T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DELTA ETKİLEŞİM NOKTALI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMLERİ

MAHMUT GAZİ ARIK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DELTA ETKİLEŞİM NOKTALI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMLERİ

Mahmut Gazi ARIK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Bu tez 21/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Danışman

Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Özlem AK GÜMÜŞ
Üye

Prof. Dr. Murat KOCA
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DELTA ETKİLEŞİM NOKTALI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMLERİ

Mahmut Gazi ARIK

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Yıl : 2019, Sayfa sayısı: 67

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Özlem AK GÜMÜŞ

Bu tez on bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde Sturm-Liouville denklemleriyle ilgili yapılmış önceki çalışmalara yer verdim. Üçüncü bölümde tezin yazımında kullanılan tanım ve teoremlere yer verdim. Dördüncü bölümde tezde incelenecek olan diferansiyel denklem ve Sturm–Liouville denklemini verdim. Beşinci bölümde tüm eksende Sturm-Liouville denkleminin Jost çözümleri ve çözümlerde kullanılan teoremleri inceledim ve bulgular elde ettim. Altıncı bölümde incelenen denklem için direkt saçılma problemlerini ele aldım. Yedinci bölümde incelenen denklem için ters problemin temel denklemlerini ele aldım. Sekizinci bölümde incelenen denklemin ters probleminin çözümü için eşitsizlik teoremini inceledim. Dokuzuncu bölümde denklem için ters saçılma problemini inceledim. Son bölümde elde edilen sonuçları ele aldım.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel denklemler; Sturm-Liouville operatörü ve denklemleri; Jost çözümü; Saçılma fonksiyonu; Temel integral denklem.

ABSTRACT

Msc Thesis

INVERSE SCATTERING PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE EQUATION WITH POINT DELTA INTERACTION

Mahmut Gazi ARIK

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Year : 2019 , Number of pages: 67

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU
Asst. Prof. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ

This Thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, I have included previous studies on Sturm-Liouville equations. In the third chapter, I included definitions and theorems used in writing the thesis. In the fourth chapter, I gave the differential equation and the Sturm-Liouville equation to be examined in the thesis. In the fifth chapter, I examined the theorems of the Sturm-Liouville equation for the Jost solutions and the theorems used in the solutions. In the sixth chapter, I examined the problems of direct scattering for the equation studied. In the seventh chapter, I examined the basic equations of the inverse problem for the equation studied. In the eighth chapter, I examined the inequality theorem in order to solve the inverse problem of the studied equation. In the ninth chapter I examined the inverse scattering problem for the equation. I discussed the results obtained in the last chapter.

Key words: Differantial equation; Sturm-Liouville Operators and equations; Jost solution; Scattering function; Basic integral equation.

BEYAN

“Delta Etkileşim Noktalı Sturm-Liouville Denklemi için Ters Saçılma Problemleri” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mahmut Gazi ARIK

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında, bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmamda bana her şekilde destek olan, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya en içten duygularımla teşekkür ederim. Çalışmam boyunca manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan, eşim Canan ARIK ve aileme teşekkür ederim.

Mahmut Gazi ARIK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi.
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi.
L	: Lineer operatör.
T	: Diferansiyel denklemin temel cümlesi.
$K^{\pm}$	: Diferansiyel denklemin çözüm çekirdeği.
Γ	: Contour yörüngesi.
λ	: Kompleks parametre.
$\delta(x)$	: Dirac Delta Fonksiyonu.
Exp	: Üstel fonksiyon.
$\dfrac{\partial K(x,y)}{\partial x}$	: K fonksiyonunun x e bağlı kısmi türevi.
Re z	: z kompleks sayısının reel kısmı.
Im z	: z kompleks sayısının sanal kısmı.
$r^{\pm}(\lambda)$	: Saçılma probleminin sağ-sol yansıma katsayıları.
$t(\lambda)$	: Saçılma probleminin transmisyon katsayısı.
$i\chi_k$	: Saçılma fonksiyonunun sıfırları.
$L_1(0,+\infty)$	: Banach Uzayı.
$\left(M_x^{\pm}\right)^{-1}$	: Kompakt operatör.
Res(f,z)	: f nin z noktasındaki rezidüsü.
$W\left[e_1(x,y),e_2(x,y)\right]$	: e_1 ve e_2 fonksiyonlarının Wronskianı.

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisinin önemli dallarından biri de ters problemler teorisidir. Diferansiyel operatörlerde bulunan spektral teorisi ile spektral analizde bulunan ters probleminin fiziksel olan problemler ile ilgili birçok uygulaması bulunmaktadır [1]. Lineer operatörlerdeki spektral teorinin asılları ayrıca lineer cebir ile titreşim teorisi ile ilgili problemlerdir. Lineer cebir ile ilgili problemler ve de titreşim problemleri arasında çok eskiden, benzerlik olduğu bilinmektedir. Hilbert, yaptığı çalışmalardan olan integral denklemler teorisinde, buradaki benzerliği kullanmıştır. Yapılan çalışmalarda tanımlanan, özdeğer, özfonksiyon, spektral fonksiyonlar ve normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler ile asimptotik olan formüller keşfedilmiştir. Aynı zamanda ilgili teoriyle ilgili olan açılım teoremlerinin de ispatları yapılmıştır.

Spektral analizde, düz problemler, operatörlerin spektrum kümesinin incelenmesi, öz fonksiyonlarına göre ayrıştırılmasıdır. Operatörlerin spektral karakteristiklerine göre operatörlerin bulunmasına spektral analizin ters problemleri denir. Bu spektral karakteristikler, spektrum kümeleri, spektral fonksiyonlar, saçılma verisi gibi karakteristiklerden oluşur.

Titchmarsh [2] singüler operatörlerin ikinci mertebe olan spektral teorisiyle ilgili olan farklı bir yaklaşım bulmuştur. Titchmarsh, doğru eksende tanımlı olan, artan veya azalan potansiyele sahip,

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$$

Sturm-Liouville operatörüne ait özdeğerler dağılım formülünü bulmuştur. Bu operatörün bir diğer adı, bir boyutlu *p(x)* potansiyeline sahip Schrödinger operatörüdür [3,4]. Levitan, 1949 da Singüler diferansiyel operatörleri incelemiştir.

Spektral teoride önemli gelişmeler tek boyutlu Schrödinger operatörü olan,

$$\ell y = -y'' + q(x)y$$

Sturm-Liouville operatörü için elde edilmiştir [5,6,7]. 20. yüzyılda diferansiyel ve integral operatörlerin değişik sınıfları için spektral teori hızlı bir şekilde gelişmiştir. Bu alanda Steklov, Hilbert, Birkhoff, Neumann, Weyl gibi ünlü matematikçiler büyük katkılarda bulunmuştur. Spektral teorinin ters problemleri ile ilgili temel sonuçlar 20. yüzyılın ikinci yarısında ortaya çıkmıştır.

Ters problemler teorisinin önemli yönlerinden biri, kuantum mekaniğinde kullanılan saçılma teorisinin ters problemidir. Lineer olmayan denklemlerin, saçılmanın ters problemleri uygulanarak çözülmesine, saçılmanın ters problemi yöntemi denir. Bu problemler diferansiyel operatörün normalleştirilmiş öz fonksiyonlarının asimptotik gösterimine göre operatörün belirlenmesi problemidir. Saçılma teorisinin ters problemleri, sonsuzlukta, dalga fonksiyonlarının alan potansiyelini belirtme yöntemini göstermeye yarar. Saçılma teorisinin ters problemi, denklemin katsayılarının, normlaştırılmış öz fonksiyonlarının, sonsuzlukta asimtotik biçimini belirleyen saçılma verilerine göre elde edilişidir.

Matematiksel fizik, biyoloji ve mühendislikteki birçok problem, Sturm-Liouville problemleri ile bağlantılıdır. İki yüzyıldan fazla süredir matematikçiler, Sturm-Liouville problemleriyle uğraşmışlardır. Bergman, Sturm-Liouville denkleminin potansiyelinin özdeğeler ve saçılma fonksiyonuna göre birebir belirlenemediğini göstermiştir. Levinson, özel bir hal olan özdengelerin mevcut olmaması halinde potansiyelin birebir olarak belirlenebileceğini ispatlamıştır. Sturm–Liouville denklemi, Joseph Liouville ve Jacques Charles François Sturm ile en son halini almıştır.

Bazı keyfi Sturm-Liouville denklemlerindeki dönüşüm operatörlerini ilk oluşturan, Povzner'dir ve bunu Sturm-Liouville denklemlerinin özfonksiyonlarını bulmak için kullanmıştır. Dönüşüm operatörü kavramı, Sturm-Liouville denklemlerinin incelemesinde kullanılan önemli etkenlerden biridir. Levitan, Lions ve Delsarte, operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisini vermiştir. Povzner kendi çalışmalarında, keyfi olarak alınan Sturm-Liouville denklemlerinde kullanılan dönüşüm operatörlerinin biçimini ilk kez vermiştir.

Marchenko, spektral analizin ters problemlerini ve Tekil Sturm-Liouville operatörlerinin spektral fonksiyonu araştırmak için dönüşüm operatörlerinden yararlanmıştır. Ayrıca Marchenko, Levin'in tanımladığı, sonsuzdaki çözümlerin asimtotiklerini koruyan bir dönüşüm formülünü, ters saçılma problemlerini çözmek için kullanmıştır.

Levitan ve Gelfand, spektral analizdeki ters problemler teorisiyle ilgili temel çalışmalar yapmıştır [8]. Bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun, Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek yeter koşul tanımlanmış olup Sturm-Liouville operatörünün tanımlanması için önemli bir yöntem verilmiştir.

Ters problemler teorisinde, Gelfand-Levitan- Marchenko yöntemi ismini alan dönüşüm operatörleri, kendine eş Sturm-Liouville operatörü, ilgili ters problemlerde olduğu gibi kendine eş olmayan ters problemlerin belli kısmına da başarıyla uygulanabilmektedir. Kendine eş olmayan Sturm-Liouville operatörü için ilk ters problem, Lyantse (1966-1967) tarafından incelenmiştir. Bu tipten ters problemler Yurko [9] tarafından geliştirilmiş, Weyl matrisi yöntemiyle, yalnızca Sturm-Liouville operatörü için değil, aynı zamanda, genel şekilde yüksek mertebeden adi diferansiyel operatörler için başarıyla çözülmüştür. Bazı durumlarda Yurko'nun geliştirdiği yöntem, dönüşüm operatörleri ile çözülmesi zor veya mümkün olmayan ters problemlerin çözülmesine olanak sağlamıştır.

Bu tez çalışmasında, tüm reel eksende tanımlı bir Sturm–Liouville denklemi ele alınarak, uygun şartlarda, Jost çözümleri, Jost çözümlerinin asimptotikleri ve saçılma verilerinin özellikleri elde edilmiştir. Sonrasında direkt ve ters saçılma problemleri incelenmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Fransız matematikçi Joseph Liouville ve İsveçli matematikçi Jacques Sturm, 19. yüzyılın ortalarındaki çalışmalarında, adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri teorisini ortaya çıkarmıştır. Günümüzde, Sturm-Liouville teorisi olarak bilinen teori, regüler operatörlerin ikinci mertebeden olanları için spektral teoridir.

Bazı keyfi Sturm-Liouville denklemlerindeki dönüşüm operatörlerini ilk oluşturan, Povzner'dir [10] ve bunu Sturm-Liouville denklemlerinin özfonksiyonlarını bulmak için kullanmıştır.

Sturm-Liouville operatörü için ilk ters problem, Lyantse tarafından incelenmiştir. Bu tipten ters problemler Yurko [9] tarafından geliştirilmiş başka bir yöntem olan Weyl matrisi yöntemiyle yalnız Sturm-Liouville operatörü için değil, aynı zamanda genel şekilde yüksek mertebeden adi diferansiyel operatörler için başarıyla çözülmüştür.

Adi diferansiyel denklemlerideki sınır-değer probleminin genellenmiş hali,

$$l(y,\lambda) = y^n + q_1(x,\lambda)y^{n-1} + \dots + q_n(x,\lambda)y = 0 \tag{2.1}$$

$$U_i(y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{ik}(\lambda)y^k(0) + b_{ik}(\lambda)y^k(1)) = 0, \quad i = 1,2,3,\dots,n \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. $q_r(x,\lambda) = \sum_{m=0} q_{mr}(x)\lambda^m,\ q_{rr}(x) = const,\ r = 1,2,\dots,n$ ve $a_{ik}(\lambda)$ ile $b_{ik}(\lambda)$, λ'nın polinomlarıdır. Bu problemlerin ilk çalışmaları Birkhoff [11] tarafından yapılmıştır. Bu problemler daha sonra, Tamarkin tarafından araştırılmıştır [12].

Borg [13], Sturm-Liouville operatörleri için ters problemle ilgili şu teoremi ispatlamıştır:

Teorem 2. 1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere λ_0, λ_1, λ_n,… değerleri,

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0$$
$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2,\ (n = 0,1,...)$ ise $q(x)=0$ dır [13].

Marchenko, Borg'un ispatladığı teoremi şu şekilde vermiştir:

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ diferensiyel denkleminin başlangıç koşullarını sağlayan çözümü,

$$\varphi(0,\lambda) = 0,\ \varphi'(0,\lambda) = h$$

olsun. Bu problemin özfonksiyonları, $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ olsun. Bu durumda, verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \varphi_n^2(x,\lambda_n)dx\right]$$

ve bu operatörün spektral fonksiyonu,

$$p(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

olmak üzere $p(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir [14].

Levitan ve Gelfand [15] spektral analizde ters problemler teorisi ile ilgili temel çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmasında Sturm-Liouville operatörüne ait spektral fonksiyonun $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonu olması için gerek yeter koşulu tanımlamıştır,

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tez çalışmasında incelenen Sturm-Liouville denklemi için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Bu tanım ve teoremlerden yararlanılarak, önceki çalışmalar tez konusu olan denkleme uyarlanmış ve ilgili denklem incelenmiştir.

Tanım 3.1. $x_1, x_2, ..., x_n$ ifadeleri aynı I aralığında tanımlı ve (n-1) kez türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$W(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 ... & x_n \\ x_1' & x_2' ... & x_n' \\ & & \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} ... & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına n tane fonksiyonun Wronskianı denir [16].

Tanım 3.2. $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları,

$$(f \otimes g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

şeklinde taımlanır ise bu fonksiyona, f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir [14].

Tanım 3.3. f fonksiyonu her sonlu [-L; L] aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ integrali yakınsak ise,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir [17].

Tanım 3.4. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri sırası ile F (u), G(u) ise $f \otimes g$ konvolüsyonunun Fourier dönüşümü F (u)G(u) ya eşittir [18].

Tanım 3.5. (*İç Çarpım ve Hilbert Uzayı*) C kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir *H* lineer vektör uzayını göz önüne alalım. $<,>: H \times H \to C$ şeklinde tanımlı operatör aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde iç çarpım adım alır.

1. Her u,v $\in$H için $< u,v >= \overline{< u,v >}$

2. Her u,v $\in H$ ve $\alpha \in C$ için $< \alpha u,\ v >= \alpha < u,v >$

3. Her n, v, w $\in$H için < u+ v, w >= < u, w > + < v, w >

4. Her $u \in$ H, $u \neq 0$ için < u, u > > 0

Bu iç çarpımla tanımlı lineer vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{< u-v, u-v >}$$

metriğine göre tam bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [19].

Tanım 3.6. E lineer uzayı, R veya C cismi üzerinde ve $\|.\|: E \to R$ (x $\to \|x\|$) dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın,

1. $\forall x \in E$ için $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall x \in E$, $\forall a \in> R$ için $\|ax\| = |a|\|x\|$

3. $\forall x, y \in E$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bu durumda dönüşüme E uzayında tanımlı bir norm denir. $(E, \|.\|)$ uzayına ise normlu uzay denir [20,21].

Tanım 3.7. Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir [22].

Tanım 3.8. Bir *A* kümesi üzerinde tanımlı $+: A \to A$ işlemi ve yine bir K cismi için $\square\ KxA \to A$ işlemi tanımlansın. Aşağıdaki şartları sağlasın,

1. $x+y= y+x$

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$

3. $\forall x \in A$ için $x+a=x$ şartını sağlayan bir tek a elemanı mevcuttur.

4. $\forall x \in A$ için $x+y=0$ şartını sağlayan bir tek $y \in A$ vardır.

5. $p(qx) = q(px),\ \forall q, p \in K,\ \forall x \in A$

6. $p(x+y) = px + py,\ x, y \in A$

7. $x(p+q) = px + qx$

8. $1.x = x,$ (1, K nın birim elemanı)

Bu şartları sağlayan E=(E,K,+,.) kümesi K cismi üzerinde lineer uzaydır ve B, E'nin bir alt uzayı olmak üzere, $\forall x, y \in D,\ \forall \lambda \in \mathrm{K}$ için, $C : D \to E$ dönüşümü,

$$C(x+y) = Cx + Cx,\quad C(\lambda x) = \lambda(Cx)$$

şartlarını sağlıyor ise C ye lineer operatör denir [23].

