{\partial u_i}) \\
&= a_i \frac{\partial}{\partial u_i} + b_i \frac{\partial}{\partial v_i} \\
&= U - \eta(U)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
(\eta \circ \phi)(U) &= \eta(\phi(U)) \\
&= \eta(a_i \frac{\partial}{\partial v_i} + b_i \frac{\partial}{\partial u_i}) \\
&= dz(a_i \frac{\partial}{\partial v_i} + b_i \frac{\partial}{\partial u_i}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\phi(\xi)=\phi(\frac{\partial}{\partial z})=0$$

dir. Böylece $(\phi,\xi,\eta)$, $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı olur.
Ek olarak

$$g(\phi(U),\phi(V))=g(a_i\frac{\partial}{\partial v_i}+b_i\frac{\partial}{\partial u_i},d_i\frac{\partial}{\partial v_i}+e_i\frac{\partial}{\partial u_i})$$
$$=-a_i d_i+b_i e_i$$
$$=-g(U,V)+\eta(U)\eta(V)$$

olduğundan $g$ bir bağdaşabilir metrik ve $(\mathbb{R}^{2n+1},\ \phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifolddur [13].

**Lemma 3.1.1.** $M$ hemen hemen parakontakt metrik manifoldun bir para-Sasakian manifold olması için gerek ve yeter şart her $X,W\in\Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X\phi)W=-g(X,W)\xi+\eta(W)X \tag{3.10}$$

olmasıdır [11].

**Önerme 1.1.2.** $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda

$$R(X,W)\xi=\eta(X)W-\eta(W)X \tag{3.11}$$

dir [11]

**Teorem 3.1.1.** $(M,\phi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$boyutlu $(n>1)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Eğer paraholomorfik kesitsel eğrilik noktadan bağımsız ise

$$g(R(U,V)Z,W) = \frac{k-3}{4}(g(V,Z)g(U,W) - g(U,Z)g(V,W))$$
$$+\frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} g(U,Z)\eta(V)\eta(W) + g(V,W)\eta(U)\eta(Z) \\ -g(U,W)\eta(V)\eta(Z) - g(V,Z)\eta(U)\eta(W) \\ +g(V,\phi Z)g(\phi U,W) - g(U,\phi Z)g(\phi V,W) \\ +2g(\phi U,V)g(\phi Z,W) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

dır [14].

**Tanım 3.1.5.** Eğer $M$ manifoldu üzerinde paraholomorfik kesitsel eğrilik sabit ise $M$ ye para-Sasakian uzay form denir. Bir para-Sasakian uzay form $M(k)$ ile gösterilir [14].

# 4. QUASİ SABİT EĞRİLİKLİ MANİFOLDLAR

$M$ , $(2n+1)-$ boyutlu quasi-sabit eğrilikli manifold olsun. O zaman $M$ manifoldunun $R$ eğrilik tensörü;

$$R(X,Y)W = a\left[g(Y,W)X - g(X,W)Y\right] + b\begin{bmatrix} g(Y,W)\eta(X)\xi + \eta(Y)\eta(W)X \\ -g(X,W)\eta(Y)\xi - \eta(X)\eta(W)Y \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

dir. Burada

$$a = \frac{\tau - 2T}{(2n+1)(2n)}, \qquad b = \frac{(2n+1)T - \tau}{(2n+1)(2n)} \tag{4.2}$$

dir. (4.2) eşitliğinde $T$ , $\xi$ ye karşı gelen Ricci eğriliği, $\tau$ da $M$ nin skaler eğriliğidir. (4.1) denkleminde $X$ yerine $\xi$ yazılırsa;

$$R(\xi,Y)W = (a+b)\left[g(Y,W)\xi - \eta(W)Y\right] \tag{4.3}$$

elde edilir. $M$ manifoldunun Ricci tensörü $S$ olmak üzere;

$$S(X,Y) = (2na+b)g(X,Y) + (2n-1)b\eta(X)\eta(Y) \tag{4.4}$$

dir. (4.4) denkleminde $X$ yerine $\xi$ yazılırsa;

$$S(\xi,Y) = (2na+b)g(\xi,Y) + (2n-1)b\eta(\xi)\eta(Y) \tag{4.5}$$

dir. (4.5) eşitliğinde (3.2) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa;

$$S(\xi,Y) = (2na+b)\eta(Y) + (2n-1)b\eta(Y) = T\eta(Y) \tag{4.6}$$

elde edilir.

$M$ manifoldunun Ricci operatörü $\mathbb{Q}$ olmak üzere;

$$\mathbb{Q}X = (2na+b)X + (2n-1)b\eta(X)\xi \tag{4.7}$$

dir. (4.7) denkleminde $X$ yerine $\xi$ yazılırsa;

$$\mathbb{Q}\xi = (2na+b)\xi + (2n-1)b\eta(X)\xi = T\xi \tag{4.8}$$

olur. Şimdi üzerinde çalışacağımız diğer eğrilik tensörlerinin $(2n+1)-$ boyutlu quasi sabit eğrilikli bir manifold üzerinde karşılıklarını bulalım. İlk olarak concircular eğrilik tensörünü ele alalım. (2.1) denkleminde $X$ yerine $\xi$ yazılırsa;

$$Z(\xi,Y)W = R(\xi,Y)W - \frac{\tau}{2n(2n+1)}(g(Y,W)\xi - \eta(W)Y) \tag{4.9}$$

dir. Böylece (4.3) denklemi (4.9) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} Z(\xi,Y)W &= (a+b)\big(g(Y,W)\xi - \eta(W)Y\big) \\ &\quad - \frac{\tau}{2n(2n+1)}(g(Y,W)\xi - \eta(W)Y) \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) denkleminden;

