T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

MUSTAFA YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

MUSTAFA YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Bu tez 17/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Danışman

Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Bilal Eftal ACET
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

Mustafa YILDIZ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Yıl : 2019, Sayfa sayısı: VII+61

Jüri : Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Dr. Öğr. Üyesi Bilal Eftal ACET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde biharmonik dönüşümler ve hemen hemen parakontakt metrik manifoldların ortaya çıkışı ve gelişimi ile ilgili bilgiler sunulmuştur. İkinci bölüm, diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde semi-Riemann manifoldlar, bazı özel operatörler, hemen hemen parakontakt metrik manifoldlar ve biharmonik altmanifoldlar tanıtılarak bazı temel özelliklerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak 3-boyutlu para-Sasakian manifoldlar üzerinde tanımlı bir spacelike veya timelike Legendre eğrisinin biharmonik olma şartları incelenmiştir. Daha sonra para-Sasakian manifoldların karakteristik vektör alanını sırasıyla teğet ve normal uzayında içeren nondejenere hiperyüzeylerinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır.

Beşinci bölüm ise sonuçlar ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Biharmonik eğriler; Biharmonik hiperyüzeyler; Hemen hemen parakontakt metrik manifoldlar; Para-Sasakian manifoldlar.

ABSTRACT

MSc Thesis

BIHARMONIC SUBMANIFOLDS OF PARA-SASAKIAN MANIFOLDS

Mustafa YILDIZ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Year : 2019 , Number of pages: VII+61

Jury : Assoc. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Assist. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET

This study, which is designed as a master thesis, consists of five chapters. The first chapter is the introduction part and this section presents information on the emergence and development of biharmonic maps and almost paracontact metric manifolds. The second section is devoted to some basic concepts for better understanding of the rest of the thesis.

In the third section we give semi-Riemannian manifolds, some special operators, almost paracontact metric manifolds and biharmonic submanifolds.

The fourth chapter is the orginal part of this thesis. Firstly, we investigate biharmonicity conditions for a spacelike or timelike Legendre curve on a 3-dimensional para-Sasakian manifold. Then we obtain necessary and sufficient conditions for a hypersurface of para-Sasakian manifolds admitting the characteristic vector field in the tangent and the normal bundle respectively to be biharmonic.

The fifth section is divided into results and recommendations.

Key Words: Biharmonic curves; Biharmonic hypersurfaces; Almost paracontact metric manifolds; Para-Sasakian manifolds.

BEYAN

“Para-Sasakian Manifoldların Biharmonik Altmanifoldları” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mustafa YILDIZ

TEŞEKKÜR

Lisans ve lisansüstü öğrenimim süresince tecrübesi ve birikimi ile yolumu aydınlatan Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Manaf Manaflı' ya; zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanlarını ayıran Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Uçkun'a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Bilal Eftal Acet'e ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İnan'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez konumu belirleyerek beni bu konuda çalışmaya teşvik eden, bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, sabır ve ilgisini hiçbir zaman eksik etmeyen ve bu çalışmanın ortaya çıkmasında çok büyük emeği olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Selcen Yüksel Perktaş'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Öğrenim hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli anneme, babama ve sevgili eşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

τ_2	: Bitensiyon alanı
$\int_D$	: D kompakt bölgesi üzerinde integral işlemi
d	: Diferansiyel operatörü
φ	: Diferensiyellenebilir dönüşüm
div	: Divergens operatörü
f'	: f fonksiyonun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonun ikinci mertebeden türevi
$grad$	: Gradiyent operatörü
B	: İkinci temel form
i	: İzometrik immersiyon
ξ	: Karakteristik vektör alanı
Δ	: Laplasyan operatörü
∇	: Lineer konneksiyon
M	: Manifold
g	: Metrik tensör
$\Gamma(T^*M)$	: *M* nin kotanjant demetinin diferensiyellenebilir kesitlerinin vektör Uzayı
T_pM	: *M* nin p noktasındaki tanjant uzayı
T_p^*M	: *M* nin p noktasındaki kotanjant uzayı
$\Gamma(TM)$	: *M* nin tanjant demetinin diferensiyellenebilir kesitlerinin vektör uzayı
$C^\infty(M)$	: *M* üzerinde diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
I	: Reel sayılar kümesinde bir aralık
S	: Ricci eğriliği
Q	: Ricci operatörü
R	: Riemann eğrilik tensör alanı
r	: Skaler eğrilik

A	: Şekil operatörü
τ	: Tensiyon alanı
ϕ	: (1,1)- tensör alanı
η	: 1-form

1. GİRİŞ

Biharmonik fonksiyonlar teorisi, matematik ve fiziğin farklı alanlarında çalışılan kapsamlı bir konudur. Biharmonik fonksiyonlar, ilk kez 1862 de Maxwell ve Airy tarafından fizikteki elastikiyet (elasticity) teorisinin bir matematiksel modelini tanımlamak amacıyla çalışılmaya başlandı. Çok harmonik (Poly-harmonic) fonksiyonlar teorisi ise daha sonraları E. Almansi, T. Levi-Civita ve M. Nicolescu tarafından geliştirildi. Son yıllarda R. Caddeo, L. Vanhecke, [1, 2] ve daha pek çok araştırmacı [3] Riemann manifoldları üzerindeki biharmonik fonksiyonları inceleyerek konuyu diferensiyel geometri alanında geliştirildi ve tartışmaya açtı.

Temel olarak iki farklı araştırma alanına ayrılabilen biharmonik dönüşümler teorisine olan ilgi son on yılda giderek arttı. Bir taraftan diferensiyel geometri bakış açısıyla örnekler ve sınıflandırmalar inşa edilmesi dikkat çekerken; diğer taraftan biharmonik dönüşümler dördüncü mertebeden güçlü bir eliptik semi-lineer kısmi diferansiyel denklemin çözümleri olduğundan kısmi diferansiyel denklemler açısından da analitik yönüyle incelenmektedir.

Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferensiyellenebilen bir $\varphi : M \to N$ dönümüşü eğer $E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2 v_g$ ile verilen enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ ye bir harmonik dönüşüm denir. Enerji için Euler-Lagrange denklemi $\tau(\varphi) = iz\nabla d\varphi$ ile tanımlanan tensiyon alanının sıfır olması ile karakterize edilir [4].

Harmonik dönüşümlerin bir genelleştirmesi olarak biharmonik dönüşümler kavramı ilk kez 1964 yılında J. Eells ve J. H. Sampson tarafından ortaya atıldı [4].

Biharmonik dönüşümler $E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g$ ile tanımlanan bienerji fonksiyonelinin kritik noktalarıdır [5]. Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir diferensiyellenebilir $\varphi : M \to N$ dönüşümünün bienerji fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemi 1986 yılında G. Y. Jiang [6,7] tarafından

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta\tau(\varphi) - R^N\big(d\varphi, \tau(\varphi)\big)d\varphi = 0$$

şeklinde tanımlandı. Bu denklemden harmonik dönüşümlerin biharmonik olduğu görüldüğünden biharmonik dönüşümler teorisinin en temel sorusu hangi şartlar altında biharmonik dönüşümlerin harmonik olacağıdır.

Biharmonik dönüşümler ile ilgili ilk ve en temel örnekler Riemann manifoldları üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir eğrilerin biharmonikliği incelenerek verildi [8-10]. Geodeziklerin biharmonik eğriler olduğu açıktır. Dolayısıyla geodezik olmayan biharmonik eğriler özgün biharmonik eğriler olarak adlandırılır ve bu tip eğriler önemli bir çalışma alanı oluştururlar.

Biharmonik altmanifoldlar biharmonik dönüşümlerin özel halidir. Genel olarak, eğer $i:(M,g)\rightarrow(N,h)$ izometrik immersiyonu bir biharmonik dönüşüm ise M ye N nin bir biharmonik altmanifoldu denir. Farklı bir bakış açısıyla B. Y. Chen [11], Öklidyen uzayın harmonik ortalama eğrilikli vektör alanına sahip altmanifoldlarını biharmonik altmanifoldlar olarak tanımladı ve Öklidyen uzayın biharmonik altmanifoldlarının minimal olduğunu ispatladı. Biharmonik dönüşüm tanımı, Öklidyen uzaya tanımlanan Riemann immersiyonlarına uyarlanırsa Chen' in biharmonik altmanifold tanımına ulaşılır. Böylece biharmonik Riemann immersiyonları Chen tarafından tanımlanan biharmonik altmanifoldların bir genellemesi olarak düşünülebilir.

Semi-Riemann manifoldlar arasında tanımlanan bir dönüşümün biharmonikliği, Riemann manifoldları arasındaki bir dönüşümün biharmonikliğine benzer şekilde karakterize edilir [12]

Öklidyen uzay, semi-Öklidyen uzay, sabit kesit eğriliğine sahip uzay formlar ve daha pek çok özel manifold tipi üzerinde biharmonik altmanifoldlar çalışılmış ve bu alanda önemli bir literatür oluşturulmuştur [13-17].

Manifoldlar teorisi modern diferensiyel geometride geniş ve önemli bir yer tutmaktadır. Manifoldlar üzerindeki diferensiyellenebilir geometrik yapılar bu alanda yapılan çalışmalar için kullanışlı araçlar olup ilginç sonuçların elde edilmesine imkan vermektedir. Zaman içerisinde disiplinler arası çalışmaların artması ile manifold teori sadece geometriye has bir çalışma alanı olmaktan çıkıp başta matematik ve fizik olmak üzere bir çok alanda ele alınan önemli ve verimli bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Manifoldların herhangi bir noktasındaki tanjant uzayı üzerinde tanımlanan bir metrik tensör, söz konusu noktadaki tanjant uzayı bir skaler çarpım uzayı haline dönüştürerek bu uzay üzerinde çeşitli işlemlerin yapılmasına olanak sağlar. Manifold üzerindeki metrik tensörün pozitif tanımlı olması durumunda Riemann manifoldları elde edilir. B. O'Neill [18], manifold üzerindeki metrik tensörün negatif tanımlı olma durumunu göz önüne alarak semi-Riemann manifoldları tanımladı. Riemann manifoldların herhangi bir altmanifoldu üzerine indirgenmiş metrik tensör daima bir Riemann metriktir. Eğer bir semi-Riemann manifoldun bir altmanifoldu üzerine indirgenen metrik tensör pozitif tanımlı ise altmanifolda spacelike (uzay benzeri) altmanifold ve negatif tanımlı ise bu durumda altmanifolda timelike (zaman benzeri) altmanifold denir. Timelike ve spacelike altmanifoldlar nondejenere semi-Riemann altmanifoldlar olarak bilinirler [18].

Günümüzde literatürde, üzerinde tanımlı yapılara ve bu yapıların sağladığı özelliklere göre ortaya çıkmış pek çok farklı manifold tipi bulunmaktadır. Bu manifold tiplerinden en önemlileri kontakt manifoldlar ve parakontakt manifoldlardır.

1985 te S. Kaneyuki ve M. Konzai [19] ($2n$+1)-boyutlu bir semi-Riemann manifold üzerinde hemen hemen parakontakt yapıyı tanımlayarak $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı kurdu. R. S. Zamkovoy [20] ise S. Kaneyuki ve M. Konzai [19] tarafından verilen hemen hemen parakontakt yapıyı

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

şeklinde tanımlanan $(n+1, n)$ isaretli bir semi-Riemann metrik ile ilişkilendirerek; herhangi bir hemen hemen parakontakt yapının, uyumlu metrik olarak adlandırılan bu tipte bir semi-Riemann metriği tanımlamaya imkan verdiğini gösterdi. R. S. Zamkovoy [20] hemen hemen parakontakt metrik manifoldların para-Sasakian manifoldlar gibi bazı özel alt sınıflarını tanımlayarak bu manifoldların temel özelliklerini inceledi.

Hemen hemen parakontakt metrik manifoldlar ve altmanifoldları üzerine yapılmış pek çok çalışma vardır [21-26].

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada biharmonik altmanifoldlar ve para-Sasakian manifoldlar ile ilgili yukarıda özetlenen çalışmalar göz önüne alınarak para-Sasakian manifoldların bazı özel tipteki biharmonik eğrileri ve biharmonik hiperyüzeyleri incelenmiş ve orijinal sonuçlara ulaşılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe bir M manifoldunun kenarsız, bağlantılı parakompakt Hausdroff manifoldu ve tüm yapıların, manifoldların C^∞ sınıfından olduğu kabul edilecektir. m-boyutlu bir M manifoldunun bir x noktasındaki tanjant uzayı (sırasıyla kotanjant uzayı) $T_x M$ (sırasıyla $T_x^* M$) ile gösterilecektir. M nin tanjant demeti ve kotanjant demeti ise sırasıyla $TM \to M$ ve $T^*M \to M$ gösterimine sahiptir. Bir $C^\infty W \to M$ demetinin C^∞ kesitlerinin (vektör) uzayı $\Gamma(W)$ ile gösterildiğinden $\Gamma(TW)$ ve $\Gamma(T^*W)$ sırasıyla M nin tanjant ve kotanjant demetinin C^∞ kesitlerinin (vektör) uzayıdır. $k \in \{0,1,\dots,\infty\}$ için M üzerinde C^k sınıfından reel değerli fonksiyonların uzayını $C^k(M)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1. $(\mathbb{R},+,.)$ reel sayılar cismi ve V boştan farklı bir küme olsun. V kümesi üzerinde

$$\begin{aligned} +: \ & V \times V \to V \\ & (x,y) \to x+y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} .: \ & \mathbb{R} \times V \to V \\ & (x,y) \to x.y \end{aligned}$$

işlemlerini tanımlayalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(V,+,.)$ üçlüsüne $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı veya bir reel vektör uzayı denir [18]:

1. $\forall x,y \in V$ için $x+y \in V$ dir.
2. $\forall x,y,z \in V$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir.
3. $\forall x \in V$ için $0 \in V$ vardır öyle ki $x+0=0+x=x$ dir.
4. Herhangi bir $\forall x \in V$ için $u+x=x+u=0$ olacak şekilde bir tek $u \in V$ vardır.
5. $\forall x,y \in V$ için $x+y=y+x$ dir.
6. $\forall k \in \mathbb{R}$ ve $\forall x,y \in V$ için $k(x+y)=kx+ky$ dir.