Tanım 3.9. A: $S(x, \delta) \to S(Ax, \varepsilon)$ olsun.

$$|x - x_0| < \delta \text{ için } |Ax - Ax_0| < \varepsilon$$

ise A operatörüne süreklidir denir [23].

Tanım 3.10. X ve Y birer normlu uzay ve $A(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer,

$$\|L(x)\| < c\|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir ve eşitsizliği sağlayan c sayılarının alt sınırına ise L operatörünün normu denir [23].

Tanım 3.11. E lineer topolojik uzay, A ve B operatörleri $A{:}E\to E$, $B{:}\ E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 ise E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere, E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörüne;

1. X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir.

2. $AX = XB$ operatör denklemi sağlanıyor.

şartlarını sağlıyorsa A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [23].

Tanım 3.12. (*Self adjoint Operatör*) H_1 ve H_2 Hilbert uzayı ve L : $H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \rightarrow H_1$ sınır şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L'nin adjointi denir. Eğer L = L^* ise L operatörüne self adjoint operatör denir [23].

Tanım 3.13. (*Jordan Lemması*) Yeterince büyük $|z|$ için $f(z)$ sürekli ve $M_R = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$ olmak üzere $\lim\limits_{R\to\infty} M_R = 0$ olsun. Bu durumda $m > 0$ β_R merkezi orijinde olan R yarıçaplı üst yarı çember olmak üzere,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} e^{\dot{I}mz} f(z)dz = 0$$

dır.

Tanım 3.14. (*Parseval eşitliği*) $\varphi^+(k) = \int\limits_x^\infty \varphi(t)e^{ikt}dt$ olmak üzere Fourier dönüşümün Parseval eşitliği,

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |\varphi^+(k)|^2 dk$$

olur [18].

Tanım 3.15. (*Contour İntegrali*) $f(x)$ kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $f(x)$ in integralini doğrudan Riemann toplamları cinsinden söyle tanımlayabiliriz;

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \Delta z f(z_n)$$

F kompleks değerler aldığında z_n reel eksende olmayabilir. $z_1, z_2, ..., z_N$ dizisinin değişimleri $\Delta z_1, \Delta z_2, ..., \Delta z_{N-1}$ olmak üzere bu noktalar,

$$
\begin{aligned}
z_2 &= z_1 + \Delta z_1 \\
z_3 &= z_2 + \Delta z_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
z_N &= z_{N-1} + \Delta z_{N-1}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Bunların toplamı,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \Delta z_n f(z_n) = \Delta z_1 f(z_1) + \Delta z_2 f(z_2) + ... + \Delta z_{N-1} f(z_{N-1})$$

olur. $N \to \infty$ için limit alındığında $(\Delta z_1, \Delta z_2, ..., \Delta z_{N-1})$ noktaları kompleks eksende başlangıcı z_1 ve bitiş noktası z_N olan sürekli bir doğru parçasına dönüşür. Bu doğru parçasına contour denir ve Γ ile gösterilir. Böylece Γ yörüngesi boyunca olan contour integrali,

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta z_n f(z_n)$$

olur. burada contour Γ bir yön belirtir [24].

Tanım 3.16. (*Kompakt Operatör*) X ve Y normlu vektör uzayları ve T: X→Y bir operatör olsun. Eğer $\overline{T(U_x)}$ kümesi norm kompakt küme ise, T operatörüne kompakt operatör denir [25].

Tanım 3.17. (*Özdeğer- Özfonksiyon*) L sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu takdirde L operatörünün tanım kümesinde, Ly = λy olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir [12].

Tanım 3.18. (*Sturm-Liouville problemleri*) Herhangi bir *H* hilbert uzayında tanımlı, $L:H\to H$ lineer operatör olsun. Eğer uzayının cisminden alınmış herhangi λ_0 skaleri için $Ly_0=\lambda_0 y_0$ biçiminde $y_0\in H,\ y_0\neq 0$ elemanı var ise λ_0 a L'nin özdeğeri, y_0, a ise bu özdeğere uygun özvektör denir. Uygulamalarda sık kullanılan diferansiyel operatörlerden biri,

$$L=-\frac{d}{dx^2}+q(x)$$

operatörüdür.

$$\begin{aligned}&Ly(x)=-y''+q(x)y=\lambda y\\&y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha=0\\&y(b)\cos\beta+y'(b)\sin\beta=0\end{aligned}$$

olmak üzere bu probleme Sturm-Liouville problemi, ilk denkleme de Sturm-Liouville denklemi denir. Buradaki α, β, a, ve b bilinen sayılardır [26].

Tanım 3.19. ($L_2(a,b)$ *uzayı*) Verilen aralıkta karesi integrallenebilen fonksiyonların Hilbert Uzayına $L_2(a,b)$ uzayı denir.

$$L_2(a,b)=\left\{x(t):\int_a^b |x(t)|^2\,dt<\infty\right\}$$

dir. Bu uzay reel ise iç çarpım fonksiyonu, f ve g reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$\langle f(x),g(x))\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

olur [27].

Tanım 3.20. $a<t<b$ olmak üzere,

$$L^2\left[a.b\right]=\left\{x(t):\int_a^b \left[x(t)\right]^2 dt<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlı uzaya $L^2\left[a,b\right]$ uzayı denir. Bu uzayda iç çarpım,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

ile tanımlıdır [23].

Teorem 3.1. $a_1, a_2, ..., a_n$ fonksiyonları bir l açık aralığında sürekli ve bu aralıktaki x için $a_0(x) \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümleri $y_1, y_2, ..., y_n$ olmak üzere bu çözümlerin l da lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul, l aralığındaki her x için,

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$$

olmasıdır [16].

Teorem 3.2. a_0, a_1, a_2 ve F fonksiyonları $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere, bir l açık aralığında sürekli olsun. y_1 ve y_2 ise l açık aralığında, $F(x) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$ homojen lineer diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki kökü olsun. Eğer u_1 ve u_2 fonksiyonları

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$$
$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$$

sistemini sağlar ise $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ fonksiyonu $F(x) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$ denkleminin bir çözümüdür [28].

Teorem 3.3. (*Cauchy teoremi*) f fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesi içinde analitik olsun. Eğer C eğrisi, D içinde basit kapalı bir eğri ise,

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

olur [29].

Teorem 3.4. (*Cauchy İntegral formülü*) f fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik olsun. $z_0 \in D$ ve z_0 noktasını çevreleyen D içinde, herhangi bir basit kapalı C eğrisi verilsin. Bu durumda,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

formülüne Cauchy integral formülü denir. Bu formül,

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i . f(z_0)$$

şeklinde de yazılabilir [29,30].

Teorem 3.5. (*Laurent Teoremi*) Bir *f* fonksiyonunu, D = $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ halkasında tek değerli ve analitik olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $z \in D$ için *f(z)* , $z - z$ 'ın pozitif ve negatif kuvvetlerine göre *D*'de yakınsak bir seriye açılabilir. Yani,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dir. Burada γ, *D*'de bulunan ve z_0 noktasını çevreleyen pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olmak üzere,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

olur [29].

Teorem 3.6. (*Rezidü teoremi*) D, basit kapalı bir eğri olsun. f(z), D'nin içinde ve üzerinde sonlu sayıda $z_1, z_2, ..., z_n$ ayrık aykırı noktalar dışında tek değerli ve analitik olsun. bu durumda,

$$\int_D f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

dır [29].

4. DÖNÜŞÜM OPERATÖRLERİ VE İNCELENECEK OLAN DENKLEM

4.1. Dönüşüm Operatörü

Dönüşüm operatörleri Sturm-Liouville ters problemleri için önemli bir role sahiptir. Bu operatörler tüm λ lar için iki farklı Sturm-Liouville denkleminin çözümlerini bağlar. Povzner, keyfi Sturm-Liouville denklemi için dönüşüm operatörlerini inşa etmiştir. Ters problemlerdeki dönüşüm operatörlerini ise Levitan, Gelfand ve Marchenko kullanmıştır.

Teorem 4.1.1. $F(x,\lambda)$ dönüşüm operatörü,

$$F(x,\lambda) = \cos kx + \int_0^x K(x,t)\cos kt dt, \quad \lambda = \mathrm{k}^2$$

şeklinde gösterilir ise, $K(x,t)$ sürekli reel fonksiyon olmak üzere,

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt$$

olur [14].

4.2. İncelenecek Olan Denklem ve Şartları

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \ , \ -\infty < x < \infty \tag{4.1}$$

$a \in (-\infty,\infty)$ bir süreksiz nokta olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

$$\begin{gathered} y(a-0) = y(a+0) = y(a) \\ y'(a+0) - y'(a-0) = 2i\alpha\lambda y(a) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Burada λ bir kompleks parametre ve q(x) gerçek değerli bir fonksiyondur ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q(x)|dx < +\infty \tag{4.3}$$

şartını sağlar. Yukarıdaki (4.1), (4.2) şartlarıyla birleştirince denklemi şu şekilde genel formda yazılabilir:

$$-y''+\left[2\alpha i\lambda.\delta(x-a)+q(x)\right]y=\lambda^2 y$$

Burada, $\delta(x)$ dirac fonksiyonudur [31]. Ayrıca sınır şartlarında spektral parametre olduğunda saçılma verilerine göre ters problem de incelenmiştir [32].

5. JOST TİPİNDE ÇÖZÜMLER

$e^{\pm}(x,x)$, (4.1) ve (4.2) şartlarını ve aşağıdaki koşulu sağlasın;

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\pm}(x,\lambda)e^{\mp i\lambda x}=1 \tag{5.1}$$

Bu durumda q(x)= 0 için;

a) x>a için;

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{+}(x,\lambda)e^{-i\lambda x}=1 \Rightarrow e^{+}(x,\lambda)\to e^{i\lambda x}$ olur.

b) x<a için;

$-y''=\lambda^2 y \ (q(x)=0)$ denkleminin temel çözümünü şu şekildedir:

$$-m^2=\lambda^2 \Rightarrow m_{1,2}=\pm i\lambda$$

Bu denklemin temel cümlesi $T=\{e^{i\lambda}, e^{-i\lambda}\}$ olur. Buradan,

$$e^{+}(x,\lambda)=c_0e^{i\lambda x}+c_1e^{-i\lambda x}$$

olur. (4.2) şartından,

$$c_0e^{i\lambda a}+c_1e^{-i\lambda a}=e^{i\lambda a}$$

$$i\lambda e^{i\lambda a}-c_0e^{i\lambda a}+c_1e^{-i\lambda a}=2\alpha i\lambda e^{i\lambda a} \tag{5.2}$$

$$(1-2\alpha)e^{i\lambda a}=c_0e^{i\lambda a}-c_1e^{-i\lambda a} \tag{5.3}$$

(5.2) ve (5.3) den,

$$2c_0e^{i\lambda a}=2-2\alpha e^{i\lambda a}\Rightarrow c_0=1-\alpha \text{ ve } c_1=\alpha e^{2i\lambda a}$$

Böylece,

$$e^{+}(x,\lambda)=\begin{cases} e^{i\lambda x} & ,x>a \\ (1-\alpha)e^{i\lambda x}+\alpha e^{i\lambda(2a-x)} & ,x<a, \end{cases}$$

bulunur. Aynı işlemler $e^{-}(x,\lambda)$ için yapılırsa,

a) x<a için;

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-}(x,\lambda)e^{i\lambda x}=1 \Rightarrow e^{-}(x,\lambda)\to e^{-i\lambda x}$$

b) x> a için,

$$e^{+}(x,\lambda)=c_0e^{i\lambda x}+c_1e^{-i\lambda x}$$

$$c_0e^{i\lambda a}+c_1e^{-i\lambda a}=e^{-i\lambda a} \tag{5.4}$$

$$c_0e^{i\lambda a}-c_1e^{-i\lambda a}+i\lambda e^{-i\lambda a}=2\alpha i\lambda e^{-i\lambda a}$$

$$(1-2\alpha)e^{-i\lambda a}=c_0e^{i\lambda a}-c_1e^{-i\lambda a} \tag{5.5}$$

(5.4) ve (5.5) den,

$$2c_0e^{i\lambda a}=2\alpha e^{-i\lambda a}\Rightarrow c_0=\alpha e^{-2i\lambda a} \text{ ve } c_1=1-\alpha$$

Buradan,

$$e^{-}(x,\lambda)=\begin{cases} e^{-i\lambda x} & ,x<a \\ (1-\alpha)e^{-i\lambda x}+\alpha e^{-i\lambda(2a-x)} & ,x>a, \end{cases}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$e^{\pm}(x,\lambda)=\begin{cases} e^{\pm i\lambda x} & ,\pm x>\pm a \\ (1-\alpha)e^{\pm i\lambda x}+\alpha e^{\pm i\lambda(2a-x)} & ,\pm x<\pm a, \end{cases}$$

bulunur.

Teorem 5.1. (4.1), (4.2) ve (4.3) şartlarından Im$\lambda \geq 0$ şartını sağlayan tüm λ lar için $e^{\pm}(x,\lambda)$ ifadesi aşağıdaki eşitliği sağlayan bir çözüme sahiptir:

$$e^{\pm}(x,\lambda)=e_0^{\pm}(x,\lambda)\pm\int_x^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)e^{\pm i\lambda t}dt \tag{5.6}$$

Buradaki $K^{\pm}(x,t)$ ifadesi,

$$\sigma^{\pm}(x) = \pm\int_x^{\pm\infty} |q(s)|\,ds\ ,\ \sigma_1^{\pm}(x) = \pm\int_x^{\pm\infty} q(s)ds$$

olmak üzere,

$$\left|K^{\pm}(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\sigma^{\pm}\left(\frac{x+1}{2}\right)e^{\sigma_1^{\pm}(x)}\ ,\ 0<|x-a|<\pm(t-a),$$

$$\left|K^{\pm}(x,t)\right| \le \left\{\frac{1}{2}\sigma^{\pm}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}\sigma^{\pm}\left(\frac{2a+x-t}{2}\right)\right\}e^{\sigma_1^{\pm}(x)}\ ,\ |t-a|<\pm(a-x), \qquad (5.7)$$

eşitsizliklerini sağlar. Ayrıca; $K^{\pm}(x,t)$ fonksiyonu $t \neq 2a-x$ ve $x \neq a$ noktaları için sürekli ve

$$K^{\pm}(x,x) = \pm\frac{1-\alpha}{2}\int_x^{\pm\infty} q(t)dt, \pm x < \pm a,$$

$$K^{\pm}(x,x) = \pm\frac{1}{2}\int_x^{\pm\infty} q(t)dt, \pm x > \pm a,$$

$$K^{\pm}(x,2a-x+0) - K^{\pm}(x,2a-x-0) = \pm\frac{\alpha}{2}\left(\int_a^{\pm\infty} q(t)dt - \int_x^{a} q(t)dt\right), \pm x < \pm a. \qquad (5.8)$$

İspat: $e^{+}(x,\lambda)$ için yapalım. (4.1), (4.2) ve (5.1) ifadeleri aşağıdaki ifadeye eşittir,

$$e^{+}(x,\lambda) = e_0^{+}(x,\lambda) + \int_x^{+\infty} S_0^{+}(x,t,\lambda)q(t)e^{+}(t,\lambda)dt \qquad (5.9)$$

Bunun ispatı yapılırsa,

$$e^{+}(x,\lambda) = \begin{cases} e^{+i\lambda x} & ,x>a \\ (1-\alpha)e^{i\lambda x} + \alpha e^{i\lambda(2a-x)} & ,x<a \end{cases}$$

$$e^{+}_0(x,\lambda) = e^{i\lambda x} \text{ ve } \overline{e^{+}_0(x,\lambda)} = e^{-i\lambda x}$$

olmak üzere,

$$e^{+}(x,\lambda) = M(x,\lambda)e^{+}_0(x,\lambda) + N(x,\lambda)\overline{e^{+}_0(x,\lambda)}$$

olsun.