$$Z(\xi,Y)W = \left((a+b) - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\big(g(Y,W)\xi - \eta(W)Y\big) \tag{4.11}$$

bulunur. Burada $a$ ve $b$ değerleri yerine yazıldığında;

$$Z(\xi,Y)W = \left(\frac{T}{2n} - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\big(g(Y,W)\xi - \eta(W)Y\big) \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) eşitliğinde;

$$\gamma = \frac{T(2n+1) - \tau}{2n(2n+1)} \tag{4.13}$$

diyelim. (4.13) denklemini (4.12) de kullanırsak;

$$Z(\xi,Y)W=\gamma\left(g(Y,W)\xi-\eta(W)Y\right) \tag{4.14}$$

bulunur. Projektif eğrilik tensörü için; (2.2) eşitliğinde $X$ yerine $\xi$ yazılırsa;

$$P(\xi,Y)W=R(\xi,Y)W-\frac{1}{2n}\left(S(Y,W)\xi-S(\xi,W)Y\right) \tag{4.15}$$

dir. (4.3) denklemi (4.15) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}P(\xi,Y)W&=(a+b)(g(Y,W)\xi-\eta(W)Y)\\&-\frac{1}{2n}\left(S(Y,W)\xi-S(\xi,W)Y\right)\end{aligned} \tag{4.16}$$

olur. (4.6) eşitliği (4.16) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}P(\xi,Y)W&=(a+b)\left(g(Y,W)\xi-\eta(W)Y\right)\\&-\frac{1}{2n}\left(S(Y,W)\xi-T\eta(W)Y\right)\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur. (4.17) denkleminden

$$\begin{aligned}P(\xi,Y)W&=(a+b)g(Y,W)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,W)\xi\\&=\frac{T}{2n}g(Y,W)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,W)\xi\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir.

# 5. QUASİ SABİT EĞRİLİKLİ HEMEN HEMEN PARAKONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

**Teorem 5.1.1.** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifold $M$ olsun. $M$ üzerinde $R(\xi,Y)\cdot R=0$ semi simetriklik şartı sağlanıyor ise $M$ bir Einstein manifoldudur.

**İspat:** Bir $(2n+1)-$ boyutlu bir quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifold $M$ üzerinde

$$R(\xi,Y)\cdot R=0$$

şartı sağlansın. O zaman

$$\begin{aligned}(R(\xi,Y)\cdot R)(X,V)W &= R(\xi,Y)R(X,V)W - R(R(\xi,Y)X,V)W\\ &-R(X,R(\xi,Y)V)W - R(X,V)R(\xi,Y)W\\ &=0\end{aligned} \tag{5.1}$$

dır. Buradan (5.1) denkleminde (4.3) denklemi kullanırsak;

$$\begin{aligned}(R(\xi,Y)\cdot R)(X,V)W &= (a+b)g(Y,R(X,V)W)\xi-\eta(R(X,V)W)Y)\\ &-R((a+b)(g(Y,X)\xi-\eta(X)Y,V)W\\ &-R(X,V)((a+b)(g(Y,W)\xi-\eta(W)Y))\\ &-R(X,(a+b)g(Y,V)\xi-\eta(V)Y)W\\ &=0\end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir. Bu durumda (5.2) denkleminden;

$$\begin{aligned}0 &= (a+b)(g(Y,R(X,V)W)\xi-\eta(R(X,V)W)Y)\\ &-(a+b)(g(Y,X)R(\xi,V)W)-\eta(X)R(Y,V)W)\\ &-(a+b)(g(Y,V)R(X,\xi)W-\eta(V)R(X,Y)W)\\ &-(a+b)(g(Y,W)R(X,V)\xi-\eta(W)R(X,V)Y)\end{aligned} \tag{5.3}$$

olur. Böylece (5.3) denkleminden;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(Y,R(X,V)W)\xi-\eta(R(X,V)W)Y \\ -g(Y,X)R(\xi,V)W+\eta(X)R(Y,V)W) \\ -g(Y,V)R(X,\xi)W+\eta(V)R(X,Y)W) \\ -g(Y,W)R(X,V)\xi+\eta(W)R(X,V)Y) \end{bmatrix}=0 \tag{5.4}$$

yazılabilir. (5.4) denkleminde $U$ ile iç çarpım yapılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(Y,R(X,V)W)g(\xi,U)-\eta(R(X,V)W)g(Y,U) \\ -g(Y,X)g(R(\xi,V)W,U)+\eta(X)g(R(Y,V)W,U) \\ -g(Y,V)g(R(X,\xi)W,U)+\eta(V)g(R(X,Y)W,U) \\ -g(Y,W)g(R(X,V)\xi,U)+\eta(W)g(R(X,V)Y,U) \end{bmatrix}=0 \tag{5.5}$$

bulunur. (5.5) denkleminde (3.6) denklemi kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(Y,R(X,V)W)\eta(U)-\eta(R(X,V)W)(Y,V) \\ -g(Y,X)g(R(\xi,V)W,U)+\eta(X)g(R(Y,V)W,U) \\ -g(Y,V)g(R(X,\xi)W,U)+\eta(V)g(R(X,Y)W,U) \\ -g(Y,W)g(R(X,V)\xi,U)+\eta(W)g(R(X,V)Y,U) \end{bmatrix}=0 \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.6) denkleminde $X$ yerine $\xi$ alınırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(Y,R(\xi,V)W)\eta(U)-\eta(R(\xi,V)W)g(Y,U) \\ -g(Y,\xi)g(R(\xi,V)W,U)+\eta(\xi)g(R(Y,V)W,U) \\ -g(Y,V)g(R(\xi,\xi)W,U)+\eta(V)g(R(\xi,Y)W,U) \\ -g(Y,W)g(R(\xi,V)\xi,U)+\eta(W)g(R(\xi,V)Y,U) \end{bmatrix}=0 \tag{5.7}$$

