T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKINLIK YAKIN HALKALAR

ABDURRAHMAN GENÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKINLIK YAKIN HALKALAR

Abdurrahman GENÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Bu tez 03/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN
Danışman

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKINLIK YAKIN HALKALAR

Abdurrahman GENÇ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN
Yıl : 2019, Sayfa sayısı: 84 + vi

Jüri : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN
Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN

Bu çalışmanın birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmanın amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde, bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntem açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, yakın kümeler ve yakın yaklaşım uzayları ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir.

Beşinci bölümde, yakınlık cebirsel yapılar ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

Altıncı bölümde, yakın halkalar ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedilmiştir.

Yedinci bölümde, yakınlık yakın halka tanımlanmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yakın küme; Yakın yaklaşım uzayı; Yakınlık halkası; Yakın halka; Yakınlık yakın halka

ABSTRACT

MSc Thesis

NEARNESS NEAR RINGS

Abdurrahman GENÇ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN
Year : 2019, Number of Pages: 84 + vi

Jury : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Assist. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN
Assist. Prof. Dr. Ebubekir İNAN

In the first chapter of this study, the aim and importance of the study are mentioned. In the second chapter, a summary of the literature is presented in accordance with the purpose of this study. In the third chapter, the material and method used in this study are explained.

In the fourth chapter, some basic informations given about near sets and nearness approximation spaces. In the fifth chapter, some results related to nearness algebraic structures are examined.

In the sixth chapter, the basic characteristics of near rings are mentioned.

In the seventh chapter, the nearness near ring is also defined, and some results have been obtained.

Key Words: Near set; Nearness approximation space; Nearness ring; Near ring; Nearness near ring

BEYAN

“**Yakınlık Yakın Halkalar**” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve ayrıca, alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Abdurrahman GENÇ

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen ve bu tezi hazırlarken bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım. Bu çalışmada verilen orijinal sonuçların kontrol edilmesinde desteğini ve teknik yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{O}$	: Algılanabilen nesnelerin kümesi
$\mathcal{F}$	: Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi
φ	: Çıkarım fonksiyonu
$\sim_B$	: Ayırt edilemezlik bağıntısı
$[x]_B$	: Yakınlık sınıfı
ξ_B	: Bölüm kümesi
$N_r(B)$	: Ayrışımların kümesi
$N_r(B)_* X$	: $N_r(B)$-alt yaklaşımı
$N_r(B)^* X$	: $N_r(B)$-üst yaklaşımı
S	: Yakınlık yarı-grup
G	: Yakınlık grup
$\sim_r$	: Sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısı
$\sim_\ell$	: Sol zayıf eşdeğerlik bağıntısı
$G/\sim_\ell$	: Sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G de belirttiği tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi
R	: Yakınlık halka
η	: Yakınlık halka homomorfizması
$Ker\eta$	: η yakınlık halka homomorfizmasının çekirdeği
N	: Yakın-halka
N_0	: N nin sıfır-simetrik kısmı
N_c	: N nin sabit kısmı
${}_N\Gamma$	: N-grup
$Hom(N,N')$	: Yakın-halka homomorfizmalarının kümesi
$Hom_N(\Gamma,\Gamma')$	: N-homomorfizmaların kümesi
M	: Yakınlık yakın-halka

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmanın amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde, bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntem açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, yakın kümeler ve yakın yaklaşım uzayları ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde, yakınlık cebirsel yapılar ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir. Altıncı bölümde, yakın halkalar ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedilmiştir. Yedinci bölümde, yakınlık yakın halka kavramı tanımlanmış ve bazı özgün sonuçlar verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Küme kavramı ilk defa 1874 yılında G. Cantor tarafından tanımlanmıştır. İçinde yaşadığımız doğada birçok belirsizlik durumu söz konusudur. Bu belirsizlikler ancak küme teorisi yardımı ile algılanabilir. 1874 yılından günümüze kadar sürekli olarak sınırlarını zorlayan ve gelişen kümeler teorisi insanlığa yeni ufuklar açmaktadır.

Zadeh [1] belirsizliği betimlemek için herhangi bir kümenin fuzzy alt kümesini tanımlamıştır. Daha sonra Rosenfeld [2] fuzzy alt küme kavramını kullanarak herhangi bir grubun fuzzy alt grubunu tanımlamıştır. Rosenfeld'in bu çalışması fuzzy cebirin gelişmesinde önemli bir rol üstlenmiştir. Bu çalışmalardan sonra birçok matematikçi bu konuyu incelemiştir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgiler *Fuzzy Commutative Algebra* [3] ve *Fuzzy Group Theory* [4] adlı kaynaklarda verilmiştir.

Pawlak [5] belirsizlik problemini çözmek için yaklaşımlı küme kavramını tanımlamıştır. Belirsizlik ile ilgili yeni bir matematiksel model olan yaklaşımlı küme teorisi hem teoride hem de pek çok mühendislik alanında büyük ilgi görmüştür [6-8].

Peters yaklaşımlı küme kavramının bir genelleştirmesi olarak yakın küme kavramını tanımlamıştır. Yakın küme teorisi ile ilgili bilgiler için [9-11] nolu kaynaklar incelenebilir.

Yukarıda belirtilen küme teorileri dikkate alındığında, fuzzy küme, yaklaşımlı küme ve yakın küme kavramlarının Cantor'un klasik küme kavramını tamamlayan ve belirsizlik durumlarının modellenmesine yardımcı olan kavramlar olduğu görülmektedir.

Günümüz matematik ve mühendislik dünyasında fuzzy kümeler, yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler ve ilgili cebirsel yapılar önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle yeni sonuçlar elde etmek amacıyla, özellikle [12-15] nolu kaynaklar dikkate alınarak, yakın küme teorisinde cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar incelenmiştir. Böylece yakın yaklaşım uzayında halka kavramını genelleştirmek hedeflenmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Yakın halkalar ve yakınlık halkaları ile ilgili olarak temin ettiğimiz kitaplar ve makaleler, mevcut bilimsel yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Tez çalışmamızın amacına uygun olarak veriler bir araya getirilmiş ve özgün sonuçlar elde edilmiştir.

4. TEMEL KAVRAMLAR

4.1 Yakın Kümeler

Tanım 4.1.1 $(G,*)$ bir cebirsel yapı, yani her $a,b \in G$ için $a*b \in G$ ise G ye bir grupoid denir.

Tanım 4.1.2 [10] Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyonlara *çıkarım fonksiyonu* denir.

Tanım 4.1.3 Algılanabilen nesneler, yansıyan ışık kaynağındaki görsel cisimlerin ayırt edici özellikleri olmak üzere, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, bir φ görsel çıkarım fonksiyonu $\varphi : X \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. $x \in X$ nesnesi için $\varphi(x)$, $x \in X$ nesnesinin görsel algıdaki zenginliğini temsil eder.

Tanım 4.1.4 [10] algılanabilen nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının boş olmayan bir kümesi olmak üzere, $(\mathcal{O},\mathcal{F})$ ye bir *algılanabilir sistem* denir.

Sembol	*Anlamı*
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathcal{O}$	Algılanabilen nesnelerin kümesi,
$\wp(\mathcal{O})$	$\mathcal{O}$ nun kuvvet kümesi
X	$X \subseteq \mathcal{O}$ örnek nesnelerin kümesi,
x	$x \in \mathcal{O}$ örnek nesne,
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi,
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,

L	Tanım uzunluğu,
i	$i \leq L, \quad L \in \mathbb{Z}^{+}$,
φ_i	$\varphi_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ çıkarım fonksiyonu,
Φ	$\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L$ nesne tanımlaması,
$\Phi(x)$	$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$

Tablo 4.1

Nesneler ancak matematiksel birtakım tanımlamalar yardımıyla bilgisayar sistemleri tarafından algılanabilirler. Bir $x \in X$ nesnesinin tanımı, çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlenir. Burada önemli konulardan biri de $\varphi_i \in B$ çıkarım fonksiyonlarının, nesnelerin hangi yönüyle tanımlandığı dikkate alınarak belirlenmesidir. $B \subseteq \mathcal{F}$, $X \subseteq \mathcal{O}$ örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L$,

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan nesne tanımlamasıdır. Özellikle görüntü analizi gibi bilgisayar uygulamaları dikkate alınırsa, $\Phi(x)$ tanımlamasının altında sezgisel olarak φ_i fonksiyonları tarafından modellenen her bir sensörün ölçümlerinin kaydedilmesi vardır.

Sembol	*Anlamı*
$\sim_B$	$\sim_B = \{(x,x') \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = \varphi(x')\}$ ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_B$	$[x]_B = \{x' \in X \mid x \sim_B x'\}$ yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O}/\sim_B$	$\mathcal{O}/\sim_B = \{[x]_B \mid x \in \mathcal{O}\}$ bölüm kümesi,
ξ_B	$\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B$,
Δ_{φ_i}	$\Delta_{\varphi_i} = \lvert\varphi_i(x') - \varphi_i(x)\rvert$ çıkarım fonksiyonlarının farkı

Tablo 4.2

Tanım 4.1.5 [10] $x, x' \in \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. $i \leq |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere,

$$\{(x,x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \forall \varphi_i \in B, \Delta_{\varphi_i} = 0\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya $\mathcal{O}$ üzerinde *ayırt edilemezlik bağıntısı* denir ve "$\sim_B$" ile gösterilir.

Tanım 4.1.6 [10] $B \subseteq \mathcal{F}$, nesnelerin tanımlanması ile ilgili çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere, $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ $\left(\Delta_{\varphi_i} = 0\right)$ olacak şekilde en az bir $\varphi_i \in B$ var ise x ve x' nesneleri birbirlerine *minimal yakındır* denir.

Tanım 4.1.7 [10] $X, X' \subseteq \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $x \in X$, $x' \in X'$ için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ var ise X kümesi X' kümesine yakındır denir.

Tanım 4.1.8 [10] $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $x, x' \in X$ olsun. x, x' nesnesine yakın ise X kümesine kendisi ile ilgili yakın küme veya bu duruma X kümesinin *yansımalı yakınlığı* denir.

Teorem 4.1.9 [10] $\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B$ ayrışımındaki her bir sınıf yakın kümedir.

İspat. $\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B = \{[x]_B \mid x \in \mathcal{O}\}$ ayrışımındaki herhangi bir $[x]_B$ sınıfı aynı tanımlamalara sahip nesnelerin kümesidir, yani $x, x' \in [x]_B$ ise

$$x \sim_B x' \text{ (her } \varphi_i \in B \text{ için } \Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)| = 0\text{)}$$

olur. Yansımalı yakınlık tanımı dikkate alınırsa, $[x]_B \in \xi_B$ sınıfı yakın kümedir.

Teorem 4.1.10 [10] ξ_B ayrışımı bir yakın kümedir.

İspat. "$\sim_B$", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B$ ayrışımını tanımlayan bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. $[x]_B \in \xi_B$ sınıfının yakın küme olduğu ve ξ_B ayrışımı birbirleriyle yakın olan nesneler içerdiğinden ξ_B bir yakın kümedir.

Tanım 4.1.11 [10] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi, $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve "$\sim_B$", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$ yapısına *temel yaklaşım uzayı (FAS-Fundamental Approximation Space)* denir.