7. $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in V$ için $(k_1 + k_2)x = k_1 x + k_2 x$ dir.
8. $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in V$ için $k_1(k_2 x) = (k_1 k_2)x$ dir.
9. $\forall x \in V$ için $1.x = x$ dır.

Tanım 2.2. V vektör uzayında lineer bağımsız vektörlerin maksimum sayıda olanları $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ise bu küme V için bir bazdır denir. V vektör uzayının herhangi bir bazındaki vektör sayısı da V nin boyutu olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.3. V, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. $F: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$F(ax + by) = aF(x) + bF(y)$$

şartını sağlıyorsa F ye bir lineer fonksiyonel denir [18].

Tanım 2.4. V bir reel vektör uzayı olmak üzere $Hom(V, \mathbb{R}) = \{F \mid F: V \to \mathbb{R}\}$ vektör uzayına V vektör uzayının dual uzayı veya kovektör uzayı denir ve $V^* = Hom(V, \mathbb{R})$ ile gösterilir. V^* ın elamanları ise bir kovektör olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.5. V bir reel vektör uzayı ve $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de V nin bir bazı olsun. $\forall i, j \in n$ olmak üzere $\alpha_j^*(\alpha_i) = \delta_j^i$ şartını sağlayan $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*\}$ kümesine $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bazına karşılık gelen dual baz (kobaz) denir [18].

Tanım 2.6. V ve W aynı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı ve V^* ile W^* da sırası ile bunların dual uzayı olsunlar. Bu durumda $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere

$$L^*: W^* \to V^*$$
$$[L^*(\beta^*)](x) = \beta^*\big(L(x)\big), \quad \forall x \in V,$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme L nin dual dönüşüm veya eki denir [18].

Tanım 2.7. V bir reel vektör uzayı, $g: V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y, z \in V$ için

$$g(ax + by, z) = ag(x, z) + bg(y, z),$$
$$g(x, ay + bz) = ag(x, y) + bg(x, z),$$

şartını sağlıyor ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir bilineer form denir [18].

Tanım 2.8. V bir reel vektör uzayı, $g: V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü de V reel vektör uzayı üzerinde bir bilineer form olsun. Eğer $\forall x, y \in V$ için

$$g(x, y) = g(y, x)$$

ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir [18].

Tanım 2.9. V bir Hausdorff uzay olmak üzere $\forall p \in M$ noktası için M de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 0)$ ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulanabilirse M ye n-boyutlu topolojik manifold denir [27].

$\mathbb{R}^n$ nin kendisi en basit bir n-boyutlu manifold örneğidir. Çünkü $\mathbb{R}^n$ açık olduğundan $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için p-noktasının açık komşuluğu olarak $\mathbb{R}^n$ nin tamamını alabiliriz. Özdeşlik dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan $\mathbb{R}^n$ kendisine homeomorftur [27].

Tanım 2.10. Bir topolojik n-boyutlu manifold M ve U da M nin bir açık alt kümesi olarak verilsin. Eğer U bir φ homeomorfizması ile $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{R}^n$ nin bir W açık alt kümesine eşlenebiliyorsa, yani $\varphi: U \to W$ bir homeomorfizma ise (U, φ) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu denir. $p \in U$ için $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ olur. $\varphi(p) = \big(y_1(p), y_2(p), \dots, y_n(p)\big)$, $1 \leq i \leq n$, olmak üzere $y_i(p) \in \mathbb{R}$ dir. Burada $y_i(p)$ reel sayısına $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının i-yinci koordinatı, $y_i: U \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna da φ nin i-yinci koordinat fonksiyonu denir. φ bir homeomorfizma olduğundan süreklidir. φ birebir olduğundan $p, q \in U$ noktaları için $y_i(p) = y_i(q)$, $1 \leq i \leq n$, ise $p = q$ dir. Böylece $p \in U$ noktası $\big(y_1(p), y_2(p), \dots, y_n(p)\big)$ reel sayı n-lisi komşuluklarına göre lokal koordinatları ve U üzerinde tanımlı $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ reel değerli fonksiyon n-lisine de (U, φ) üzerindeki lokal koordinat sistemi denir [27].

Tanım 2.11. Topolojik n-manifold M ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık kümelerinin α indislerinin kümesi I olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \epsilon I}$ yazalım. $\mathbb{R}^n$ de, U_α ya homeomorf olan bir açık alt küme W_α, yani $\varphi_\alpha: U_\alpha \to W_\alpha$ homeomorfizma olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \epsilon I}$ koleksiyonuna bir koordinat komşuluğu sistemi (atlas) denir [27].

Topolojik bir n-manifold M ve $p \in M$ noktasının açık komşulukları U_α olsun p-noktasının lokal koordinat komşulukları olan U_α lar değiştikte φ_α larda değişeceğinden U_α ların sayısı kadar φ_α vardır. Her bir $\alpha \epsilon I$ için $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ koordinat komşuluğu üzerindeki lokal koordinat sistemi $(y_1^\alpha, y_2^\alpha, \dots, y_n^\alpha)$ ile gösterelim. p noktasının iki açık komşuluğu U_α, U_β ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise $U_\alpha \cap U_\beta$ nın her bir noktasındaki $(y_1^\alpha, y_2^\alpha, \dots, y_n^\alpha)$ ve $\left(y_1^\beta, y_2^\beta, \dots, y_n^\beta\right)$ gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır. Bu durumda

$$\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \subset \mathbb{R}^n \text{ ve } \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \subset \mathbb{R}^n$$

alt kümeleri iki açık kümenin homeomorfizma altında görüntüleri olduklarından açık kümelerdir. Ayrıca

$$\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1}\ ve\ \phi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$$

fonksiyonları da iki homeomorfizmanın bileşkesi olduğundan birer homeomorfizmadırlar [27].

Tanım 2.12. M bir topolojik n-manifold ve $S = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \epsilon I}$ de M nin bir atlası olsun. $\alpha, \beta \epsilon I$ olmak üzere $p \epsilon M$ noktasının iki komşuluğu ve U_α, U_β ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \epsilon I$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1}\ ve\ \phi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ fonksiyonları diferensiyellenebilir iseler S atlasına M üzerinde bir diferansiyellenebilir yapı, M manifolduna da bir diferensiyellenebilir manifold denir [27].

Tanım 2.13 M bir diferansiyellenebilir manifold ve $p \epsilon M$ noktası için

$$X_p: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
$$f \to X(f)$$

fonksiyonları verilsin. $\forall f, g \epsilon C^\infty(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

1. $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$,
2. $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$,

şartlarını sağlayan X_p fonksiyonuna M nin p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. X_p tanjant vektörü bazen (p, X) ikilisi ile de gösterilebilir. M nin p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir ve bu uzaya M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir. $T_p(M)$ reel vektör uzayının duali ise $T_p^*(M)$ ile gösterilir ve M nin p noktasındaki kotanjant uzayı olarak adlandırılır [28].

M diferansiyellenebilir manifoldunun $p \epsilon M$ noktasında bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise $T_p(M)$ tanjant uzayı ve $T_p^*(M)$ kotanjant uzayının standart bazları $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ ve $\left\{dx_1\big|_p, dx_1\big|_p, \dots, dx_n\big|_p\right\}$ dir.

Tanım 2.14 M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M nin her bir noktasına bir tanjant vektör karşılık getiren

$$X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

operatörüne M üzerinde bir vektör alanı denir öyle ki $\forall f, g \epsilon C^\infty(M)$ ve $\forall a, b \epsilon \mathbb{R}$ için

1. $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$,
2. $X(fg) = X(f)g + fX_p$

dir. M nin vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ile gösterilir. $\chi(M)$ vektör uzayının cebirsel duali olan $\chi^*(M)$ uzayı M manifoldunun 1-formlarının uzayı olarak adlandırılır. Her 1-form M manifoldunun bir noktasına bir kotanjant vektör karşılık getiren bir operatör olarak göz önüne alınabilir [28].

Tanım 2.15. M manifoldunun boş olmayan, açık, bağlantılı bir U altkümesine M nin bir tanım kümesi denir. Eğer U tanım kümesi kompakt $\overline{U}$ kapanışına sahip ise $D = \overline{U}$ biçiminde tanımlanan D kümesine M nin bir kompakt tanım kümesi denir [12].

Tanım 2.16. M manifoldu üzerindeki iki vektör alanı X ve Y olsun. $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda

$$[,]: \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)\ ,\ \ \forall p \in M$$

ile tanımlanan fonksiyona X ve Y nin Lie (parantez) operatörü denir ve bu operatör

$f, g \in C^\infty(M)$ ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar [28]:

1. $[X, Y]f \in C^\infty(M)$,
2. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$,
3. $[X, Y] = -[Y, X]$,
4. $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0$.

Tanım 2.17. M bir n-manifold olsun. T_xM tanjant uzayının bir bazına $x \in M$ noktasında bir çatı denir. Bir (lokal hareketli) çatı $\{X_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, her $x \in M$ için T_xM nin bir bazını veren C^∞ vektör alanlarından oluşan bir sistemdir [12].

Tanım 2.18. M ve N manifoldları arasında bir $\varphi: M \to N$ C^∞ dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\varphi: \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm her $x \in M$ noktasında

$$d\varphi_x: T_xM \to T_{\varphi(x)}N$$

lineer dönüşümünü verir. Bu dönüşüme φ nin x noktasındaki türev dönüşümü denir.

$(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ ve $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ sırasıyla M ve N üzerindeki lokal koordinat sistemleri olsun. $i = 1, \ldots, m,\ \alpha = 1, \ldots, n$ olmak üzere φ dönüşümü için

$$\varphi^\alpha = y^\alpha \circ \varphi \text{ ve } \varphi_i^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}$$

yazılabilir. Böylece

$$d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

elde edilebilir. Daha genel olarak $\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$ sırasıyla T_xM ve $T_{\varphi(x)}N$ nin birer bazı ise

$$d\varphi_x(X_i) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_i^\alpha Y_\alpha$$

olur. $N = \mathbb{R}$ alınırsa φ nin türev dönüşümü M üzerindeki bir 1-formla özdeş yapılabilir [12].

Lie parantez operatörü aşağıdaki basit özelliği sağlar.

Önerme 2.19. M ve N manifoldlar; $\varphi: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm; E, F ve $\bar{E}, \bar{F}$ sırasıyla M ve N manifoldları üzerinde $d\varphi(E) = \bar{E}$ ve $d\varphi(F) = \bar{F}$ yani

$$d\varphi_x(E_x) = \bar{E}_{\varphi(x)} \text{ ve } d\varphi_x(F_x) = \bar{F}_{\varphi(x)}, \quad (x \in M)$$

şartlarını sağlayan vektör alanları olsun. Bu durumda

$$d\varphi([E, F]) = [\bar{E}, \bar{F}] \circ \varphi$$

dir [12].

Tanım 2.20. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve g de V üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. Bu durumda sıfırdan farklı $\forall v \epsilon V$ vektörü için

1. $g(v, v) < 0$ ise g ye negatif tanımlı bilineer form,
2. $g(v, v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlı bilineer form,
3. $g(v, v) \leq 0$ ise g ye negatif yarı tanımlı bilineer form,
4. $g(v, v) \geq 0$ ise g ye pozitif yarı tanımlı bilineer form,

denir. Eğer $\forall v \epsilon V$ için $g(v, w) = 0$ iken $w = 0$ oluyorsa g bilineer formuna nondejeneredir denir [18].

Tanım 2.21. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineer form olsun. Bu durumda V nin bir $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazı vardır, öyle ki

$$g(x_i, x_j) = 0, \ i \neq j,$$
$$g(x_i, x_i) = 0, \ 1 \leq i \leq \mu,$$
$$g(x_i, x_i) = -1, \ \mu + 1 \leq i \leq \mu + \tau,$$
$$g(x_i, x_i) = 1, \ \mu + \tau + 1 \leq i \leq \mu + \tau + \rho,$$

dur. Burada $\mu+\tau+\rho=n$ dir. Bu durumda (μ,τ,ρ) üçlüsüne g nin tipi ve β bazına ise g ye göre V nin ortonormal bazı denir [18].