$$(e^+)'(x,\lambda)=\underbrace{M'(x,\lambda)e^+{}_0(x,\lambda)+N'(x,\lambda)\overline{e^+{}_0(x,\lambda)}}_{=0}+M(x,\lambda)(e^+)'_0(x,\lambda)+N(x,\lambda)\overline{\left(e^+\right)'_0(x,\lambda)}$$

$$(e^+)''(x,\lambda)=\underbrace{M'(x,\lambda)(e^+)'_0(x,\lambda)+N'(x,\lambda)\overline{\left(e^+\right)'_0(x,\lambda)}}_{=f(x)}+M(x,\lambda)(e^+)''_0(x,\lambda)$$

$$+N(x,\lambda)\overline{\left(e^+\right)''_0(x,\lambda)}$$

$$M'(x,\lambda), N'(x,\lambda) \text{ için;}\begin{cases} M'(x,\lambda)e^+{}_0(x,\lambda)+N'(x,\lambda)\overline{e^+{}_0(x,\lambda)}=0 \\ M'(x,\lambda)(e^+)'_0(x,\lambda)+N'(x,\lambda)\overline{\left(e^+\right)'_0(x,\lambda)}=f(x) \end{cases}.$$

olur. Buradan,

$$M(x,\lambda)=1-\int_x^{+\infty}\frac{f(t)\overline{e^+{}_0(t,\lambda)}}{2i\lambda}dt \text{ ve } \mathrm{N}(x,\lambda)=\int_x^{+\infty}\frac{f(t)e^+{}_0(t,\lambda)}{2i\lambda}dt$$

$$=e_0{}^+(x,\lambda)+\int_x^{+\infty}f(t).\frac{1}{2i\lambda}\left[e_0{}^+(t,\lambda)\overline{e_0{}^+(x,\lambda)}-\overline{e_0{}^+(t,\lambda)}e_0{}^+(x,\lambda)\right]dt$$

$$f(t)=q(t)e^+(t,\lambda) \text{ ve } S_0{}^+(x,t,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[e_0{}^+(t,\lambda)\overline{e_0{}^+(x,\lambda)}-\overline{e_0{}^+(t,\lambda)}e_0{}^+(x,\lambda)\right]$$

alınırsa,

$$e^+(x,\lambda)=e_0{}^+(x,\lambda)+\int_x^{+\infty}S_0{}^+(x,t,\lambda)q(t).e^+(t,\lambda)dt$$

elde edilir. $e^-(x,\lambda)$ için de aynı işlemler yapıldığında,

$$e^-(x,\lambda)=e_0{}^-(x,\lambda)+\int_{-\infty}^{x}S_0{}^-(x,t,\lambda)q(t).e^-(t,\lambda)dt$$

olur. Şimdi $S_0{}^+(x,t,\lambda)$ değeri için,

a) x< a< t için:

$$S_0{}^+(x,t,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[e_0{}^+(t,\lambda)\overline{e_0{}^+(x,\lambda)}-\overline{e_0{}^+(t,\lambda)}e_0{}^+(x,\lambda)\right]$$

$$S_0{}^+(x,t,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left\{e^{i\lambda t}\left[(1-\alpha)e^{-i\lambda x}+\alpha e^{-i\lambda(2a-x)}\right]-e^{-i\lambda t}\left[(1-\alpha)e^{i\lambda x}+\alpha e^{i\lambda(2a-x)}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left\{(1-\alpha)\frac{e^{i\lambda(t-x)}-e^{-i\lambda(t-x)}}{2i}+\alpha\frac{e^{i\lambda(t+x-2a)}-e^{-i\lambda(t+x-2a)}}{2i}\right\}$$

$$=(1-\alpha)\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}+\alpha\frac{\sin\lambda(t+x-2a)}{\lambda} \qquad (5.10)$$

b) x< t< a için:

$$S_0^{+}(x,t,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[e_0^{+}(t,\lambda)\overline{e_0^{+}(x,\lambda)}-\overline{e_0^{+}(t,\lambda)}e_0^{+}(x,\lambda)\right]$$

$$S_0^{+}(x,t,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\{\left[(1-\alpha)e^{i\lambda t}+\alpha e^{i\lambda(2a-t)}\right]\left[(1-\alpha)e^{-i\lambda x}+\alpha e^{-i\lambda(2a-x)}\right]$$

$$-\left[(1-\alpha)e^{-i\lambda t}+\alpha e^{-i\lambda(2a-t)}\right]\left[(1-\alpha)e^{i\lambda x}+\alpha e^{i\lambda(2a-x)}\right]\}$$

$$=\frac{1}{2i\lambda}\left\{\left[(1-\alpha)^2-\alpha^2\right]e^{i\lambda(t-x)}+\left[\alpha^2-(1-\alpha)^2\right]e^{i\lambda(x-t)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i\lambda}(1-2\alpha)\left\{e^{i\lambda(t-x)}-e^{-i\lambda(t-x)}\right\}=(1-2\alpha)\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} \qquad (5.11)$$

bulunur.

c) a< x< t için:

$$S_0^{+}(x,t,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[e_0^{+}(t,\lambda)\overline{e_0^{+}(x,\lambda)}-\overline{e_0^{+}(t,\lambda)}e_0^{+}(x,\lambda)\right]$$

$$=\frac{1}{2i\lambda}\left\{e^{i\lambda t}.e^{-i\lambda x}-e^{-i\lambda t}.e^{i\lambda x}\right\}=\frac{e^{i\lambda(t-x)}-e^{-i\lambda(t-x)}}{2i\lambda}=\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} \qquad (5.12)$$

(5.10), (5.11) ve (5.12) den,

$$S_0^{+}(x,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} & ,a<x<t\\ (1-2\alpha)\dfrac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} & ,x<t<a\\ (1-\alpha)\dfrac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}+\alpha\dfrac{\sin\lambda(t+x-2a)}{\lambda} & ,x<a<t\end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi (5.8), $e^{+}(x,\lambda)$ değeriyle (5.9) da yerine yazılırsa,

$$e_0^{+}(x,\lambda)+\int_x^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{i\lambda t}dt=e_0^{+}(x,\lambda)+\int_x^{+\infty}S_0^{+}(x,t,\lambda)q(t)[e_0^{+}(t,\lambda)+\int_t^{+\infty}K^{+}(t,s)e^{i\lambda s}ds]dt$$

$$\int_x^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{i\lambda t}dt=\int_x^{+\infty}S_0^{+}(x,t,\lambda)q(t)e_0^{+}(t,\lambda)dt+\int_x^{+\infty}S_0^{+}(x,t,\lambda)q(t)\int_t^{+\infty}K^{+}(t,s)e^{i\lambda s}dsdt \quad (5.13)$$

olur. Şimdi $K_0^{+}(x,t)=\int_x^{+\infty}S_0^{+}(x,t,\lambda)q(t)e_0^{+}(t,\lambda)dt$ alınarak çözümü yapılırsa,

a) a< x< t için:

$$K_0^{+}(x,t)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}q(t)e^{i\lambda t}dt=\int_x^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(t-x)}-e^{-i\lambda(t-x)}}{2i\lambda}q(t)e^{i\lambda t}dt=\int_x^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(2t-x)}-e^{i\lambda x}}{2i\lambda}q(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}q(t)\int_x^{2t-x}e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

olur. Sınır değişimi yapılırsa,

$$\left.\begin{array}{l} x<t<+\infty \\ x<\xi<2t-x \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} x<\xi<+\infty, \\ \dfrac{x+\xi}{2}<t<+\infty, \end{array}$$

için bir önceki ifade,

$$=\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}e^{i\lambda\xi}\int_{\frac{x+\xi}{2}}^{+\infty}q(t)dtd\xi$$

olur. $t\leftrightarrow\xi$ dönüşümü yapılırsa,

$$=\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty}q(\xi)d\xi dt \quad (5.14)$$

bulunur.

b) x< t< a için:

$$K_0^+(x,t)=\int_x^a (1-2\alpha)\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}q(t)[(1-\alpha)e^{i\lambda t}+\alpha e^{i\lambda(2a-t)}]dt$$

$$=\int_x^a (1-2\alpha)\frac{e^{i\lambda(t-x)}-e^{-i\lambda(t-x)}}{2i\lambda}q(t)[(1-\alpha)e^{i\lambda t}+\alpha e^{i\lambda(2a-t)}]dt$$

$$=\int_x^a \frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\frac{e^{i\lambda(2t-x)}-e^{i\lambda x}}{i\lambda}q(t)dt+\int_x^a \frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\frac{e^{i\lambda(2a-x)}-e^{i\lambda(2a+x-2t)}}{i\lambda}q(t)dt$$

olur. Bu ifadenin birinci terimi,

$$\int_x^a \frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\frac{e^{i\lambda(2t-x)}-e^{i\lambda x}}{i\lambda}q(t)dt=\frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_x^a q(t)\int_x^{2t-x} e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l} x<t<a \\ x<\xi<2t-x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x<\xi<2a-x, \\ \dfrac{x+\xi}{2}<t<a, \end{array}$$

dönüşümü yapılır ve ardından $t\leftrightarrow\xi$ dönüşümü yapılırsa,

$$=\frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_x^{2a-x} e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^a q(\xi)d\xi dt \qquad (5.15)$$

elde edilir. İkinci terimi yapılırsa,

$$\int_x^a \frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\frac{e^{i\lambda(2a-x)}-e^{i\lambda(2a+x-2t)}}{i\lambda}q(t)dt=\frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\int_x^a q(t)\int_{2a+x-2t}^{2a-x} e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l} x<t<a \\ 2a+x-2t<\xi<2a-x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x<\xi<2a-x, \\ \dfrac{2a+x-\xi}{2}<t<a, \end{array}$$

dönüşümü yapılır ve ardından $t\leftrightarrow\xi$ dönüşümü yapılırsa,

$$=\frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\int_x^{2a-x} e^{i\lambda t}\int_{\frac{2a+x-t}{2}}^a q(\xi)d\xi dt \qquad (5.16)$$

elde edilir.

c) x< a< t için:

$$K_0^+(x,t)=\int_a^{+\infty}\left[(1-\alpha)\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}+\alpha\frac{\sin\lambda(t+x-2a)}{\lambda}\right]q(t)e^{i\lambda t}dt$$

$$=\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(2t-x)}-e^{i\lambda x}}{i\lambda}q(t)dt+\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(2t+x-2a)}-e^{i\lambda(2a-x)}}{i\lambda}q(t)dt$$

olur. Birinci terimi çözülürse,

$$\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(2t-x)}-e^{i\lambda x}}{i\lambda}q(t)dt=\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}q(t)\int_x^{2t-x}e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l}a<t<+\infty\\ x<\xi<2t-x\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}a<\xi<+\infty,\\ \dfrac{x+\xi}{2}<t<+\infty,\end{array}$$

dönüşümü yapılır ve ardından $t\leftrightarrow\xi$ dönüşümü yapılırsa,

$$=\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty}q(\xi)d\xi dt \tag{5.17}$$

bulunur. İkinci terimi çözülürse,

$$\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(2t+x-2a)}-e^{i\lambda(2a-x)}}{i\lambda}q(t)dt=\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty}q(t)\int_{2a-x}^{2t+x-2a}e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l}a<t<+\infty\\ 2a-x<\xi<2t+x-2a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}a<\xi<+\infty,\\ \dfrac{2a+\xi-x}{2}<t<+\infty,\end{array}$$

dönüşümü yapılır ve ardından $t\leftrightarrow\xi$ dönüşümü yapılırsa,

$$=\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty}e^{i\lambda t}\int_{\frac{2a+t-x}{2}}^{+\infty}q(\xi)d\xi dt \tag{5.18}$$

olur. Sonuç olarak (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) ve (5.18) den,

$$K_0^+(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty}q(\xi)d\xi dt & ,a<x<t\\ \frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_x^{2a-x}e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{a}q(\xi)d\xi dt+\frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\int_x^{2a-x}e^{i\lambda t}\int_{\frac{2a+x-t}{2}}^{a}q(\xi)d\xi dt, & x<t<a\\ \frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty}q(\xi)d\xi dt+\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty}e^{i\lambda t}\int_{\frac{2a+t-x}{2}}^{+\infty}q(\xi)d\xi dt & ,x<a<t\end{cases}$$

elde edilir. Şimdi (4.13) ifadesinin ikinci terimini alınsın,

$$\int_x^{+\infty}S_0^+(x,t,\lambda)q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)e^{i\lambda s}dsdt$$

ifadesinde,

a) a< x< t için:

$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)e^{i\lambda s}dsdt=\int_x^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(t-x)}-e^{-i\lambda(t-x)}}{2i\lambda}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)e^{i\lambda s}dsdt$$

$$=\int_x^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(t+s-x)}-e^{-i\lambda(t-s-x)}}{2i\lambda}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)dsdt=\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)\int_{x+s-t}^{t+s-x}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt$$

$$\left.\begin{array}{l}x<t<+\infty\\ t<s<+\infty\\ x+s-t<\xi<t+s-x\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}x<\xi<+\infty,\\ x+\xi-t<s<t+\xi-x,\end{array}$$

sınır değişimi yapılırsa,

$$\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}q(t)\int_x^{+\infty}e^{i\lambda\xi}\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x}K^+(t,s)dsd\xi dt$$

ve $\xi\leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_{x}^{+\infty} q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x} K^{+}(\xi,s)dsd\xi dt$$

elde edilir.

b) x< t< a için:

$$\int_{x}^{a}(1-2\alpha)\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}q(t)\int_{t}^{+\infty}K^{+}(t,s)e^{i\lambda s}dsdt=(1-2\alpha)\int_{x}^{a}\frac{e^{i\lambda(t-x)}-e^{-i\lambda(t-x)}}{2i\lambda}q(t)\int_{t}^{+\infty}K^{+}(t,s)e^{i\lambda s}dsdt$$

$$=(1-2\alpha)\int_{x}^{a}\frac{e^{i\lambda(t+s-x)}-e^{-i\lambda(t-s-x)}}{2i\lambda}q(t)\int_{t}^{+\infty}K^{+}(t,s)dsdt=\frac{(1-2\alpha)}{2}\int_{x}^{a}q(t)\int_{t}^{+\infty}K^{+}(t,s)\int_{x+s-t}^{t+s-x}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt$$

$$\left.\begin{array}{l} x<t<a \\ t<s<+\infty \\ x+s-t<\xi<t+s-x \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c} x<\xi<+\infty, \\ x+\xi-t<s<t+\xi-x, \end{array}$$

sınır değişimi yapılırsa,

$$\frac{(1-2\alpha)}{2}\int_{x}^{a}q(t)\int_{x}^{+\infty}e^{i\lambda\xi}\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x}K^{+}(t,s)dsd\xi dt$$

ve $\xi\leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{(1-2\alpha)}{2}\int_{x}^{a}e^{i\lambda t}\int_{x}^{+\infty}q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x}K^{+}(\xi,s)dsd\xi dt$$

bulunur.

c) x< a< t için:

$$\int_{a}^{+\infty}\left[(1-\alpha)\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}+\alpha\frac{\sin\lambda(t+x-2a)}{\lambda}\right]q(t)\int_{t}^{+\infty}K^{+}(t,s)e^{i\lambda s}dsdt$$

$$
\begin{aligned}
&=(1-\alpha)\int_a^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(t+s-x)}-e^{-i\lambda(t-s-x)}}{2i\lambda}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)dsdt\\
&+\alpha\int_a^{+\infty}\frac{e^{i\lambda(t+x-2a+s)}-e^{-i\lambda(t+x-2a-s)}}{2i\lambda}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)dsdt
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)\int_{x+s-t}^{t+s-x}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt+\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)\int_{2a+s-x-t}^{t+x-2a+s}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt
$$

Birinci terimi yapılırsa,

$$
\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)\int_{x+s-t}^{t+s-x}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&a<t<+\infty\\
&t<s<+\infty\\
&x+s-t<\xi<t+s-x
\end{aligned}\right\}\Rightarrow
\begin{aligned}
&x<\xi<+\infty,\\
&x+\xi-t<s<t+\xi-x,
\end{aligned}
$$

sınır değişimi yapılırsa,

$$
\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}q(t)\int_x^{+\infty}e^{i\lambda\xi}\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x}K^+(t,s)dsd\xi dt
$$

ve $\xi\leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$
\frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty}e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty}q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x}K^+(\xi,s)dsd\xi dt
$$

olur. İkinci terimi yapılırsa,

$$
\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty}q(t)\int_t^{+\infty}K^+(t,s)\int_{2a+s-x-t}^{t+x-2a+s}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&a<t<+\infty\\
&t<s<+\infty\\
&2a+s-x-t<\xi<t+x+s-2a
\end{aligned}\right\}\Rightarrow
\begin{aligned}
&x<\xi<+\infty,\\
&x+\xi+t-2a<s<\xi+2a-x-t,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty} q(t)\int_x^{+\infty} e^{i\lambda\xi}\int_{x+\xi+t-2a}^{\xi+2a-x-t} K^+(t,s)dsd\xi dt$$

ve $\xi \leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+t+\xi-2a}^{t+2a-x-\xi} K^+(\xi,s)dsd\xi dt$$

olur. Böylece,

$$\int_x^{+\infty} K^+(x,t)e^{i\lambda t}dt = K_0^{\;+}(x,t) + \begin{cases} \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x} K^+(\xi,s)dsd\xi dt & ,a<x<t \\ \frac{(1-2\alpha)}{2}\int_x^{a} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x} K^+(\xi,s)dsd\xi dt & ,x<t<a \\ \frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x} K^+(\xi,s)dsd\xi dt & \\ +\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+t+\xi-2a}^{t+2a-x-\xi} K^+(\xi,s)dsd\xi dt & ,x<a<t, \end{cases} \tag{5.19}$$

$$K_0^{\;+}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} q(\xi)d\xi dt, a<x<t \\ \frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_x^{2a-x} e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{a} q(\xi)d\xi dt + \frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\int_x^{2a-x} e^{i\lambda t}\int_{\frac{2a+x-t}{2}}^{a} q(\xi)d\xi dt, x<t<a \\ \frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} q(\xi)d\xi dt + \frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_{\frac{2a+t-x}{2}}^{+\infty} q(\xi)d\xi dt, x<a<t \end{cases} \tag{5.20}$$

olur. Her $x \neq a$ için (5.19) ve (5.20) denklemleri, (5.7) eşitsizliklerini sağlayan bir $K^+(x,t)$ çözümüne sahiptir. Şimdi $K_0^{\;+}(x,t)$, (5.20) de tanımlı olmak üzere,