elde edilir. (5.7) denkleminde (4.3) eşitliği kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix}(a+b)\big(g(V,W)g(Y,\xi)-\eta(W)g(Y,V)\big)\eta(U)\\ -(a+b)\big(g(V,W)\eta(\xi)-\eta(W)\eta(V)\big)g(Y,U)\\ -(a+b)\big(g(V,W)g(\xi,U)-\eta(W)g(V,U)\big)\eta(Y)\\ +g(R(Y,V)W,U)\\ -(a+b)\big(g(\xi,W)g(\xi,U)-\eta(W)g(\xi,U)\big)g(Y,V)\\ +(a+b)\big(g(Y,W)g(\xi,U)-\eta(W)g(Y,U)\big)\eta(V)\\ -(a+b)\big(g(V,\xi)g(\xi,U)-\eta(\xi)g(V,U)\big)g(Y,W)\\ +(a+b)\big(g(V,Y)g(\xi,U)-\eta(Y)g(V,U)\big)\eta(W)\end{bmatrix}=0 \qquad (5.8)$$

bulunur. (5.8) denkleminde (3.6) eşitliği kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix}(a+b)(g(V,W)\eta(Y)\eta(U)-g(Y,V)\eta(W)\eta(U))\\ -(a+b)(g(V,W)g(Y,U)-g(Y,U)\eta(V)\eta(W))\\ -(a+b)(g(V,W)\eta(U)\eta(Y)-g(V,U)\eta(W)\eta(Y))\\ +g(R(Y,V)W,U)\\ -(a+b)(g(Y,V)\eta(W)\eta(U)-g(Y,V)\eta(W)\eta(U))\\ +(a+b)(g(Y,W)\eta(U)\eta(V)-g(Y,U)\eta(W)\eta(V))\\ -(a+b)(g(Y,W)\eta(U)\eta(V)-g(Y,W)g(V,U))\\ +(a+b)(g(V,Y)\eta(U)\eta(W)-g(V,U)\eta(Y)\eta(W))\end{bmatrix}=0 \qquad (5.9)$$

bulunur. (5.9) denkleminden;

$$(a+b)\begin{bmatrix}(a+b)\begin{pmatrix}g(Y,W)g(V,U)\\ -g(V,W)g(Y,U)\end{pmatrix}\\ +g(R(Y,V)W,U)\end{bmatrix}=0 \qquad (5.10)$$

elde edilir. Şimdi $\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ $(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun. (5.10) denkleminde $Y=U=E_i=\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ alalım. O halde;

$$(a+b)\begin{bmatrix}(a+b)\begin{bmatrix}g(e_i,W)g(V,e_i)-g(V,W)g(e_i,e_i)\\ -g(\phi e_i,W)g(V,\phi e_i)+g(V,W)g(\phi e_i,\phi e_i)\\ +g(\xi,W)g(V,\xi)-g(V,W)g(\xi,\xi)\end{bmatrix}\\ +g(R(e_i,V)W,e_i)-g(R(\phi e_i,V)W,\phi e_i)+g(R(\xi,V)W,\xi)\end{bmatrix}=0 \quad (5.11)$$

elde edilir. (5.11) denkleminden;

$$(a+b)\begin{bmatrix}(a+b)\left(-2ng(V,W)\right) \\ +S(V,W)\end{bmatrix}=0 \tag{5.12}$$

olur. Bu durumda (5.12) denkleminden;

$$(a+b)=0$$

veya

$$(a+b)(-2ng(V,W))+S(V,W)=0$$

olmalıdır. $(a+b)\neq 0$ olduğundan bu durumda;

$$S(V,W)=2n(a+b)g(V,W) \tag{5.13}$$

olmalıdır. (5.13) denkleminde $a$ ve $b$ değerleri yerine yazılırsa;

$$S(V,W)=Tg(V,W)$$

olur. O halde manifold bir Einstein manifolddur.

**Teorem 5.1.2.** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. $M$ üzerinde $R(\xi,X)\cdot P=0$ şartı sağlanıyor ise $M$ bir Einstein manifoldudur.

**İspat:** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. Kabul edelim ki $M$ üzerinde projektif semi simetriklik şartı sağlansın. Bu durumda

$$R(\xi,X)\cdot P=0 \tag{5.14}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}(R(\xi,X)\cdot P)(Y,Z)U &= R(\xi,X)P(Y,Z)U - P(R(\xi,X)Y,Z)U \\ &\quad -P(Y,R(\xi,X)Z)U - P(Y,Z)R(\xi,X)U \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.15}$$

yazılabilir. (5.15) denkleminde (4.1) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}0 &= (a+b)(g(X,P(Y,Z)U)\xi - \eta(P(Y,Z)U)X) \\ &\quad -(a+b)(g(X,Y)P(\xi,Z)U - \eta(Y)P(X,Z)U) \\ &\quad -(a+b)(g(X,Z)P(Y,\xi)U - \eta(Z)P(Y,X)U) \\ &\quad -(a+b)(g(X,U)P(Y,Z)\xi - \eta(U)P(Y,Z)X)\end{aligned} \tag{5.16}$$

elde edilir. (5.16) denkleminde $W$ ile iç çarpım yapılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(X,P(Y,Z)U)\eta(W) - \eta(P(Y,Z)U)g(X,W) \\ -g(X,Y)g(P(\xi,Z)U,W) + \eta(Y)g(P(X,Z)U,W) \\ -g(X,Z)g(P(Y,\xi)U,W) + \eta(Z)g(P(Y,X)U,W) \\ -g(X,U)g(P(Y,Z)\xi,W) + \eta(U)g(P(Y,Z)X,W) \end{bmatrix} = 0 \tag{5.17}$$