Temel yaklaşım uzayı, yaklaşımlı küme teorisinin temeli olarak dikkate alınır. Aynı zamanda bir yaklaşım uzayı, var olan algılarımızın yapısal (matematiksel) modelleri olarak gözlemlenebilir.

4.2 Yakın Yaklaşım Uzayı

Sembol	*Anlamı*
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,
$\binom{\lvert B\rvert}{r}$	$\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu,

B_r	$r \leq \lvert B \rvert$,
$\sim_{B_r}$	B_r yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_{B_r}$	$[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$, $r \leq \lvert B \rvert$ yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O}/\sim_{B_r}$	$\mathcal{O}/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$ bölüm kümesi,
$\xi_{\mathcal{O},B_r}$	$\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$,
$N_r(B)$	$N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ ayrışımların kümesi,
ν_{N_r}	$\nu_{N_r} : \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \to [0,1]$ yakınlık fonksiyonu,
$N_r(B)_* X$	$N_r(B)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$ alt yaklaşım,
$N_r(B)^* X$	$N_r(B)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing} [x]_{B_r}$ üst yaklaşım,
$Bnd_{N_r(B)}(X)$	$N_r(B)^* X \setminus N_r(B)_* X = \{x \in N_r(B)^* X \mid x \notin N_r(B)_* X\}$ yakın sınır bölgesi

Tablo 4.3

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $\mathcal{F}$ kümesi de nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

r, kısıtlanmış $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümesinin kardinalitesi olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", yaklaşımlı küme teorisinden $B_r \subseteq B$ alt kümesine kısıtlanmışı olan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi, "$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısının $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin farklı bir ayrışımının tanımlanmasına yol açar. Bu seçim; $\lvert B \rvert$, B deki çıkarım fonksiyonlarının sayısı ve r, B_r kümesinin kardinalitesi olmak üzere, $\binom{\lvert B \rvert}{r}$ farklı şekilde yapılabilir.

“$\sim_{B_r}$” ayırt edilemezlik bağıntısı, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesini ikişer ikişer ayrık olan $[x]_{B_r}$ yakınlık sınıflarına ayırır. Bu sınıfların $\mathcal{O}/\sim_{B_r}=\left\{[x]_{B_r} \middle| x\in\mathcal{O}\right\}$ kümesi bölüm kümesidir. $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı $\xi_{\mathcal{O},B_r}=\mathcal{O}/\sim_{B_r}$ dir. Ayrışımların bir ailesi olan $N_r(B)$ kümesi de $N_r(B)=\left\{\xi_{\mathcal{O},B_r} \middle| B_r\subseteq B\right\}$ dir.

Ayrıca, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $\nu_{N_r}:\wp(\mathcal{O})\times\wp(\mathcal{O})\to[0,1]$ şeklindedir. Yakınlık fonksiyonu bir küme çiftinden $[0,1]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olup, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $B_r\subseteq B$ deki fonksiyonlar yardımıyla özellikleri belli olan nesne kümeleri arasındaki yakınlık derecesini temsil eder.

Nesne özelliklerini temsil eden $B_r\subseteq B\subseteq\mathcal{F}$ alt kümelerinin her birinin $\binom{|B|}{r}$ farklı seçimi, birer farklı $\sim_{B_r}=\left\{(x,x')\in\mathcal{O}\times\mathcal{O} \middle| \forall\varphi_i\in B_r,\ \varphi_i(x')=\varphi_i(x)\right\}$ ayırt edilemezlik bağıntısı, $[x]_{B_r}=\left\{x'\in\mathcal{O} \middle| x\sim_{B_r}x'\right\}$ yakınlık sınıfı, $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı, $N_r(B)=\left\{\xi_{\mathcal{O},B_r} \middle| B_r\subseteq B\right\}$ ayrışımlar kümesi ve ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu belirler. Bu durumda $(x,x')\in\sim_{B_r}$ ise x ile x' nesnelerine $B_r\subseteq B$ deki tüm çıkarım fonksiyonlarına göre $B-$ ayırt edilemezdir denir.

Tanım 4.2.1 [10] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r\le|B|$ olmak üzere; “$\sim_{B_r}$”, $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r\subseteq B\subseteq\mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O},B_r}=\mathcal{O}/\sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B)=\left\{\xi_{\mathcal{O},B_r} \middle| B_r\subseteq B\right\}$ ayrışımların kümesi ve ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $\left(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r(B),\nu_{N_r}\right)$ yapısına *yakın yaklaşım uzayı (NAS-Nearness Approximation Space)* denir.

Teorem 4.2.2 [10] Ayrışımların ailesi olan $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.

İspat. $\xi_{\mathcal{O},B_r} \in N_r(B)$ ayrışımı $[x]_{B_r}$ sınıflarını içerdiğinden ve bu sınıflar birer yakın küme olduklarından $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ bir yakın kümedir. Böylece $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.

Tanım 4.2.3 [10] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $N_r(B)$-alt yaklaşımı

$$N_r(B)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.2.4 [10] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $N_r(B)$-üst yaklaşımı

$$N_r(B)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2.5 [10] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $N_r(B)$-alt yaklaşımı bir yakın kümedir.

İspat. Alt yaklaşımın tanımı dikkate alınırsa, $N_r(B)_* X \subseteq X$ ve $N_r(B)_* X$, X in alt kümeleri olan $[x]_{B_r}$ sınıflarından oluşur. $[x]_{B_r}$ sınıflarının her biri yakın küme olduğundan $N_r(B)$-alt yaklaşımı da bir yakın kümedir.

Benzer durum üst yaklaşım için de geçerlidir.

Teorem 4.2.6 [10] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $N_r(B)$-üst yaklaşımı bir yakın kümedir.

Tanım 4.2.7 [10] Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin sınır bölgesi,

$$Bnd_{N_r(B)}(X) = N_r(B)^* X \setminus N_r(B)_* X$$
$$= \left\{ x \in N_r(B)^* X \middle| x \notin N_r(B)_* X \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2.8 [10] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinde $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ ise X kümesi bir yakın kümedir.

İspat. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ve $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ olmak üzere, iki durum söz konusudur.

(1) $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ $\left(Bnd_{N_r(B)}(X) \neq \varnothing\right)$ olsun. Boştan farklı sınır bölgesi olan $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesi dikkate alınsın. Bunun anlamı $N_r(B)_* X \subset N_r(B)^* X$, yani $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı $N_r(B)^* X$ üst yaklaşımının bir alt kümesi ve aynı zamanda $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı X in bir alt kümesidir. Böylece Teorem 4.2.5 ten X bir yakın kümedir.

(2) $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ $\left(Bnd_{N_r(B)}(X) = \varnothing\right)$ olsun. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise $N_r(B)_* X = N_r(B)^* X$ ve $N_r(B)_* X \subseteq X$ dir. Bu nedenle $N_r(B)_* X$ ve X ortak tanımlamalara sahip nesneler içerir. Her yakınlık sınıfı bir yakın kümedir. Alt yaklaşımın tanımından $N_r(B)_* X$ deki tüm sınıflar aynı zamanda X in alt kümeleridir. Böylece X bir yakın kümedir.

Teorem 4.2.9 [10] Alt veya üst yaklaşıma sahip olan her küme bir yakın kümedir.

İspat. Teorem 4.2.8 dikkate alınırsa, X kümesi bir yakın kümedir ancak ve ancak $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ dır. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ise X kümesi yaklaşıma sahip olan kümedir, yani X kümesi bir yakın kümedir. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise X yakın küme olarak dikkate alınabilir, ancak alt veya üst yaklaşıma sahip olamaz. Sonuç olarak, alt veya üst yaklaşıma sahip olan bir küme yakın kümedir, ancak her yakın küme alt veya üst yaklaşıma sahip değildir.

Örnek 4.2.10 [16] $\mathcal{O} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \{\alpha_1,\alpha_2\},$$
$$\varphi_3 : \mathcal{O} \to V_3 = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 4.2.2 deki gibi tanımlansın.

	A	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_2	α_3	α_2	α_2	α_1	α_1	α_3	α_1	α_2	α_3
φ_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2
φ_3	α_3	α_1	α_3	α_3	α_4	α_2	α_2	α_4	α_3	α_1

Tablo 4.4

Bu durumda

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_2\} \\
&= \{a,c,d,i\} = [c]_{\varphi_1} = [d]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1}, \\
[b]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_3\} \\
&= \{b,g,j\} = [g]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}, \\
[e]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(e) = \alpha_1\}
\end{aligned}$$

$$= \{e, f, h\} = [f]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1}$$

dir. O zaman $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1}\}$ olur.

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, c, e, f, h, i\} = [c]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2}, \\
[b]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b, d, g, j\} = [d]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}\}$ olur. Son olarak,

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\} \\
&= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_3} = [d]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3}, \\
[b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_1\} \\
&= \{b, j\} = [j]_{\varphi_3}, \\
[e]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_4\} \\
&= \{e, h\} = [h]_{\varphi_3}, \\
[f]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_2\} \\
&= \{f, g\} = [g]_{\varphi_3}
\end{aligned}$$

tür. O zaman $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3}\}$ olur.

Böylece $r=1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür.

$X = \{a, c, f, i\} \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin üst yaklaşımı

$$N_1(B)^* X = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap X \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i}$$
$$= [a]_{\varphi_1} \cup [e]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \cup [f]_{\varphi_3}$$
$$= \{a,c,d,i\} \cup \{e,f,h\} \cup \{a,c,e,f,h,i\} \cup \{f,g\}$$
$$= \{a,c,d,e,f,g,h,i\}$$

dir. X kümesinin alt yaklaşımı

$$N_1(B)_* X = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \subseteq X} [x]_{\varphi_i} = \varnothing$$

dir. Ayrıca, X kümesinin sınır bölgesi de

$$Bnd_{N_1(B)}(X) = N_1(B)^* X \setminus N_1(B)_* X$$
$$= \{a,c,d,e,f,g,h,i\} \setminus \varnothing$$
$$= \{a,c,d,e,f,g,h,i\}$$

olur.

Tanım 4.2.11 [16] $X \subseteq \mathcal{O}$, $r \leq |B|$ ve $B_r \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Her $x, y \in X$ için $[x]_{B_r} [y]_{B_r} = [xy]_{B_r}$ ise "$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısına $\mathcal{O}$ üzerinde *tam ayırt edilemezlik bağıntısı* denir.

Teorem 4.2.12 [16] $\left(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r}\right)$ yakın yaklaşım uzayı ve $X, Y \subset \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(1) $N_r(B)_*(X) \subseteq X \subseteq N_r(B)^*(X)$.

(2) $N_r(B)^*(X \cup Y) = N_r(B)^*(X) \cup N_r(B)^*(Y)$.

(3) $N_r(B)_*(X \cap Y) = N_r(B)_*(X) \cap N_r(B)_*(Y)$.

(4) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)_*(X) \subseteq N_r(B)_*(Y)$ dir.

(5) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)^*(X) \subseteq N_r(B)^*(Y)$ dir.

(6) $N_r(B)_*(X \cup Y) \supseteq N_r(B)_*(X) \cup N_r(B)_*(Y)$.

(7) $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*(X) \cap N_r(B)^*(Y)$.