$$\int_x^{+\infty} K_n^+(x,t)e^{i\lambda t}dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x} K^+(\xi,s)dsd\xi dt & ,a<x<t \\ \frac{(1-2\alpha)}{2}\int_x^{a} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x} K_n^+(\xi,s)dsd\xi dt & ,x<t<a \\ \frac{(1-\alpha)}{2}\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x} K_n(\xi,s)dsd\xi dt & \\ +\frac{\alpha}{2}\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t}\int_x^{+\infty} q(\xi)\int_{x+t+\xi-2a}^{t+2a-x-\xi} K_n(\xi,s)dsd\xi dt & ,x<a<t, \text{ n=1, 2, 3...} \end{cases}$$

olur. Buradan, $s<\xi$ için $K(\xi,s)=0$ alınırsa, $K_n^+(x,t)$ tanımından,

$$\left|K_n^+(x,t)\right| = \frac{1}{2}\int_x^{+\infty}|q(\xi)|\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x}\left|K_{n-1}^+(\xi,s)\right|dsd\xi \text{ ve ya}$$

$$\left|K_n^+(x,t)\right| = \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}}|q(\xi)|\int_{x+\xi-t}^{t+\xi-x}\left|K_{n-1}^+(\xi,s)\right|dsd\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty}|q(\xi)|\int_{\xi}^{t+\xi-x}\left|K_{n-1}^+(\xi,s)\right|dsd\xi$$

olur. (5.20) den,

$$\left|K_0^+(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\sigma^+(\frac{x+t}{2}),\ 0<|x-a|<t-a,$$

$$\left|K_0^+(x,t)\right| \le \frac{1-\alpha}{2}\sigma^+(\frac{x+t}{2})+\frac{\alpha}{2}\sigma^+(\frac{2a+x-t}{2}),\ |t-a|<a-x,$$

olur. Matematiksel tümevarımdan,

$$\left|K_n^+(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\sigma^+(\frac{x+t}{2}).\frac{\left(\sigma_1^+(x)\right)^n}{n!},\ 0<|x-a|<t-a,$$

$$\left|K_n^+(x,t)\right| \le \left[\frac{1}{2}\sigma^+(\frac{x+t}{2})+\frac{\alpha}{2}\sigma^+(\frac{2a+x-t}{2})\right].\frac{\left(\sigma_1^+(x)\right)^n}{n!}\quad |t-a|<a-x,$$

olur. Böylece $\sum_{n=0}^{+\infty} K_n^+(x,t)$ serisi $t>x,\ t\neq 2a-x$ ve $x\neq a$ için daima yakınsaktır ve $K^+(x,t)$ toplamı (5.19) un çözümüdür ve (5.7) eşitsizliğini sağlar. Şimdi de,

$$e^{-}(x,\lambda)=\begin{cases} e^{-i\lambda x} & ,x<a \\ (1-\alpha)e^{-i\lambda x}+\alpha e^{-i\lambda(2a-x)} & ,x>a \text{ için} \end{cases}$$

$$S_0^{-}(x,t,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[e_0^{-}(t,\lambda)\overline{e_0^{-}(x,\lambda)}-\overline{e_0^{-}(t,\lambda)}e_0^{-}(x,\lambda)\right]$$

alınsın. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$S_0^{-}(x,t,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} & ,a>x>t \\ (1-2\alpha)\dfrac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} & ,x>t>a \\ (1-\alpha)\dfrac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}+\alpha\dfrac{\sin\lambda(2a-x-t)}{\lambda} & ,x>a>t \end{cases}$$

elde edilir. (5.8) ifadesini $e^{-}(x,\lambda)$ için (5.9) da yazılır ve düzenlenirse,

$$\int_{-\infty}^{x}K^{-}(x,t)e^{-i\lambda t}dt=\int_{-\infty}^{x}S_0^{-}(x,t,\lambda)q(t)e_0^{-}(t,\lambda)dt-\int_{-\infty}^{x}S_0^{-}(x,t,\lambda)q(t)\int_{-\infty}^{t}K^{-}(t,s)e^{-i\lambda s}dsdt \quad (5.21)$$

olur. $K_0^{-}(x,t)=\int_{-\infty}^{x}S_0^{-}(x,t,\lambda)q(t)e_0^{-}(t,\lambda)dt$ alınır ve çözülürse,

a) $a>x>t$ için:

$$K_0^{-}(x,t)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)e^{-i\lambda t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}q(t)\int_{-x}^{x-2t}e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{matrix} -\infty<t<x \\ -x<\xi<x-2t \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix} -\infty<t<\dfrac{x-\xi}{2}, \\ -\infty<\xi<x, \end{matrix}$$

ve $\xi\leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)d\xi dt$$

olur.

b) x> a> t için:

$$K_0^-(x,t) = \int_{-\infty}^{a}\left[(1-\alpha)\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} + \alpha\frac{\sin\lambda(2a-x-t)}{\lambda}\right]q(t)e^{-i\lambda t}dt$$
$$= \frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a}\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda t}q(t)dt + \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a}\frac{\sin\lambda(2a-x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda t}q(t)dt$$

olur. Birinci terimi alınsın,

$$\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a}\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda t}q(t)dt = \frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a}q(t)\int_{-x}^{x-2t}e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < t < a \\ -x < \xi < x-2t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -\infty < t < \dfrac{x-\xi}{2}, \\ -\infty < \xi < a, \end{array}$$

ve $\xi \leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a}e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)d\xi dt$$

olur. İkinci terimi alınsın,

$$\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a}\frac{\sin\lambda(2a-x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda t}q(t)dt = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a}q(t)\int_{x-2a}^{2a-x-2t}e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < t < a \\ x-2a < \xi < 2a-x-2t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -\infty < t < \dfrac{2a-x-\xi}{2}, \\ -\infty < \xi < a, \end{array}$$

ve $\xi \leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a}e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{\frac{2a-x-t}{2}}q(\xi)d\xi dt$$

bulunur.

c) x> t> a için:

$$K_0^-(x,t)=\int_a^x (1-2\alpha)\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\; q(t)\left[(1-\alpha)e^{-i\lambda t}+\alpha e^{-i\lambda(2a-t)}\right]dt$$

$$=(1-2\alpha)(1-\alpha)\int_a^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda t}q(t)dt+(1-2\alpha)\alpha\int_a^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda(2a-t)}q(t)dt$$

olur. Birinci terimi alınsın,

$$(1-2\alpha)(1-\alpha)\int_a^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda t}q(t)dt=\frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_a^x q(t)\int_{-x}^{x-2t} e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l} a<t<x \\ -x<\xi<x-2t \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} a<t<\dfrac{x-\xi}{2}, \\ a<\xi<x, \end{array}$$

ve $\xi \leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_a^x e^{i\lambda t}\int_a^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)d\xi dt$$

olur. İkinci terimi alınsın,

$$(1-2\alpha)\alpha\int_a^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}e^{-i\lambda(2a-t)}q(t)dt=\frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\int_a^x q(t)\int_{2t-2a-x}^{x-2a} e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$\left.\begin{array}{l} a<t<x \\ 2t-2a-x<\xi<x-2a \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} a<t<\dfrac{2a+x+\xi}{2}, \\ a<\xi<x, \end{array}$$

ve $\xi \leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$\frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\int_a^x e^{i\lambda t}\int_a^{\frac{2a+x+t}{2}} q(\xi)d\xi dt$$

Şimdi (4.19) ifadesinin ikinci terimini alınsın,

$$-\int_{-\infty}^{x} S_0^-(x,t,\lambda)q(t)\int_{-\infty}^{t} K^-(t,s)e^{-i\lambda s}dsdt$$

ifadesi için,

a) $a > x > t$ *için:*

$$-\int_{-\infty}^{x} \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} \; q(t)\int_{-\infty}^{t} K^-(t,s)e^{-i\lambda s}dsdt = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} q(t)\int_{-\infty}^{t} K^-(t,s)\int_{t-x-s}^{x-t-s} e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt$$

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < t < x \\ -\infty < s < t \\ t-x-s < \xi < x-t-s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} -\infty < t < x, \\ t-x-\xi < s < x-t-\xi, \\ -\infty < \xi < x, \end{array}$$

ve sonra $\xi \leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x} q(\xi)\int_{\xi-x-t}^{x-t-\xi} K^-(\xi,s)dsd\xi d$$

elde edilir.

b) x> a> t için:

$$-\int_{-\infty}^{a}\left[(1-\alpha)\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} + \alpha\frac{\sin\lambda(2a-x-t)}{\lambda}\right] \; q(t)\int_{-\infty}^{t} K^-(t,s)e^{-i\lambda s}dsdt$$

$$= -\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a} q(t)\int_{-\infty}^{t} K^-(t,s)\int_{t-x-s}^{x-t-s} e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt - \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a} q(t)\int_{-\infty}^{t} K^-(t,s)\int_{t+x-2a-s}^{2a-x-t-s} e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt$$

ifadesinin birinci terim için,

$$-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a} q(t)\int_{-\infty}^{t} K^-(t,s)\int_{t-x-s}^{x-t-s} e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt$$

$$\left.\begin{array}{l}-\infty<t<a\\ -\infty<s<t\\ t-x-s<\xi<x-t-s\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{r}t-x-\xi<s<x-t-\xi,\\ -\infty<\xi<x,\\ -\infty<t<a,\end{array}$$

ve sonra $\xi\leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$-\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a}e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x}q(\xi)\int_{\xi-x-t}^{x-t-\xi}K^{-}(\xi,s)dsd\xi d$$

olur. İkinci terim için,

$$-\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a}q(t)\int_{-\infty}^{t}K^{-}(t,s)\int_{t+x-2a-s}^{2a-x-t-s}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt$$

$$\left.\begin{array}{l}-\infty<t<a\\ -\infty<s<t\\ t-x-s-2a<\xi<2a-x-t-s\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{r}x+t-2a-\xi<s<2a-x-t-\xi,\\ -\infty<\xi<x,\\ -\infty<t<a,\end{array}$$

ve sonra $\xi\leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$-\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a}e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x}q(\xi)\int_{x+\xi-2a-t}^{2a-x-t-\xi}K^{-}(\xi,s)dsd\xi d$$

elde edilir.

c) x> t> a için:

$$-\int_{a}^{x}(1-2\alpha)\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\ \ q(t)\int_{-\infty}^{t}K^{-}(t,s)e^{-i\lambda s}dsdt=-\frac{(1-2\alpha)}{2}\int_{a}^{x}q(t)\int_{-\infty}^{t}K^{-}(t,s)\int_{t-x-s}^{x-t-s}e^{i\lambda\xi}d\xi dsdt$$

$$\left.\begin{array}{l}a<t<x\\ -\infty<s<t\\ t-x-s<\xi<x-t-s\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{r}a<t<x,\\ t-x-\xi<s<x-t-\xi,\\ -\infty<\xi<x,\end{array}$$

ve sonra $\xi\leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa,

$$-\frac{(1-2\alpha)}{2}\int_a^x e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x} q(\xi)\int_{\xi-x-t}^{x-t-\xi} K^-(\xi,s)dsd\xi d$$

olur. Böylece,

$$\int_{-\infty}^{x} K^-(x,t)e^{i\lambda t}dt = K_0^+(x,t)-\begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x} q(\xi)\int_{\xi-x-t}^{x-t-\xi} K^-(\xi,s)dsd\xi dt & ,a>x>t \\ \frac{(1-2\alpha)}{2}\int_a^x e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x} q(\xi)\int_{\xi-x-t}^{x-t-\xi} K^-(\xi,s)dsd\xi dt & ,x>t>a \\ \frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x} q(\xi)\int_{\xi-t-x}^{x-\xi-t} K^-(\xi,s)dsd\xi dt & \\ +\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{x} q(\xi)\int_{x+\xi-2a-t}^{2a-t-x-\xi} K^-(\xi,s)dsd\xi dt & ,x>a>t, \end{cases} \quad (5.22)$$

$$K_0^+(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)d\xi dt & ,a>x>t \\ \frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_a^x e^{i\lambda t}\int_a^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)d\xi dt+\frac{(1-2\alpha)\alpha}{2}\int_a^x e^{i\lambda t}\int_a^{\frac{2a+x+t}{2}} q(\xi)d\xi dt & ,x>t>a \\ \frac{(1-\alpha)}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)d\xi dt+\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{\frac{2a-t-x}{2}} q(\xi)d\xi dt & ,x>a>t \end{cases} \quad (5.23)$$

olur. (5.20) ve (5.23) den $K_0^{\pm}(x,t)$ nin her $t\neq 2a-x$ ve $x\neq a$ için parçalı türevinin olduğu görülür. Ayrıca (5.19) ve (5.22) den $K^{\pm}(x,t)$ de $t\neq 2a-x$ ve $x\neq a$ için parçalı türeve sahiptir. Şimdi aşağıdaki lemmanın (5.9), (5.19) ve (5.22) kullanarak ispatı yapılsın.

Lemma 5.1. $t\neq 2a-x$ ve $x\neq a$ için $K^{\pm}(x,t)$ fonksiyonunun parçalı türevleri vardır. Ayrıca,

$$\left|\frac{\partial K^{\pm}(x_1,x_2)}{\partial x_i}\pm\frac{1}{4}q\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|\leq\frac{1}{2}\sigma^{\pm}(x_1)\sigma^{\pm}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)e^{\sigma_1^{\pm}(x_1)},\ \ \pm x_1>\pm a$$

$$\left|\frac{\partial K^{\pm}(x_1,x_2)}{\partial x_i} \pm \frac{1-\alpha}{4} q(\frac{x_1+x_2}{2}) \pm (-1)^i \frac{\alpha}{4} q(\frac{x_2+2a-x_1}{2})\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\sigma^{\pm}(x_1)\sigma^{\pm}(\frac{x_1+x_2}{2})e^{\sigma_1^{\pm}(x_1)},\ \pm x_2 > \pm(2a-x_1),\ \pm x_1 < \pm a$$

$$\left|\frac{\partial K^{\pm}(x_1,x_2)}{\partial x_i} \pm \frac{1-\alpha}{4} q(\frac{x_1+x_2}{2}) \pm (-1)^i \frac{\alpha}{4} q\left(\frac{2a+x_1-x_2}{2}\right) \mp (-1)^{i-1} \frac{\alpha}{4} q\left(\frac{2a+x_1-x_2}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\sigma^{\pm}(\frac{x_1+x_2}{2}) + \alpha\sigma^{\pm}(\frac{2a+x_1-x_2}{2})\right)\sigma^{\pm}(x_1)e^{\sigma_1^{\pm}(x_1)},\ \pm x_1 \leq \pm x_2 \leq \pm(2a-x_1),$$

NOT: (5.19) ve (5.22) den;

$$K^{\pm}(a-0,t) = K^{\pm}(a+0,t),\ \pm t > \pm a$$
$$K_x^{\pm\prime}(a+0,t) - K_x^{\pm\prime}(a-0,t) = 2\alpha i\lambda K^{\pm}(a,t),\ \pm t > \pm a \tag{5.24}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $q(x)$ in diferansiyellenebilir olduğu görülür. $K^{\pm}(x,t)$ fonksiyonu ikinci mertebeden parçalı türeve sahiptir ve,

$$\frac{\partial^2 K^{\pm}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K^{\pm}(x,t)}{\partial t^2} = q(x)K^{\pm}(x,t) \tag{5.25}$$

dir. Tersine, $K^{\pm}(x,t)$ fonksiyonu, (5.8), (5.24) ifadeleri ve

$$\lim_{x+t\to\pm\infty} \frac{\partial K^{\pm}(x,t)}{\partial x} = \lim_{x+t\to\pm\infty} \frac{\partial K^{\pm}(x,t)}{\partial t} = 0$$

eşitliği yardımıyla, (5.25) eşitliğini sağlarsa, bu durumda (5.19) ve (5.22)'nin çözümleridirler. Bu durumda (5.6) şartını sağlayan $e^{\pm}(x,\lambda)$ fonksiyonu,

$$q(x) = \begin{cases} \pm 2\dfrac{dK^{\pm}(x,x)}{dx}, & \pm x > \pm a, \\ \pm\dfrac{2}{1-\alpha}\dfrac{dK^{\pm}(x,x)}{dx}, & \pm x < \pm a, \end{cases}$$

koşulu ile (4.1) ve (4.2) problemlerinin bir çözümüdür.