bulunur. (5.17) denkleminde $Y = \xi$ alınırsa

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(X,P(\xi,Z)U)\eta(W) - \eta(P(\xi,Z)U)g(X,W) \\ -g(X,\xi)g(P(\xi,Z)U,W) + \eta(\xi)g(P(X,Z)U,W) \\ -g(X,Z)g(P(\xi,\xi)U,W) + \eta(Z)g(P(\xi,X)U,W) \\ -g(X,U)g(P(\xi,Z)\xi,W) + \eta(U)g(P(\xi,Z)X,W) \end{bmatrix} = 0 \tag{5.18}$$

olur. (5.18) denkleminde (3.6) eşitliği kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(X,P(\xi,Z)U)\eta(W) - \eta(P(\xi,Z)U)g(X,W) \\ -\eta(X)g(P(\xi,Z)U,W) + g(P(X,Z)U,W) \\ -g(X,Z)g(P(\xi,\xi)U,W) + \eta(Z)g(P(\xi,X)U,W) \\ -g(X,U)g(P(\xi,Z)\xi,W) + \eta(U)g(P(\xi,Z)X,W) \end{bmatrix} = 0 \tag{5.19}$$

elde edilir. (5.19) denkleminde (4.18) eşitliği kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} \frac{T}{2n}\left(-g(Z,U)g(X,W)\right) \\ -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} -S(Z,U)g(X,W)-S(U,\xi)g(X,Z)\eta(W) \\ +S(X,U)\eta(Z)\eta(W)-S(Z,\xi)g(X,U)\eta(W) \\ +S(X,Z)\eta(U)\eta(W) \end{pmatrix} \\ +g(P(X,Z)U,W) \end{bmatrix}=0 \qquad (5.20)$$

bulunur. (5.20) denkleminden;

$$(a+b)\begin{bmatrix} \frac{T}{2n}\left(-g(Z,U)g(X,W)\right) \\ -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} -S(Z,U)g(X,W)-Tg(X,Z)\eta(U)\eta(W) \\ +S(X,U)\eta(Z)\eta(W)-Tg(X,U)\eta(Z)\eta(W) \\ -S(X,Z)\eta(U)\eta(W) \end{pmatrix} \\ +g(P(X,Z)U,W) \end{bmatrix}=0 \qquad (5.21)$$

olur. (5.21) denkleminde (2.3) eşitliği kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} \frac{T}{2n}\left(-g(Z,U)g(X,W)\right) \\ -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} -S(Z,U)g(X,W)-Tg(X,Z)\eta(U)\eta(W) \\ +S(X,U)\eta(Z)\eta(W)-Tg(X,U)\eta(Z)\eta(W) \\ -S(X,Z)\eta(U)\eta(W) \end{pmatrix} \\ +g(R(X,Z)U,W) \\ -\frac{1}{2n}\left(S(Z,U)g(X,W)-S(X,U)g(Z,W)\right) \end{bmatrix}=0 \qquad (5.22)$$

elde edilir. Şimdi $\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ $(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun. (5.22) denkleminde $X=W=E_i=\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ alalım. O halde;

$$(a+b)\begin{bmatrix} \frac{T}{2n}\begin{bmatrix} -g(Z,U)g(e_i,e_i) \\ +g(Z,U)g(\phi e_i,\phi e_i) \\ -g(Z,U)g(\xi,\xi) \end{bmatrix} \\ -\frac{1}{2n}\begin{bmatrix} -S(Z,U)g(e_i,e_i) \\ -Tg(e_i,U)\eta(Z)\eta(e_i)+S(e_i,Z)\eta(U)\eta(e_i) \\ -Tg(e_i,U)\eta(Z)\eta(e_i)-S(e_i,Z)\eta(U)\eta(e_i) \\ +S(Z,U)g(\phi e_i,\phi e_i) \\ +Tg(\phi e_i,U)\eta(Z)\eta(\phi e_i)-S(\phi e_i,Z)\eta(U)\eta(\phi e_i) \\ +Tg(\phi e_i,U)\eta(Z)\eta(\phi e_i)+S(\phi e_i,Z)\eta(U)\eta(\phi e_i) \\ -S(Z,U)g(\xi,\xi) \\ -Tg(\xi,U)\eta(Z)\eta(\xi)+S(\xi,Z)\eta(U)\eta(\xi) \\ -Tg(\xi,U)\eta(Z)\eta(\xi-S(\xi,Z)\eta(U)\eta(\xi) \end{bmatrix} \\ +g(R(e_i,Z)U,e_i)-g(R(\phi e_i,Z)U,\phi e_i)+g(R(\xi,Z)U,\xi) \\ -\frac{1}{2n}\begin{bmatrix} S(Z,U)S(e_i,e_i)-S(e_i,U)S(Z,e_i) \\ -S(Z,U)S(\phi e_i,\phi e_i)+S(\phi e_i,U)S(Z,\phi e_i) \\ +S(Z,U)S(\xi,\xi)-S(\xi,U)S(Z,\xi) \end{bmatrix} \end{bmatrix}=0 \tag{5.23}$$

elde edilir. (5.23) denkleminden

$$(a+b)\begin{bmatrix} \frac{T}{2n}\left(-(2n+1)g(Z,U)\right) \\ -\frac{1}{2n}\left(-(2n+1)S(Z,U)\right) \\ +S(Z,U) \\ -\frac{1}{2n}((2n)S(Z,U)) \end{bmatrix}=0 \tag{5.24}$$

bulunur. Buradan

$$(a+b)=0$$

veya

$$\frac{(2n+1)(a+b)}{2n}S(Z,U)=\frac{(2n+1)T(a+b)}{2n}g(Z,U)$$

olur. $(a+b)\neq 0$ olduğundan

$$S(Z,U)=Tg(Z,U)$$

olur. O halde $M$ bir Einstein manifoldudur.