Tanım 2.22. V,n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve $g: V\times V\to\mathbb{R}$ bilineer form olsun. Bu durumda g nin dejenere uzayı N_g^l ile gösterilir ve

$$N_g^l=\{x\,|\,g(x,y)=0,\forall y\epsilon V\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iki nokta arasındaki bütün uzaklıklar sıfırdır. Eğer $\mu=0$ ise $N_g^l=\{0\}$ olur ve g nin nondejenere olduğu görülür. Bu durumda g nin tipi (τ,ρ) ise V ye τ indeksli iç çarpım uzayı denir [18].

Tanım 2.23. V bir vektör uzayı ve g de V üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. g nin negatif tanımlı olduğu en geniş alt uzay W nun boyutuna g nin indeksi denir. g nin tipi (μ,τ,ρ) ise $boy\ W=\tau$ dur. Özel olarak $\tau=0$ ise V ye pozitif yarı tanımlı iç çarpım uzayı ve $\tau=boy\ V$ ise V ye negatif tanımlı iç çarpım uzayı denir [18].

Tanım 2.24. V bir vektör uzayı ve g de V üzerinde bilineer form olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} q&: V\to\mathbb{R}\\ v&\to q(v)=g(v,v)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona g ile birleşen kuadratik form denir. g ile q arasında

$$g(v,w)=\frac{1}{2}(q(v+w)-q(v)-q(w))$$

bağıntısı vardır. Bu eşitliğe polarizasyon özdeşliği denir [18].

Lemma 2.25. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı, $V=Sp\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ve g de V üzerinde bir bilineer form olsun. Bu durumda $v\in V$ ve $\forall w\in V$ için $g(v,w)=0$ olması için gerek ve yeter şart $g(v,x_i)=0,\ \ 1\le i\le n$, olmasıdır [18].

Tanım 2.26. Bir V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik, nondejenere, $g: V\times V\to\mathbb{R}$ bilineer formuna bir skaler çarpım ve (V,g) ikilisine de bir skaler çarpım uzayı denir [18].

Tanım 2.27. V,n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve g de V üzerinde bir skaler çarpım olsun. Bu durumda $0 \neq v \in V$ için

1. $g(v,v) < 0$ ise v ye timelike vektör,
2. $g(v,v) > 0$ ise v ye spacelike vektör,
3. $g(v,v) = 0$ ise v ye null (lightlike) vektör,

denir. Özel olarak 0 vektörü spacelike vektör olarak kabul edilir. Bir non-null $v \in V$ vektörü için $|g(v,v)| = 1$ ise v ye birim vektör denir [18].

Nondejenere g formuna bir indefinite (belirsiz) form da denir. V vektör uzayında null vektörlerin olması için gerek ve yeter şart g nin indefinite olmasıdır [18].

(V,g) skaler çarpım uzayında $x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart $g(x,y) = 0$ olmasıdır. Buna göre null bir vektör daima kendisine diktir. $A, B \subset V$ olmak üzere $A \perp B$ olması için $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $x \perp y$ olması gerekir [18].

Tanım 2.28. (V,g) bir skaler çarpım uzayı ve $W \subset V$ bir alt uzay olsun. Bu durumda W nin diki $W^{\perp}$ ile gösterilir ve

$$W^{\perp} = \{x \in V \,|\, g(x,y) = 0, \forall y \epsilon W\}$$

şeklinde tanımlanır [18].

Lemma 2.29. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve W de V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda $boyW + boyW^{\perp} = boy\, V = n$ ve $(W^{\perp})^{\perp} = W$dir [18].

Tanım 2.30. (V,g) bir skaler çarpım uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer g skaler çarpımının W alt uzayına kısıtlanmışı olan

$$g\,|\,w: W \times W \to \mathbb{R}$$

dönüşümü nondejenere ise W ya bir nondejenere alt uzay denir. Eğer g, W üzerinde dejenere ise W ya dejenere alt uzay denir [18].

Pozitif tanımlı bir iç çarpım uzayında her bir alt uzay pozitif tanımlı iç çarpım uzayıdır. Fakat skaler çarpım uzaylarında alt uzay dejenere olabilir [18].

Lemma 2.31. (V,g) bir skaler çarpım uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. V skaler çarpım uzayının nondejenere olması için gerek ve yeter şart $V = W \otimes W^{\perp}$ olmasıdır [18].

Lemma 2.32. Sıfırdan farklı her skaler çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir [18].

Lemma 2.33. (V, g) bir skaler çarpım uzayı ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V nin $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ olacak şekilde bir bazı olsun. Bu durumda $v \in V$ için

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i)\, e_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

dir [18].

Lemma 2.34. (V, g) bir skaler çarpım uzayı ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ lerin negatif işaretli olanlarının sayısı V nin indeksidir [18].

Tanım 2.35. (V, g) ve $(\bar{V}, \bar{g})$ iki skaler çarpım uzayı olsunlar. Eğer $T: V \to \bar{V}$ lineer dönüşümü için

$$\bar{g}(Tv_1, Tv_2) = g(v_1, v_2), \qquad \forall v_1 \in V, \forall v_2 \in \bar{V},$$

ise T ye skaler çarpımları koruyor veya bir izometri denir [18].

$T: V \to \bar{V}$ bir izometri ise bir birebir dönüşümdür. Yani $Tv = 0$ ise $\forall w \in V$ için $g(v, w) = 0$ olacağından ve g nin nondejenereliğinden $v = 0$ olmak zorundadır [18].

Bir $T: V \to \bar{V}$ lineer dönüşümünün skaler çarpımları koruması için gerek ve yeter şart bu skaler çarpımlara karşılık gelen kuadratik formları korumasıdır. Yani

$$\bar{g}(Tv_1, Tv_2) = g(v_1, v_2) \Leftrightarrow \bar{q}(Tv) = q(v)$$

olmasıdır. Skaler çarpımları koruyan $T: V \to \bar{V}$ lineer izomorfizmine bir lineer izometri denir. Buna göre skaler çarpımları koruyan $T: V \to \bar{V}$ lineer dönüşümünün izometri olması için gerek ve yeter şart $boy\ V = boy\ \bar{V}$ olmasıdır [18].

Lemma 2.36. (V, g) ve $(\bar{V}, \bar{g})$ iki skaler çarpım uzayı olsun. V ve $\bar{V}$ nin aynı boyutlu ve aynı indeksli olması için gerek ve yeter şart V ve $\bar{V}$ arasında bir lineer izometri olmasıdır [18].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Semi-Riemann Manifoldlar ve Bazı Özel Operatörler

Tanım 3.1.1. M, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold, p noktasında M nin tanjant uzayı T_pM ve T_pM nin dual uzayı da T_p^*M olsun. M nin tanjant demeti TM ve kotanjant demeti de TM^* olsun. $\Gamma(TM)$ ile TM nin kesitleri yani M üzerindeki vektör alanlarının uzayı ve $\Gamma(TM^*)$ ile TM^* in kesitleri yani M üzerindeki 1-formların uzayı gösterilsin. $\Gamma(TM)$ ve $\Gamma(TM^*)$, M üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların halkası olan $C^\infty(M)$ üzerinde birer modüldür. Bu durumda $(r+s)$-lineer

$$T: \underbrace{\Gamma(TM^*) \times \ldots \times \Gamma(TM^*)}_{r-tane} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)}_{s-tane} \to C^\infty(M)$$

dönüşümüne bir (r, s)-tensör alanı denir [18].

Tanım 3.1.2. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda M üzerindeki simetrik, bilineer ve nondejenere (0,2) tipindeki bir g tensörüne bir metrik tensör denir [18].

Tanım 3.1.3. M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde (0,2) tipinde bir metrik tensör olsun. Bu durumda $\forall p \in M$ için

$$g_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

dönüşümü T_pM üzerinde sabit γ indeksli bir skaler çarpım ise (M, g) ye bir semi-Riemann manifold ve γ ya da g nin indeksi denir [18].

$\gamma = 0$ ise M ye bir Riemann manifold ve $\gamma = 1$ ise M ye bir Lorentzian manifold denir. M_γ^n bir semi-Riemann manifold: $\aleph$, M üzerinde bir lokal koordinat komşuluğu ve $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\aleph$ üzerinde bir lokal koordinat sistemi olsun. $\aleph$ üzerinde metrik tensörün bileşenleri

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

ile gösterilir. Burada lokal koordinatlarda

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad w = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olmak üzere

$$g(v,w) = g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} v_i\, w_i g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} v_i\, w_i g_{ij}$$

yazılabilir. g nondejenere olduğundan buna karşılık gelen matrisin determinantı sıfırdan farklı olup (g_{ij}) bir nondejenere matristir. Bu durumda (g_{ij}) nin tersi vardır.

(g_{ij}) fonksiyonları diferansiyellenebilr ve g simetrik olduğundan $g_{ij} = g_{ji}$ dir. (g_{ij}) nin tersi (g^{ij}) olmak üzere $g^{ij} = g^{ji}$ dir. g metrik tensörü

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

olarak da ifade edilebilir. Gerçekten $\forall v, w \in \Gamma(TM)$ için

$$dx_i(v) = \sum_{k=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i) = v_i \text{ ve } dx_j(v) = \sum_{k=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_k}(x_j) = w_j$$

olduğundan

$$g(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i(v).dx_j(w)$$
$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j \right)(v,w),$$

elde edilir [18].

Tanım 3.1.4 $\mathbb{R}^n$ de

$$\langle X,Y \rangle = -\sum_{i=1}^{\gamma} x_i y_i + \sum_{j=\gamma+1}^{n} x_i y_i$$

bilineer formu $\mathbb{R}^n$ de bir metrik tensördür. $\mathbb{R}^n$ bu metrik tensör ile birlikte bir semi-Riemann manifold olur. $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\rangle)$ ikilisine semi-Öklidyen uzay denir. Eğer $\gamma \neq 0$ ise

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq \gamma \\ +1, & \gamma+1 \leq i \leq n \end{cases},$$

olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de bir metrik tensör $g = ds^2$ (ds, yay uzunluğu) olarak ifade edilebilir ve

$$g = ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, dx_i \otimes dx_i$$

olarak yazılabilir [18].

Tanım 3.1.5. (M,g) bir semi-Riemann manifold olsun. Eğer $X \in T_pM$ için

1. $g(X,X) > 0$ ve $X = 0$ ise X e spacelike
2. $g(X,X) < 0$ ise X e timelike
3. $g(X,X) = 0$ ve $X \neq 0$ ise X e null (nightlike)

vektör denir. T_pM deki null vektörlerin kümesi $p \in M$ de bir null koni olarak adlandırılır. Bir vektörün yukarıdaki üç durumdan birini sağlamasına vektörün causal karakteri denir [18].

Tanım 3.1.6. $(\overline{M},\bar{g})$ bir semi-Riemann manifold olsun. $i: M \to \overline{M}$ dönüşümü bir immersiyon yani $M, \overline{M}$ nin bir alt manifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(X,Y) = \bar{g}(i_* X, i_* Y) = i^* g(X,Y)$$

olmak üzere $i^* g$, M üzerinde bir metrik tensör ise M ye $\overline{M}$ nin bir semi-Riemann alt manifoldu denir. Eğer $i^* g$ bir metrik tensör değil ise M ye bir dejenere alt manifold denir [18].

Riemann manifoldlarında $i^* g$ her zaman bir metrik tensördür [18].

Tanım 3.1.7. (M,g) bir semi-Riemann manifold olsun. Herhangi bir

$$f: M \to \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$grad: C^\infty(M) \to \Gamma(TM)$$

olmak üzere $gradf$ vektör alanı bir tek X vektör alanı ve bütün Y vektör alanları cinsinden

$$g(X,Y) = df(Y) = Y[f]$$

ile tanımlanır. Bu durumda $X = gradf$ için

$$g(gradf, Y) = df(Y) = Y[f]$$

karakterizasyonu yapılabilir [12].

Önerme 3.1.8. (M,g) semi-Riemann manifoldu üzerinde bir lokal koordinat sistemi $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda

$$f: M \to \mathbb{R}$$

diferansiyellenebilir fonksiyonu için lokal koordinatlar cinsinden

$$gradf = \sum_{i,j=1}^{n} \left(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dir. Eğer $M = \mathbb{R}^n$ ise $g^{ij} = \delta_i^j$ ve

$$gradf = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olur [12].

Tanım 3.1.9. M bir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\nabla: \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

fonksiyonu $\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $\forall\, f, g \in C^\infty(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir lineer koneksiyon denir [18]:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_y Z,$
2. $\nabla_X(fY + gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z.$

Tanım 3.1.10. (M, g) bir semi-Riemann manifold ve ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer ∇ konneksiyonu $\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$
2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu denir [18].

M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu $\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z) + Y\big(g(Z, X)\big) - Z\big(g(X, Y)\big)$$
$$-g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y])$$

olarak tanımlanan Kozsul eşitliği ile belirlenir [18] .

Herhangi bir g metrik tensörün, $\forall\ X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

ile verilen kovaryant türevi, ∇ bir Levi-Civita konneksiyon ise

$$\nabla g = 0$$

biçiminde de yazılabilir [18].