6. DİREKT SAÇILMA PROBLEMİ

q(x) reel değerli bir fonksiyon a ve λ bir sayı olmak üzere, $\overline{e^{+}(x,\lambda)} = e^{+}(x,-\lambda)$ ve $\overline{e^{-}(x,\lambda)} = e^{-}(x,-\lambda)$ fonksiyonları reel λ değeri için $e^{+}(x,\lambda)$ ve $e^{-}(x,\lambda)$ ile (4.2.1) ve (4.2.2) problemlerinin çözümleridir. (4.1) ve (4.2) problemlerinin Wronskianları x den bağımsız olmak üzere,

$$W\left[e^{+}(x,\lambda), e^{+}(x,-\lambda)\right] = e^{+'}(x,\lambda).e^{+}(x,-\lambda) - e^{+}(x,\lambda)e^{+'}(x,-\lambda) = 2i\lambda$$

$$W\left[e^{-}(x,\lambda), e^{-}(x,-\lambda)\right] = -2i\lambda \tag{6.1}$$

dir. $\lambda \neq 0$ için $e^{+}(x,\lambda)$ ve $e^{+}(x,-\lambda)$ ile $e^{-}(x,\lambda)$ ve $e^{-}(x,-\lambda)$ fonksiyonları (4.1) ve (4.2) problemlerinin temel çözümleridir. $\lambda \in \mathbb{R}^{+} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$e^{+}(x,\lambda) = b(\lambda)e^{-}(x,\lambda) + a(\lambda)e^{-}(x,-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+} \tag{6.2}$$

$$e^{-}(x,\lambda) = -b(-\lambda)e^{-}(x,\lambda) + a(\lambda)e^{-}(x,-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+} \tag{6.3}$$

olur. (6.1) den,

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} W\left[e^{+}(x,\lambda), e^{-}(x,\lambda)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+} \tag{6.4}$$

$$b(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} W\left[e^{+}(x,\lambda), e^{-}(x,-\lambda)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+} \tag{6.5}$$

olur. Buradan,

$$u^{\pm}(x,\lambda) = e^{\mp}(x,\lambda)\frac{1}{a(\lambda)}, \ \mathrm{r}^{\pm}(\lambda) = \mp\frac{b(\mp\lambda)}{a(\lambda)}, \ t(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} \tag{6.6}$$

alınırsa, (6.2) ve (6.3) ifadeleri şu şekilde yazılabilir:

$$u^{\pm}(x,\lambda) = \mathrm{r}^{\pm}(\lambda)e^{\mp}(x,\lambda) + e^{\mp}(x,-\lambda) \tag{6.7}$$

(5.6), (6.6) ve (6.7) den aşağıdaki asimetrik formül elde edilir:

$$u^{\pm}(x,\lambda) = \mathrm{r}^{\pm}(\lambda)e^{\mp i\lambda x} + e^{\mp i\lambda x} + o(1), \ x \to \pm\infty$$

$$u^{\pm}(x,\lambda) = t(\lambda)e^{\mp i\lambda x} + o(1), \ x \to \mp\infty$$

$u^{\pm}(x,\lambda)$ nın çözümleri, sol ($u^{-}(x,\lambda)$) ve sağ ($u^{+}(x,\lambda)$) saçılma problemlerinin *öz fonksiyonlarıdır*, $\mathrm{r}^{+}(\lambda)$ ve $\mathrm{r}^{-}(\lambda)$ nın katsayılarına da sol ve sağ *yansıma katsayıları* denir. $t(\lambda)$ ya ise *transmisyon katsayısı* denir [33].

Lemma 6.1. (6.4) ve (6.5) de tanımlı $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki ifadeleri sağlar:

1) $a(\lambda)=(1-\alpha)-\dfrac{1}{2i\lambda}\left[(1-\alpha)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(t)dt+\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(t)e^{i\lambda t}dt\right]$

2) $b(\lambda)=-\alpha e^{2i\lambda a}+\dfrac{1}{2i\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)e^{i\lambda t}dt$ **,**

Burada, $\varphi(t)\in L_1(0,+\infty),\ \psi(\mathrm{t})\in L_1(-\infty,+\infty)$

3) $|a(\lambda)|^2-|b(\lambda)|^2=1$

İspat: $a>0$ olsun. $e^{\pm}(x,\lambda)$ çözümleri için yukarıdaki eşitliklerin diferansiyelini ve parçalı integrallerini alınıp bu eşitliklerin çekirdeklerinin özelliklerini kullanılırsa,

$x<a$ *için*

$$e^{+'}(x,\lambda)=i\lambda(1-\alpha)e^{i\lambda x}-\alpha i\lambda e^{i\lambda(2a-x)}+\left[K^{+}(2a-x+0)-K^{+}(2a-x-0)\right]e^{i\lambda(2a-x)}-$$
$$-K^{+}(x,x)e^{i\lambda x}+\int\limits_{x}^{+\infty}K_x^{+'}(x,t)e^{i\lambda t}dt=i\lambda(1-\alpha)e^{i\lambda x}-\alpha i\lambda e^{i\lambda(2a-x)}-$$
$$-\frac{\alpha}{2}\left[\int\limits_{x}^{a}q(\xi)d\xi-\int\limits_{a}^{+\infty}q(\xi)d\xi\right]e^{i\lambda(2a-x)}-\frac{1-\alpha}{2}\int\limits_{x}^{+\infty}q(\xi)d\xi e^{i\lambda x}+\int\limits_{x}^{+\infty}K_x^{+'}(x,t)e^{i\lambda t}dt,$$
$$e^{-'}(x,\lambda)=-i\lambda e^{-i\lambda x}+K^{-}(x,x)e^{-i\lambda x}+\left[K^{-}(2a-x+0)-K^{-}(2a-x-0)\right]e^{-i\lambda(2a-x)}+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{x}K_x^{-'}(x,t)e^{-i\lambda t}dt,$$
$$\int\limits_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{i\lambda t}dt=-\left[K^{+}(2a-x+0)-K^{+}(2a-x-0)\right]\frac{e^{i\lambda(2a-x)}}{i\lambda}-K^{+}(x,x)\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}-$$
$$-\frac{1}{i\lambda}\int\limits_{x}^{+\infty}K_t^{+'}(x,t)e^{i\lambda t}dt,$$

$$\int_{-\infty}^{x} K^{-}(x,t)e^{-i\lambda t}dt = K^{-}(x,x)\frac{e^{-i\lambda x}}{i\lambda}+\frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{x} K_t^{-\prime}(x,t)e^{-i\lambda t}dt.$$

Buradan,

$$e^{+\prime}(x,\lambda)e^{-}(x,\lambda) = (1-\alpha)i\lambda-\alpha i\lambda e^{2i\lambda a}-\frac{1}{2}\left[(1-\alpha)-\alpha e^{2i\lambda a}\right]\int_{-\infty}^{0} q(t)dt -$$

$$-\frac{\alpha}{2}\left[\int_{0}^{a} q(t)dt-\int_{a}^{+\infty} q(t)dt\right]e^{2i\lambda a}-\frac{1}{2}(1-\alpha)\int_{a}^{+\infty} q(t)dt+\int_{a}^{+\infty}\varphi_1(t)e^{i\lambda a}dt,$$

$$e^{+}(x,\lambda)e^{-\prime}(x,\lambda) = -i\lambda\left[(1-\alpha)-\alpha e^{2i\lambda a}\right]+\frac{1}{2}\left[(1-\alpha)-\alpha e^{2i\lambda a}\right]\int_{-\infty}^{0} q(t)dt -$$

$$-i\lambda\left[-\frac{\alpha}{2}\left[\int_{0}^{a} q(t)dt-\int_{a}^{+\infty} q(t)dt\right]e^{2i\lambda a}-\frac{(1-\alpha)}{2i\lambda}\int_{a}^{+\infty} q(t)dt\right]+\int_{a}^{+\infty}\varphi_2 e^{i\lambda a}(t)dt.$$

Bu eşitlik,

$$a(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[e^{+}(x,\lambda),e^{-}(x,\lambda)\right],\quad \lambda\in\mathbb{C}^{+}$$

formülü ile kullanılırsa,

$$2i\lambda a(\lambda)=e^{+\prime}(0,\lambda)e^{-}(0,\lambda)-e^{+}(0,\lambda)e^{-\prime}(0,\lambda)=2i\lambda(1-\alpha)-(1-\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)dt+\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)dt$$

olur. Burada, $\varphi(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$ dir. Böylece $a(\lambda)$ için gösterim bulundu. Aynı yolla $b(\lambda)$ için de bulunabilir.

Yine, $r_0^{\pm}(\lambda)=\pm\dfrac{\alpha}{1-\alpha}e^{\mp 2i\lambda a}$ için,

$$r^{\pm}(\lambda)=r_0^{\pm}(\lambda)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ (\lambda\to\pm\infty)$$

eşitliklerini sağlayan yansıma katsayıları $q(x)=0$ için L operatörünün yansıma katsayılarıdır.

$$a(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[e^{+}(x,\lambda),e^{-}(x,\lambda)\right],\quad \lambda\in\mathbb{C}^{+}\ \text{ve}$$

$$b(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} W\left[e^{+}(x,\lambda), e^{-}(x,-\lambda)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+}$$

den,

$$2i\lambda = W\left[e^{+}(x,\lambda), e^{+}(x,-\lambda)\right] = |b(\lambda)|^{2} W\left[e^{-}(x,\lambda), e^{-}(x,-\lambda)\right] +$$
$$+|a(\lambda)|^{2} W\left[e^{-}(x,-\lambda), e^{-}(x,\lambda)\right] = 2i\lambda\left[|a(\lambda)|^{2} - |b(\lambda)|^{2}\right]$$

ve buradan,

$$|a(\lambda)|^{2} - |b(\lambda)|^{2} = 1$$

bulunur.

Lemma 6.2. $a(\lambda)$ fonksiyonu sadece $Im\lambda > 0$ yarı düzleminde sınırlı sayıda sıfırlara sahiptir. Bu sıfırlar sanal yarı eksende bulunur ve $a^{-1}(\lambda)$ fonksiyonu sıfırın bazı komşuluğunda sınırlıdır.

İspat: $a(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları $i\chi_1, i\chi_2, ..., i\chi_n$ $(a(i\chi_k) = 0, i\chi_k > 0)$ şeklinde ve $u_k^{\pm} = e^{\mp}(x, i\chi_k)$ öz fonksiyonlarının tersleri de $m_k^{\pm}$ ile gösterilecektir. Bu durumda,

$$\left(m_k^{\pm}\right)^{-2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{\mp}(x, i\chi_k)\right|^{2} dx$$

dir. $u_k^{+}(x)$ ile $u_k^{-}(x)$ çözümleri lineer bağımlı olduğundan; $u_k^{\pm}(x) = c_k^{\pm} u_k^{\mp}(x)$ dir.

$e^{\pm}(x,\lambda) \sim e^{\pm i\lambda x}$, $(x \to \pm\infty)$ iken, $\lambda = i\chi_k$ için ve $u_k^{\pm}(x) = c_k^{\pm} u_k^{\mp}(x)$ eşitliğinden, eşitlik,

$$y_k(x) = u_k^{\pm}(x) = c_k^{\pm} u_k^{\mp}(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$$

çözümüne sahiptir. $i\chi_k$, L operatörünün bir öz değeridir.

$$-y_k'' + q(x) y_k = \lambda^{2} y_k$$

eşitliği ve,

$$y_k(a-0) = y_k(a+0) = y_k(a)$$
$$y_k'(a+0) - y_k'(a-0) = 2\alpha i\chi_k y_k(a)$$

durumlarından,

$$i\chi_k = \frac{2i\alpha\left|y_k(a)\right|^2 + \sqrt{(2i\alpha)^2\left|y_k(a)\right|^4 + 4A(y_k)}}{2(y_k, y_k)} \qquad (*)$$

olur. Burada,

$$A(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|y'(x)\right|^2 + q(x)\left|y(x)\right|^2\right]dx$$

dir. (*) eşitliğinden ve $i\chi_k$ ’ların gerçek olmayan özelliğinden,

$$A(i\chi_k) < 0,\ k = 1, 2, ... \qquad (**)$$

sağlanır. Yani, $i\chi_k$ sayıları herhangi ikisi eşit olmadığı durumda, $y_k(x) = e^{ii\chi_k x}\left[1 + a(1)\right],\ x \to +\infty$ asimtotik formülüden, $y_k(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğu görülür. Böylece, A’ nın tanımından, (**) eşitsizliğini sağlayan sonsuz boyutlu doğrusal değerler olduğu görülür. [4] e göre $L_2(-\infty, +\infty)$ uzayında bulunan ve $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ diferansiyel ifade ile oluşturulan self adjoint operatör L_0 $\int_{\infty}^{-\infty}(1+|x|)\left|q(x)\right|dx < +\infty$ eşitsizliği için geçerli olmayan sonsuz sayıda negatif öz değere sahiptir. Bu çelişkiden lemmanın doğruluğu ispatlanır.

Lemma 6.3: $\left(m_k^{\pm}(x)\right)^{-2} = ic_k^{\pm}a(i\chi_k),\ k = 1, 2, ..., n$ eşitliği sağlanır.

Lemma 6.4: $za(z)$ fonksiyonu, kapalı yarı düzlemin üst sınırında süreklidir ve $\lim\limits_{x\to 0}\lambda a(\lambda)\left[r^{+}(\lambda) + 1\right] = 0$ dır. Burada,

$$(1 - \left|r^{+}(\lambda)\right|^2) > C\lambda^2(1 + \lambda^2)^{-1} < 1$$

olacak şekilde $C>0$ vardır. $\left\{r^-(\lambda), i\chi_k, m_k^-\right\}$ ve $\left\{r^+(\lambda), i\chi_k, m_k^+\right\}$ ifadelerine (4.1) ve (4.2) problemlerinin *sol ve sağ saçılma verileri* denir.

$\alpha=1$ için bir saçılma verisi yalnızca başka bir tane saçılma verisine bağlı olarak tek şekilde tanımlanır. Bunu göstermek için lemma 6.3. ve (6.6) kullanılır ise aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$r^-(\lambda)=-\frac{\overline{a(-\lambda)}}{a(\lambda)},\ (m_k)^{-2}=-(m_k^+)^2\left[a(i\chi_k)\right]^2 \tag{6.8}$$

Buradan $a(z)$ fonksiyonu şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$a(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left[(1-\left|r^+(\lambda)\right|^2)(1-\alpha)^2\right]}{\lambda-2}d\lambda\right\}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-i\chi_k}{z+i\chi_k}\ , \tag{6.9}$$

7. TERS PROBLEMİN TEMEL DENKLEMLERİ

Bu kısımda ana ters saçılma probleminin denklemleri ele alınacaktır, (6.6) ve lemma 6.1 den,

$$\left|r^{\pm}(\lambda)\right| < 1 \ (\lambda \in R^{+}) \tag{7.1}$$

elde edilir. Gerçekten de (6.6) dan,

$$|\alpha(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha(\lambda)| > |b(\lambda)|$$

$\left|r^{\pm}(\lambda)\right| = \dfrac{|b(\pm\lambda)|}{|\alpha(\lambda)|}$ basit kesir olup $\left|r^{\pm}(\lambda)\right| < 1$ dir.

$$r^{\pm}(\lambda) = r_0^{\pm}(\lambda) + O(\frac{1}{\lambda}) \quad (|\lambda| \to +\infty, \lambda \in R) \tag{7.2}$$

Burada,

$$r_0^{\pm}(\lambda) = \mp \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{\mp 2ia}$$

olduğundan,

$$r^{\pm}(\lambda) - r_0^{\pm}(\lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$$

olur. Böylece,

$$R^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[r^{\pm}(\lambda) - r_0^{\pm}(\lambda) \right] e^{\pm i\lambda x} d\lambda \tag{7.3}$$

fonksiyonu da $L_2(-\infty, +\infty)$ da tanımlı olur.

Teorem 7.1. Her $x \neq a$ için $e^{\pm}(x,\lambda) = e_0^{\pm}(x,\lambda) \pm \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t) e^{\pm i\lambda t} dt$ ifadesinin çekirdekleri, ters problemin temel denklemleri olan,

$$F_1^{\pm}(x,y) \pm \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(y+t)dt + K^{\pm}(x,y) \mp$$
$$\mp \frac{\alpha}{1-\alpha} K^{\pm}(x,2a-y) = 0, \quad \pm x < \pm y \tag{7.4}$$

denklemini sağlar. Burada,

$$F_1^{\pm}(x,y) = \begin{cases} F^{\pm}(x+y), & \pm x > \pm a, \\ (1-\alpha)F^{\pm}(x+y) + \alpha F^{\pm}(2a-x+y), & \pm x < \pm a \end{cases} \tag{7.5}$$

$$F^{\pm}(x) = R^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{n} (m_k^{\pm})^2 e^{-\chi_k x} \tag{7.6}$$

olup, $R^{\pm}(x)$ fonksiyonu (7.3) ile tanımlıdır.