**Teorem 5.1.3.** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. $M$ üzerinde $P(\xi,X)\cdot R=0$ şartı sağlanıyor ise $M$ bir Einstein manifoldudur.

**İspat:** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. Kabul edelim ki $M$ üzerinde

$$P(\xi,X)\cdot R=0$$

şartı sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}(P(\xi,X)\cdot R)(Y,Z)U &= P(\xi,X)R(Y,Z)U-R(P(\xi,X)Y,Z)U\\ &\quad -R(Y,P(\xi,X)Z)U-R(Y,Z)P(\xi,X)U\\ &=0\end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.25) denkleminde (4.18) denklemi kullanılırsa;

$$\begin{aligned}&\frac{T}{2n}\begin{bmatrix} g(X,R(Y,Z)U)\xi-g(X,Y)R(\xi,Z)U\\ -g(X,Z)R(Y,\xi)U-g(X,U)R(Y,Z)\xi\end{bmatrix}\\ &-\frac{1}{2n}\begin{bmatrix} S(X,R(Y,Z)U)\xi-S(X,Y)R(\xi,Z)U\\ -S(X,Z)R(Y,\xi)U-S(X,U)R(Y,Z)\xi\end{bmatrix}\\ &=0\end{aligned} \tag{5.26}$$

olur. (5.26) denkleminde $W$ ile iç çarpım yapılırsa;

$$\begin{aligned}&\frac{T}{2n}\begin{bmatrix} g(X,R(Y,Z)U)\eta(W)-g(X,Y)g(R(\xi,Z)U,W)\\ -g(X,Z)g(R(Y,\xi)U,W)-g(X,U)g(R(Y,Z)\xi,W)\end{bmatrix}\\ &-\frac{1}{2n}\begin{bmatrix} S(X,R(Y,Z)U)\eta(W)-S(X,Y)g(R(\xi,Z)U,W)\\ -S(X,Z)g(R(Y,\xi)U,W)-S(X,U)g(R(Y,Z)\xi,W)\end{bmatrix}\\ &=0\end{aligned} \tag{5.27}$$

bulunur. (5.27) denkleminde $Y=\xi$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{T}{2n}\begin{bmatrix} g(X,R(\xi,Z)U)\eta(W)-g(X,\xi)g(R(\xi,Z)U,W) \\ -g(X,Z)g(R(\xi,\xi)U,W)-g(X,U)g(R(\xi,Z)\xi,W)\end{bmatrix} \\
&-\frac{1}{2n}\begin{bmatrix} S(X,R(\xi,Z)U)\eta(W)-S(X,\xi)g(R(\xi,Z)U,W) \\ -S(X,Z)g(R(\xi,\xi)U,W)-S(X,U)g(R(\xi,Z)\xi,W)\end{bmatrix} \\
&=0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilir. (5.28) eşitliğinde (3.6) ve (4.6) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{T}{2n}\begin{bmatrix} g(X,R(\xi,Z)U)\eta(W)-\eta(X)g(R(\xi,Z)U,W) \\ -g(X,Z)g(R(\xi,\xi)U,W)-g(X,U)g(R(\xi,Z)\xi,W)\end{bmatrix} \\
&-\frac{1}{2n}\begin{bmatrix} S(X,R(\xi,Z)U)\eta(W)-T\eta(X)g(R(\xi,Z)U,W) \\ -S(X,Z)g(R(\xi,\xi)U,W)-S(X,U)g(R(\xi,Z)\xi,W)\end{bmatrix} \\
&=0
\end{aligned} \tag{5.29}$$

elde edilir. (5.29) denkleminden (4.1) denklemi kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{T}{2n}\left[(a+b)\begin{pmatrix} -g(X,Z)\eta(U)\eta(W) \\ +g(Z,W)\eta(U)\eta(X) \\ -g(X,U)\eta(X)\eta(W) \\ +g(W,Z)g(X,U)\end{pmatrix}\right] \\
&-\frac{1}{2n}\left[(a+b)\begin{pmatrix} -S(X,Z)\eta(U)\eta(W) \\ +Tg(Z,W)\eta(U)\eta(X) \\ -S(X,U)\eta(X)\eta(W) \\ +S(X,U)g(W,Z)\end{pmatrix}\right] \\
&=0
\end{aligned} \tag{5.30}$$

elde edilir. Şimdi $\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ $(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun. (5.30) denkleminde $X=W=E_i=\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ alalım. O halde;

$$\frac{T}{2n}\left[(a+b)\begin{bmatrix}-g(e_i,Z)\eta(U)\eta(e_i)+g(e_i,Z)\eta(U)\eta(e_i)\\ -g(e_i,U)\eta(Z)\eta(e_i)+g(e_i,Z)g(U,e_i)\\ +g(\phi e_i,Z)\eta(U)\eta(\phi e_i)-g(\phi e_i,Z)\eta(U)\eta(\phi e_i)\\ +g(\phi e_i,U)\eta(Z)\eta(\phi e_i)-g(\phi e_i,Z)g(U,\phi e_i)\\ -g(\xi,Z)\eta(U)\eta(\xi)+g(\xi,Z)\eta(U)\eta(\xi)\\ -g(\xi,U)\eta(Z)\eta(\xi)+g(\xi,Z)g(U,\xi)\end{bmatrix}\right]$$