Tanım 3.1.11. (M, g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, M nin bir lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

ile karakterize edilen Γ_{ij}^k bileşenlerine ∇ nın bileşenleri veya Christoffel katsayıları denir ve

$$dx_k\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma_{ij}^k$$

olarak tanımlanır [18].

Tanım 3.1.12. M, m-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R: \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X,Y,Z) \to R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

olarak tanımlanan R tensör alınına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [18].

Tanım 3.1.13. (M, g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda

$$K: \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$
$$(X,Y,Z,W) \to K(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W)$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir [18].

Tanım 3.1.14. (M,g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve M nin bir p noktasındaki tanjant uzayının 2-boyutlu bir altuzayı P olsun. P yi geren birim vektörler X_p, Y_p ve M üzerindeki Riemann Christoffel eğrilik tensörü K olmak üzere

$$K(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$$

değerine M nin p noktasındaki P düzlemine göre kesit eğriliği denir ve $K^M(X \wedge Y)$ ile de gösterilir [18].

Tanım 3.1.15. (M,g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$S: \Gamma(TM)\ X\ \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

$$S(X,Y) = iz\langle R(X,-) - Y\rangle = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(R(X,e_i)e_i, Y)$$

olarak tanımlanan tensör alanına M nin Ricci tensör alanı denir. Burada $\{e_i\}$, M de ortonormal bir çatıdır [18].

Ricci operatörü ise (1,1) tipinde bir tensördür, Q ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(Q(X), Y) = S(X,Y)$$

ile karakterize edilir [18].

Önerme 3.1.16. Ricci operatörü self-adjointtir. Yani (M,g) bir semi-Riemann manifold ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(Q(X), Y) = g(X, Q(Y))$$

dir [18].

Tanım 3.1.17. (M,g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. $p \in M$ olmak üzere T_pM nin 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına skaler eğrilik denir ve $\{e_i\}$, M de ortonormal bir çatı olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i S(e_i, e_i)$$

ile tanımlanır [18].

Tanım 3.1.18. M bir semi-Riemann manifold ve $K(P)$, M üzerinde kesit eğriliği olsun. Eğer bütün P düzlemleri ve bütün p noktaları için $K(P)$ sabit ise bu durumda M ye sabit eğrilikli uzay denir. Sabit eğrilikli semi-Riemann manifolduna da bir uzay form denir [18].

Teorem 3.1.19. Eğer M sabit c eğrilikli uzay form ise $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$R(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

ile verilir [18].

Tanım 3.1.20. (M, g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde a ve b fonksiyonları var ise M ye bir η-Einstein manifold denir [29].

Tanım 3.1.21. (M, g) bir semi-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde θ bir 1-form ve E de bir vektör alanı ise T^*M deki konneksiyon

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) &\to \Gamma(T^*M) \\ (E, \theta) &\to \nabla_E \theta \\ \nabla_E \theta(G) &= E\big(\theta(G)\big) - \theta(\nabla_E G) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece

$$E\big(\theta(G)\big) = \nabla_E \theta(G) + \theta(\nabla_E G)$$

Leibniz çarpım kuralı elde edilir [12].

Tanım 3.1.22. (M, g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. θ 1-formunun divengensi

$$div\theta = div^M \theta$$

ile gösterilir ve

$$div\theta = iz\nabla\theta = g^{ij}(\nabla_{X_i}\theta)X_j = g^{ij}\left\{X_i\left(\theta(X_j)\right) - \theta(\nabla_{X_i}X_j)\right\}$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(\nabla_{e_i}\theta)e_i = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\{e_i(\theta(e_i)) - \theta(\nabla_{e_i}e_i)\}$$

biçiminde tanımlanır. E vektör alanının divergensi $div\ E$ ise

$$div\ E = iz\nabla E = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(\nabla_{e_i}E, e_i) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\{e_i(g(E, e_i)) - g(E, \nabla_{e_i}e_i)\}$$

ile verilir. Burada $\{X_i\}$, M üzerinde keyfi çatı sistemi ve $\{e_i\}$, T_pM için ortonormal bir bazdır [12].

Önerme 3.1.23. (M, g), m-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, M nin bir lokal koordinat sistemi olsun.

$$\theta = \theta_j\, \partial x^j \in \Gamma(T^*M) \text{ ve } E = E^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(TM)$$

alalım. Bu durumda lokal koordinatlarda

$$div\theta = g^{ij}\left(\frac{\partial\theta_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k\theta_k\right) \text{ ve } divE = \frac{\partial E^i}{\partial x^i} + E^j\Gamma_{ij}^k$$

ile verilir. Ayrıca $|g| = \det(g_{ij})$ olmak üzere

$$div\theta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\theta_j\right) \text{ ve } divE = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}E^i\right)$$

dir [12].

Tanım 3.1.24. (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda kodiferasiyel d^* ile gösterilir ve θ bir 1-form olmak üzere

$$d^* = -div\theta$$

şeklinde tanımlanır [12].

Tanım 3.1.25. M bir diferansiyellenebilir m-boyutlu manifold olsun. Bu durumda M nin her noktasına r-boyutlu bir lineer alt uzay karşılık getiren ve

$$D : M \to T_pM$$
$$p \to D_p \subset T_pM$$

şeklinde tanımlanan D dönüşümüne M üzerinde distribüsyon (dağılım) denir. Eğer $\forall p \in M$ noktası için D_p de r-tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyona diferansiyellenebilirdir denir. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutive distribüsyon denir. Eğer D distribüsyon involutive ise integrallenebilirdir [29].

Tanım 3.1.26. (M, g) ve (N, h) semi-Riemann manifoldları olsun. $\varphi: (M, g) \to (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olmak üzere h metriğini pull-backi φ^*h ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi^*h(X, Y) = h\big(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)\big), \qquad x \in M$$

biçiminde tanımlanır [12].

Tanım 3.1.27. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları, $\varphi: (M, g) \to (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olmak üzere x noktasında φ nin türev dönüşümünün Hilbert-Schmidt normu $|d\varphi_x|$ ile gösterilir ve T_xM tanjant uzayının bir $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ bazı için

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(\,e_i), d\varphi(e_i))$$

ile tanımlanır.

Lokal koordinatlarda ise

$$|d\varphi_x|^2 = g^{ij}\varphi_i^{\alpha}\varphi_j^{\beta}h_{\alpha\beta}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}|d\varphi_x|^2 &= \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(\,e_i), d\varphi(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varphi^* h(\,e_i, e_i) \\ &= iz\varphi^* h\end{aligned}$$

olduğu görülür [12].

Tanım 3.1.28. (M, g) ve (N, h) semi-Riemann manifoldları, φ: $(M, g) \to (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin $d\varphi_x$ türev dönüşümünün eki $d\varphi_x^*$ ile gösterilir ve $X \in T_x M,\ Y \in T_{\varphi(x)}N$ için

$$g\big(X, d\varphi_x^*(Y)\big) = h(d\varphi_x(X), Y)$$

biçiminde karakterize edilir. Böylece

$$\varphi^* h(X, Y) = h\big(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)\big) = g(d\varphi_x^*\ o\ d\varphi_x(X), Y)$$

elde edilir [12].

Tanım 3.1.29. Öklidyen uzay $\mathbb{R}^n$ de Laplasyan, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Delta: C^{\infty}(\mathbb{R}^n) &\to C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \\ f &\to div(gradf)\end{aligned}$$

$$\Delta f = div(gradf) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

olarak tanımlanır [12].

Gradiyent ve divergens tanımları kullanılarak Laplasyon tanımı keyfi bir semi-Riemann manifolduna genişletilebilir:

Tanım 3.1.30. (M, g) bir semi-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerindeki Laplasyon ya da Laplace-Beltrami operatörü $\Delta = \Delta^M = \Delta_g$ ile gösterilir ve

$$\Delta f = div(gradf) = divdf = -d^* df = iz\nabla df$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f, U \subset M$ açığı üzerinde tanımlı reel-değerli C^2-sınıfından bir fonksiyondur [12].

Tanım 3.1.31. (M, g) bir semi-Riemann manifoldu ve $f \in C^\infty(M)$ olsun. Bu durumda

$$\Delta f = 0$$

eşitliği Laplace denklemi olarak adlandırılır ve bu denklemin çözümlerine $U \subset M$ üzerinde harmomik fonksiyonlar denir [12].

M manifoldunun $\{e_i\}_{i=1}^m$ ortonormal çatısını gözönüne alalım. Bu durumda

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \left\{ e_i(e_i(f)) - \left(\nabla_{e_i}^M e_i\right) f \right\}$$

olur [12].

Önerme 3.1.32. (M, g) bir semi-Riemann manifoldu olsun. $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, M üzerinde bir lokal koordinat sistemi ise $|g| = \det(g_{kl})$ olmak üzere

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$$

dır [12].

3.2. Hemen Hemen Parakontakt Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen parakontakt manifold tanıtılarak, temel özellikleri verilecektir.

Tanım 3.2.1. M , $(2n+1)-$boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde ϕ, $(1,1)-$tipindeki bir tensör alanı, η $1-$form ve ξ de bir vektör alanı olmak üzere

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi,$$
$$\eta(\xi) = 1$$

şartları sağlanıyor ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı ve (M, ϕ, ξ, η) ya da bir hemen hemen parakontakt manifold denir [19].

Önerme 3.2.2. M^{2n+1} bir (ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda

$$\phi\xi = 0, \quad \eta o\phi = 0, \quad rank\ \phi = 2n$$

dir [19].

Tanım 3.2.3. (M, ϕ, ξ, η) bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g semi-Riemann metriği var ise M ye bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve g metriğine bağdaşabilir metrik denir. Açık olarak g metriği indeksi n olan bir semi-Riemann metriktir [20].

Sonuç 3.2.4. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)-$boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad \text{ve} \quad \eta(X) = g(X, \xi)$$

dir [20].

Tanım 3.2.5. M , (ϕ, ξ, η, g) yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda M üzerinde $\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$, şeklinde tanımlanan Φ dönüşümüne, (ϕ, ξ, η, g)hemen hemen parakontakt yapısının temel iki formu denir [20].

Tanım 3.2.6. M , (ϕ, ξ, η, g)yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y)$ ise M ye bir parakontakt metrik manifold ve η ya M nin parakontakt formu denir. Burada

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\left\{ X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \right\}$$

dir [20].

$(2n+1)-$boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontakt metrik manifoldu için bir lokal ortonormal baz inşa edilebilir. Kabul edelim ki U , M üzerinde bir koordinat komşuluğu ve X_1, ξ ye dik olacak şekilde U üzerinde herhangi bir birim vektör alanı olsun. Bu durumda $\phi X_1, X_1$ve ξ ye ortogonal vektör alanı olsun. Bu durumda $\phi X_1, X_1$ ve ξ, X_1 ve ortogonal vektör alanı ve $|\phi X_1|^2 = -1$ dir. ξ, X_1 ve ϕX_1 e ortogonal olacak şekilde bir X_2 ve birim vektör alanı seçilirse $\phi X_2, X_1, \phi X_1, X_2$ ve ξ ye ortogonal vektör alanı ve $|\phi X_2|^2 = -1$ olur. Bu şekilde devam ederek $\phi-$bazı olarak adlandırılan bir $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$, $(i = 1, ..., n)$ lokal ortonormal bazı elde edilir [20].

Tanım 3.2.7. V bir reel vektör uzayı olmak üzere $J : V \to V$ lineer dönüşüm

$$J^2 = I$$

şartlarını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir parakompleks yapı denir [29].

$(2n+1)-$boyutlu bir hemen hemen parakontankt manifold (M,ϕ,ξ,η) olsun. $M\times\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı $(X, f\frac{d}{dt})$ şeklindedir. Bu X, M ye teğet bir vektör alanı; $t, \mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve $f, M\times\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir diferansiyellenebilir fonksiyondur. $M\times\mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı J

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X + f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

ile tanımlanır [19].

Tanım 3.2.8. M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde $(1,1)-$ tipinde tensör alanı F olsun. Her $X, Y\in\Gamma(TM)$ için

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y]+[FX,FY]-F[FX,Y]-F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin Nijenhuis tensör alanı denir. Eğer özel olarak F yerine J hemen hemen parakompleks yapısı alınırsa

$$\begin{aligned} N_j(X,Y) &= J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \\ &= [X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \end{aligned}$$

olur [29].

Tanım 3.2.9. (M,J) hemen hemen parakompleks manifold olsun. Eğer $N_J=0$ ise J dönüşümü integrallenebilirdir [20].

Tanım 3.2.10. (M,ϕ,ξ,η) bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. $M\times\mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen parakompleks veya integerallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısına normaldir denir [20].

(M,ϕ,ξ,η) bir hemen hemen parakontakt manifold ve N_ϕ, ϕ nin Nijenhuis tensör alanı olsun. Bu durumda $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$N_\phi(X,Y)=\phi^2\left[X,Y\right]+\left[\phi X,\phi Y\right]-\phi\left[\phi X,Y\right]-\phi\left[X,\phi Y\right]$$

dir [20].