İspat: (7.4) denklemini elde etmek için, $u^{+}(x,\lambda) = r^{+}(x)e^{+}(x,\lambda) + e^{+}(x,-\lambda)$ denklemi, $u^{\pm}(x,\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} e^{\mp(x,\lambda)}$ kullanılarak ve ekleme çıkarma ile aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\left(\frac{1}{a(\lambda)} - \frac{1}{1-\alpha}\right) e^{-}(x,\lambda) = \left[r^{+}(\lambda) - r_0^{-}(\lambda)\right] e^{+}(x,\lambda) + r_0^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda)$$
$$-\frac{1}{1-\alpha} e^{-}(x,\lambda) + e^{+}(x,-\lambda)$$

Bu denklemin iki tarafı $x < y$ için $\frac{1}{2\pi} e^{i\lambda y}$ ile çarpılır ve $\lambda \in (-\infty,+\infty)$ için λ değişkenine göre integrallenirse,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a(\lambda)} - \frac{1}{1-\alpha}\right) e^{-}(x,\lambda)e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[r^{+}(\lambda) - r_0^{-}(\lambda)\right] e^{+}(x,\lambda)e^{i\lambda y} d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(r_0^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda) - \frac{1}{1-\alpha} e^{-}(x,\lambda) + e^{+}(x,-\lambda)\right) e^{i\lambda y} d\lambda \tag{7.7}$$

Şimdi, $e^{+}(x,\lambda)$ nın çözümü için,

$$e^{+}(x,\lambda)=e_0^{+}(x,\lambda)+\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{+i\lambda t}dt$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[r^{+}(\lambda)-r_0^{+}(\lambda)\right]e^{+}(x,\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda=R_1^{+}(x,y)+\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)R^{+}(t+y)dt$$

olur. Burada,

$$R_1^{+}(x,y)=\begin{cases}R^{+}(x+y), & x>a,\\ (1-\alpha)R^{+}(x+y)+\alpha R^{+}(2a-x+y), & x<a\end{cases}$$

Şimdi;

$$\frac{1}{1-\alpha}e_0^{-}(x,\lambda)=e_0^{+}(x,-\lambda)+r_0^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda)$$

$$e^{+}(x,\lambda)=e_0^{+}(x,\lambda)+\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{i\lambda t}dt \quad \text{ve}$$

$$r_0^{\pm}(x)=\pm\frac{\alpha}{1-\alpha}e^{\mp 2i\lambda a}$$

eşitlikleri kullanılarak, (7.7) eşitliğinin sağ taraftaki ikinci terimi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{+}(x,-\lambda)+r_0^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda)-\frac{1}{1-\alpha}e^{-}(x,\lambda)\right]e^{i\lambda y}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e_0^{-}(x,-\lambda)+\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{-i\lambda t}dt-\frac{1}{1-\alpha}e_0^{-}(x,\lambda)-\frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{x}K^{-}(x,t)e^{-i\lambda t}dt\right.$$

$$\left.+r_0^{+}(\lambda)e_0^{+}(x,\lambda)+r_0^{+}(\lambda)\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{i\lambda t}dt\right)e^{i\lambda y}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e_0^{-}(x,-\lambda)+\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{-i\lambda t}dt-\frac{1}{1-\alpha}e_0^{-}(x,\lambda)-\frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{x}K^{-}(x,t)e^{-i\lambda t}dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\alpha}e_0^{-}(x,\lambda)-e_0^{+}(x,-\lambda)-\frac{\alpha}{1-\alpha}e^{-2i\lambda a}\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{i\lambda t}dt\right)e^{i\lambda y}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{-i\lambda t}dt-\frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{x}K^{-}(x,t)e^{-i\lambda t}dt-\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{i\lambda(t-2a)}dt\right)e^{i\lambda y}d\lambda$$

$$=K^{+}(x,y)-\frac{1}{1-\alpha}K^{-}(x,y)-\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{+}(x,2a-y)$$

olur. Buradan $K^{-}(x,y)=0$ ve $x<y$ için,

$$K^{+}(x,y)-\frac{1}{1-\alpha}K^{-}(x,y)-\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{+}(x,2a-y)=K^{+}(x,y)-\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{+}(x,2a-y)$$

olur. Böylece (6.7) ifadesi şu şekle dönüşür:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a(\lambda)}-\frac{1}{1-\alpha}\right)e^{-}(x,\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda=R_{1}^{+}(x,y)+\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)R^{+}(y+t)dt$$

$$+K^{+}(x,y)-\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{+}(x,2a-y) \tag{7.8}$$

Şimdi (7.8) in sol tarafı Contour integrali yardımıyla çözülürse, $\frac{1}{a(\lambda)}-\frac{1}{1-\alpha}$ fonksiyonu $\operatorname{Im}\lambda>0$ yarı düzleminde sürekli, sınırlı sayıda $i\chi_k$ dışında, $\frac{1}{a(\lambda)}-\frac{1}{1-\alpha}\to 0,\ |\lambda|\to\infty,\ \operatorname{Im}\lambda\geq 0$ için $\frac{1}{a(\lambda)}$ sıfırın bazı komşuluklarında sınırlı (*bkz. lemma 6.1 ve lemma 6.2*) ve $e^{-}(x,\lambda)e^{i\lambda y}$ fonksiyonu $x<y$ için $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ da sınırlı olsun. Jordan lemmasından ve $x<y$ için,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a(\lambda)}-\frac{1}{1-\alpha}\right)e^{-}(x,\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda=i\sum_{k=1}^{n}\underset{\lambda=i\chi_k}{res}\left[\left(\frac{1}{a(\lambda)}-\frac{1}{1-\alpha}\right)e^{-}(x,\lambda)e^{i\lambda y}\right]$$

$$=i\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-}(x,i\chi_k)e^{-i\chi_k y}}{a(i\chi_k)}=i\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{+}(x,i\chi_k)e^{-i\chi_k y}}{c_k^{+}a(i\chi_k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}m_k^2\left\{e^{+}(x,i\chi_k)e^{-i\chi_k y}+\int_{x}^{+\infty}K^{+}(x,t)e^{-\chi_k(t+y)}dt\right\}$$

elde edilir. Bu (7.8) de yazılırsa ve

$$e^{+}(x,i\chi_k)e^{-i\chi_k y}=\begin{cases} e^{-i\chi_k(x+y)}, & x>a \\ (1-\alpha)e^{-i\chi_k(x+y)}+\alpha e^{-i\chi_k(2a-x+y)}, & x<a \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, (7.4) eşitliği elde edilmiş olur. (7.4) eşitliğinin negatif eşiti ise,

$$u^{-}(x,\lambda)=r^{-}(x)e^{-}(x,\lambda)+e^{-}(x,-\lambda)$$

kullanılarak aynı şekilde ispatlanabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

8. TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN EŞİTSİZLİK TEOREMİ

(7.4) denklemi, (7.5) kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$F^{\pm}(x,y) \pm \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(y+t)dt + K^{\pm}(x,y) = 0, \quad \pm a < \pm x, \ \pm x < \pm y \qquad (8.1)$$

$$(1-\alpha)F^{\pm}(x+y) + \alpha F^{\pm}(2a-x+y) \pm \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(y+t)dt$$
$$+K^{\pm}(x,y) \mp \frac{\alpha}{1-\alpha} K^{+}(x,2a-y) = 0, \quad \pm x < \pm a, \ \pm x < \pm y < (2a-x) \qquad (8.2)$$

$$(1-\alpha)F^{\pm}(x+y) + \alpha F^{\pm}(2a-x+y) \pm \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(y+t)dt$$
$$+K^{\pm}(x,y) = 0, \quad \pm x < \pm a, \ \pm y > (2a-x) \qquad (8.3)$$

(8.1) denklemi, $\alpha = 1$ için temel denklem ile çakışır [16]. Bu yüzden $F^{\pm}(x)$ fonksiyonu $\pm x \geq 2a$ da süreklidir ve

$$\int_{\pm 2a}^{+\infty} F^{\pm}(\pm x)dx < \infty, \quad \int_{\pm 2a}^{+\infty} (1+|x|)\left|F^{\pm\prime}(\pm x)\right| dx < \infty$$

Ayrıca $R^{\pm}(x)$ fonksiyonu da bu özelliği sağlar. $y \to x \pm 0$ ve $\pm x \leq \pm a$ için (8.2) den,

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2x) + \alpha F^{\pm}(2a \pm 0) \pm \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(y+t)dt$$
$$+K^{\pm}(x,x) \mp \frac{\alpha}{1-\alpha} K^{+}(x,2a-x\pm 0) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikten ve $K^{\pm}(x,t)$ fonksiyonlarının özelliklerinden,

$$\int_{x'}^{\pm 2a} \left|F^{\pm}(\pm x)\right| dx < \infty, \ x' \leq x \leq \pm 2a$$

için $F^{\pm}(x)$ fonksiyonlarının da sürekli olduğu kolayca gösterilebilir. (8.2) ifadesinin $y \to 2a - x \mp 0$ için ve (8.3) ün $y \to 2a - x \pm 0$ için limiti alınırsa, ortak çözümden ve (5.8) ifadesinden,

$$F^{\pm}(2a+0)-F^{\pm}(2a-0)=\pm\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_{a}^{\pm\infty}q(t)dt$$

olur. Gerçekten,

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a\pm 0)+\alpha F^{\pm}(4a-2x\pm 0)+K^{\pm}(x,2a-x\pm 0)\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(2a-x\pm 0+t)dt=0 \qquad (8.4)$$

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a\mp 0)+\alpha F^{\pm}(4a-2x\mp 0)+K^{\pm}(x,2a-x\mp 0)\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(2a-x\mp 0+t)dt\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{+}(x,x\mp 0)=0 \qquad (8.5)$$

(7.4) den (7.5) taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a\pm 0)-(1-\alpha)F^{\pm}(2a\mp 0)+K^{\pm}(x,2a-x\pm 0)-K^{\pm}(x,2a-x\mp 0)\pm\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{+}(x,x)=0$$

olur.

$$K^{\pm}(x,x)=\pm\frac{1-\alpha}{2}\int_{x}^{\pm\infty}q(t)dt=\pm\frac{1-\alpha}{2}\int_{x}^{a}q(t)dt\pm\frac{1-\alpha}{2}\int_{a}^{\pm\infty}q(t)dt$$

ve

$$K^{\pm}(x,2a-x\pm 0)-K^{\pm}(x,2a-x\mp 0)=\pm\frac{\alpha}{2}\int_{a}^{\pm\infty}q(t)dt\mp\frac{1-\alpha}{2}\int_{x}^{a}q(t)dt$$

alınırsa,

$$(1-\alpha)\left[F^{\pm}(2a\pm 0)-F^{\pm}(2a\mp 0)\right]\pm\alpha\int_{a}^{\pm\infty}q(t)dt\pm\frac{\alpha}{2}\int_{x}^{a}q(t)dt\mp\frac{\alpha}{2}\int_{x}^{a}q(t)dt=0$$

$$F^{\pm}(2a\pm 0)-F^{\pm}(2a\mp 0)=\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_{a}^{\pm\infty}q(t)dt$$

olur. Problemin saçılma verisi olan bu eşitlik aşağıdaki durumu sağlar:

Durum 1) yansıma katsayıları olan $r^{\pm}(\lambda),\ \lambda\neq 0$ için sürekli ve

$$\overline{r^{\pm}(\lambda)}=r^{\pm}(-\lambda),\ \left|r^{\pm}(\lambda)\right|<1 \text{ ve } r^{\pm}(\lambda)=r_{0}^{\pm}(\lambda)+O(\frac{1}{\lambda}),\ (\lambda\to\pm\infty)$$

Bunların Fourier dönüşümleri olan,

$$R^{\pm}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[r^{\pm}(\lambda)-r_0^{\pm}(\lambda)\right]e^{\pm i\lambda x}d\lambda$$

eşitliği reel ve 2a noktasını içermeyen aralıkta süreklidir. Ayrıca x=2a noktasında $R^{\pm}(2a+0)$ ve $R^{\pm}(2a-0)$ sınırlı limitlere sahiptir. Bu yüzden $R^{\pm}(x)$ fonksiyonu $L_2(-\infty,+\infty)$ uzayındadır ve herhangi $x'>0$ için,

$$\int_{x'}^{+\infty}\left|R^{\pm}(\pm x)\right|dx<\infty,\quad \int_{x'}^{+\infty}(1+|x|)\left|R^{\pm'}(\pm x)\right|dx<\infty$$

olur.

Teorem 8.1. *Durum 1)* sağlandığında, (7.4) denklemi; $\pm x>\mp\infty$ için,

$$K^{+}(x,\cdot)\in L_1(x,\infty)\text{ ve }K^{-}(x,\cdot)\in L_1(-\infty,x)$$

olmak üzere bir tek çözüme sahiptir.

İspat: (7.4) ün pozitif oluşumu için ispatlansın, Benzer ispat (7.4) ün negatif oluşumu için de yapılabilir,
$x>-\infty$ için,

$$(M_x^{+}f)(y)=\begin{cases} f(y), & x>a \\ f(y)-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}f(2a-y), & x<a\end{cases}$$

operatörünün $L_1(x,+\infty)$ (ayrıca $L_2(x,+\infty)$) uzayında tersi vardır. Bu yüzden (7.5) denklemi,

$$K^{+}(x,y)+(M_x^{+})^{-1}F^{+}(x,y)+(M_x^{+})^{-1}F^{+}K^{+}(x,\cdot)(y)=0,\ x<y$$

olur. Başka bir ifadeyle, $(M_x^{+})^{-1}F^{+}$ kompakt operatöre *([14] de lemma 3.3.1)* dönüşür. Teoremi kanıtlamak için,

$$f(y)=\frac{\alpha}{1-\alpha}f_y(2a-y)+\int_x^{+\infty}f_x(t)F^+(t+y)dt=0,\quad x<y \tag{8.6}$$

homojen denkleminin, $f_x(y)\in L_1(x,+\infty)$ da açık çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir. $f^+(y)$ fonksiyonu ve ilgili çözümü olan fonksiyon, $x\le y<+\infty$ yarı düzleminde sınırlıdır. Bu yüzden $f(x,\cdot)\in L_2(x,+\infty)$ [14] olur.

(8.6) denklemi $\overline{f_x(y)}$ ile çarpılıp, $(x,+\infty)$ aralığında y' ye göre integrallensin. (7.3) (7.5), (7.6) ve Parseval' in tanımından,

$$\int_x^{+\infty}|f_x(y)|^2dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\lambda)\right|^2d\lambda,$$

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_x^{+\infty}f_x(2a-y)\overline{f_x(y)}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}r_0^+(\lambda)\overline{f(\lambda)}f(-\lambda)d\lambda$$

olur. Burada,

$$f_x(\lambda)=\int_x^{+\infty}f_x(t)e^{-i\lambda t}dt$$

dır. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f_x(\lambda)\right|^2d\lambda+\sum_{k=1}^{n}(m_k^+)^2\left|f(-i\chi_k)\right|^2+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}r^+(\lambda)\overline{f(\lambda)}f(-\lambda)d\lambda=0$$

olur. $\left|r^+(\lambda)\right|=\left|r^+(-\lambda)\right|$ için,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\lambda)\right|^2\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|r^+(\lambda)\right|\left|\overline{f(-\lambda)}\right|f(\lambda)d\lambda\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|r^+(\lambda)\right|\frac{\left|f(-\lambda)\right|^2+\left|f(\lambda)\right|^2}{2}d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|r^+(\lambda)\right|\left|f(\lambda)\right|^2d\lambda$$

ve ya,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\left|r^+(\lambda)\right|\right)\left|f(\lambda)\right|^2d\lambda\le0$$

olur. Buradan, bütün $\lambda \neq 0$ için, $1-\left|r^{+}(\lambda)\right|>0$ için $f(\lambda) \equiv 0$ dır. Böylece (7.4) denkleminin tek çözümü olduğu söylenebilir. Teorem kanıtlanmıştır.

Sonuç: (4.1)-(4.2) problemleriyle bağlantılı olan (4.3) durumu, sağ(sol) saçılma verileriyle tek şekilde tanımlanmıştır. Yani (4.3) ifadesinde tanımlı olan q(x) ve $q(x)$ ile ilişkili (4.1)-(4.2) problemlerinin sağ(sol) saçılma verileri denk ise bütün eksenlerde $q(x)=q(x)$ olur.

9. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde elde edilen verilerden yola çıkılarak tez konusu denklemin ters saçılma problemi incelenecektir.

Şimdiki teoremde (4.3)’ e bağlı ters saçılma probleminin çözümü ispatlanacaktır.

Teorem 9.1. $\{r^+(\lambda), i\chi_k, m_k^+\}$, (4.2.3) deki q(x) değerine sahip (4.1) ve (4.2) problemlerinin sağ saçılma verileri olsun. Aşağıdaki durumlar sağlanır.

1) reel $\lambda \neq 0$ için $r^+(\lambda)$ fonksiyonu süreklidir.

$\overline{r^+(\lambda)} = r^+(-\lambda)$, $r^+(\lambda) = r_0^+(\lambda) + O(\frac{1}{\lambda}),\ (\lambda \to \pm\pm\infty)$ olup burada,

$r_0^+(\lambda) = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} e^{-2i\lambda a}$ ve C>0 için $1 - \left|r^+(\lambda)\right| = C\dfrac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$

2) za(z) fonksiyonu,

$$za(z) = (1-\alpha)e^{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left[1-\left|r^+(\lambda)\right|^2(1-\alpha)^2\right]}{\lambda-2}d\lambda}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-i\chi_k}{z+i\chi_k}$$

için kapalı yarı düzlemde süreklidir ve $\lim\limits_{\lambda\to a}\lambda a(\lambda)(r^+(\lambda)+1) = 0$ dır.

3) $R^+(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[r^+(\lambda) - r_0^+(\lambda)\right]e^{+i\lambda x}d\lambda$ ve

$$R^-(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a(-\lambda)}{a(\lambda)}\overline{r^+(\lambda)} - \frac{\alpha}{1-\alpha}e^{2i\lambda a}\right]e^{-i\lambda x}d\lambda$$

fonksiyonları 2a noktasını içermeyen herhangi bir aralıkta süreklidir.