Teorem 4.2.13 [16] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı olsun. X ve Y, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere,

$$N_r(B)^*(X)N_r(B)^*(Y) \subseteq N_r(B)^*(XY)$$

dir.

Teorem 4.2.14 [16] "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. X ve Y, $\mathcal{O}$ nun boştan farklı alt kümeleri olmak üzere,

$$N_r(B)_*(X)N_r(B)_*(Y) \subseteq N_r(B)_*(XY)$$

dir.

4.3 Tanımsal Tabanlı Küme İşlemleri

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; bir $x \in X$ algılanabilir nesnesinin tanımı, nesnenin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları yardımı ile belirlenen Φ fonksiyonu ile tespit edilir. $B \subseteq \mathcal{F}$ örnek nesnelerin çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa, tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L$,

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

nesne tanımlaması elde edilir. Algılanabilir elemanlardan oluşan kümelerdeki elemanların tanımlamalarının dikkate alınması, tanımsal tabanlı küme işlemlerinin çıkış noktasıdır. Bu kısımdaki tüm kümeler algılanabilir nesnelerden oluşan kümelerdir. Genel olarak, V boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, Φ tanımlama fonksiyonu $\Phi : \mathcal{O} \to V^L$ şeklindedir.

Tanım 4.3.1 [17] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi, $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Phi(x) \in V^L$ olsun.

$$\mathcal{Q}(X) = \{\Phi(x) | x \in X\}$$

kümesine X *in küme tanımlaması* denir.

Tanım 4.3.2 [18] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun.

$$X \underset{\Phi}{\cup} Y = \{a \in X \cup Y \,|\, \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \; veya \; \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X *ve* Y *kümelerinin tanımsal birleşimi* denir.

Tanım 4.3.3 [17, 18] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,

$$X \underset{\Phi}{\cap} Y = \{a \in X \cup Y \,|\, \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \; ve \; \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X *ve* Y *kümelerinin tanımsal arakesiti* denir.

Tanım 4.3.4 [18] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,

$$X \underset{\Phi}{\setminus} Y = \{x \in X \,|\, \Phi(x) \notin \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X *kümesinin* Y *kümesinden tanımsal farkı* denir.

Tanım 4.3.5. [18] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi, $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $Y \subseteq X$ olsun.

$$C_{\underset{\Phi}{X}}(Y) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \Phi(x) \notin \mathcal{Q}(Y) \right\}$$

kümesine Y *kümesinin* X *kümesine göre göreceli tanımsal tümleyeni* denir.

Tanım 4.3.6. [18] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olsun.

$$\underset{\Phi}{C}(X) = C_{\underset{\Phi}{\mathcal{O}}}(X) = \mathcal{O} \underset{\Phi}{\setminus} X$$

kümesine X *kümesinin tanımsal tümleyeni* denir.

5. YAKINLIK CEBİRSEL YAPILAR

5.1 Yakınlık Grupları

Bu kısımda yakınlık yarı-grubu, yakınlık grubu, alt yakınlık grubu, normal alt yakınlık grubu ve yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubu kavramları ve bu kavramlar ile ilgili bazı sonuçlar ifade edilmiştir.

Tanım 5.1.1 [16] $\left(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r\left(B\right),\nu_{N_r}\right)$ yakın yaklaşım uzayı; "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $S\subseteq\mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa S ye *yakın yaklaşım uzayı üzerinde yarı grup* veya kısaca *yakınlık yarı-grubu* denir:

$\left(YS_1\right)$ Her $x,y\in S$ için $x\cdot y\in N_r\left(B\right)^* S$ dir.

$\left(YS_2\right)$ Her $x,y,z\in S$ için $\left(x\cdot y\right)\cdot z=x\cdot\left(y\cdot z\right)$ özelliği $N_r\left(B\right)^* S$ de sağlanır.

Tanım 5.1.2 [16] $\left(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r\left(B\right),\nu_{N_r}\right)$ bir yakın yaklaşım uzayı, S bir yakınlık yarı-grubu ve I da S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $N_r\left(B\right)^* I$, S yakınlık yarı-grubunun bir sol (sağ) ideali ise o zaman I ya S nin bir *sol (sağ) yakınlık ideali* denir. I, S nin hem sol hem de sağ yakınlık ideali ise I ya S nin *iki yanlı yakınlık ideali* veya kısaca *yakınlık ideali* denir.

Teorem 5.1.3 [16] $\left(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r\left(B\right),\nu_{N_r}\right)$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $S\subseteq\mathcal{O}$ olsun. Bu durumda

(1) S bir yarı-grup ise S bir yakınlık yarı-grubudur.

(2) I, S yakınlık yarı-grubunun bir sol (sağ, iki yanlı) ideali ise I, S nin bir yakınlık sol (sağ, iki yanlı) idealidir.

Teorem 5.1.4 [16] "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $\left(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r\left(B\right),\nu_{N_r}\right)$ bir yakın yaklaşım uzayı, $S\subseteq\mathcal{O}$ bir yarı-grup ve $A\subseteq S$

olsun. Bu durumda

(1) T, S yarı-grubunun bir alt yarı-grubu ise $N_r(B)_*(T)$, S nin bir alt yarı-grubudur.

(2) I, S nin bir sol (sağ, iki yanlı) ideali ise $N_r(B)_*(I)$, $N_r(B)_*(S)$ nin bir sol (sağ, iki yanlı) idealidir.

Teorem 5.1.5 [16] "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yarı-grup olsun. O zaman I ile J sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere,

$$N_r(B)^*(IJ) \subseteq N_r(B)^*(I) \cap N_r(B)^*(J)$$

dir.

Teorem 5.1.6 [16] "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yarı-grup olsun. I ve J sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere,

$$N_r(B)_*(IJ) \subseteq N_r(B)_*(I) \cap N_r(B)_*(J)$$

dir.

Tanım 5.1.7 [16] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı, "." $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $G \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa G ye *yakın yaklaşım uzayı üzerinde grup* veya kısaca *yakınlık grubu* denir:

(YG_1) Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* G$ dir.

(YG_2) Her $x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanır.

(YG_3) Her $x \in G$ için $x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$ olacak biçimde bir $e_G \in N_r(B)^* G$ vardır (burada e_G, G nin yakın birim elemanıdır).

(YG_4) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak biçimde bir $y \in G$ vardır (burada y, G deki x elemanının yakın tersidir).

Örnek 5.1.8 [16] $\mathcal{O}=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}\subseteq\mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

$$\varphi_1:\mathcal{O}\to V_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},$$
$$\varphi_2:\mathcal{O}\to V_2=\{\alpha_1,\alpha_2\},$$
$$\varphi_3:\mathcal{O}\to V_3=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 5.1 deki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_2	α_3	α_2	α_2	α_1	α_1	α_3	α_1	α_2	α_3
φ_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2
φ_3	α_3	α_1	α_3	α_3	α_4	α_2	α_2	α_4	α_3	α_1

Tablo 5.1

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi üzerinde bir "." ikili işlemi Tablo 5.2 deki gibi verilsin.

.	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a
c	c	d	e	f	g	h	i	j	a	b
d	d	e	f	g	h	i	j	a	b	c
e	e	f	g	h	i	j	a	b	c	d
f	f	g	h	i	j	a	b	c	d	e
g	g	h	i	j	a	b	c	d	e	f
h	h	i	j	a	b	c	d	e	f	g
i	i	j	a	b	c	d	e	f	g	h
j	j	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Tablo 5.2

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin "." işlemi ile bir grup olduğu kolayca görülebilir. $G=\{a,b,c,f,i,j\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, $G\subseteq\mathcal{O}$ üzerinde "." ikili işlemi Tablo 5.3 teki gibi olur.

.	*a*	*b*	*c*	*f*	*i*	*j*
a	*a*	*b*	*c*	*f*	*i*	*j*
b	*b*	*c*	*d*	*g*	*j*	*a*
c	*c*	*d*	*d*	*h*	*a*	*b*
f	*f*	*g*	*h*	*a*	*d*	*d*
i	*i*	*j*	*a*	*d*	*g*	*h*
j	*j*	*a*	*b*	*d*	*h*	*i*

Tablo 5.3

Bu durumda

$$\begin{aligned}[a]_{\varphi_1} &= \{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(a)=\alpha_2\}\\ &=\{a,c,d,i\}=[c]_{\varphi_1}=[d]_{\varphi_1}=[i]_{\varphi_1},\\ [b]_{\varphi_1} &= \{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(b)=\alpha_3\}\\ &=\{b,g,j\}=[g]_{\varphi_1}=[j]_{\varphi_1},\\ [e]_{\varphi_1} &= \{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(e)=\alpha_1\}\\ &=\{e,f,h\}=[f]_{\varphi_1}=[h]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

dir. O zaman $\xi_{\varphi_1}=\{[a]_{\varphi_1},[b]_{\varphi_1},[e]_{\varphi_1}\}$ dir.

$$\begin{aligned}[a]_{\varphi_2} &= \{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_2(x')=\varphi_2(a)=\alpha_1\}\\ &=\{a,c,e,f,h,i\}=[c]_{\varphi_2}=[e]_{\varphi_2}=[f]_{\varphi_2}=[h]_{\varphi_2}=[i]_{\varphi_2},\\ [b]_{\varphi_2} &= \{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_2(x')=\varphi_2(b)=\alpha_2\}\end{aligned}$$

$$= \{b, d, g, j\} = [d]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}\}$ olur. Son olarak,

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\} \\
&= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_3} = [d]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3}, \\
[b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_1\} \\
&= \{b, j\} = [j]_{\varphi_3}, \\
[e]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_4\} \\
&= \{e, h\} = [h]_{\varphi_3}, \\
[f]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_2\} \\
&= \{f, g\} = [g]_{\varphi_3}
\end{aligned}$$

tür ve dolayısıyla $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3}\}$ elde edilir.

Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\
&= [a]_{\varphi_1} \cup [b]_{\varphi_1} \cup [e]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [b]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \cup [b]_{\varphi_3} \cup [f]_{\varphi_3} \\
&= \{a, c, d, i\} \cup \{b, g, j\} \cup \{e, f, h\} \cup \{a, c, e, f, h, i\} \cup \{b, d, g, j\} \\
&\quad \cup \{b, j\} \cup \{f, g\} \\
&= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} = \mathcal{O}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte

(YG_1) Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* G$ dir.

(YG_2) Her $x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanır.

(YG_3) Her $x \in G$ için $x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$ olacak biçimde bir $e_G \in N_r(B)^* G$ yakın birim elemanı vardır ki, $e_G = a$ dır.

(YG_4) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = a$ olacak biçimde bir $y \in G$ vardır, yani $a^{-1} = a$, $b^{-1} = j$, $c^{-1} = i$, $f^{-1} = f$, $i^{-1} = c$ ve $j^{-1} = b$ dir.

O halde $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin G alt kümesi bir yakınlık grubudur.

Not 5.1.9 Tanım 5.1.7 de (YG_1) ve (YG_2) özellikleri G nin üst yaklaşımı $N_r(B)^* G$ de sağlanmak zorundadır. Bazı durumlarda bu özellikler $\mathcal{O} \setminus N_r(B)^* G$ de sağlanabilir. Bu durumda G bir yakınlık grubu olamaz.