$$-\frac{1}{2n}\left[(a+b)\begin{bmatrix}-S(e_i,Z)\eta(U)\eta(e_i)+Tg(e_i,Z)\eta(U)\eta(e_i)\\ -S(e_i,U)\eta(Z)\eta(e_i)+S(e_i,Z)g(U,e_i)\\ +S(\phi e_i,Z)\eta(U)\eta(\phi e_i)-Tg(\phi e_i,Z)\eta(U)\eta(\phi e_i)\\ +S(\phi e_i,U)\eta(Z)\eta(\phi e_i)-S(\phi e_i,Z)g(U,\phi e_i)\\ -S(\xi,Z)\eta(U)\eta(\xi)+T(\xi,Z)\eta(U)\eta(\xi)\\ -S(\xi,U)\eta(Z)\eta(\xi)+S(\xi,Z)g(U,\xi)\end{bmatrix}\right] \tag{5.31}$$

$$=0$$

elde edilir. (5.31) denkleminden;

$$\frac{T}{2n}(a+b)(g(Z,U)-\eta(Z)\eta(U))$$
$$-\frac{1}{2}(a+b)(S(U,Z)-T\eta(Z)\eta(U)) \tag{5.32}$$
$$=0$$

buradan;

$$(a+b)=0$$

veya

$$\frac{1}{2n}S(U,Z)=\frac{T}{2n}g(U,Z)$$

elde edilir. Buradan manifold bir Einstein manifold olur.

**Teorem 5.1.4:** Bir $(2n+1)-$ boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. $M$ üzerinde $R(\xi,X)\cdot Z=0$ şartı sağlanıyor ise $M$ bir Einstein manifoldudur.

**İspat:** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. Kabul edelim ki $M$ üzerinde $R(\xi,X)\cdot Z=0$ şartı sağlansın. Bu durumda;

$$R(\xi,X)\cdot Z=0 \tag{5.33}$$

o halde (5.33) eşitliği

$$\begin{aligned}(R(\xi,X)\cdot Z)(Y,U)W &= R(\xi,X)Z(Y,U)W-Z(R(\xi,X)Y,U)W\\ &\quad -Z(Y,R(\xi,X)U)W-Z(Y,U)R(\xi,X)W\\ &=0\end{aligned} \tag{5.34}$$

halini alır. (5.34) denkleminde (4.1) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}0= &(a+b)(g(X,Z(Y,U)W)\xi-\eta(Z(Y,U)W)X)\\ &-(a+b)(g(X,Y)Z(\xi,U)W-\eta(Y)Z(X,U)W)\\ &-(a+b)(g(X,U)Z(Y,\xi)W-\eta(U)Z(Y,X)W)\\ &-(a+b)(g(X,W)Z(Y,U)\xi-\eta(W)Z(Y,U)X)\end{aligned} \tag{5.35}$$

elde edilir. (5.35) denkleminde $V$ ile iç çarpım yapılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(X,Z(Y,U)W)\eta(V)-g(X,V)\eta(Z(Y,U)W)\\ -g(X,Y)g(Z(\xi,U)W,V)+\eta(Y)g(Z(X,V)W,V)\\ -g(X,U)g(Z(Y,\xi)W,V)+\eta(U)g(Z(Y,X)W,V)\\ -g(X,W)g(Z(Y,U)\xi,V)+\eta(W)g(Z(Y,U)X,V)\end{bmatrix}=0 \tag{5.36}$$

bulunur. (5.36) denkleminden $Y=\xi$ alınırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(X,Z(\xi,U)W)\eta(V)-g(X,V)\eta(Z(\xi,U)W)\\ -g(X,\xi)g(Z(\xi,U)W,V)+\eta(\xi)g(Z(X,V)W,V)\\ -g(X,U)g(Z(\xi,\xi)W,V)+\eta(U)g(Z(\xi,X)W,V)\\ -g(X,W)g(Z(\xi,U)\xi,V)+\eta(W)g(Z(\xi,U)X,V)\end{bmatrix}=0 \tag{5.37}$$

elde edilir. (5.37) denkleminde (3.6) denklemi kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(X,Z(\xi,U)W)\eta(V)-g(X,V)\eta(Z(\xi,U)W) \\ -\eta(X)g(Z(\xi,U)W,V)+g(Z(X,U)W,V) \\ -g(X,U)g(Z(\xi,\xi)W,V)+\eta(U)g(Z(\xi,X)W,V) \\ -g(X,W)g(Z(\xi,U)\xi,V)+\eta(W)g(Z(\xi,U)X,V) \end{bmatrix}=0 \tag{5.38}$$

elde edilir. (5.38) denkleminde (4.14) eşitliği kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} +\gamma(g(U,W)\eta(X)\eta(V)-g(X,U)\eta(W)\eta(V)) \\ -\gamma(g(U,W)g(X,V)-g(X,V)\eta(W)\eta(U)) \\ -\gamma(g(U,W)\eta(X)\eta(V)-\eta(W)g(U,V)\eta(X)) \\ +g(Z(X,U)W,V) \\ -\gamma(g(X,U)\eta(W)\eta(V)-g(X,U)\eta(W)\eta(V)) \\ +\gamma(g(X,W)\eta(V)\eta(U)-g(X,V)\eta(W)\eta(U)) \\ -\gamma(g(X,W)\eta(V)\eta(U)-g(U,V)g(X,W)) \\ +\gamma(g(U,X)\eta(V)\eta(W)-g(U,V)\eta(X)\eta(W)) \end{bmatrix}=0 \tag{5.39}$$

elde edilir. (5.39) denkleminden

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(Z(X,U)W,V) \\ -\gamma\left(g(U,W)g(X,V)-g(U,V)g(X,W)\right) \end{bmatrix}=0 \tag{5.40}$$

olur. (5.40) denklemde (4.9) eşitliği kullanılırsa;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(R(X,U)W,V) \\ -\dfrac{\tau}{2n(2n+1)}\begin{pmatrix} g(U,W)g(X,V) \\ -g(X,W)g(U,W) \end{pmatrix} \\ -\gamma(g(U,W)g(X,V)-g(U,V)g(X,W) \end{bmatrix}=0 \tag{5.41}$$

bulunur. (5.41) denkleminden;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(R(X,U)W,V) \\ -(\frac{\tau}{2n(2n+1)}+\gamma)\begin{pmatrix} g(U,W)g(X,V) \\ -g(X,W)g(U,V) \end{pmatrix} \end{bmatrix}=0 \qquad (5.42)$$

elde edilir.