Önerme 3.2.11. M, (ϕ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda (ϕ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart $N_\phi-2d\eta\otimes\xi=0$ olmasıdır [20].

Tanım 3.2.12. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)-$boyutlu bir parakontakt metrik manifold olsun. Eğer ξ bir Killing vektör alanı ise bu durumda M üzerindeki parakontakt yapıya $K-$parakontakt yapı ve M manifolduna da $K-$parakontakt manifold denir [20].

Önerme 3.2.13. (M,ϕ,ξ,η,g) bir parakontakt manifold olsun. Bu durumda M nin bir $K-$parakontakt manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_X\xi=-\phi X$$

olmasıdır [20].

Lemma 3.2.14. (M,ϕ,ξ,η,g) bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. M nin bir para-Sasakian manifold olması icin gerek ve yeter şart her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X\phi)Y=-g(X,Y)\xi+\eta(Y)X$$

olmasıdır [20].

Önerme 3.2.15. (M,ϕ,ξ,η,g) bir para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X,$$
$$g(R(X,Y)Z,\xi) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X),$$
$$R(\xi,X)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X,$$
$$R(\xi,X)\xi = X - \eta(X)\xi,$$
$$S(X,\xi) = -2n\eta(X)$$

dir [20].

Lemma 3.2.16. (M,ϕ,ξ,η,g) bir η-Einstein para-Sasakian manifold ise $\forall X,Y,\in\Gamma(TM)$ için

$$S(X,Y) = \left(\frac{r}{2n}+1\right)g(X,Y) - \left(\frac{r}{2n}+2n+1\right)\eta(X)\eta(Y)$$

dir [30].

Önerme 3.2.17. (M,ϕ,ξ,η,g) bir 3-boyutlu para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda M bir η-Einstein manifolddur ve $\forall X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) &= \left(\frac{r}{2}+2\right)\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\}\\ &\quad + \left(\frac{r}{2}+3\right)\begin{Bmatrix} g(X,Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y,Z)\eta(X)\eta(W) \\ +g(Y,W)\eta(X)\eta(Z) - g(X,W)\eta(Y)\eta(Z)\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

dir [31].

Teorem 3.2.18. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)-$boyutlu $(n>1)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Eğer paraholomorfik kesitsel eğrilik noktadan bağımsız ise

$$\begin{aligned}g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{k-3}{4}(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W))\\ &\quad + \frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} g(X,Z)\eta(Y)\eta(W) + g(Y,W)\eta(X)\eta(Z) \\ -g(X,W)\eta(Y)\eta(Z) - g(Y,Z)g(\phi Y,W) \\ +g(Y,\phi Z)g(\phi X,W) - g(X,\phi Z)g(\phi Y,W) \\ +2g(\phi X,Y)g(\phi Z,W) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

dır [30].

Tanım 3.2.19. Eğer M manifoldu üzerinde paraholomorfik kesitsel eğrilik sabit ise M ye para-Sasakian uzay form denir. Bir para-Sasakian uzay form $M(k)$ ile gösterilir [30].

$(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir nondejenere altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ manifoldundan M ye indirgenen metriği de g ile gösterelim. $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ve ∇ da M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için Gauss-Weingarten formülleri

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y),$$
$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^{\perp} V$$

ile verilir. Burada normal demet değerli simetrik bilineer B formuna M nin ikinci temel formu ve simetrik A_V lineer operatörüne ise normal kesite göre Weingarten temel tensörü denir [18].

Tanım 3.2.20. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)-$boyutlu bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin m-boyutlu bir nondejenere altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktasında T_pM nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere

$$\mu_p = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j B(e_j, e_j)$$

şeklinde tanımlı μ_p vektörüne $p \in M$ noktasında M nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Eğer $\mu = 0$ ise M ye minimaldie denir [18].

Tanım 3.2.21. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)-$boyutlu bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin m-boyutlu bir nondejenere altmanifoldu olsun. Eğer

1. $B = 0$ ise M ye bir tamamen geodezik altmanifold,
2. $B(X, Y) = \rho g(X, Y)$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\rho \in C^{\infty}(M)$ ise M ye bir tamamen umbilik altmanifold

denir [18].

Tanım 3.2.22. $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$, $(2n+1)-$boyutlu bir para-Sasakian manifold ve $I\subseteq R$ olmak üzere $\gamma: I\rightarrow(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$ de bir diferensiyellenebilir eğri olsun. Eğer $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}=T$ olmak üzere $\eta(T)=0$ ise γ ya $\bar{M}$ üzerinde bir Legendre eğrisi denir [22].

3.3. Biharmonik Dönüşümler

Bu kısımda Riemann manifoldları arasındaki harmonik ve biharmonik dönüşümler için temel tanımlar verilerek bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.3.1. W, M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere

$$\varphi: M\rightarrow N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bir $W\rightarrow N$ vektör demetinin pull-back demeti $\varphi^{-1}W\rightarrow N$ ile gösterilir ve $x\in M$ için bu demet

$$(\varphi^{-1}W)_x=W_{\varphi(x)}$$

ile tanımlanan liflere sahiptir. $W\rightarrow N$ vektör demeti üzerindeki konneksiyon ∇^W ise $\varphi^{-1}W\rightarrow M$ pull-back demeti üzerindeki konneksiyon ∇^φ ile gösterilen ve

$$\nabla^\varphi:\Gamma(TM)\times\Gamma(\varphi^{-1}W)\rightarrow\Gamma(\varphi^{-1}W)$$
$$(X,\varphi^*\sigma)\rightarrow\nabla_X^\varphi(\varphi^*\sigma)=\nabla_{d\varphi(X)^\sigma}^W$$

ile tanımlanan tek lineer konneksiyondur. ∇^φ konneksiyonuna pull-back konneksiyon denir. Burada

$$\varphi^*\sigma=\sigma o\varphi$$

dir [12].

$M=(M,g)$ ve $N=(N,h)$ Riemann manifoldları ve

$$\varphi: M\rightarrow N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin türev dönüşümü $d\varphi$,

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}TN = Hom(TM,\ \varphi^{-1}TN) \to M$$

vektör demetinin bir kesiti olarak düşünülebilir. $Hom(TM,\ \varphi^{-1}TN) \to M$ vektör demeti, M manifoldu üzerindeki ∇^M Levi- Civita konneksiyonu ve ∇^φ pull-back konneksiyonundan indirgenen ∇ konneksiyonuna sahiptir. ∇ konneksiyonun $d\varphi \epsilon \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN)$ kesitine uygulanmasıyla φ dönüşümünün

$$T^*M \otimes T^*M \otimes \varphi^{-1}TN \to M$$

vektör demetinin bir kesiti olan ikinci temel formuna ulaşılır.

Tanım 3.3.2 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi: M \to N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda φ dönüşümünün ikinci temel formu $d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $\nabla d\varphi$ ile gösterilir ve $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla d\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$
$$(X,Y) \to \nabla d\varphi(X,Y)$$
$$\nabla d\varphi\,(X,Y) = (\nabla_X d\varphi)(Y) = \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y)$$

şeklinde tanımlanır [12].

$\{x^1,\dots,x^m\}$ ve $\{y^1,\dots,y^n\}$ sırasıyla (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları üzerindeki lokal koordinat sistemleri olsun. Bu durumda

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \nabla d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{\gamma=1}^{n} \varphi_{;ij}^{\gamma}\,\frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

yazılabilir. Burada

$$\varphi^{\gamma}_{;ij} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{\gamma}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^k} + L^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^j} \right)$$

olup Γ^k_{ij} ve $L^{\gamma}_{\alpha\beta}$ sırasıyla M ve N deki Christoffel sembolleri ve “;” de ikinci mertebeden kovaryant kısmi türevi göstermektedir [12].

Önerme 3.3.3. M ve N Riemann manifoldları ve $\varphi: (M, g) \to (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin ikinci temel formu simetriktir [12].

Örnek 3.3.4. (Altmanifoldlar) (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi: M \to N$$

bir izometrik immersiyon olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti teğet ve normal demetinin direkt toplamı olarak

$$\varphi^{-1}TN = \tau M \otimes \mathcal{V}M, \quad X = X^T + X^{\perp}$$

biçiminde yazılabilir. $d\varphi$ türev dönüşümünün, TM ile TM nin $d\varphi$ altında $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetindeki görüntüsü olan τM yi özdeşleştirdiği düşünülürse, $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla^{\varphi}_X \big(d\varphi(Y)\big) = \nabla^N_X Y$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $d\varphi(\nabla^M_X Y)$, $\nabla^N_X Y$ nin tanjant bileşeni ve $\nabla d\varphi(X, Y)$ ise $\nabla^N_X Y$ nin normal bileşenidir. Böylece $\nabla d\varphi(X, Y), N$ deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun $B(X, Y)$ ile gösterilen ikinci temel formu olur. Dolayısıyla bir φ izometrik immersiyonun ikinci temel formunun, N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun ikinci temel formuna eşit olduğu görülür [12].

Tanım 3.3.5. (M^m, g), (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi: M^m \to N^n$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin tensiyon alanı $\tau(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ ile gösterilir ve

$$\tau(\varphi) = divd\varphi = -d^{*}d\varphi = iz\nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \nabla d\varphi(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_i, \dots, e_m\}$, M üzerinde bir ortonormal bazdır [12].

Tanım 3.3.6. (M, g) ve (N, h) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları, $x \in M$ ve $\varphi: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin enerji yoğunluğu $e(\varphi)$ ile gösterilen ve

$$e(\varphi): M \to [0,\infty)$$
$$x \to e(\varphi)_x = \frac{1}{2}|d\varphi_x|^2$$

şeklinde tanımlanan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}, T_xM$ tanjant uzayı için bir ortonormal baz ve $|d\varphi_x|^2$,

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i))$$

ile tanımlanan Hilbert-Schmidt normudur [12].

Tanım 3.3.7. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları; D, M de bir kompakt bölge ve $\varphi: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin enerji integrali, φ nin enerji yoğunluğunun integrali olarak tanımlanır ve $E(\varphi; D)$ ile gösterilir. Yani

$$E(\varphi; D) = \int_D e(\varphi) v_g = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 v_g$$

dir. $E(\varphi; D) \geq 0$ dır ve $E(\varphi; D) = 0$ olması için gerek ve yeter şart φ nin D üzerinde sabit olmasıdır. Eğer M manifoldu kompakt ise $E(\varphi; M)$ yerine $E(\varphi)$ gösterimi kullanılır. Enerji integrali sadece g ve h metriklerine bağlıdır [12].

Tanım 3.3.8. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$C^{\infty}(M,N) = \{\varphi \,|\, \varphi: M \to N, \varphi \ bir \ C^{\infty} \ dönüşüm \}$$

kümesini göz önüne alalım. $\varphi \in C^{\infty}(M,N)$ dönüşümü kompakt bir D bölgesi üzerinde

$$E(.;D): C^{\infty}(M,N) \to R$$

ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ ye harmoniktir denir [12].

Tanım 3.3.9. M ve N Riemann manifoldları ve

$$\varphi: M \to N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin bir C^{∞} varyasyonu, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\varphi: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$
$$(x,t) \to \varphi_t(x)$$

biçiminde tanımlanır öyle ki $\varphi_0 = \varphi$ dir [12].

$\{\varphi_t\}$, C^{∞} olarak sadece bir $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametresine bağlı diferensiyellenebilir dönüşümlerin bir ailesi olarak düşünülebilir.

Tanım 3.3.10. M ve N Riemann manifoldları

$$\varphi: M \to N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olsun. $\forall x \in M$ için $t \to \varphi_t(x)$ dönüşümü $\varphi(x) \in N$ noktasından geçen bir C^{∞} eğri tanımlar. Bu eğrinin

$$v(x) = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}N$$

ile tanımlanan ve $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan hız vektörüne φ_t nin varyasyon vektör alanı denir [12].

Tersine $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan v için φ nin

$$\varphi_t(x) = exp_{\varphi(x)}(tv(x))$$

ile tanımlı bir tek olmayan $\{\varphi_t\}$ ailesi vardır.

Tanım 3.3.11. M ve N Riemann manifoldları ve D, M nin kompakt bir altkümesi olsun. Bu durumda $\varphi: M \to N, C^\infty$ dönüşümünün bir C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonu $\forall t$ için $M \setminus \dot{D}$ üzerinde $\varphi_t = \varphi$ şartını sağlıyorsa $\{\varphi_t\}$ varyasyonu D içinde desteklenir denir. Burada $\dot{D}$ ile D nin içi gösterilmektedir [12].

Tanım 3.3.8 i bir başka şekilde aşağıdaki gibi vermek mümkündür.

Tanım 3.3.12. (M, g) *ve* (N, h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi: M \to N$$

diferensiyellenebilir dönüşümü M nin bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir harmonik dönüşüm denir [12].

Tanım 3.3.13. (M, g) *ve* (N, h) Riemann manifoldları, $x \in M$ ve

$$\varphi: M \to N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik $\langle\ ,\ \rangle$ ile gösterilir ve $v, w \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $x \in M$ noktasında

$$\langle v, w\rangle_x = h_{\varphi(x)}\big(v(x), w(x)\big)$$

şeklinde tanımlanır [12].