Örnek 5.1.10 [16] Örnek 5.1.8 deki $G = \{a, b, c, f, i, j\}$ yakınlık grubunun bir alt kümesi $H = \{a, c, f, i\}$ olsun. $H \subset \mathcal{O}$ üzerinde "." ikili işlemi Tablo 5.4 teki gibi tanımlansın.

.	a	c	f	i
a	a	c	f	i
c	c	e	h	a
f	f	h	a	d
i	i	a	d	b

Tablo 5.4

Örnek 5.1.8 den, r = 1 için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin bir ayrışımı $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür. Böylece

$$N_1(B)^* H = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap H \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i}$$
$$= \{a,c,d,i\} \cup \{e,f,h\} \cup \{a,c,e,f,h,i\} \cup \{f,g\}$$
$$= \{a,c,d,e,f,g,h,i\} \neq \mathcal{O}$$

olur. $c, f \in H \subset \mathcal{O}$ için $(c \cdot f) \cdot c = c \cdot (f \cdot c)$ birleşme özelliğine bakılırsa $j = j$ dir. Ancak $j \in \mathcal{O} \setminus N_1(B)^* H$ olduğundan birleşme özelliği $N_1(B)^* H$ de sağlanmaz. Bu durumda Not 5.1.9 dan H bir yakınlık grubu olamaz.

Lemma 5.1.11 [16] G bir yakınlık grubu olsun. Bu durumda

(1) G nin bir ve yalnız bir yakın birim elemanı $\left(e_G \in N_r(B)^* G\right)$ vardır.

(2) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak biçimde bir tek $y \in G$ elemanı vardır $\left(y = x^{-1}\right)$.

(3) Her $x \in G$ için $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$ dir.

(4) Her $x, y \in G$ için $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ dir.

Lemma 5.1.12 [16] G bir yakınlık grubu olmak üzere, her $a, x, x', y, y' \in G$ için

(1) $a \cdot x = a \cdot x'$ ise $x = x'$,

(2) $y \cdot a = y' \cdot a$ ise $y = y'$

dür.

Tanım 5.1.13 H, G yakınlık grubunun boştan farklı bir alt kümesi olsun. H, G deki "." işlemi ile yakınlık grubu ise H ye G nin bir *alt yakınlık grubu* denir.

Not 5.1.14 G yakınlık grubunun sadece bir tane aşikâr alt yakınlık grubu vardır. Bu aşikâr alt yakınlık grubu G nin kendisidir. Ayrıca, $\{e_G\}$ nin G yakınlık grubunun alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, $e_G \in G$ olmasıdır.

Teorem 5.1.15 [16] G bir yakınlık grubu, H de G nin boştan farklı bir alt kümesi ve $N_r(B)^* H$ grupoid olsun. Bu durumda H nin G yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olmasıdır.

Örnek 5.1.16 [16] $\mathcal{O} = \{o, p, r, s, t, v, w, x\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 5.5 teki gibi tanımlansın.

	o	p	r	s	t	v	w	x
φ_1	α_4	α_2	α_1	α_2	α_1	α_3	α_4	α_3
φ_2	β_1	β_3	β_2	β_3	β_2	β_3	β_1	β_3

Tablo 5.5

Bununla birlikte $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde “+” ikili işlemi Tablo 5.6 daki gibi verilsin.

$+$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	p	r	s	t	v	w	x
p	p	r	s	t	v	w	x	o
r	r	s	t	v	w	x	o	p
s	s	t	v	w	x	o	p	r
t	t	v	w	x	o	p	r	s
v	v	w	x	p	o	r	s	t
w	w	x	o	p	r	s	t	v
x	x	o	p	r	s	t	v	w

Tablo 5.6

Tablo 5.6 dan $v+(s+s)\neq(v+s)+s$ olur ki, $(\mathcal{O},+)$ bir grup değildir.

$G=\{r,t,w\}$, $\mathcal{O}$ nun bir alt kümesi olmak üzere, G üzerinde "+" ikili işlemi Tablo 5.7 deki gibi olur.

+	r	t	w
r	t	w	o
t	w	o	r
w	o	r	t

Tablo 5.7

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
[o]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(o) = \alpha_4\} \\
&= \{o, w\} = [w]_{\varphi_1}, \\
[p]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(p) = \alpha_2\} \\
&= \{p, s\} = [s]_{\varphi_1}, \\
[r]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(r) = \alpha_1\} \\
&= \{r, t\} = [t]_{\varphi_1}, \\
[v]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(v) = \alpha_3\} \\
&= \{v, x\} = [x]_{\varphi_1}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \left\{[o]_{\varphi_1}, [p]_{\varphi_1}, [r]_{\varphi_1}, [v]_{\varphi_1}\right\}$ olur.

$$
\begin{aligned}
[o]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(o) = \beta_1\} \\
&= \{o, w\} = [w]_{\varphi_2}, \\
[p]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(p) = \beta_3\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{p, s, v, x\} = [s]_{\varphi_2} = [v]_{\varphi_2} = [x]_{\varphi_2}\,, \\
[r]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(r) = \beta_2\} \\
&= \{r, t\} = [t]_{\varphi_2}
\end{aligned}
$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{[o]_{\varphi_2}, [p]_{\varphi_2}, [r]_{\varphi_2}\right\}$ olur ve dolayısıyla $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\
&= \{o, w\} \cup \{r, t\} \\
&= \{o, r, t, w\} \neq \mathcal{O}
\end{aligned}
$$

olur. O zaman

(YG_1) Her $x, y \in G$ için $x + y \in N_r(B)^* G$ dir.

(YG_2) Her $x, y, z \in G$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanır.

(YG_3) Her $x \in G$ için $x + e_G = e_G + x = x$ olacak biçimde bir $e_G \in N_r(B)^* G$ yakın birim elemanı vardır ki, $e_G = o$ dur.

(YG_4) Her $x \in G$ için $x + y = y + x = o$ olacak biçimde bir $y \in G$ vardır, yani $-r = w$, $-t = t$, $-w = r$ dir.

O halde $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin G alt kümesi bir yakınlık grubudur.

G yakınlık grubunun $H = \{r, w\}$ alt kümesi ele alınsın. Bu durumda $N_1(B)^* H = \{o, r, t, w\}$ ve $\left(N_1(B)^* H, +\right)$ grupoid olur. Teorem 5.1.15 dikkate alınırsa, $-r = w$, $-w = r \in H$ olduğundan H, G yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubudur.

Teorem 5.1.17 [16] G bir yakınlık grubu ve H_1 ile H_2, G nin iki alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda $N_r(B)^* H_1$ ve $N_r(B)^* H_2$ birer grupoid olmak üzere,

$$\left(N_r(B)^* H_1\right) \cap \left(N_r(B)^* H_2\right) = N_r(B)^* \left(H_1 \cap H_2\right)$$

ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yakınlık grubudur.

Tanım 5.1.18 G bir yakınlık grubu olmak üzere, her $x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanıyorsa G ye *değişmeli yakınlık grubu* denir.

Tanım 5.1.19 $\left(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r}\right)$ yakın yaklaşım uzayı; ".", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem, $G \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve N de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. Her $a \in G$ için $a \cdot N = N \cdot a$ ise N ye G nin *normal alt yakınlık grubu* denir.

Teorem 5.1.20 [16] G bir yakınlık grubu ve N de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. N alt yakınlık grubunun G nin normal alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in G$ için $a \cdot N \cdot a^{-1} = N$ olmasıdır.

Tanım 5.1.21 Boştan farklı bir $X \subset \mathcal{O}$ kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı yansıyan ve simetrik ise o zaman bu bağıntıya *zayıf eşdeğerlik bağıntısı* denir.

$\left(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r}\right)$ yakın yaklaşım uzayı, $G \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $a, b \in G$ olmak üzere, G nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_r$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a \sim_r b :\Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H \cup \{e\}.$$

Teorem 5.1.22 [16] G bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. O zaman "$\sim_r$" bağıntısı G üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $a \in G$ için "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıf

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \{b \in G \mid b \sim_r a\} \\ &= \{b \in G \mid b \cdot a^{-1} \in H \cup \{e_G\}\} \\ &= \{b \in G \mid b \cdot a^{-1} \in H \; veya \; b \cdot a^{-1} \in \{e_G\}\} \\ &= \{b \in G \mid b \in H \cdot a \; veya \; b \cdot a^{-1} = e_G\} \\ &= \{b \in G \mid b \in H \cdot a \; veya \; a = b\} \\ &= \{h \cdot a \mid h \in H, a \in G, h \cdot a \in G\} \cup \{a\} \end{aligned}$$

olur.

Tanım 5.1.23 G bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G de belirttiği sınıflara *yakın sağ zayıf kalan sınıfı* denir.

Herhangi bir $a \in G$ elemanı için yakın sağ zayıf kalan sınıfı $H \cdot a$ ile gösterilir, yani

$$H \cdot a = \{h \cdot a \mid h \in H, a \in G, h \cdot a \in G\} \cup \{a\}$$

dır.

Benzer olarak $a, b \in G$ olmak üzere, G yakınlık grubunun elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_\ell$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a \sim_\ell b :\Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H \cup \{e_G\}.$$

Teorem 5.1.24 [16] G bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. O zaman "$\sim_\ell$" bağıntısı G üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $a \in G$ için "$\sim_\ell$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıf

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= \left\{ b \in G \middle| a \sim_\ell b \right\} \\
&= \left\{ b \in G \middle| a^{-1} \cdot b \in H \cup \{e_G\} \right\} \\
&= \left\{ b \in G \middle| a^{-1} \cdot b \in H \; veya \; a^{-1} \cdot b \in \{e_G\} \right\} \\
&= \left\{ b \in G \middle| b \in a \cdot H \; veya \; a^{-1} \cdot b = e_G \right\} \\
&= \left\{ b \in G \middle| b \in a \cdot H \; veya \; a = b \right\} \\
&= \left\{ a \cdot h \middle| h \in H, a \in G, a \cdot h \in G \right\} \cup \{a\}
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 5.1.25 G bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. "$\sim_\ell$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G de belirttiği sınıflara *yakın sol zayıf kalan sınıfı* denir.

Herhangi bir $a \in G$ elemanı için yakın sol zayıf kalan sınıfı $a \cdot H$ ile gösterilir, yani

$$a \cdot H = \left\{ a \cdot h \middle| h \in H, a \in G, a \cdot h \in G \right\} \cup \{a\}$$

dır.

Not 5.1.26 Genel olarak, yakınlık grubunun ikili işlemi her zaman değişme özelliğini sağlamayabilir. Bundan dolayı "$\sim_r$" ve "$\sim_\ell$" zayıf eşdeğerlik bağıntıları farklıdır.

G bir yakınlık grubu, $a \in G$ ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olmak üzere, G nin H ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıfları için "$a \cdot H$" gösterimi yerine "aH" kullanılabilir.

Teorem 5.1.27 [16] G bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olmak üzere, yakın sağ zayıf kalan sınıfları ile yakın sol zayıf kalan sınıfları aynı sayıdadır.