$R^{\pm}(2a+0)$ ve $R^{\pm}(2a-0)$ sonlu limitlere sahiptir, $R^{\pm'}(x)$ türevleri, tüm $\alpha' > -\infty,\ \beta' < +\infty$ için,

$$\int_{\alpha'}^{+\infty}(1+|x|)\left|R^{+'}(x)\right|dx < \infty,\quad \int_{-\infty}^{\beta'}(1+|x|)\left|R^{-'}(x)\right|dx < \infty$$

eşitsizliklerini sağlar.

4) (7.4) denklemlerindeki $K^{\pm}(x,t)$ 'nin çözümleri,

$$K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\mp 0} = \frac{1}{1-\alpha} K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\pm 0}$$

eşitliğini sağlar.

İspat: Gerekliliğinin ispatı yukarıda verildi. Şimdi yeterliliğin ispatı yapılsın. Önceden verilen kümeyi temel alarak ve (6.8) ile (6.9) kullanılarak, $\left\{r^{-}(\lambda), i\chi_k, m_k^{-}\right\}$ kümesi oluşturulsun. Bu kümelerin sırasıyla (4.3) ü sağlayan reel q(x) içeren (4.1) ve (4.2) denklemlerinin sağ ve sol saçılma verileri olduğu gösterilsin,

1) teorem 8.1.'in şartlarından, saçılma verileri tarafından yeniden oluşturulan (4.4) denklemlerinin, teorem 8.1. e göre, $K^{\pm}(x,y)$ çözümlerine sahip olduğunu görülür. Bu çözümler,

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a+0)-(1-\alpha)F^{\pm}(2a-0)+K^{\pm}(x,2a-x+0)-$$
$$-K^{\pm}(x,2a-x+0)+\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{\pm}(x,x)=0, \quad \pm x<\pm a \tag{9.1}$$

eşitliğini sağlar. (6.4) denkleminin genişletilmiş hali şu şekildedir:

$$F^{\pm}(x+y)+K^{\pm}(x+y)\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{+}(t+y)dt=0, \quad \pm x>\pm a, \ \pm y>\pm x \tag{9.2}$$

$$(1-\alpha)F^{\pm}(x+y)+\alpha F^{\pm}(2a-x+y)+K^{\pm}(x,y)\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{+}(t+y)dt=0,$$
$$\pm x<\pm a, \ \pm y>\pm(2a-x) \tag{9.3}$$

$$(1-\alpha)F^{\pm}(x+y)+\alpha F^{\pm}(2a-x+y)+K^{\pm}(x,y)\pm\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{\pm}(x,2a-y)$$
$$\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{+}(t+y)dt=0, \quad \pm x<\pm a, \ \pm x<\pm y<\pm(2a-x) \tag{9.4}$$

(9.3) de, $y=2a-x\pm 0$ ve $(9.4)_{\pm}$ de, $y=2a-x\mp 0$ alınırsa,

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a\pm 0)+\alpha F^{\pm}(4a-2x\pm 0)+K^{\pm}(x,2a-x\pm 0)$$
$$\pm\int_{x}^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t)F^{+}(t+2a-x\pm 0)dt=0,\quad \pm x<\pm a \tag{9.5}$$

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a\mp 0)+\alpha F^{\pm}(4a-2x\mp 0)+K^{\pm}(x,2a-x\mp 0)$$
$$\pm\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{\pm}(x,a\pm 0)\pm\int_{x}^{\pm\infty} K^{\pm}(x,t)F^{+}(t+2a-x\mp 0)dt=0,\quad \pm x<\pm a \tag{9.6}$$

(8.5) den (8.6) çıkarılır ise,

$$(1-\alpha)\left[F^{\pm}(2a\pm 0)-F^{\pm}(2a\mp 0)\right]+K^{\pm}(x,2a-x\pm 0)-K^{\pm}(x,2a-x\mp 0)$$
$$\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{\pm}(x,x\pm 0)=0,\quad \pm x<\pm a$$

olur.

2) (5.6) formüllerindeki $K^{\pm}(x,t)$ lere dayalı olarak oluşturulmuş olan $e^{+}(x,t)$ ve $e^{-}(x,t)$ fonksiyonlarının,

$$-e^{\pm''}(x,x)+q^{\pm}(x)e^{\pm}(x,x)=\lambda^2 e^{\pm}(x,x) \tag{9.7}$$

ve

$$e^{\pm}(a-0,\lambda)=e^{\pm}(a+0,\lambda)$$
$$e^{\pm'}(a+0,\lambda)-e^{\pm'}(a-0,\lambda)=2i\alpha\lambda e^{\pm}(a,\lambda) \tag{9.8}$$

süreksizlik durumlarını sağladığı, aynı zamanda,

$$\int_{x'}^{+\infty}(1+|x|)\left|q^{+}(x)\right|dx<\infty,\quad \int_{-\infty}^{x''}(1+|x|)\left|q^{-}(x)\right|dx<\infty \tag{9.9}$$

olduğu gösterilsin, Öncelikle $R^{\pm}(x)$ fonksiyonunun ikinci dereceden sürekli diferansiyellenebilir olduğu kabul edilsin ve tüm $\alpha'>-\infty,\ \beta'<+\infty$ için,

$$\int_{\alpha'}^{+\infty}(1+|x|)\left|R^{+''}(x)\right|dx<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\beta'}(1+|x|)\left|R^{-''}(x)\right|dx<\infty \tag{9.10}$$

olsun. (6.4) denkleminin çözümleri olan $K^{\pm}(x,t)$ ler, $t \neq 2a-x$ ve $x \neq a$ için ikinci dereceden sürekli diferansiyellenebilirdir, Bununla birlikte, her x için y ye göre birinci ve ikinci dereceden parçalı türevleri toplanabilirdir.
$\pm x < \pm a$, $\pm x < \pm y < \pm(2a-x)$ için (7.4) denklemi (7.2) gibi olur. Bu denklemler y' ye göre iki kez diferansiyellenir ve parçalı integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)F^{\pm''}(x+y)+\alpha F^{\pm''}(2a-x+y)+K_{yy}^{\pm''}(x,y)\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K_{yy}^{\pm''}(x,2a-y)\\&\mp K^{\pm''}(x,y)F^{\pm'}(x+y)-K^{\pm}(x,t)\Big|_{t=2a-x-0}^{2a-x+0}F^{\pm'}(2a-x+y)\pm K_t^{+'}(x,t)\Big|_{t=x}F^{+}(x+y)\\&+K_t^{\pm'}(x,t)\Big|_{t=2a-x-0}^{2a-x+0}F^{\pm}(2a-x+y)\pm\int_x^{\pm\infty}K_{tt}^{\pm''}(x,t)F^{+}(t+y)dt=0\end{aligned}$$

olur. Şimdi (8.2) denklemleri x e göre iki kez diferansiyellenirse,

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)F^{\pm''}(x+y)+\alpha F^{\pm''}(2a-x+y)+K_{xx}^{\pm''}(x,y)\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K_{xx}^{\pm''}(x,2a-y)\\&\mp K^{\pm''}(x,x)F^{\pm}(x+y)\mp K^{\pm}(x,x)F^{\pm'}(x+y)+K^{\pm'}(x,t)\Big|_{t=2a-x-0}^{2a-x+0}F^{\pm}(2a-x+y)\\&\pm K^{+}(x,t)\Big|_{2a-x-0}^{2a-x+0}F^{\pm'}(2a-x+y)\mp K_x^{+'}(x,y)\Big|_{y=x}F^{\pm}(x+y)\\&\mp K_x^{\pm'}(x,t)\Big|_{t=2a-x-0}^{2a-x+0}F^{\pm}(2a-x+y)\pm\int_x^{\pm\infty}K_{xx}^{\pm''}(x,t)F^{\pm}(t+y)dt=0\end{aligned}$$

olur. İkinci denklemden birinci denklem çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}&K_{xx}^{\pm''}(x,y)\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K_{xx}^{\pm''}(x,2a-y)-K_{yy}^{\pm''}(x,y)\pm\frac{\alpha}{1-\alpha}K_{yy}^{\pm''}(x,2a-y)\\&\mp 2K^{\pm'}(x,x)F^{\pm}(x+y)+2K^{\pm}(x,t)\Big|_{2a-x-0}^{2a-x+0}F^{\pm}(2a-x+y)\\&\pm\int_x^{\pm\infty}\left(K_{xx}^{\pm''}(x,t)-K_{tt}^{\pm''}(x,t)\right)F^{\pm}(t+y)dt=0\end{aligned}\tag{9.11}$$

olur. (6.1) ve (5.2) den,

$$\begin{aligned}&\pm 2K^{\pm'}(x,x)F^{\pm}(x+y)+2K^{\pm}(x,y)\Big|_{y=2a-x-0}^{2a-x+0}F^{\pm}(2a-x+y)\\&=-q^{\pm}(x)\left[(1-\alpha)F^{\pm}(x+y)+\alpha F^{\pm}(2a-x+y)\right]\\&=q^{\pm}(x)\left[K^{\pm}(x,y)\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{\pm}(x,2a-y)\right]\pm\int_x^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(t+y)dt\end{aligned}\tag{9.12}$$

elde edilir. (9.11) ve (9.12) den,

$$
\begin{aligned}
&K_{xx}^{\pm''}(x,y)-K_{yy}^{\pm''}(x,y)-q^{\pm}(x)K^{\pm}(x,y)\\
&\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[K_{xx}^{\pm''}(x,2a-y)-K_{yy}^{\pm''}(x,2a-y)-q^{\pm}(x)K^{\pm}(x,2a-y)\right]\\
&\pm\int_{x}^{\pm\infty}\left(K_{xx}^{\pm''}(x,t)-q^{\pm}(x)K^{\pm''}(x,t)-K_{tt}^{\pm''}(x,t)\right)F^{\pm}(t+y)dt=0
\end{aligned}
$$

olur. Başka bir gösterimle fonksiyon,

$$h^{\pm}(y)=K_{xx}^{\pm''}(x,y)-q^{\pm}(x)K^{\pm}(x,y)-K_{yy}^{\pm''}(x,y)$$

olur. Bu fonksiyon,

$$h_x^{\pm}(y)\pm\frac{\alpha}{1-\alpha}h_x^{\pm}(2a-y)\pm\int_{x}^{\pm\infty}h_x^{\pm}(t)F^{\pm}(y+t)dt=0$$

denklemini sağlar. Yani başka bir deyiş ile $h_x^{\pm}(y)$ ler (8.2) ye uyan homojen denklemlerin toplam çözümleridir. (8.1) ve (8.3) de aynı şekilde çözülebilir. Böylece (7.4) denkleminin $K^{\pm}(x,y)$ çözümlerinin,

$$K_{xx}^{\pm''}-q^{\pm}(x)K^{\pm}-K_{yy}^{\pm''}=0 \tag{9.13}$$

denklemini sağladığı görülür.

Teorem 8.1. e göre, koşul 4 nedeniyle, (9.1) denklemi, $K^{\pm}(x,y)$ fonksiyonlarının, (5.8) durumlarını sağladığını gösterir. (9.10) daki varsayımlardan,

$$\lim_{x+y\to\pm\infty}K_x^{\pm'}(x,y)=\lim_{x+y\to\pm\infty}K_y^{\pm'}(x,y)=0 \tag{9.14}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi $K^{\pm}(x,y)$ fonksiyonlarının,

$$K^{\pm}(a-0,y)=K^{\pm}(a+0,y) \tag{9.15}$$

$$K_x^{\pm'}(a+0,y)-K_x^{\pm''}(a-0,y)=2\alpha i\lambda K_x^{\pm}(a,y) \tag{9.16}$$

koşullarını sağladığı gösterilsin. (8.1) denklemlerinde $x=a\pm 0$ ve (8.3) denklemlerinde $x=a\mp 0$ alınsın. Sonra ilk denklemden ikinci çıkarılsın. Böylece,

$$K^{\pm}(a-0,y)=K^{\pm}(a+0,y)$$

olur. Bu eşitlik (8.1) denklemlerine x=a için karşılık gelen homojen denklem çözümleridir. Böylece teorem 8.1 e göre (9.15) elde edilmiş oldu.

Şimdi (9.16) gösterilsin. Öncelikle temel denklemlerin çözümü için aşağıdaki eşitlikler doğrudur,

$$K^{\pm}(x,2a-x\pm 0)\Big|_{0\mp 0}=K^{\pm}(x,x)\Big|_{0\pm 0}$$

$$K^{\pm}(x,2a-x\mp 0)\Big|_{0\mp 0}=K^{\pm}(x,x)\Big|_{0\mp 0} \tag{9.17}$$

(8.1) denklemlerinde önce $y=x$ sonra $x=a\pm 0$ alınsın,

$$F^{\pm}(2a\pm 0)+K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\pm 0}\pm\int_a^{\pm\infty}K^{\pm}(a\pm 0,t)F^{\pm}(t+a\pm 0)dt=0$$

(8.3) için önce $y=2a-x\pm 0$, sonra $x=a\mp 0$ alınsın,

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a\pm 0)+\alpha F^{\pm}(2a\pm 0)+K^{\pm}(x,2a-x\pm 0)\Big|_{a\mp 0}$$
$$\pm\int_a^{\pm\infty}K^{\pm}(a\pm 0,t)F^{\pm}(t+a\pm 0)dt=0$$

İlk eşitlikten ikinci eşitlik çıkarılırsa (9.17) nin ilk eşitliği bulunur. Şimdi de (8.2) denklemlerinde önce $y=2a-x-0$ ve $x=a-0$, sonra $y=x$ ve $x=a-0$ alınsın,

$$(1-\alpha)F^{\pm}(2a-0)+\alpha F^{\pm}(2a+0)+K^{\pm}(x,x)\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{\pm}(x,a-0)$$
$$\pm\int_x^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(t+a-0)dt=0$$

olur. Eşitlikler taraf tarafa çıkarılır ise (9.17) nin ikinci eşitliği elde edilir. Şimdi (8.1) ve (8.3) denklemleri sırasıyla $x=a\pm 0$ ve $x=a\mp 0$ için x' e göre diferansiyellensin,

$$F^{\pm'}(a+y)+K_x^{\pm'}(a\pm 0,y)\mp K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\pm 0}F^{\pm}(a+y)\pm\int_a^{\pm\infty}K_x^{\pm'}(a\pm 0,t)F^{\pm}(t+y)dt=0 \tag{9.18}$$

$$(1-\alpha)F^{+'}(a+y)-\alpha F^{+'}(a+y)+K_x^{+'}(a\mp 0,y)\mp K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\mp 0}F^{\pm}(a\mp y)$$
$$\pm\Big[K^{\pm}(x,2a-x+0)-K^{\pm}(x,2a-x-0)\Big]\Big|_{x=a\mp 0}F^{\pm}(a+y)$$
$$\pm\int_a^{\pm\infty}K_x^{\pm'}(a\mp 0,t)F^{\pm}(t+y)dt=0 \qquad (9.19)$$

olur. (9.18) den (9.19) çıkarılır ve (9.17) uygulanırsa,

$$2\alpha F^{+'}(a+y)+K_x^{\pm'}(a\pm 0,y)-K_x^{\pm'}(a\mp 0,y)+\Big[2K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\mp 0}-2K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\pm 0}\Big]F^{\pm}(a\mp y)$$
$$+\int_a^{\pm\infty}\Big[K_x^{\pm'}(a\pm 0,t)-K_x^{\pm'}(a\mp 0,t)\Big]F^{\pm}(t+y)dt=0 \qquad (9.20)$$

olur. Şimdi (8.1) de $x=a$ alınıp y' ye göre diferansiyellensin. Sonra da parçalı integral alındığında,

$$F^{+'}(a+y)+K_y^{\pm'}(a,y)-K^{\pm}(x,x)\Big|_{a+0}F^{\pm}(a+y)+\int_a^{\pm\infty}K_t^{\pm'}(a,t)F^{\pm}(t+y)dt=0 \qquad (9.21)$$

elde edilir. Bu eşitlik 2α ile çarpıp (9.20) den çıkarılırsa,

$$K_x^{\pm'}(a\pm 0,y)-K_x^{\pm'}(a\mp 0,y)+2\alpha K_y^{\pm'}(a,y)+\int_a^{\pm\infty}\Big[K_x^{\pm'}(a\pm 0,t)-K_x^{\pm'}(a\mp 0,t)+2\alpha K'_t(a,y)\Big]F^{\pm}(t+y)dt=0$$

olur. Teorem 8.1' e göre,

$$K_x^{\pm'}(a\pm 0,y)-K_x^{\pm'}(a\mp 0,y)+2\alpha K_y^{\pm'}(a,y)=0$$
$$K_x^{\pm'}(a\pm 0,y)-K_x^{\pm'}(a\mp 0,y)=-2\alpha K_y^{\pm'}(a,y)$$

olur. (9.16) ispat edilmiş oldu. Böylece (9.9) sağlandığında (7.4) denkleminin $K^{\pm}(x,y)$ çözümleri (9.13) denklemini, (5.8), (9.15), (9.16) ilişkileri ve sonsuzda (9.14) durumunu sağlar. Bölüm 5 deki "NOT" a göre $e^{\pm}(x,x)$ fonksiyonları (9.7) denklemini ve (9.8) durumunu sağlar. Şimdi (9.9) gösterilsin,

$\pm x>\pm a$ iken (8.4) denklemi (8.1) gibi olur. Yani $\alpha=1$ formuna benzer. Ayrıca teorem 9.1 in 3' üncü durumu da $a=1$ için aynı olur. Böylece $x'\geq a$ ve $x''\leq a$ için (9.9) un doğruluğu gösterilebilir [14].