Önerme 3.3.14. (Enerjinin Birinci Varyasyonu) $\varphi: M \to N$, Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle\ ,\ \rangle$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t;D)\,\Big|_{t=0} = -\int_D \langle v, T(\varphi)\rangle v_g$$

dir. Burada $x \in D$ ve $v_x, \{\varphi_t\}$ nin

$$v_x = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}\,\Big|_{t=0}$$

ile tanımlanan varyasyon vektör alanıdır [12].

M, N Riemann manifoldları, $\varphi: M \to N$ bir C^∞ dönüşüm ve D, M nin bir kompakt altkümesi olsun. Bu durumda φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau(\varphi) = 0$ olmasıdır [12].

Tanım 3.3.15. M, N Riemann manifoldları, $\varphi: M \to N$ bir harmonik dönüşüm olsun. Bu durumda $\tau(\varphi) = 0$ denklemi harmonik denklem veya tensiyon alanı denklemi olarak adlandırılır [12].

Önerme 3.3.16. M, N Riemann manifoldları, $\varphi: M \to N$ bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda $\tau(\varphi) = izB = (boyM)\mu^M$ dir. Öyleyse bir izometrik immersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şart bu izometrik immersiyonun minimal olmasıdır [12].

Tanım 3.3.17. M ve N Riemann manifoldları, $x \in M$ ve $\varphi: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin tensiyon alanı

$$\tau(\varphi) = iz\nabla d\varphi$$

olmak üzere $D \subseteq M$ kompakt bölgesi için φ nin bienerji integrali

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

ile tanımlanır [5].

Önerme 3.3.18. (Bienerjinin Birinci Varyasyonu) M ve N Riemann manifoldları, $\varphi: (M, g) \to (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$

kompakt altkümesi içinde desteklenen bir C^{∞}varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle\ ,\ \rangle$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik ve $\Delta^{\varphi}= -iz\big(\nabla^{\varphi}\nabla^{\varphi} - \nabla^{\varphi}_{\nabla}\big)$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin kesitleri üzerindeki Laplasyon olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} = \int_D \langle\tau_2(\varphi),v\rangle v_g$$

dir. Burada $x \in D$ için $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin varyasyon vektör alanı; R^N, N manifoldu üzerinde $R^N(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ ile tanımlı eğrilik operatörü ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^{\varphi}\big(\tau(\varphi)\big) - izR^N(d\varphi(-),\tau(\varphi))d\varphi(-)$$

dir [5].

Tanım 3.3.19. (Bitensiyon Alanı) M ve N Riemann manifoldları, $\varphi:(M,g) \to (N,h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin bitensiyon alanı $\tau_2(\varphi)$ ile gösterilir ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^{\varphi}\big(\tau(\varphi)\big) - izR^N(d\varphi(-),\tau(\varphi))d\varphi(-)$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 3.3.20. (Biharmonik Denklem ve Biharmonik Dönüşüm) M ve N Riemann manifoldları, $\varphi:(M,g) \to (N,h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin bitensiyon alanı $\tau_2(\varphi)$ olmak üzere

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^{\varphi}\big(\tau(\varphi)\big) - izR^N\big(d\varphi(-),\tau(\varphi)\big)d\varphi(-) = 0$$

eşitliğine φ dönüşümünün biharmonik denklemi ve $\tau_2(\varphi) = 0$ denklemini sağlayan φ dönüşümüne de bir biharmonik dönüşüm denir [5].

Böylece her harmonik dönüşümün biharmonik olacağı açıktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Dolayısıyla harmonik olmayan (non-harmonik) biharmonik dönüşümler özel bir öneme sahiptir. Böyle dönüşümleri özgün biharmonik dönüşümler olarak adlandıracağız. (N,h) manifoldunun bir semi-Riemannian manifold olması durumunda da $\varphi:(M,g) \to (N,h)$ dönüşümünün bienerji fonksiyoneli ve biharmonik denklemi yukarıda verilen şekilde tanımlanır.

$I \subseteq R$ olmak üzere $\gamma: I \to (M, g)$ bir izometrik immersiyon olsun. $\gamma(I)$ görüntü kümesi M de bir eğrinin görüntüsüdür. γ eğrisi yay parametresi ile verilsin. Bu durumda γ eğrisinin tensiyon alanı $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}=T$ olmak üzere

$$\tau(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}}\, \dot{\gamma}$$

dır. Böylece bitensiyon alanı

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma) &= -\Delta\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau\gamma)d\gamma \\ &= iz\big(\nabla^\gamma\nabla^\gamma - \nabla^\gamma_\nabla\big)\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma) &= \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\, \tau(\gamma) + \nabla^\gamma_{\nabla_{\frac{d}{dt}}\frac{d}{dt}}\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \\ &= \nabla^M_{\frac{d\gamma}{dt}}\nabla^M_{\frac{d\gamma}{dt}}\, \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \\ &= \nabla^2_{\dot{\gamma}}\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma\end{aligned}$$

olur ve γ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\nabla^3_T T - R^M(T, \nabla_T T)T = 0$$

şeklindedir. Buradan her harmonik eğrinin biharmonik olacağı açıkça görülmektedir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Ayrıca R nin bir açık aralığından veya S^1 den tanımlanan bir dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün yay uzunluğunun bir katı ile parametrelendirilmiş bir geodezik olmasıdır. Böylece geodezikler biharmonik eğrilerin bir alt sınıfını oluşturur. Bu durum biharmonik eğrilerin sınıfını geodeziklerden daha geniş hale getirir. Dolayısıyla özgün (geodezik olmayan) biharmonik eğriler oldukça önemlidir [8].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda öncelikle 3-boyutlu para-Sasakian manifoldlar üzerinde tanımlı Legendre eğrilerinin biharmonik olma şartları araştırılacaktır. Daha sonra ise para-Sasakian manifoldların bazı özel tipteki hiperyüzeylerinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar incelenecektir.

4.1. 3-Boyutlu Para-Sasakian Manifoldların Biharmonik Eğrileri

$(\bar{M},\phi,\xi,\eta,\bar{g})$ nin 3-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve $I \subseteq R,\ s \in I$ olmak üzere $\gamma: I \to \bar{M}$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğri olduğunu kabul edelim. $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{ds} = T,\quad \bar{g}(T,T) = \varepsilon_1 = \mp 1$ ve γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T,N,B,k_1,k_2\}$ olsun. Bu durumda γ eğrisinin tensiyon alanı

$$\tau(\gamma) = \bar{\nabla}_T T \tag{4.1}$$

dir. γ eğrisi için

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_T T &= \varepsilon_2 k_1 N,\\ \bar{\nabla}_T N &= -\varepsilon_1 k_1 T - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B,\\ \bar{\nabla}_T B &= -\varepsilon_2 k_2 N,\end{aligned}$$

ile verilen Frenet denklemleri [33] kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_T^2 T &= \varepsilon_2\Big(k_1{}'N + k_1(-\varepsilon_1 k_1 T - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B)\Big)\\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2 k_1^2 T + \varepsilon_2 k_1{}' N - \varepsilon_1 k_1 k_2 B\end{aligned} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_T^3 T = (-3\varepsilon_1\varepsilon_2 k_1 k_1{}')T + (-\varepsilon_1 k_1^3 + \varepsilon_2 k_1{}'' - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_1 k_2^2)N\\ -\varepsilon_1(2k_1{}'k_2 + k_1 k_2{}')B\end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. Diğer taraftan Önerme 3.2.17 kullanılırsa

$$\bar{g}(\bar{R}(T,N)T,N) = \left(\frac{\bar{r}}{2}+2\right)(-\varepsilon_1\varepsilon_2) + \left(\frac{\bar{r}}{2}+3\right)\varepsilon_1(\eta(N))^2, \tag{4.4}$$

$$\bar{g}(\bar{R}(T,N)T,B) = \left(\frac{\bar{r}}{2}+3\right)\varepsilon_1\eta(N)\eta(B) \tag{4.5}$$

olur. Burada $\gamma: I \to \bar{M}$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğri olduğundan

$$\eta(T) = \eta(N) = 0 \tag{4.6}$$

ve

$$\eta(B) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{k_2}\bar{g}(\phi T,N) \tag{4.7}$$

dir. O halde (4.6) ve (4.7) kullanılarak

$$\bar{g}(\bar{R}(T,N)T,N) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\bar{r}}{2}+2\right), \tag{4.8}$$

$$\bar{g}(\bar{R}(T,N)T,B) = 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Bu durumda $\gamma: I \to \bar{M}$ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\begin{aligned} 0 = (-3\varepsilon_1\varepsilon_2 k_1 k_1{}')T + \left(-\varepsilon_1 k_1^3 + \varepsilon_2 k_1{}'' - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_1 k_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 k_1\left(\frac{\bar{r}}{2}+2\right)\right)N \\ -\varepsilon_1(2k_1{}'k_2 + k_1 k_2{}')B \end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklinde bulunur.

(4.10) ile karakterize edilen biharmonik denklem kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.1. $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,\bar{g})$, 3-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve $I \subseteq R$, $s \in I$ olmak üzere $\gamma: I \to \bar{M}$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğrisi olsun. Bu durumda γ nın biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} k_1{k_1}' = 0, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2{k_1}'' - k_1^3 - \varepsilon_2 k_1 k_2^2 + \varepsilon_2 k_1\left(\frac{\bar{r}}{2}+2\right) = 0, \\ 2{k_1}'k_2 + k_1{k_2}' = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

olmasıdır. Burada $\bar{r}$, $\bar{M}$ nin skaler eğriliği; $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{ds} = T$, $\bar{g}(T,T) = \varepsilon_1 = \mp 1$ ve $\bar{g}(N,N) = \varepsilon_2 = \mp 1$ dir.

Sonuç 4.1.2. $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,\bar{g})$, 3-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve $I \subseteq R$, $s \in I$ olmak üzere $\gamma: I \to \bar{M}$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğrisi olsun. Bu durumda γ nın bir özgün (has) biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} k_1 = sabit > 0,\ k_2 = sabit, \\ k_1^2 + \varepsilon_2 k_2^2 - \varepsilon_2\left(\frac{\bar{r}}{2}+2\right) = 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

olmasıdır.

Sonuç 4.1.3. $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,\bar{g})$, 3-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve $I \subseteq R$, $s \in I$ olmak üzere $\gamma: I \to \bar{M}$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğrisi olsun. Bu durumda γ nın bir özgün (has) biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart γ nın ya $k_1 = \sqrt{\left|\varepsilon_2\left(\frac{\bar{r}}{2}+2\right)\right|}$ olacak şekilde bir Legendre çemberi olması ya da $k_1^2 + \varepsilon_2 k_2^2 = \varepsilon_2\left(\frac{\bar{r}}{2}+2\right)$ olacak şekilde bir Legendre helisi olmasıdır.

4.2. Para-Sasakian Manifoldların Biharmonik Hiperyüzeyleri

Bu kısımda para-Sasakian manifoldların nondejenere hiperyüzeylerinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır. Sabit ortalama eğrilikli para-Sasakian manifoldların nondejenere biharmonik hiperyüzeyleri ile para-Sasakian manifoldların total umbilik nondejenere biharmonik hiperyüzeyleri incelenecektir. Ayrıca özel olarak para-Sasakian manifoldların sırası ile Ricci flat ve η-Einstein olması durumunda nondejenere hiperyüzeylerinin biharmonikliği ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir.

$(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir nondejenere hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere Gauss-Weingarten formüllerinden

$$B(X,Y) = \varepsilon\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N)N = -\varepsilon\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X N)N = \varepsilon\bar{g}(A_X N, Y)N \tag{4.13}$$

ve

$$\bar{g}(A_X N, Y)N = \bar{g}(B(X,Y), N) = \bar{g}(b(X,Y), N)N = \varepsilon b(X,Y), \tag{4.14}$$

yazılabilir. Burada $\varepsilon = \bar{g}(N,N)$ dir.

Teorem 4.2.1. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold; M, $\bar{M}$ nin bir nondejenere hiperyüzeyi ve $i: M \to \bar{M}$ bir izometrik immersiyon olsun. ξ karakteristik vektör alanı M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} 2A(grad\ H) + n(grad\ H^2) = 0, \\ (\Delta H) + 4nH = 0, \end{cases} \tag{4.15}$$

olmasıdır. Burada A, M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı ξ ye göre şekil operatörü ve H da M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\mu = H\xi$ olacak şekildeki ortalama eğrilik fonksiyonudur.