Tanım 5.1.28 G bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olmak üzere, yakın sol zayıf kalan sınıflarının sayısına (veya yakın sağ zayıf kalan sınıflarının sayısına) *H alt yakınlık grubunun G deki indeksi* denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

G nin H ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi

$$G/\sim_{\ell} = \left\{ aH \,\middle|\, a \in G \right\}$$

dir. Burada G yerine $N_r(B)^* G$ alınırsa

$$\left(N_r(B)^* G \right) / \sim_{\ell} = \left\{ aH \,\middle|\, a \in N_r(B)^* G \right\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$aH = \left\{ a \cdot h \,\middle|\, h \in H, a \in N_r(B)^* G, a \cdot h \in G \right\} \cup \{a\}$$

olur.

Tanım 5.1.29 G bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $a,b \in G$ olmak üzere, aH ve bH sırasıyla a ve b elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $a \cdot b \in N_r(B)^* G$ elemanının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıfı

$$(a \cdot b)H = \left\{ (a \cdot b) \cdot h \middle| h \in H, a \cdot b \in N_r(B)^* G, (a \cdot b) \cdot h \in G \right\} \cup \{a \cdot b\}$$

dır. Bu yakın sol zayıf kalan sınıfına, *aH ve bH yakın sol zayıf kalan sınıflarının çarpımı* denir ve

$$aH \odot bH = (a \cdot b)H$$

ile gösterilir.

Tanım 5.1.30 $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $G \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H de G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $G/\sim_\ell$, G nin H ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere,

$$N_r(B)^*(G/\sim_\ell) = \bigcup_{\substack{\xi_\Phi(A) \cap G/\sim_\ell \neq \emptyset \\ \Phi}} \xi_\Phi(A)$$

kümesine *$G/\sim_\ell$ nin üst yaklaşımı* denir.

Teorem 5.1.31 [16] G bir yakınlık grubu; H, G nin bir alt yakınlık grubu ve $G/\sim_\ell$, G nin H ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda

$$\left(N_r(B)^* G\right)/_{\sim_\ell} \subseteq N_r(B)^*\left(G/_{\sim_\ell}\right)$$

ise $G/\sim_\ell$, her $a, b \in G$ için

$$aH \odot bH = (a \cdot b)H$$

şeklinde tanımlı "$\odot$" işlemine göre bir yakınlık grubudur.

Tanım 5.1.32 G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $G/\sim_{\ell}$ yakınlık grubuna *G nin H ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubu* denir ve $G/_{w}H$ ile gösterilir.

5.2 Yakınlık Halkaları

Bu kısımda yakınlık halkası, alt yakınlık halkası, yakınlık ideali, yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkası ve yakınlık homomorfizması kavramları ve bu kavramlar ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Tanım 5.2.1 [16] $\left(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r\left(B\right),\nu_{N_r}\right)$ yakın yaklaşım uzayı; "$+$" ve "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde ikili işlemler ve $R\subseteq\mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa R ye *yakın yaklaşım uzayı üzerinde halka* veya kısaca *yakınlık halkası* denir:

$\left(YR_1\right)$ R, "$+$" ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli yakınlık grubudur.

$\left(YR_2\right)$ R, "$\cdot$" ikili işlemi ile birlikte bir yakınlık yarı-grubudur.

$\left(YR_3\right)$ Her $x,y,z\in R$ için

$$x\cdot\left(y+z\right)=\left(x\cdot y\right)+\left(x\cdot z\right) \text{ ve } \left(x+y\right)\cdot z=\left(x\cdot z\right)+\left(y\cdot z\right)$$

özellikleri $N_r\left(B\right)^* R$ de sağlanır.

Buna ek olarak;

$\left(YR_4\right)$ Her $x,y\in R$ için $x\cdot y=y\cdot x$ ise R ye değişmeli yakınlık halkası,

$\left(YR_5\right)$ Her $x\in R$ için $1_R\cdot x=x\cdot 1_R=x$ olacak biçimde $1_R\in N_r\left(B\right)^* R$ varsa R ye birimli yakınlık halkası denir.

Bir R yakınlık halkasında, $(YR_1)-(YR_5)$ özellikleri $N_r\left(B\right)^* R$ de geçerli olmak zorundadır. Bu özellikler bazı durumlarda $\mathcal{O}\setminus N_r\left(B\right)^* R$ de sağlanabilir. R deki elemanların sonlu tane toplamı veya çarpımı her zaman $N_r\left(B\right)^* R$ ye ait olmayabilir. Bu nedenle her $x\in R$ ve bazı $n\in\mathbb{Z}^+$ ler için $x^n\in N_r\left(B\right)^* R$ veya $nx\in N_r\left(B\right)^* R$

olduğunu söylemek her zaman mümkün değildir. Buna rağmen $\left(N_r\left(B\right)^* R,+\right)$ ve $\left(N_r\left(B\right)^* R,\cdot\right)$ birer grupoid ise her $x \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ ler için $x^n \in N_r\left(B\right)^* R$ veya her $x \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ ler için $nx \in N_r\left(B\right)^* R$ olur.

R birimli bir yakınlık halkası ve $x \in R$ olmak üzere, $y \cdot x = 1_R$ $\left(x \cdot z = 1_R\right)$ olacak şekilde bir $y \in N_r\left(B\right)^* R$ $\left(z \in N_r\left(B\right)^* R\right)$ varsa x elemanına *sol (sağ) yakın tersinirdir* ve y $\left(z\right)$ elemanına x elemanının *sol (sağ) yakın tersi* denir. $x \in R$ hem sol hem de sağ yakın tersinir ise o zaman x elemanına *yakın tersinirdir* denir.

Tanım 5.2.2 [16] R bir yakınlık halkası olsun. Bu durumda R deki sıfırdan farklı her elemanın bir yakın tersi varsa R ye *yakınlık bölüm (division) halkası* denir.

Tanım 5.2.3 [16] R bir yakınlık halkası olmak üzere, $\left(R \backslash \left\{0_R\right\},\cdot\right)$ bir değişmeli yakınlık grubu ise R ye *yakınlık cismi* denir.

Yakınlık halkasında ikili işlemlerle ilgili bazı temel özellikleri, klasik halkalarda olduğu gibi her zaman sağlanmayabilir.

Lemma 5.2.4 [16] Her halka bir yakınlık halkasıdır.

İspat. $R \subseteq \mathcal{O}$ bir halka olmak üzere, $R \subseteq N_r\left(B\right)^* R$ olduğundan $(YR_1)-(YR_3)$ sağlanır. Böylece R bir yakınlık halkasıdır.

Örnek 5.2.5 [16] $\mathcal{O} = \left\{o,p,r,s,t,v,w,x\right\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \left\{\varphi_1,\varphi_2\right\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \left\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \left\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\right\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 5.8 deki gibi tanımlansın.

	o	p	r	s	t	v	w	x
φ_1	α_4	α_2	α_1	α_2	α_1	α_3	α_4	α_3
φ_2	β_1	β_3	β_2	β_3	β_2	β_3	β_1	β_3

Tablo 5.8

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ üzerinde “$+$” ve “$\cdot$” ikili işlemleri Tablo 5.9 ve Tablo 5.10 daki gibi verilsin.

$+$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	p	r	s	t	v	w	x
p	p	r	s	t	v	w	x	o
r	r	s	t	v	w	x	o	p
s	s	t	v	w	x	o	p	r
t	t	v	w	x	o	p	r	s
v	v	w	x	p	o	r	s	t
w	w	x	o	p	r	s	t	v
x	x	o	p	r	s	t	v	w

Tablo 5.9

$\cdot$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	o	p	r	s	t	v	w	x
r	o	r	t	w	o	r	t	w
s	o	s	w	p	t	o	r	v
t	o	t	o	t	o	t	o	t
v	o	v	r	x	t	p	w	s
w	o	w	t	r	o	w	t	r
x	o	x	w	v	t	s	r	p

Tablo 5.10

Tablo 5.9 dan $r+(s+s)\neq(r+s)+s$ olduğundan $(\mathcal{O},+)$ bir grup değildir. O zaman $(\mathcal{O},+,\cdot)$ bir halka değildir.

$R=\{r,t,w\}$, $\mathcal{O}$ nun bir alt kümesi olmak üzere, R üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri Tablo 5.11 ve Tablo 5.12 deki gibi olur.

$+$	r	t	w
r	t	w	o
t	w	o	r
w	o	r	t

Tablo 5.11

$\cdot$	r	t	w
r	t	o	t
t	o	o	o
w	t	o	t

Tablo 5.12

Örnek 5.1.16 dan $r=1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B)=\{\xi_{\varphi_1},\xi_{\varphi_2}\}$ dikkate alınırsa,

$$N_1(B)^* R=\bigcup_{[x]_{\varphi_i}\cap R\neq\varnothing}[x]_{\varphi_i}=\{o,r,t,w\}\neq\mathcal{O}$$

elde edilir. Bununla birlikte Tanım 5.2.1 den,

(YR_1) R, "$+$" ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli yakınlık grubudur.

(YR_2) R, "$\cdot$" ikili işlemi ile birlikte bir yakınlık yarı-grubudur.

(YR_3) Her $x,y,z\in R$ için

$$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z) \text{ ve } (x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$$

özellikleri $N_r(B)^* R$ de sağlanır.

O zaman $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin R alt kümesi bir yakınlık halkasıdır.

Lemma 5.2.6 [16] $R \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve $0_R \in R$ olsun. Bu durumda $0_R \cdot x, x \cdot 0_R \in R$ ise her $x, y \in R$ için

(1) $x \cdot 0_R = 0_R \cdot x = 0_R$,

(2) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

(3) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

olur.

Tanım 5.2.7 [16] R bir yakınlık halkası ve S, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S, R deki "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile yakınlık halkası ise S ye R nin *alt yakınlık halkası* denir.

Teorem 5.2.8 [16] R bir yakınlık halkası ve S de R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\left(N_r(B)^* S, +\right)$ ve $\left(N_r(B)^* S, \cdot\right)$ grupoid olsun. Bu durumda S nin R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in S$ için $-x \in S$ olmasıdır.

Teorem 5.2.9 [16] R bir yakınlık halkası ve S_1 ile S_2, R nin iki alt yakınlık halkası olsun. Bu durumda $N_r(B)^* S_1$ ve $N_r(B)^* S_2$, "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,

$$\left(N_r(B)^* S_1\right) \cap \left(N_r(B)^* S_2\right) = N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$$

ise $S_1 \cap S_2$, R nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Sonuç 5.2.10 [16] R bir yakınlık halkası ve R nin alt yakınlık halkalarının boştan farklı bir ailesi $\{S_i : i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r\left(B\right)^* S_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i\in\Delta}\left(N_r\left(B\right)^* S_i\right) = N_r\left(B\right)^*\left(\bigcap_{i\in\Delta} S_i\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta} S_i$, R nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Tanım 5.2.11 [16] R bir yakınlık halkası ve I da R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $r \in R$ ve her $x, y \in I$ için $x + y \in N_r\left(B\right)^* I$, $-x \in I$ ve $r \cdot x \in N_r\left(B\right)^* I$ $\left(x \cdot r \in N_r\left(B\right)^* I\right)$ ise I ya R nin bir *sol (sağ) yakınlık ideali* denir. I hem sol hem de sağ yakınlık ideali ise o zaman I ya R nin bir *yakınlık ideali* denir.