Şimdi $\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ $(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun. Yukarıdaki denklemde $X=V=E_i=\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ alalım. O halde;

$$(a+b)\begin{bmatrix} g(R(e_i,U)W,e_i)-g(R(\phi e_i,U)W,\phi e_i)+g(R(\xi,U)W,\xi) \\ -(\frac{\tau}{2n(2n+1)}+\gamma)\begin{pmatrix} g(U,W)g(e_i,e_i)-g(e_i,W)g(U,e_i) \\ -g(U,W)g(\phi e_i,\phi e_i)+g(\phi e_i,W)g(U,\phi e_i) \\ +g(U,W)g(\xi,\xi)-g(\xi,W)g(U,\xi) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \qquad (5.43)$$

elde edilir. (5.43) denkleminden;

$$(a+b)\left[S(U,W)-(\frac{\tau}{2n(2n+1)}+\gamma)2ng(U,W)\right]=0 \qquad (5.44)$$

elde edilir. (5.44) denklemden

$$(a+b)=0$$

veya

$$S(U,W)-(\frac{\tau}{2n(2n+1)}+\gamma)2ng(U,W)=0 \qquad (5.45)$$

olmalıdır. O halde

$$(a+b)\neq 0$$

olduğunda (5.45) denkleminde;

$$S(U,W)=(\frac{\tau}{2n(2n+1)}+\gamma)2ng(U,W)$$

elde edilir. Buradan $\gamma$ değeri yerine yazılırsa;

$$S(U,W)=Tg(U,W)$$

elde edilir. O halde M bir Einstein manifoldudur.

**Teorem 5.1.5:** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. $M$ üzerinde $Z(\xi,X)\cdot R=0$ şartı sağlanıyor ise $M$ bir Einstein manifoldudur.

**İspat:** Bir $(2n+1)-$boyutlu quasi sabit eğrilikli manifold $M$ olsun. Kabul edelim ki $M$ üzerinde

$$Z(\xi,X)\cdot R=0$$

şartı sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}(Z(\xi,X)\cdot R(Y,U)W)&=Z(\xi,X)R(Y,U)W-R(Z(\xi,X)Y,U)W\\&-R(Y,Z(\xi,X)U)W-R(Y,U)Z(\xi,X)W\\&=0\end{aligned}\tag{5.46}$$

dir. (5.46) denkleminde (4.14) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}0=&\gamma(g(X,R(Y,U)W)\xi-\eta(R(Y,U)W)X)\\&-\gamma(g(X,Y)R(\xi,U)W-\eta(Y)g(R(X,U)W)\\&-\gamma(g(X,U)R(Y,\xi)W-\eta(U)(R(Y,X)W)\\&-\gamma(g(X,W)R(Y,U)\xi-\eta(W)(R(Y,U)X)\end{aligned}\tag{5.47}$$

olur. (5.47) denkleminde $V$ ile iç çarpım yapılırsa;

$$\gamma\begin{bmatrix} g(X,R(Y,U)W)\eta(V)-\eta(R(Y,U)W)g(X,V) \\ -g(X,Y)g(R(\xi,U)W,V)+\eta(Y)g(R(X,U)W,V) \\ -g(X,U)g(R(Y,\xi)W,V)+\eta(U)g(R(Y,X)W,V) \\ -g(X,W)g(R(Y,U)\xi,V)+\eta(W)g(R(Y,U)X,V) \end{bmatrix}=0 \qquad (5.48)$$

elde edilir. (5.48) denkleminde $Y=\xi$ alınırsa

$$\gamma\begin{bmatrix} g(X,R(\xi,U)W)\eta(V)-\eta(R(\xi,U)W)g(X,V) \\ -g(X,\xi)g(R(\xi,U)W,V)+\eta(\xi)g(R(X,U)W,V) \\ -g(X,U)g(R(\xi,\xi)W,V)+\eta(U)(R(\xi,X)W,V) \\ -g(X,W)g(R(\xi,U)\xi,V)+\eta(W)g(R(\xi,U)X,V) \end{bmatrix}=0 \qquad (5.49)$$

bulunur. O halde (5.49) denklemde (4.1) eşitliği kullanılırsa;

$$\gamma(a+b)\begin{bmatrix} g(U,W)\eta(X)(V)-\eta(W)g(X,U)\eta(V) \\ -g(U,W)g(X,V)+g(X,V)\eta(U)\eta(W) \\ -g(U,W)\eta(X)\eta(V)+g(X,V)\eta(U)\eta(W) \\ +g(R(X,U)W,V) \\ -g(X,U)\eta(W)\eta(V)+g(X,U)\eta(W)\eta(V) \\ +g(X,W)\eta(U)\eta(V)-g(X,V)\eta(W)\eta(U) \\ -g(X,W)\eta(U)\eta(V)+g(X,W)g(U,V) \\ +g(U,X)\eta(W)\eta(V)-g(U,V)\eta(X)\eta(W) \end{bmatrix}=0 \qquad (5.50)$$

olur. (5.50) denkleminden

$$\gamma(a+b)\begin{bmatrix} g(R(X,U)W,V)-g(U,W)g(X,V) \\ +g(X,W)g(U,V) \end{bmatrix}=0 \qquad (5.51)$$

elde edilir.