İspat. M, $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$ olacak şekilde bir hiperyüzeyi ve $i: M \to \bar{M}$ bir izometrik immersiyon olsun.

$$\{di(e_1), di(e_2), \dots, di(e_{2n}), \xi\},$$

$\bar{M}$ nin bir lokal ortonormal çatısı olmak üzere M hiperyüzeyinin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ lokal ortonormal çatısını göz önüne alalım. Pull-back konneksiyon tanımı kullanılarak $\forall X \in \Gamma(TM)$, $W \in \Gamma(i^{-1}TM)$, için $di(X)$ ile X vektör alanını ve $\nabla^i_X W$ ile de $\bar{\nabla}_X W$ özdeş kılınabilir. M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\mu = H\xi$ olmak üzere $i: M \to \bar{M}$ izometrik immersiyonunun tensiyon alanı

$$\tau(i) = iz\,\nabla di = \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \nabla di(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j B\left(e_j, e_j\right) = (boy\ M)\mu = 2nH\xi, \qquad (4.16)$$

dir. Buradan i izometrik immersiyonunun bitensiyon alanı

$$\begin{aligned}
\tau_2(i) &= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \left\{\nabla^i_{e_j}\nabla^i_{e_j}\tau(i) - \nabla^i_{\nabla_{e_j}e_j}\tau(i) - \bar{R}\left(di(e_j), \tau(i)\right) di(e_j)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \left\{\nabla^i_{e_j}\nabla^i_{e_j}(2nH\xi) - \nabla^i_{\nabla_{e_j}e_j}(2nH\xi) - \bar{R}\left(di(e_j), 2nH\xi\right)di(e_j)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \left\{\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}(2nH\xi) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}(2nH\xi) - \bar{R}\left(di(e_j), 2nH\xi\right)di(e_j)\right\} \\
&= 2n\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \left\{\begin{matrix}\overline{\nabla}_{e_j}(e_j(H)\xi + H\overline{\nabla}_{e_j}\xi) - (\nabla_{e_j}e_j)(H)\xi - H\overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}\xi \\ -H\bar{R}\left(di(e_j), \xi\right)di(e_j)\end{matrix}\right\} \\
&= 2n\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \left\{\begin{matrix} e_j\left(e_j(H)\right)\xi + 2e_j(\mathrm{H})\overline{\nabla}_{e_j}\xi + H\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}\xi \\ -(\nabla_{e_j}e_j)(H)\xi - H\overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}\xi - H\bar{R}\left(di(e_j), \xi\right)di(e_j)\end{matrix}\right\}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tau_2(i) = -2n(\Delta H)\xi - 2nH\Delta^i\xi - 4nA(grad\ H) \\
+2nH\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{R}\left(\xi, di(e_j)\right) di(e_j),
\end{aligned} \qquad (4.17)$$

bulunur. $\tau_2(i)$ bitensiyon alanını teğet ve normal kısımlarına ayırmak için sırasıyla $\Delta^i\xi$ ve $\bar{R}\left(\xi, di(e_j)\right) di(e_j)$ ifadelerinin teğet ve normal bileşenlerini belirlemek yeterli olacaktır. $\bar{M}$ nin bir para-Sasakian manifold olduğu göz önüne alınırsa

$$\bar{g}(\Delta^i\xi\,, \xi) = -\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}\xi - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}\xi, \xi\right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}\xi, \xi\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\xi, \overline{\nabla}_{e_j}\xi\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\left(\phi e_j, \phi e_j\right), \tag{4.18}$$

bulunur. Buradan $\Delta^i\xi$ nin normal kısmı

$$(\Delta^i\xi)^\perp = \bar{g}\left(\Delta^i\xi \quad , \xi\right)\xi = 2n\xi, \tag{4.19}$$

olur. $\Delta^i\xi$ nin teğet kısmı ise

$$\begin{aligned}
(\Delta^i\xi)^\top &= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j\varepsilon_k \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}\xi - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}\xi, e_k\right) e_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j\varepsilon_k \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\mathrm{A}e_j - A(\nabla_{e_j}e_j), e_k\right) e_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j\varepsilon_k \left\{\begin{matrix} e_j\bar{g}\left(\mathrm{A}e_j, e_k\right) - \bar{g}\left(\mathrm{A}e_j, \nabla_{e_j}e_k\right) \\ -\bar{g}(A(\nabla_{e_j}e_j), e_k) \end{matrix}\right\} e_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j\varepsilon_k \left\{e_j b\left(e_j, e_k\right) - b\left(e_j, \nabla_{e_j}e_k\right) - b(\nabla_{e_j}e_j, e_k)\right\} e_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j\varepsilon_k \left\{\nabla_{e_j} b\left(e_k, e_j\right)\right\} e_k,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

dır. Codazzi denkleminden

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j\varepsilon_k \{\nabla_{e_j} b\left(e_k, e_j\right) - \nabla_{e_k} b\left(e_j, e_j\right)\} = \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j\varepsilon_k \left(\bar{R}\left(e_j, e_k\right)e_j\right)^\perp$$

$$= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \bar{g}\big(\bar{R}\big(e_j, e_k\big)e_j, \xi\big)$$
$$= -\bar{S}(\xi, e_k)$$

yazılabilir. Para-Sasakian manifoldlar üzerinde $\bar{S}(\xi, e_k) = 0$ olduğundan

$$\nabla_{e_j} b\big(e_k, e_j\big) = \nabla_{e_k} b\big(e_j, e_j\big)$$

olur. Bu eşitlik (4.19) da yerine yazılırsa

$$(\Delta^i \xi)^\top = 2n(grad\ H), \tag{4.21}$$

bulunur. Diğer taraftan $\bar{M}$, bir para-Sasakian manifold olduğundan

$$\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j\, \bar{g}\left(\bar{R}\left(\xi, di\big(e_j\big)\right) di\big(e_j\big), \xi\right) = -2n\xi, \tag{4.22}$$

elde edilir. Buradan (4.17) eşitliğinde (4.19), (4.21) ve (4.22) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\big(\tau_2(i)\big)^\top = -4nA(grad\ H) - 2n^2(grad\ H^2)$$
$$\big(\tau_2(i)\big)^\perp = (-2n(\Delta H) - 8n^2 H)\xi$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2. Sabit ortalama eğrilikli bir para-Sasakian manifoldun $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ olacak şekildeki bir hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.

Sonuç 4.2.3. Harmonik ortalama eğrilikli bir bir para-Sasakian manifoldun $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ olacak şekildeki bir hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.

Sonuç 4.2.4. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\Delta H = \rho H$, $\rho \in R$, olacak şekildeki bir bir nondejenere hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$A(grad\ H) = -\frac{n}{2} grad\ H^2, \tag{4.23}$$

olmasıdır.

Teorem 4.2.5. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$ olacak şekilde bir tamamen umbilik biharmonik nondejenere hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M sabit ortalama eğriliğine sahiptir.

İspat. $i: M \to \bar{M}$ bir izometrik immersiyon olmak üzere $\bar{M}$ nin bir lokal ortonormal çatısı

$$\{di(e_1), di(e_2), \dots, di(e_{2n}), \xi\},$$

olsun. $di(X)$ ile X vektör alanını özdeş kabul ederek M hiperyüzeyinin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ lokal ortonormal çatısını göz önüne alalım. M tamamen umbilik olduğundan ρ_j, $(1 \leq j \leq 2n)$, e_j doğrultusundaki asli eğrilikler olmak üzere $Ae_j = \rho_j e_j$ yazılabilir. Yani herhangi bir $x \in M$ noktasındaki tüm asli eğrilikler aynı bir $\rho(x)$ sayısına eşittir. Bu durumda

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\big(B(e_j, e_j), \xi\big) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\big(Ae_j, e_j\big) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\big(\rho e_j, e_j\big) \\ &= \rho \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$A(grad\ H) = \frac{1}{2} grad\ \rho^2$$

bulunur. M biharmonik olduğundan (4.2.3) eşitliği gereği

$$(n+1)(grad\ \rho^2) = 0$$
$$(\Delta\rho) + 4n\rho = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Bundan sonraki kısımda bir $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,\bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM)$ ve birim normal vektör alanı timelike olacak şekildeki bir nondejenere hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır.

Teorem 4.2.6. $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,\bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold; M, $\bar{M}$ nin timelike birim normal vektör alanı N ile birlikte bir nondejenere hiperyüzeyi ve $i: M \to \bar{M}$ bir izometrik immersiyon olsun. $\xi \in \Gamma(TM)$ olmak üzere M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} n(grad\ H^2) + 2A(grad\ H) = 0, \\ \Delta H - H|A|^2 + H\bar{S}(N,N) = 0, \end{cases} \tag{4.24}$$

olmasıdır. Burada $\bar{S}$, $\bar{M}$ para-Sasakian manifoldunun Ricci eğriliği; $\bar{Q}$, $\bar{M}$ para-Sasakian manifoldunun $\forall X,Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için $\bar{g}(\bar{Q}X,Y) = \bar{S}(X,Y)$ ile tanımlanan Ricci operatörü; A, M hiperyüzeyinin timelike birim normal vektör alanı N ye göre şekil operatörü ve H da M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\mu = HN$ olacak şekildeki ortalama eğrilik fonksiyonudur.

İspat. M, $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,\bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir hiperyüzeyi, $i: M \to \bar{M}$ bir izometrik immersiyon ve N de M nin timelike birim normal vektör alanı olsun. M hiperyüzeyinin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n-1}, e_{2n} = \xi\}$ lokal ortonormal çatısını alalım. M nin ortalama eğrilik vektörü $\mu = HN$ olmak üzere $i: M \to \bar{M}$ izometrik immersiyonunun tensiyon alanı

$$\tau(i) = iz\ \nabla di = \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \nabla di(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j B\left(e_j, e_j\right) = (boy\ M)\mu = 2nHN$$

dir. Buradan i izometrik immersiyonunun bitensiyon alanı

$$\tau_2(i) = \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \left\{ \nabla^i_{e_j}\nabla^i_{e_j}\tau(i) - \nabla^i_{\nabla_{e_j}e_j}\tau(i) - \bar{R}\left(di(e_j), \tau(i)\right) di(e_j) \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \begin{Bmatrix} \nabla^i_{e_j}\nabla^i_{e_j}(2nHN) - \nabla^i_{\nabla_{e_j}e_j}(2nHN) \\ -\bar{R}\big(di(e_j), 2nHN\big)di(e_j) \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \begin{Bmatrix} \overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}(2nHN) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}(2nHN) \\ -\bar{R}\big(di(e_j), 2nHN\big)di(e_j) \end{Bmatrix}$$

$$= 2n \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \begin{Bmatrix} \overline{\nabla}_{e_j}(e_j(H)\xi + H\overline{\nabla}_{e_j}N) - (\nabla_{e_j}e_j)(H)N - H\overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}N \\ -H\bar{R}\big(di(e_j), N\big)di(e_j) \end{Bmatrix}$$

$$= 2n \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \begin{Bmatrix} e_j\left(e_j(H)\right)N + 2e_j(\mathrm{H})\overline{\nabla}_{e_j}N + H\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}N \\ -(\nabla_{e_j}e_j)(H)N - H\overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}N - H\bar{R}\big(di(e_j), N\big)di(e_j) \end{Bmatrix}$$

olmak üzere

$$\tau_2(i) = -2n(\Delta H)N - 2nH\Delta^i N - 4nA(grad\ H)$$
$$-2nH \left\{ \sum_{j=1}^{2n-1} \varepsilon_j \bar{R}\big(di(e_j), N\big)di(e_j) + \bar{R}(di(\xi), N)di(\xi) \right\}, \qquad (4.25)$$

bulunur. $\tau_2(i)$ bitensiyon alanını teğet ve normal kısımlarına ayırmak için sırasıyla $\Delta^i N$ ve $\bar{R}$ yi içeren ifadelerin teğet ve normal bileşenlerini belirlemek yeterli olacaktır. $\Delta^i N$ nin normal bileşeni

$$\bar{g}\big(\Delta^i N, N\big) = -\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}N - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j}N, N\right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}N, N\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}N, \overline{\nabla}_{e_j}N\right)$$

$$= |A|^2, \qquad (4.26)$$

olmak üzere

$$(\Delta^i N)^{\perp} = -\bar{g}\big(\Delta^i N\, , N\big)N = -|A|^2 N, \tag{4.27}$$