Not 5.2.12 [16] R yakınlık halkasının kesin olarak sadece bir tane aşikar yakınlık ideali vardır. Bu aşikar yakınlık ideali R nin kendisidir. Ayrıca, $\{0_R\}$ kümesinin R yakınlık halkasının aşikar alt yakınlık halkası olması için gerek ve yeter koşul, $0_R \in R$ olmasıdır.

Lemma 5.2.13 [16] I, R yakınlık halkasının bir yakınlık ideali olsun. $\left(N_r\left(B\right)^* I, +\right)$ ve $\left(N_r\left(B\right)^* I, \cdot\right)$ grupoid ise I, R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkasıdır.

Teorem 5.2.14 [16] R bir yakınlık halkası ve I_1 ile I_2, R nin iki yakınlık ideali olsun. Bu durumda $N_r\left(B\right)^* I_1$ ve $N_r\left(B\right)^* I_2$, "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,

$$\left(N_r\left(B\right)^* I_1\right) \cap \left(N_r\left(B\right)^* I_2\right) = N_r\left(B\right)^*\left(I_1 \cap I_2\right)$$

ise $I_1 \cap I_2$, R nin bir yakınlık idealidir.

Sonuç 5.2.15 [16] R bir yakınlık halkası ve R nin yakınlık ideallerinin boştan farklı bir ailesi $\{I_i : i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r(B)^* I_i$ ler " $+$ " ve " $\cdot$ " işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i\in\Delta}\left(N_r(B)^* I_i\right) = N_r(B)^*\left(\bigcap_{i\in\Delta} I_i\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta} I_i$, R nin bir yakınlık idealidir.

$R \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. Bu durumda $x, y \in R$ olmak üzere, R nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir " $\sim_r$ " bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_r y :\Leftrightarrow x + (-y) \in S \cup \{0_R\}.$$

Teorem 5.2.16 [16] R bir yakınlık halkası olmak üzere; " $\sim_r$ " bağıntısı R üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in R$ için, " $\sim_r$ " sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yakınlık halkasında belirttiği sınıf

$$\tilde{x}_r = \{s + x \mid s \in S, x \in R, s + x \in R\} \cup \{x\}$$

dir.

Tanım 5.2.17 [16] R bir yakınlık halkası olmak üzere, " $\sim_r$ " sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıflara *yakın sağ zayıf kalan sınıfı* denir.

Herhangi bir $x \in R$ için yakın sağ zayıf kalan sınıfı $S + x$ ile gösterilir, yani

$$S + x = \{s + x \mid s \in S, x \in R, s + x \in R\} \cup \{x\}$$

dir.

Benzer olarak $x, y \in R$ olmak üzere, R yakınlık halkasının elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_\ell$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_\ell y :\Leftrightarrow (-x) + y \in S \cup \{0\}.$$

Teorem 5.2.18 [16] R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_\ell$" bağıntısı R üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in R$ için, "$\sim_\ell$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yakınlık halkasında belirttiği sınıf

$$\tilde{x}_\ell = \{x + s \mid s \in S, x \in R, x + s \in R\} \cup \{x\}$$

dir.

Tanım 5.2.19 [16] R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_\ell$" eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıflara *yakın sol zayıf kalan sınıfı* denir.

Herhangi bir $x \in R$ için yakın sol zayıf kalan sınıfı $x + S$ ile gösterilir, yani

$$x + S = \{x + s \mid s \in S, x \in R, x + s \in R\} \cup \{x\}$$

dir.

$(R, +)$ değişmeli yakınlık grubu olduğundan $\tilde{x}_\ell = \tilde{x}_r$ olur. Bu durumda $\tilde{x}_\ell$ ve $\tilde{x}_r$ notasyonları yerine sadece $\tilde{x}$ kullanılır.

R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olmak üzere,

$$R/_\sim = \{x + S \mid x \in R\}$$

R nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada R

yerine $N_r(B)^* R$ alınırsa,

$$\left(N_r(B)^* R\right)/_{\sim} = \left\{x + S \mid x \in N_r(B)^* R\right\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$x + S = \left\{x + s \mid s \in S, x \in N_r(B)^* R, x + s \in R\right\} \cup \{x\}$$

olur.

Tanım 5.2.20 [16] R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $x, y \in R$ olmak üzere, $x+S$ ve $y+S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x + y \in N_r(B)^* R$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfının toplamı

$$\left\{(x+y) + s \mid s \in S, x + y \in N_r(B)^* R, (x+y) + s \in R\right\} \cup \{x+y\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(x+S) \oplus (y+S) = (x+y) + S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 5.2.21 [16] R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $x, y \in R$ olmak üzere, $x+S$ ve $y+S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x \cdot y \in N_r(B)^* R$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfının çarpımı

$$\left\{(x \cdot y) + s \mid s \in S, x \cdot y \in N_r(B)^* R, (x \cdot y) + s \in R\right\} \cup \{x \cdot y\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(x+S)\odot(y+S)=(x\cdot y)+S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 5.2.22 [16] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $R\subset\mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S de R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $R/_{\sim}$, R nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_{\Phi}(A)$, $A\in\mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere,

$$N_r(B)^*(R/_{\sim})=\bigcup_{\substack{\xi_{\Phi}(A)\cap R/_{\sim}\neq\varnothing \\ \Phi}}\xi_{\Phi}(A)$$

kümesine $R/_{\sim}$ *nın üst yaklaşımı* denir.

Teorem 5.2.23 [16] R bir yakınlık halkası; S, R nin bir alt yakınlık halkası ve $R/_{\sim}$, R nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda

$$\left(N_r(B)^*R\right)/_{\sim}\subseteq N_r(B)^*(R/_{\sim})$$

ise $R/_{\sim}$, her $x,y\in R$ için

$$(x+S)\oplus(y+S)=(x+y)+S$$

ve

$$(x+S)\odot(y+S)=(x\cdot y)+S$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yakınlık halkasıdır.

Tanım 5.2.24 [16] R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $R/_{\sim}$ yakınlık halkasına *R nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının* *yakınlık halkası* denir ve $R/_w S$ şeklinde gösterilir.

Tanım 5.2.25 [16] $R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası olsun. Her $x, y \in R_1$ için

$$\eta(x+y) = \eta(x) + \eta(y)$$

ve

$$\eta(x \cdot y) = \eta(x) \cdot \eta(y)$$

olacak şekilde bir

$$\eta : N_r(B)^* R_1 \to N_r(B)^* R_2$$

fonksiyonu varsa η ya *yakınlık halka homomorfizması* denir. R_1 ve R_2 yakınlık halkalarına da *yakın homomorfiktir* denir ve $R_1 \simeq_n R_2$ ile gösterilir.

η, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$ ye tanımlı bir yakınlık halka homomorfizması olmak üzere,

(i) η bire bir ise η ya *yakınlık halka monomorfizması*,
(ii) η örten ise η ya *yakınlık halka epimorfizması*,
(iii) η birebir ve örten ise η ya *yakınlık halka izomorfizması*

denir.

Teorem 5.2.26 [16] $R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$ ye bir yakınlık halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(1) $0_{R_2} \in N_r(B)^* R_2$, R_2 nin yakınlık sıfır elemanı olmak üzere, $\eta\left(0_{R_1}\right) = 0_{R_2}$ dir.

(2) Her $x \in R_1$ için $\eta(-x) = -\eta(x)$ dir.

Teorem 5.2.27 [16] $R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$

ye bir yakınlık halka homomorfizması olsun. $\left(N_r\left(B\right)^* S,+\right)$ ve $\left(N_r\left(B\right)^* S,\cdot\right)$ birer grupoid olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) S , R_1 in alt yakınlık halkası ve $\eta\left(N_r\left(B\right)^* S\right)=N_r\left(B\right)^*\eta\left(S\right)$ ise $\eta\left(S\right)=\left\{\eta\left(x\right)\mid x\in S\right\}$, R_2 nin alt yakınlık halkasıdır.

(2) S, R_1 in değişmeli alt yakınlık halkası ve $\eta\left(N_r\left(B\right)^* S\right)=N_r\left(B\right)^*\eta\left(S\right)$ ise $\eta\left(S\right)$, R_2 nin değişmeli alt yakınlık halkasıdır.

Tanım 5.2.28 [16] $R_1,R_2\subset\mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r\left(B\right)^* R_1$ den $N_r\left(B\right)^* R_2$ ye yakınlık halka homomorfizması olsun. 0_{R_2} , R_2 nin yakınlık sıfır elemanı olmak üzere,

$$\left\{x\in R_1\mid\eta\left(x\right)=0_{R_2}\right\}$$

kümesine η yakınlık halka homomorfizmasının *çekirdeği* denir ve $Ker\eta$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.29 [16] $R_1,R_2\subset\mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r\left(B\right)^* R_1$ den $N_r\left(B\right)^* R_2$ ye yakınlık halka homomorfizması olsun. $N_r\left(B\right)^* Ker\eta$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere, $Ker\eta$ R_1 in yakınlık idealidir.

Tanım 5.2.30 [16] $R\subset\mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S de R nin bir alt yakınlık halkası olmak üzere, her $x\in N_r\left(B\right)^* R$ için $\Pi\left(x\right)=x+S$ ile tanımlı $\Pi:N_r\left(B\right)^* R\rightarrow N_r\left(B\right)^*\left(R/_w S\right)$ yakınlık halka homomorfizmasına *doğal yakınlık halka homomorfizması* denir.

Tanım 5.2.31 [16] $R_1,R_2\subset\mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve S de R_1 in boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$\chi:N_r\left(B\right)^* R_1\rightarrow N_r\left(B\right)^* R_2$$

bir fonksiyon ve

$$\chi_S = \chi\big|_S : S \to N_r(B)^* R_2$$

kısıtlanmış fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in S$ için

$$\chi(x+y) = \chi_S(x+y) = \chi_S(x) + \chi_S(y) = \chi(x) + \chi(y)$$

ve

$$\chi(x \cdot y) = \chi_S(x \cdot y) = \chi_S(x) \cdot \chi_S(y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$$

ise χ fonksiyonuna *kısıtlanmış yakınlık halka homomorfizması* denir. Bu durumda R_1, R_2 ye *kısıtlanmış yakın homomorfiktir* denir ve $R_1 \simeq_{rn} R_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.2.32 [16] $R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve χ, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$ ye tanımlı bir yakınlık halka homomorfizması olsun. $\left(N_r(B)^* Ker\chi, +\right)$ ve $\left(N_r(B)^* Ker\chi, \cdot\right)$ birer grupoid ve $\left(N_r(B)^* R_1\right)/_{\sim}$, $N_r(B)^* R_1$ in $Ker\chi$ tarafından belirlenen yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$\left(N_r(B)^* R_1\right)/_{\sim} \subseteq N_r(B)^* \left(R_1 /_w Ker\chi\right)$$

ve

$$N_r(B)^* \chi(R_1) = \chi\left(N_r(B)^* R_1\right)$$

ise

$$R_1 /_w Ker\chi \simeq_{rn} \chi(R_1)$$

dir.