Şimdi $\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ $(i=1,...,n)$ tanjant uzayının her noktasında ortonormal baz olsun. (5.51) denkleminde $X=V=E_i=\{e_i,\phi e_i,\xi\}$ alalım. O halde;

$$\gamma(a+b)\begin{bmatrix} g(R(e_i,U)W,e_i)-g(R(\phi e_i,U)W,\phi e_i) \\ +g(R(\xi,U)W,\xi) \\ -g(U,W)g(e_i,e_i)+g(e_i,W)g(U,e_i) \\ +g(U,W)g(\phi e_i,\phi e_i)-g(\phi e_i,W)g(U,\phi e_i) \\ -g(U,W)g(\xi,\xi)+g(\xi,W)g(U,\xi) \end{bmatrix}=0 \tag{5.52}$$

elde edilir. (5.52) denkleminden;

$$\gamma(a+b)(S(U,W)-(2n)g(U,W))=0$$

bulunur. Buradan

$$(a+b)=0$$

veya

$$S(U,W)-(2n)g(U,W)=0$$

olmalıdır.

$$(a+b)\neq 0$$

olduğundan

$$S(U,W)=2ng(U,W)$$

elde edilir. O halde $M$ bir Einstein manifoldudur.

# 6. BULGULAR ve TARTIŞMA

Tezin ana başlığı olan "Quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlarda bazı eğrilik şartları" kısmında verilen projektif eğrilik tensörü ve concircular eğrilik tensörünün simetriklik şartları altında, manifoldların bir sınıflandırması elde edilmiştir. Bu eğrilik tensörleri ve verilen şartlar değiştiğinde manifoldun sınıflandırılmasının nasıl değişeceği araştırılması ve incelenmesi gereken bir konudur.

# 7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlar ile ilgili incelenen eğrilik tensörlerinin temel eşitlikleri elde edilerek quasi sabit eğrilikli hemen hemen parakontakt manifoldlar üzerinde bu eğrilik şartları altında bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu eğrilik şartları altında manifold Einstein manifold veya $\eta -$ Einstein manifold olarak sınıflandırılmıştır.

Daha sonrasında konuyla ilgilenen araştırmacılar bu temel sonuçları göz önüne alarak farklı eğrilik şartları altında farklı tipteki manifoldları sınıflandırabilirler. Bu sınıflandırmalar sonucunda ortaya farklı eşitliklerinde çıkabileceği görülebilir.

# KAYNAKLAR


[1] D. Blair, *Riemannian geometry of contact and sympletic manifold*. Birkhauser, Boston, 2002.

[2] I. Sato, "On a structure similar to the almost contact sturcture I.", *Tensor N. S.,* vol. 30, pp. 219-224, 1976.

[3] I. Sato, "On a structure similar to the almost contact sturcture II.", *Tensor N. S., vol.*30, pp. 199-205, 1976.

[4] S. Sasaki, "On differentiable manifolds with certain structures with are closely related to almost contact structure I", *Tohoku Math. J.,* vol. 12, no. 2, pp. 459-476, 1960.

[5] D. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Lectures Notes in Mahtematics, Springer-Verlag, 1976.

[6] B. O'Neill, *Semi-Riemann geometry*. Acamedic Press Inc., 1983.

[7] T. Takahashi, "Sasakian manifolds with pseudo-Riemannian metric", *Tohoku Math. J.,* vol. 12, no. 2, pp. 644-653, 1969.

[8] K. Matsumoto, "On Lorentzian paracontact manifolds", *Bulletin Yamagata Univ. Nat. Sci.*, vol. 12, no. 2, pp. 161-166, 1989.

[9] M.M. Tripathi, E. Kılıç, S. Yüksel Perktaş and S. Keleş, "Indefinite almost paracontact metric manifolds", *Int. J. Math. Math. Sci.* , Art. ID 846195, 19 pp, 2010.

[10] S. Kaneyuki and M. Konzai, "Paracomplex structure and afine symmetric spaces", *Tokyo J. Math*., vol. 8, pp. 301-308, 1985.

[11] S. Zamkovoy, "Canonical connection on paracontact manifolds", *Ann. Glob. Anal. Geo.,* vol. 36, pp. 37-60, 2009.

[12] K.L. Duggal and A. Bejancu, *Lightlike submanifold of semi-Riemannian manifolds and Applications*. Kluwer Academic Publisher, 1996.

[13] B.E. Acet, "Para-Sasakian manifoldların alt manifoldları" Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, 2014.

[14] S. Zamkovoy, "Para-Sasakian manifolds with a constant paraholomorphic section curvature", arXiv:0812.1676v1, 2008.

[15] R. Deszcs, "On pseudo symmetric spaces", *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A.,* vol. 44 no. 1, pp. 1-34, 1992.

[16] Z. I. Szabó, "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying the local version", *J. Diff Geom*., vol. 17, no. 4, pp. 531-582, 1982.

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Adnan ÇELİK
Doğum Yeri : Adıyaman
Doğum Tarihi : 01.11.1989
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : celikadnann@outlook.com

**Eğitim Durumu**

| **Derece** | **Alan** | **Üniversite** | **Mezuniyet Yılı** |
|---|---|---|---|
| Yüksek Lisans | Matematik | Adıyaman Üniversitesi | - |
| Lisans | Matematik | Adıyaman Üniversitesi | 2013 |
| Lisans | İlköğretim Matematik Öğrt. | Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi | 2016 |
| Lise | Fen Bilimleri | Adıyaman Rekabet Kurumu Lisesi | 2007 |