şeklindedir. $\Delta^i \xi$ nin teğet kısmı için

$$\begin{aligned}
(\Delta^i N)^{\top} &= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j} N - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_j}e_j} N, e_k\right) e_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \bar{g}\left(\overline{\nabla}_{e_j} \mathrm{A} e_j - A(\nabla_{e_j} e_j), e_k\right) e_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \begin{Bmatrix} e_j \bar{g}\big(\mathrm{A}e_j, e_k\big) - \bar{g}\left(\mathrm{A}e_j, \nabla_{e_j} e_k\right) \\ -\bar{g}(A(\nabla_{e_j} e_j), e_k) \end{Bmatrix} e_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \begin{Bmatrix} -e_j b\big(e_j, e_k\big) \\ +b\left(e_j, \nabla_{e_j} e_k\right) + b(\nabla_{e_j} e_j, e_k) \end{Bmatrix} e_k \\
&= -\sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \left\{\nabla_{e_j} b\big(e_k, e_j\big)\right\} e_k
\end{aligned}$$

ve Codazzi denkleminden

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \nabla_{e_j} b\big(e_k, e_j\big) - \nabla_{e_k} b\big(e_j, e_j\big) &= \sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \big(\bar{R}\big(e_j, e_k\big) e_j\big)^{\perp} \\
&= -\sum_{j,k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \bar{g}\big(\bar{R}\big(e_j, e_k\big) e_j, N\big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_k \bar{S}(N, e_k)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$(\Delta^i N)^{\top} = 2n(grad\ H) + \textstyle\sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_k \bar{S}(N, e_k)$$

yani

$$(\Delta^{i}N)^{\top}=2n(grad\ H)+\ (\bar{Q}(N))^{\top}, \tag{4.28}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{j=1}^{2n-1}\varepsilon_j\bar{R}\big(di(e_j),N\big)di(e_j)+\bar{R}(di(\xi),N)di(\xi)=\omega,$$

denilirse ω nın teğet kısmı

$$\begin{aligned}
w^{\top}&=\sum_{k=1}^{2n-1}\varepsilon_k\bar{g}\left(\sum_{j=1}^{2n-1}\varepsilon_j\bar{R}\big(di(e_j),N\big)di(e_j)+\bar{R}(di(\xi),N)di(\xi),e_k\right)e_k\\
&\quad+\bar{g}\left(\sum_{j=1}^{2n-1}\varepsilon_j\bar{R}\big(di(e_j),N\big)di(e_j)+\bar{R}(di(\xi),N)di(\xi),\xi\right)\xi\\
&=\sum_{j,k=1}^{2n-1}\varepsilon_k\bar{g}\big(\varepsilon_j\bar{R}\big(di(e_j),N\big)di(e_j),e_k\big)\,e_k\\
&\quad+\sum_{j=1}^{2n-1}\bar{g}\big(\varepsilon_j\bar{R}\big(di(e_j),N\big)di(e_j),\xi\big)\,\xi\\
&=-\sum_{k=1}^{2n-1}\varepsilon_k\bar{S}(N,e_k)\,e_k\\
&=-(\bar{Q}(N))^{\top}\,,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

ve ω nın normal kısmı

$$\bar{g}(\bar{R}(di(\xi),N)di(\xi),N)=N$$

olmak üzere

$$w^{\perp} = -\bar{g}\left(\sum_{j=1}^{2n-1} \varepsilon_j \bar{R}\big(di(e_j), N\big)di(e_j) + \bar{R}(di(\xi), N)di(\xi), N\right)N$$
$$= \bar{S}(N, N) \quad (4.30)$$

bulunur. Buradan (4.2.15)-(4.2.18) eşitlikleri göz önüne alınırsa $\tau_2(i)$ bitensiyon alanının teğet ve normal kısımları, sırasıyla,

$$\big(\tau_2(i)\big)^{\top} = -2n^2(grad\, H^2) - 4nA(grad\, H)$$
$$\big(\tau_2(i)\big)^{\perp} = -2n\big(\Delta H - H|A|^2 + H\bar{S}(N, N)\big)N$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.7. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold; M, $\bar{M}$ nin timelike birim normal vektör alanı N ile birlikte bir sabit ortalama eğrilikli nondejenere hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart ya M nin minimal ya da

$$|A|^2 = \bar{S}(N, N)$$

olmasıdır. Özel olarak, $\bar{M}$ para-Sasakian manifoldu pozitif olmayan Ricci eğriliğine sahip ise M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.

Sonuç 4.2.8. Ricci flat bir para-Sasakian manifoldun timelike birim normal vektör alanına sahip ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki sabit ortalama eğrilikli bir nondejenere M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.

Sonuç 4.2.9. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir η-Einstein para-Sasakian manifold; M, $\bar{M}$ nin timelike birim normal vektör alanı N ile birlikte bir nondejenere hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} n(grad\, H^2) + 2A(grad\, H) = 0, \\ \Delta H - H|A|^2 - H\left(\frac{\bar{r}}{2n} + 1\right) = 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

olmasıdır. Özel olarak, eğer $0 \neq H = sabit$ ise M nin bir özgün biharmonik hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart

$$|A|^2 = -\left(\frac{\bar{r}}{2n} + 1\right)$$

olmasıdır.

İspat. $\bar{M}$, $(2n+1)$-boyutlu bir η-Einstein para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda Lemma 3.2.16 dan

$$\bar{S}(N,N) = -\left(\frac{\bar{r}}{2n} + 1\right)$$

bulunur. Bu son eşitlik (4.24) biharmonik denkleminde yerine yazılırsa (4.31) elde edilir. Özel olarak, eğer $0 \neq H = sabit$ ise $grad\, H = 0$ ve $\Delta H = 0$ olacağından ispat tamamlanır.

Teoerem 4.2.10. $(\bar{M}(c), \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian space form; M, $\bar{M}$ nin timelike birim normal vektör alanı N ile birlikte bir nondejenere hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} n(grad\, H^2) + 2A(grad\, H) = 0, \\ \Delta H - H|A|^2 - \frac{1}{2}H(n(c-3) - 2c + 3) = 0, \end{cases} \tag{4.32}$$

olmasıdır. Özel olarak M sabit ortalama eğrilikli ise M nin minimal olmayan bir biharmonik hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart

$$|A|^2 = \frac{1}{2}(n(3-c) + 2c - 3)$$

olmasıdır.

İspat. $\bar{M}(c)$, bir para-Sasakian space form olduğundan Ricci eğriliğinin tanımı ve Teorem 3.2.18 kullanılarak

$$\bar{S}(N,N) = \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \bar{g}(\bar{R}(e_i,N)N, e_i) + \bar{g}(\bar{R}(\xi,N)N, \xi) - \bar{g}(R(N,N)N, N)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \left\{ \frac{c-3}{4} (\bar{g}(e_i, e_i)\bar{g}(N,N)) + \frac{c-1}{4} (3\bar{g}(e_i, \phi N)\bar{g}(e_i, \phi N)) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \left\{ -\frac{c-3}{4} \bar{g}(e_i, e_i) \right\} + \frac{3(c-1)}{4} \bar{g}(\phi N, \phi N)$$

$$= -\frac{c-3}{4}(2n-1) + \frac{3(c-1)}{4}$$

bulunur. Son ifade (4.24) biharmonik denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teoerem 4.2.11. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir η-Einstein para-Sasakian manifold; M, $\bar{M}$ nin timelike birim normal vektör alanı N ile birlikte bir nondejenere hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda $\bar{M}$ nin tamamen umbilik biharmonik M hiperyüzeyi sabit ortalama eğriliklidir.

İspat. $\bar{M}$ bir η-Einstein para-Sasakian manifold ve M, $\bar{M}$ nin timelike birim normal vektör alanı N ile birlikte bir tamamen umbilik nondejenere hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\rho \in C^\infty(M)$ fonksiyonu için $A = \rho I$ dır. Bu durumda M nin bir lokal ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n-1}, e_{2n} = \xi\}$ olmak üzere

$$H = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \bar{g}(B(e_i, e_i), N)$$

$$= -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \bar{g}(A\, e_i, e_i)$$

$$= -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \bar{g}(\rho\, e_i, e_i)$$

$$= -\frac{2n-1}{2n} \rho \,, \tag{4.33}$$

bulunur. Ayrıca

$$A(grad\, H) = -\rho \left(\frac{2n-1}{2n} grad\, \rho \right) = -\frac{2n-1}{4n} grad\, \rho^2, \tag{4.34}$$

ve

$$|A|^2 = 2n\rho^2 , \tag{4.35}$$

dir. (4.33), (4.34) ve (4.35) eşitlikleri (4.31) de yerine yazılırsa

$$\left(n + \frac{3}{4n} - 2\right) grad\, \rho^2 = 0,$$
$$-\Delta\rho + 2n\rho^3 + \left(\frac{\bar{r}}{2n} + 1\right)\rho = 0,$$

elde edilir. Buradan ya $\rho = 0$ ve böylece $H = 0$, ya da $\rho^2 = -\frac{\bar{r}+2n}{4n^2} = sabit$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.12. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu bir η-Einstein para-Sasakian manifold; M, $\bar{M}$ nin timelike birim normal vektör alanı N ile birlikte bir nondejenere hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. Eğer $\bar{M}$ nin skaler eğriliği $\bar{r} \geq 2n$ ise bu durumda $\bar{M}$ nin tamamen umbilik biharmonik M hiperyüzeyi minimaldir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu para-Sasakian manifoldlar üzerinde tanımlı spacelike ve timelike eğrilerin biharmonik olma şartları elde edilmiştir. Ayrıca $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifoldun karakteristik vektör alanını sırasıyla teğet ve normal demetinde içeren nondejenere hiperyüzeylerinin biharmonik hiperyüzey olmaları için gerek ve yeter şartlara ulaşılmıştır.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar tez çalışmasında temel alınan yöntemi kullanarak değişik tipteki parakontakt metrik manifoldların altmanifoldları için biharmonik olma şartlarını inceleyebilirler.

KAYNAKLAR

[1] R. Caddeo, "Riemannian manifolds on which the distance function is harmonic", Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 40, 93-101, 1982.

[2] R. Caddeo, L. Vanhecke, "Does "$\Delta^2 d^{2-n} = 0$ on a Riemannian manifold" imply flatness?", Period. Math. Hungar., 17, 109-117, 1986.

[3] L. Sario, M. Nakai, C. Wang, L. Chung, *Classification theory of Riemannian manifolds. Harmonic, quasiharmonic and biharmonic function*, Lecture Notes in Mathematic 605, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[4] J. Eells, J. H. Sampson, "Harmonic mappings of Riemannian manifolds", *Amer. J. Math.* 86, 109-160, 1964.

[5] S. Montaldo, C. Oniciuc, "A Short Survey on Biharmonic Maps Between Riemannian Manifolds", *Revista de la Union Math. Argentina*, 47(2), 1-22, 2006.

[6] G.Y. Jiang, "2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds",*Chinese Ann. Math. Ser. A* 7, 130-144, 1986.

[7] G.Y. Jiang, "2-harmonic maps and their first and second variational formulas", *Chinese Ann. Math. Ser. A* 7, 389-402, 1986.

[8] C. Oniciuc, S. Montaldo, P. Piu, "Biharmonic Curves on a Surface", *Rend. Math. Appl.*, 21, 143-157, 2001.

[9] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc., "Biharmonic Submanifolds of S^3", *Int. J. Math.*, 12, 867-876, 2001.

[10] J. Inoguchi, "Biharmonic curves in Minkowski 3-space", *Int. J. Math. Sci.*, 21**,** 1365-1368, 2003.

[11] B.-Y. Chen, "Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type", *Soochow J. Math.*, 17, 169-188, 1991.

[12] P. Baird, J. C. Wood, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[13] B.Y. Chen, S. Ishikawa, "Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo Euclidean spaces", *Kyushu Journal of Mathematics*, 52, 167-185, 1998.

[14] S. Yüksel Perktas, "Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt manifoldların alt manifoldları ve biharmoniklikleri", Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, 2011.

[15] T. Hasanis, T. Vlachos, "Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field", *Mathematische Nachrichten*, 172, 145-169, 1995.

[16] B.Y. Chen, S. Ishikawa, "Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean Spaces", *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 45(2), 323-347, 1991.

[17] A.Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, "Classification results for biharmonic results in spheres", *Israel J. Math.*, 168, 201-220, 2008.

[18] B.O'Neill, *Semi-Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[19] S. Kaneyuki and M. Konzai, "Paracomplex structure and afine symmetric spaces", *Tokyo J. Math*., vol. 8, pp. 301-308, 1985.

[20] S. Zamkovoy, "Canonical connection on paracontact manifolds", *Ann. Glob. Anal. Geo.* Vol. 36, pp. 37-60, 2009.

[21] J. Welyczko, "Para-CR structures on almost paracontact metric manifolds", *Journal of Applied Analysis*, Volume 20, Issue 2, 105–117, 2014.

[22] J. Welyczko, “On Legendre curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds”, Results in Math., 54, 377-387, 2009.
[23] B. E. Acet, S. Yüksel Perktaş, E. Kılıç, “On submanifolds of para-Sasakian manifolds”, *JP Journal of Geometry and Topology,* Vol.19 (1), 1-18, 2016.
[24] S. Yüksel Perktaş , “On para-Sasakian manifolds satisfying certain curvature conditions with canonical paracontact connection”, *Khayyam J. Math.*, vol.3,no.1, 33-43, 2017.
[25] A.M. Blaga, “η-Ricci solitons on para-Kenmotsu manifolds”, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Vol.20, No.1, 1-13, 2015.
[26] B. E. Acet, “Para-Sasakian manifoldların alt manifoldları”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, 2014.
[27] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri,* İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No. 2, 1983.
[28] B. Şahin, *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel Yayınları, 2012.
[29] K. Yano, M. Kon, *Structure on manifolds,* Word Scientific, 1984.
[30] S. Zamkovoy, “Para-Sasakian manifolds with a constant paraholomorphic section curvature”. arXiv:0812.1676v1, 2008.
[31] S. Yüksel Perktaş¸, S. Keleş¸, “Erratum to: Ricci Solitons in 3-Dimensional Normal Almost Paracontact Metric Manifolds [Int. Electron. J. Geom. 8(2) (2015), 34–45]”, *Int. Electron. J. Geom.*, 10(1), 0–2, 2017.
[32] J. Walrave, “Curves and surfaces in Minkowski Space”, Doctoral Thesis, K. U. Leuven, Fac. of Science, 1995.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Mustafa YILDIZ
Doğum Yeri : Adıyaman
Doğum Tarihi : 25.02.1988
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : yildiz_m@adalet.gov.tr

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	-
Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	2011
Lise		Çelikhan ÇPL	2005