6. YAKIN HALKALAR

6.1 Temel Bilgiler

Halka kavramının genelleştirilmiş bir hali olan yakın-halka kavramının halkadan farkı, halkada birinci işlemin değişmeli olması gerekirken yakın-halkada birinci işlemin değişmeli olmasının gerekmemesidir. Ayrıca, halkada ikinci işlemin birinci işlem üzerine soldan ve sağdan dağılmalı olması gerekirken yakın-halkada ikinci işlemin birinci işlem üzerine sadece bir taraftan dağılma özelliğine sahip olmasıdır.

Yakın-halkalar ile ilgili ilk çalışma, 1905 yılında *Dickson* [19,20] tarafından aksiyomatik olarak verilmiştir. *Dickson* tarafından bir taraflı dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığı gösterilmiş ve bu tür cisimler yakın-cisim olarak adlandırılmıştır. Yakın-halka kavramı ilk defa 1936 yılında *Zassenhaus* [21] tarafından kullanılmış ve bütün sonlu yakın-cisimler belirlenmiştir. Halkalar teorisindeki bazı temel teoremler yakın-halkalar için de ifade edilebilir.

Yakın-halka teorisi ile ilgili çalışan matematikçilerin göz önüne aldığı en temel kaynak, *Pilz*'in [22] *Near-Rings* adlı kitabı olup, bu bölümde yer alan bütün bilgiler bu kitaptan alınmıştır.

Tanım 6.1.1 [22] Boş olmayan bir N kümesi üzerinde $"+"$ ve $"\cdot"$ ikili işlemleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanırsa N ye bir *yakın-halka* denir:

(i) $(N,+)$ bir gruptur (değişmeli olması gerekmez).

(ii) $(N,\cdot)$ bir yarı-gruptur.

(iii) Her $n_1, n_2, n_3 \in N$ için $(n_1+n_2)\cdot n_3 = n_1\cdot n_3 + n_2\cdot n_3$ tür.

Not 6.1.2 Yukarıdaki tanım dikkate alındığında, (iii) den dolayı yakın-halka kavramı yerine *sağ yakın-halka* kavramı kullanılabilir. Ayrıca, (iii) nin yerine her $n_1, n_2, n_3 \in N$ için $n_1\cdot(n_2+n_3) = n_1\cdot n_2 + n_1\cdot n_3$ özelliği yazılırsa, bu durumda sol yakın-halka kavramı tanımlanır. Bu çalışma boyunca *sağ yakın-halka* kavramı kullanılacaktır.

Not 6.1.3 Genellikle $(N,+)$ grubunun etkisiz elemanı, $(N,+,\cdot)$ yakın-halkasının sıfırı olarak tanımlanır. Ayrıca, bütün yakın-halkaların kümesi $\mathcal{N}$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.4 [22] $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M(\Gamma)$ da Γ dan Γ ya olan tüm dönüşümlerin kümesi olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır. Gerçekten,

- $(M(\Gamma),+)$ **bir gruptur:** Her $f_1,f_2 \in M(\Gamma)$ ve her $x\in\Gamma$ için

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)\in\Gamma$$

olduğundan, $M(\Gamma)$ kümesinde $"+"$ işlemine göre kapalılık özelliği sağlanır.

Her $f_1,f_2,f_3 \in M(\Gamma)$ ve her $x\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}((f_1+f_2)+f_3)(x) &= (f_1+f_2)(x)+f_3(x)\\ &= (f_1(x)+f_2(x))+f_3(x)\\ &= f_1(x)+(f_2(x)+f_3(x))\\ &= f_1(x)+(f_2+f_3)(x)\\ &= (f_1+(f_2+f_3))(x)\end{aligned}$$

dir. Bu durumda $(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)$ olur ve dolayısıyla $M(\Gamma)$ kümesinde $"+"$ işlemine göre birleşme özelliği geçerlidir.

Her $x\in\Gamma$ için $\theta(x)=0_\Gamma$ şeklinde tanımlanan $\theta:\Gamma\to\Gamma$ dönüşümü göz önüne alınırsa, her $f\in M(\Gamma)$ için $f+\theta=\theta+f=f$ dir. O zaman θ, $M(\Gamma)$ nın $"+"$ işlemine göre etkisiz elemanıdır.

Her $x \in \Gamma$ için $(-f)(x) = -f(x)$ şeklinde tanımlanan $-f : \Gamma \to \Gamma$ dönüşümü dikkate alınırsa, her $f \in M(\Gamma)$ için $f + (-f) = (-f) + f = \theta$ dır. Bu durumda $-f$, $f \in M(\Gamma)$ nın "$+$" işlemine göre tersidir, yani "$+$" işlemine göre ters eleman özelliği sağlanır.

- $(M(\Gamma), \circ)$ **bir yarı-gruptur:** Her $f_1, f_2 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) \in \Gamma$$

olduğundan, $M(\Gamma)$ kümesinde "$\circ$" işlemine göre kapalılık özelliği geçerlidir.

Her $f_1, f_2, f_3 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$((f_1 \circ f_2) \circ f_3)(x) = (f_1 \circ (f_2 \circ f_3))(x)$$

olup, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$ tür. O halde $M(\Gamma)$ kümesinde "$\circ$" işlemine göre birleşme özelliği sağlanır.

- Her $f_1, f_2, f_3 \in M(\Gamma)$ ve her $x \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
((f_1 + f_2) \circ f_3)(x) &= (f_1 + f_2)(f_3(x)) \\
&= f_1(f_3(x)) + f_2(f_3(x)) \\
&= (f_1 \circ f_3)(x) + (f_2 \circ f_3)(x) \\
&= ((f_1 \circ f_3) + (f_2 \circ f_3))(x)
\end{aligned}$$

dir. O zaman $(f_1 + f_2) \circ f_3 = (f_1 \circ f_3) + (f_2 \circ f_3)$ olur, yani sağdan dağılma özelliği geçerlidir.

Not 6.1.5 Yukarıda verilen $(M(\Gamma), +, \circ)$ cebirsel yapısı bir yakın-halka olmasına rağmen, bu cebirsel yapı için soldan dağılma özelliği sağlanmadığından $M(\Gamma)$ bir halka değildir.

Yakın-halkalar ile ilgili farklı örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 6.1.6 [22]

1) $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M_0(\Gamma)=\{f\in M(\Gamma) \mid f(0_\Gamma)=0_\Gamma\}$ olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_0(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır.

2) $(\Gamma,+)$ bir grup ve $M_c(\Gamma)=\{f\in M(\Gamma) \mid f \text{ } sabit\}$ olsun. Bu durumda dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_c(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır.

3) $(\Gamma,+)$ bir grup ve

$$M_c^0(\Gamma)=\left\{ f_\delta \in M(\Gamma) \,\middle|\, f_\delta(\gamma)=\begin{cases} 0_\Gamma & , \quad \gamma=0_\Gamma \\ \delta & , \quad \gamma\neq 0_\Gamma \end{cases}, \delta\in\Gamma \right\}$$

olsun. O halde dönüşümlerin toplamı ve çarpımı (bileşkesi anlamında) işlemlerine göre, $(M_c^0(\Gamma),+,\circ)$ bir yakın-halkadır.

Lemma 6.1.7 [22] N yakın-halkası için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $n\in N$ için $0_N\cdot n=0_N$ dir.

(2) Her $n,n'\in N$ için $(-n)\cdot n'=-(n\cdot n')$ dür.

Not 6.1.8 N bir yakın-halka olmak üzere, her $n,n'\in N$ için $n\cdot 0_N=0_N$ ve $n\cdot(-n')=-(n\cdot n')$ eşitlikleri sağlanmayabilir. Örneğin, Örnek 6.1.4 te verilen $(M(\Gamma),+,\circ)$ yakın-halkası dikkate alınırsa, her $f\in M(\Gamma)$ için $f\circ\theta=\theta$ olabilmesi için $f(0_\Gamma)=0_\Gamma$ koşulu sağlanmalıdır ve ayrıca, her $f_1,f_2\in M(\Gamma)$ için $f_1\circ(-f_2)=-(f_1\circ f_2)$ olabilmesi için f_1 tek fonksiyon olmalıdır.

Tanım 6.1.9 [22] N bir yakın-halka olsun. O zaman $N_0 = \{ n \in N \mid n \cdot 0_N = 0_N \}$ kümesine N nin *sıfır-simetrik kısmı* ve $N_c = \{ n \in N \mid n \cdot 0_N = n \}$ kümesine de N nin *sabit kısmı* denir.

Not 6.1.10 N_0 ve N_c, N üzerinde tanımlanan "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerine göre birer yakın-halkadır. Ayrıca, $N = N_0$ ise N ye *sıfır-simetrik yakın-halka* ve $N = N_c$ ise N ye *sabit yakın-halka* denir. Ayrıca, bütün sıfır-simetrik yakın-halkaların kümesi $\mathcal{N}_0$ ve bütün sabit yakın-halkaların kümesi de $\mathcal{N}_c$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.11 [22] $\left(M(\Gamma)\right)_0 = M_0(\Gamma)$ ve $\left(M(\Gamma)\right)_c = M_c(\Gamma)$ dir. Gerçekten,

$$\left(M(\Gamma)\right)_0 = \{ f \in M(\Gamma) \mid f \circ \theta = \theta \} = \{ f \in M(\Gamma) \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma \} = M_0(\Gamma)$$

ve

$$\begin{aligned} \left(M(\Gamma)\right)_c = \{ f \in M(\Gamma) \mid f \circ \theta = f \} &= \{ f \in M(\Gamma) \mid \forall \gamma \in \Gamma, f(\gamma) = f(0_\Gamma) \} \\ &= \{ f \in M(\Gamma) \mid f \ sabit \} \\ &= M_c(\Gamma) \end{aligned}$$

dır.

Not 6.1.12 Halka teorisinde kullandığımız etkisiz (birim) eleman, tersinir eleman, kısaltılabilir eleman, sıfır-bölen, idempotent eleman ve nilpotent eleman kavramları, yakın-halka teorisinde benzer şekilde tanımlanabilir.

Her $n, n' \in N$ için $d \cdot (n + n') = d \cdot n + d \cdot n'$ ise d elemanına *distribütif* (*dağılmalı*) *eleman* denir. Ayrıca, bütün birimli yakın-halkaların kümesi $\mathcal{N}_1$ ve bütün distribütif elemanların kümesi de N_d ile gösterilir.

Teorem 6.1.13 [22] N bir yakın-halka ve $e \in N$ bir idempotent eleman olsun. Bu durumda her $n \in N$ için $n = x + y$ olacak biçimde tek türlü belirlenen $x \in \{ n \in N \mid n \cdot e = 0_N \}$ ve $y \in Ne$ elemanları vardır.

Sonuç 6.1.14 [22] N bir yakın-halka olsun. Bu durumda her $n \in N$ için $n = n_0 + n_c$ olacak biçimde tek türlü belirlenen $n_0 \in N_0$ ve $n_c \in N_c$ elemanları vardır, yani $(N,+) = (N_0,+) \oplus (N_c,+)$ dır.

Tanım 6.1.15 [22] N bir yakın-halka olsun. O zaman

(i) $(N,+)$ abel ise N ye *abel yakın-halka* denir.

(ii) $(N,\cdot)$ değişmeli ise N ye *değişmeli yakın-halka* denir.

(iii) $N = N_d$ ise N ye *distribütif yakın-halka* denir.