Şimdi, $q^{+}(x)$ $(q^{-}(x))$ in (x',a) $((x'',a))$ aralığında her $x' > -\infty$ $(x'' < +\infty)$ için toplanabilir olduğu gösterilsin.

Teorem 9.1 in 3'üncü durumu ve $K_x^{\pm'}, K_t^{\pm'}$ kısmi türevlerin integrali kullanılırsa, bu durumlar (8.2) denklemiyle eş olan şu formül ile gösterilebilir,

$$K^{\pm}(x,y) = (1-\alpha^2)\left[\varphi^{\pm}(x,y) \mp \frac{\alpha}{1-\alpha}\varphi^{\pm}(x,2a-y)\right]$$

Burada,

$$\varphi^{\pm}(x,y) = (1-\alpha)F^{\pm}(x,y) \mp \alpha F^{\pm}(2a-x+y) \mp \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x,y)F^{\pm}(t+y)dt$$

dir.

3) Teoremi ispatlamak için, $\lambda \neq 0$ için $e^{+}(x,\lambda)$ ve $e^{-}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının,

$$r^{\pm}(x)e^{\pm}(x,\lambda) + \overline{e^{\pm}(x,\lambda)} = \frac{1}{a(\lambda)}e^{\mp}(x,\lambda) \qquad (9.22)$$

denklemiyle birbirine bağlı olduklarını göstermek yeterlidir. (9.7) yi kullanarak (9.22),

$$q^{+}(x) = q^{-}(x) \overset{def}{=} q(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

şeklide yazılabilir. Ayrıca (9.9) a göre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)|q(x)|\,dx < +\infty$$

dur. Şimdi $\{r^{+}(\lambda), i\chi_k, m_k^{+}\}$ ve $\{r^{-}(\lambda), i\chi_k, m_k^{-}\}$ nin, (4.1), (4.2) problemlerinin sağ ve sol saçılma verileri olduğu gösterilsin.

$\left\{\tilde{r}^{+}(\lambda), i\chi_k, m_k^{+}\right\}$ ve $\left\{\tilde{r}^{-}(\lambda), i\chi_k, m_k^{-}\right\}$, (4.1), (4.2) problemlerinin sağ ve sol saçılma verileri olarak ifade edilsin. $e^{+}(x,\lambda)$ ve $e^{-}(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.1) ve (4.2) problemlerinin jost tipinde çözümleri olacaktır. Daha önce değinilen direkt saçılma verilerinin sonuçlarına göre bu ilişki,

$$\tilde{r}^{\pm}(\lambda)e^{\pm}(x,\lambda)+\overline{e^{\pm}(x,\lambda)}=\frac{1}{a(\lambda)}e^{\mp}(x,\lambda) \tag{9.23}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi (9.22) ve (9.23) den,

$$a(\lambda)r^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda)+a(\lambda)\overline{e^{+}(x,\lambda)}=e^{-}(x,\lambda)$$
$$a(\lambda)\tilde{r}^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda)+a(\lambda)\overline{e^{+}(x,\lambda)}=e^{-}(x,\lambda)$$

olur. Böylece son eşitlikten,

$$a(\lambda)r^{+}(\lambda)-a(\lambda)\tilde{r}^{+}(\lambda)=0,\quad a(\lambda)=a(\lambda)$$

olur. Başka bir deyişle,

$$r^{+}(\lambda)=\tilde{r}^{+}(\lambda),\quad a(\lambda)=a(\lambda)$$

olur. Benzer şekilde (9.22) ve (9.23) den,

$$r^{-}(\lambda)=\tilde{r}^{-}(\lambda)$$

bulunabilir. Sonuç olarak $a(\lambda)$ ve $a(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları, $i\chi_k=i\chi_k$ olur. Buradan,

$$(m_k^{\pm})^{-2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{\pm}(x,i\chi_k)\right|^{2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{\pm}(x,i\chi_k)\right|^{2}dx=(m_k^{\pm})^{-2}$$

olur. Bu yüzden, $\left\{\tilde{r}^{+}(\lambda),i\chi_k,m_k^{+}\right\}$ ve $\left\{\tilde{r}^{-}(\lambda),i\chi_k,m_k^{-}\right\}$ değerleri (4.1), (4.2) problemlerinin sağ ve sol saçılma verileridir.

4) Şimdi (9.22) ispatlansın:

$$\phi^{\pm}(x,y)=R_1^{\pm}(x,y)\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)R^{\pm}(t+y)dt$$

olsun. Burada,

$$R_1^{\pm}(x,y)\begin{cases}R^{\pm}(x+y), & \pm x>\pm a\\ (1-\alpha)R^{\pm}(x+y)+\alpha R^{\pm}(2a-x+y), & \pm x<\pm a\end{cases}$$

dır. $R^{\pm}(y)\in L_2(-\infty,+\infty)$ iken, $\phi^{\pm}(x,y)\in L_2(-\infty,+\infty)$ olacak şekilde her sabit x için,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\phi^{\pm}(x,y)e^{\mp i\lambda y}dy=\left[r^{\pm}(\lambda)-r_0^{\pm}(\lambda)\right]\left[e_0^{\pm}(x,\lambda)\pm\int_x^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)e^{\pm i\lambda y}dt\right]$$
$$=\left[r^{\pm}(\lambda)-r_0^{\pm}(\lambda)\right]e^{\pm}(x,\lambda) \tag{9.24}$$

olur. Diğer taraftan, (7.4) denkleminin sonuçlarından,

$$\phi^{\pm}(x,y)=-K^{\pm}(x,y)\mp\frac{\alpha}{1-\alpha}K^{\pm}(x,2a-y)-\sum_{k=1}^{n}(m_k^{\pm})^2e^{\pm}(x,i\chi_k),\ \pm y>\pm x$$

olur. Buradan,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\phi^{\pm}(x,y)e^{\mp i\lambda y}dy=\lim_{N\to\infty}\left\{\pm\int_{\mp N}^{x}\phi^{\pm}(x,y)e^{\mp i\lambda y}dy\right\}\mp\int_x^{\pm\infty}K^{\pm}(x,y)e^{\mp i\lambda y}dy$$
$$-\sum_{k=1}^{n}(m_k^{\pm})^2e^{\pm}(x,i\chi_k)\frac{e^{\mp(\chi_k+i\lambda)x}}{\chi_k+i\lambda}=\lim_{N\to\infty}\left\{\pm\int_{\mp N}^{x}\phi^{\pm}(x,y)e^{\mp i\lambda y}dy\right\}$$
$$+e_0^{\pm}(x,-\lambda)-e^{\pm}(x,-\lambda)-r_0^{\pm}(\lambda)\left[-e_0^{\pm}(x,-\lambda)-e^{\pm}(x,-\lambda)\right]$$
$$-\sum_{k=1}^{n}(m_k^{\pm})^2e^{\pm}(x,i\chi_k)\frac{e^{\mp(\chi_k+i\lambda)x}}{\chi_k+i\lambda} \tag{9.25}$$

olur. şimdi (9.24), (9.25) ve

$$r_0^{\pm}(\lambda)e_0^{\pm}(x,\lambda)+e_0^{\pm}(x,-\lambda)=\frac{1}{1-\alpha}e_0^{\mp}(x,\lambda)$$

formülü kullanılırsa,

$$r^{\pm}(\lambda)e^{\pm}(x,\lambda)+e^{\pm}(x,-\lambda)=\frac{1}{a(\lambda)}h^{\mp}(x,\lambda) \tag{9.26}$$

elde edilir. Burada,

$$h^{\pm}(x,\lambda)=a(\lambda)\left\{\frac{1}{1-\alpha}e_0^{\pm}(x,\lambda)+\lim_{N\to\infty}\left\{\pm\int_{\mp N}^{x}\phi^{\mp}(x,y)e^{\pm i\lambda y}dy\right\}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n}(m_k^{\pm})^2e^{\mp}(x,i\chi_k)\frac{e^{\pm(\chi_k+i\lambda)x}}{\chi_k+i\lambda}\right\} \tag{9.27}$$

olur. Şimdi, $h^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm}(x,\lambda)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $h^{\pm}(x,\lambda)$ için (9.26) ve (9.27) ifadelerinden yararlanılır ve teoremin 2' inci şartı kullanılırsa, bu eşitliğin ispatı $\alpha=0$ durumundaki ispat ile aynıdır [14]. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 9.1 in 4'üncü durumu gereklilikti̇r.

$r^{+}(\lambda)=\dfrac{2\alpha-\dfrac{\beta}{i\lambda}}{2-2\alpha+\dfrac{\beta}{i\lambda}}e^{-2i\lambda a}$ fonksiyonu $\alpha\beta<0$ için teoremin 4'üncü durumu dışındaki diğer durumlarını sağlar ve (4.1)-(4.2) problem durumlarının sağ yansıma katsayıları değildir. Bu durumda (7.4) ana denkleminin,

$$K^{\pm}(x,t)=\begin{cases}0, & \pm a<\pm x<\pm t,\ \text{ v }\ \pm x<\pm a,\ \pm t>\pm(2a-x)\\ \dfrac{\beta}{2}, & \pm x<\pm a,\ \pm x<\pm t<\pm(2a-x)\end{cases}$$

çözümü vardır. Bu nedenle $q(x)=0$ için jost çözümler (4.1) eşitliğini sağlar, ancak (4.2) durumunu sağlamaz, Fakat $\beta=0$ alındığında 4'üncü durum sağlanır ve böylece ters problemin $r^{+}(\lambda)=r_0^{+}(\lambda)$ çözümü olur. Bu çözüm $q(x)=0$ için (4.1)-(4.2) problemlerinin sağ yansıma faktörleridir.

10. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında delta etkileşim noktalı bir Sturm-Liouville operatörü alınmış ve $a \in (-\infty, \infty)$ süreksiz noktası için bu denklemin jost çözümleri, düz ve ters saçılma problemleri incelemiş, bu noktanın denkleme nasıl etki ettiği gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların ilgili konuya bir katkı sağlaması, derinlik kazandırması amaçlanmış olup, bununla ilgili yapılacak başka çalışmalara yardımcı olacak niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] W.R. Wade, *An introduction to analysis*. New Jersey: Pearson, 2003.
[2] E.C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated With Second Order Differential Equations,* Oxford At The Clarendon Press. 1946.
[3] L.D. Faddeev, "On the Connection of the *S*-matrix and the Potential for the One- Dimensional Schrödinger Operator." *Doklady Akademii Nauk SSSR,* vol. 121, no. 1, pp. 63-66, 1958.
[4] L.D. Faddeev, "Properties of the *S*-matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equations." *Trudy Mat. Inst. Steklov,* vol. 73, pp. 314-336, 1964.
[5] E.I. Zubkova ve F.S. Rofe-Beketov, "Inverse Scattering Problem on the Axis for the Schrödinger Operator with Triangular 2 *x* 2 Matrix Potential. I. Main Theorem." *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry,* vol. 3, no. 1, pp. 47-60, 2007.
[6] I.M. Guseinov, "On the Continuity of the Coefficient of Rejection of the Schrödinger One-Dimensional Equation." *Dif. Uravn.* Vol. 21, no. 11, pp. 1993-1995, 1985.
[7] E.I. Zubkova ve F.S. Rofe-Beketov, "Inverse Scattering Problem on the Axis for the Schrödinger Operator with Triangular 2 *x* 2 Matrix Potential. II. Addition of the Discrete Spectrum." *J. Math. Phys. Anal. Geom.* vol. 3, no. 2, pp. 176-195. 2007.
[8] M. Jaulent ve C. Jean, "The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending an energy*." Mathical Physics.* Vol. 28, no. 3, pp. 177-220, 1972.
[9] V.A. Yurko, "Inverse Problems for Differential Equations with Singularities Lying Inside the Interval" *Journal of Inverse and Ill-posed Problems,* vol. 8, no. 1, pp. 89-103, 2000.
[10] V.A. Marchenko, "Some questions of the theory of differential operators of the second order," *Rokl AN USSR.* vol. 72, no. 3, pp. 457 – 480, 1950.
[11] G.D. Birkhoff, "On The Asymptotic Character of The Solution of The Certain Linear Differential Equations Containing Parameter," *Trans. Amer. Math. Soc.* vol.9, no. 2, pp. 219–231. 1908.
[12] J.D. Tamarkin, "Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansions of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions." *Math. Zeit.* vol. 27, no. 1, pp. 1 – 54, 1927.
[13] G. Borg, "Eine Umkehrung der Sturm-Liouville Eigenwertaufgabe," *Acta Mathematica,* vol. 78, pp. 1-96, 1946.
[14] V.A. Marchenko, *Sturm-Liouville operators and applications*. Boston: Birkhäuser Basel, 1-362, 1986.
[15] B.M. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville problems*. Utrecht: VNU Science Press, 121-152, 1987.
[16] M. Sezer, *Diferansiyel Denklemler-ll*. İzmir: Kanyılmaz Matbaacılık, 1995.
[17] A. Vretblad, *Fourier analysis and its applications.* New York: Springer-Verlag, 167-197, 2003.

[18] D.W. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*, New York: Cambridge University Press, 2008.
[19] X.F. Yang, “A new inverse nodal problem.” *Journey of Differantial Equations.* 169, No2, 633-653, 2001.
[20] M. Başarır, *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*. Sakarya: Sakarya Kitapevi, 2002.
[21] S. Yakubov, *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators,* Harlow: Longman Scientific & Technical, 1994.
[22] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Gazi Kitapevi, 2006.
[23] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications,* Newyork: John Wiley & Sons Inc, 480. 1978.
[24] Y.D. Chong, *MH2801: Complex Methods for the Sciences*. Nanyang: Technological University, 2016.
[25] C.D. Aliprantis ve O. Burkinshaw, *Positive Operators,* London: Academic press, 1985.
[26] B.M. Levitan ve I.S. Sargsyan, *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators.* American Mathematical Society, 1975.
[27] M.A. Naimark, *Linear differential operators,* New York: Frederick U. Publ. 1968.
[28] M. Çağlıyan, N. Çelik ve S. Doğan, *Adi Diferansiyel Denklemler.* Bursa: Dora Yayın, No:6, 2. Baskı, 2008.
[29] T. Başkan, *Kompleks fonksiyonlar teorisi*, Bursa: Balıkesir Üniversitesi, VIPAS N:4, 356s. 2000.
[30] Y. Aksoy, *İntegral Denklemler*. İstanbul: Yıldız Üniversitesi Yayınları, Cilt 1, Sayı: 166, 1983.
[31] M. Dzh. Manafov ve A. Kablan, “Inverse Scattering problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations with point δ-interaction and eigenparameter-dependent boundary condition.” *Electronic Journal of Differantial Equations*, vol. 2013, no.237, pp. 1-9, 2013.
[32] Kh. R. Mamedov, “On the inverse problem for Sturm-Liouville operator with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition.”*Journal of the Korean Mathematical Society,* vol 46, no 6, pp. 1243-1254, 2009.
[33] A.H. Jamshidipour ve H.M. Huseynov, “Scattering data of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in discontinuity condition,” *Trans. of NAS of Azerb*. vol. 31, no. 1, pp. 71-78, 2011.
[34] E.I. Zubkova ve F.S. Rofe-Beketov, “Necessary and Sufficient Conditions in Inverse Scattering Operator with Triangular 2 *x* 2 Matrix Potential.” *J. Math. Phys. Anal. Geom.* vol. *5*, No. 3, pp. 296-309, 2009.
[35] F.S. Rofe-Beketov ve E.I. Zubkova, “Inverse Scattering Problem on the Axis for the Triangular 2 *x* 2 Matrix Potential with a Virtual Level.” *Methods of Functional Analysis and Topology,* vol. 15, no. 4, pp. 301-321, 2009.
[36] D.G. Shepelsky, “The Inverse Problem of Reconstruction of the Medium's Conductivity in a Class of Discontinuous and Functions.” *Advances in Soviet Mathematics*, vol. 19, pp. 209-232, 1994.

[37] M. Kobayashi, “A Uniqueness Proof of Discontinuous Inverse Sturm-Liouville Problems with Symmetric Potentials.” *Inverse Problems*, vol. 5, no. 5, pp. 767-781, 1989.

[38] G. Frelling ve V. Yurko, “Inverse Spectral Problems for Singular Non-Self Adjoint Differential Operators with Discontinuities in an Interior Point.” *Inverse Problems*, vol. 18, pp. 757-773, 2002.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Mahmut Gazi ARIK
Doğum Yeri : ADIYAMAN
Doğum Tarihi : 20.02.1984
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : arikgazi@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Dokuz Eylül Üniversitesi	2007
Lise	Sayısal	Adıyaman Anadolu Öğretmen Lisesi	2002