(iv) N, 0_N nin sıfırdan farklı bölenlerine sahip değilse N ye *tam yakın-halka* denir.

(v) $(N - \{0_N\}, \cdot)$ bir grup ise N ye *yakın-cisim* denir.

Örnek 6.1.16

1) $(\Gamma,+)$ bir abel grup ise $(M(\Gamma),+)$ bir abel gruptur. Böylece $M(\Gamma)$ bir abel yakın-halkadır.

2) $(\Gamma,+)$ bir grup olmak üzere, Γ da her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $\alpha * \beta = \alpha$ şeklinde tanımlanan "$*$" işlemi dikkate alınırsa $(\Gamma,+,*)$ bir tam yakın-halkadır.

3) $\mathbb{Z}_2$ *mod* 2 kalan sınıflarının kümesi olmak üzere, $(\mathbb{Z}_2,+)$ bir gruptur. Ayrıca, $\mathbb{Z}_2$ de her $\overline{a} \in \mathbb{Z}_2$ için $\overline{0} \cdot \overline{a} = \overline{0}$ ve $\overline{1} \cdot \overline{a} = \overline{1}$ şeklinde tanımlanan "$\cdot$" işlemi dikkate alınırsa $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ bir yakın-cisimdir.

6.2 N-Gruplar

Halka teorisindeki modül kavramına, yakın-halka teorisinde karşılık gelen N -grup kavramını göz önüne alacağız.

Tanım 6.2.1 [22] $(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun. Bu durumda

$$\mu : N\times\Gamma \to \Gamma \quad , \quad \mu\big((n,\gamma)\big) = n\gamma$$

şeklinde tanımlanan dış çarpımı dikkate alındığında, aşağıdaki özellikler sağlanırsa (Γ,μ) ikilisine bir N -*grup* (veya N de bir *yakın-modül*) denir:

Her $\gamma\in\Gamma$ ve her $n,n'\in N$ için

$$(n+n')\gamma = n\gamma + n'\gamma \quad \text{ve} \quad (n\cdot n')\gamma = n\left(n'\gamma\right).$$

N -grup kavramı kısaca ${}_N\Gamma$ ile gösterilir. Ayrıca, bütün N -grupların kümesi ${}_N\mathcal{G}$ ile gösterilir.

Örnek 6.2.2 [22]

1) $(N,+,\cdot)$ bir yakın-halka ise N bir N -gruptur.

2) R bir halka ve M de bir (sol) R -modül ise M bir R -gruptur.

3) $(\Gamma,+)$ bir grup olsun. O zaman Γ,

$$\mu : M(\Gamma)\times\Gamma \to \Gamma \quad , \quad \mu\big((f,\gamma)\big) = f(\gamma)$$

şeklinde tanımlanan dış çarpımı ile bir $M(\Gamma)$ -gruptur.

Tanım 6.2.3 [22] $\mathcal{N}_1$ ve ${}_N\Gamma\in{}_N\mathcal{G}$ olmak üzere, her $\gamma\in\Gamma$ için $1\gamma=\gamma$ ise ${}_N\Gamma$ ya bir *üniter* (*birimsel*) N *-grup* denir.

Lemma 6.2.4 [22] N bir yakın-halka ve Γ bir N -grup olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $\gamma\in\Gamma$ için $0_N\gamma = 0_\Gamma$ dır.

(2) Her $\gamma \in \Gamma$ ve her $n \in N$ için $(-n)\gamma = -n\gamma$ dır.

(3) Her $n \in N_0$ için $n0_\Gamma = 0_\Gamma$ dır.

(4) Her $\gamma \in \Gamma$ ve her $n \in N_c$ için $n\gamma = n0_\Gamma$ dır.

6.3 Alt Yapılar

Tanım 6.3.1 [22] N bir yakın-halka ve $(M,+)$, $(N,+)$ nın bir alt grubu olsun. Bu durumda $M \cdot M \subseteq M$ ise M ye N nin bir *alt yakın-halkası* denir.

Örnek 6.3.2 [22] N_0 ve N_c, N yakın-halkasının birer alt yakın-halkasıdır. Gerçekten,

- $(N_0,+)$**,** $(N,+)$ **grubunun bir alt grubudur:** Her $x, y \in N_0$ için

$$(x-y)\cdot 0_N = x\cdot 0_N - y\cdot 0_N = 0_N - 0_N = 0_N$$

olduğundan $x-y \in N_0$ dır.

- $N_0 \cdot N_0 \subseteq N_0$ **dır:** Her $x, y \in N_0$ için

$$(x\cdot y)\cdot 0_N = x\cdot(y\cdot 0_N) = x\cdot 0_N = 0_N$$

olup, $x\cdot y \in N_0$ dır.

Böylece N_0, N nin bir alt yakın-halkasıdır. Benzer şekilde N_c nin de N nin bir alt yakın-halkası olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 6.3.3 [22] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. O zaman Γ nın $N\Delta \subseteq \Delta$ koşulunu sağlayan bir Δ alt grubuna, Γ nın bir N*-alt grubu* denir.

6.4 Homomorfizmalar ve İdealler

Tanım 6.4.1 [22] $N, N' \in \mathcal{N}$ ve $\Gamma, \Gamma' \in {}_N\mathcal{G}$ olsun. Bu durumda

(i) Her $m,n \in N$ için

$$\varphi(m+n)=\varphi(m)+\varphi(n) \text{ ve } \varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$$

ise $\varphi : N \to N'$ dönüşümüne bir *yakın-halka homomorfizması* denir.

(ii) Her $\alpha,\beta \in \Gamma$ ve her $n \in N$ için

$$\psi(\alpha+\beta)=\psi(\alpha)+\psi(\beta) \text{ ve } \psi(n\alpha)=n\psi(\alpha)$$

ise $\psi : \Gamma \to \Gamma'$ dönüşümüne bir N *-homomorfizması* denir.

Benzer şekilde yakın-halka teorisinde ve yakın-modül teorisinde monomorfizma, epimorfizma ve izomorfizma kavramları tanımlanabilir. $N, N' \in \mathcal{N}$ ve $\Gamma, \Gamma' \in {}_N\mathcal{G}$ olmak üzere, N den N' ye bütün yakın-halka homomorfizmaların kümesi $Hom(N,N')$ ve Γ dan Γ' ye bütün N-homomorfizmaların kümesi de $Hom_N(\Gamma,\Gamma')$ ile gösterilir.

$N, N' \in \mathcal{N}$ olmak üzere, N den N' ye bir monomorfizma varsa N, N' ye *gömülebilir* denir.

Örnek 6.4.2 [22] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. O zaman her $\gamma \in \Gamma$ için $\psi(n)=n\gamma$ şeklinde tanımlanan $\psi : N \to \Gamma$ dönüşümü bir N-homomorfizmasıdır, yani $\psi \in Hom_N(N,\Gamma)$ dır.

Tanım 6.4.3 [22] N bir yakın-halka ve I, $(N,+)$ nın bir normal alt grubu olsun. Bu durumda

(i) $I \cdot N \subseteq I$,

(ii) Her $n,n' \in N$ ve her $a \in I$ için $n\cdot(n'+a)-n\cdot n' \in I$

koşulu sağlanıyorsa I ya N nin *ideali* denir ve $I \lhd N$ ile gösterilir.

Ayrıca, sadece (i) koşulunu sağlayan I ya N nin *sağ ideali* denir $\left(I \triangleleft_r N\right)$ ve sadece (ii) koşulunu sağlayan I ya N nin *sol ideali* denir $\left(I \triangleleft_\ell N\right)$.

Tanım 6.4.4 [22] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. O zaman Δ, Γ nın bir normal alt grubu olmak üzere, her $\gamma \in \Gamma$, her $\delta \in \Delta$ ve her $n \in N$ için $n(\gamma+\delta)-n\gamma \in \Delta$ koşulu sağlanıyorsa Δ ya Γ nın *ideali* denir ve $\Delta \triangleleft_N \Gamma$ ile gösterilir.

Örnek 6.4.5 [22] N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda $\{0_N\}$, N ve $\{0_\Gamma\}$, Γ sırasıyla N ve Γ nın idealleri olup, bu ideallere triviyal ideal denir.

Not 6.4.6 N bir yakın-halka ve I da N nin bir ideali olsun. O zaman $n, n' \in N$ olmak üzere,

$$n \equiv n' \left(\operatorname{mod} I\right) \quad :\Leftrightarrow \quad n-n' \in I$$

şeklinde tanımlanan "$\equiv$" bağıntısı bir kongrüans bağıntısıdır. Bu durumda "$\equiv$" bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan, bu bağıntıya göre denklik (kalan) sınıfları $n \in N$ için $\overline{n} = n + I = \left\{n' \mid n \equiv n' \left(\operatorname{mod} I\right)\right\}$ şeklindedir. Bütün denklik (kalan) sınıflarının kümesi $N/I = \left\{\overline{n} \mid n \in N\right\}$ ile gösterilir.

N bir yakın-halka, Γ bir N-grup ve Δ da Γ nın bir ideali olmak üzere, benzer şekilde $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$\alpha \equiv \beta \left(\operatorname{mod} \Delta\right) \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha-\beta \in \Delta$$

biçiminde "$\equiv$" kongrüans bağıntısı ve dolayısıyla denklik (kalan) sınıflarının $\Gamma/\Delta = \left\{\overline{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\right\}$ kümesi tanımlanabilir.

Teorem 6.4.7 [22] N bir yakın-halka ve I da N nin bir ideali olsun. O zaman N/I üzerinde, N deki "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerine paralel olmak üzere,

$$\left(m+I\right)+\left(n+I\right)=\left(m+n\right)+I \text{ ve } \left(m+I\right)\cdot\left(n+I\right)=\left(m\cdot n\right)+I$$

şeklinde tanımlanan "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerine göre N/I bir yakın-halkadır.

Tanım 6.4.8 [22] Yukarıda belirtilen $\left(N/I,+,\cdot\right)$ yakın-halkasına, N yakın-halkasının I idealine göre *bölüm yakın-halkası* denir.

Tanım 6.4.9 [22] $N,N'\in\mathcal{N}$ ve $\varphi\in Hom\left(N,N'\right)$ olmak üzere,

$$Ker\,\varphi=\left\{n\in N \,\middle|\, \varphi\left(n\right)=0_{N'}\right\}$$

kümesine φ yakın-halka homomorfizmasının *çekirdeği* denir.

Teorem 6.4.10 [22] N ve N' iki yakın-halka ve $\varphi:N\rightarrow N'$ bir yakın-halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(1) K, N nin bir alt yakın-halkası ise $\varphi\left(K\right)$ da N' nün bir alt yakın-halkasıdır.

(2) I, N nin bir ideali ve φ örten ise $\varphi\left(I\right)$ da N' nün bir idealidir.

(3) K', N' nün bir alt yakın-halkası (ideali) ise $\varphi^{-1}\left(K'\right)$ de N nin bir alt yakın-halkasıdır (idealidir).

Teorem 6.4.11 [22] (*Homomorfizma Teoremi*) N ve N' iki yakın-halka olsun. O zaman

(1) $I\lhd N$ ise N/I, N nin bir homomorfik görüntüsüdür.

(2) $\varphi:N\rightarrow N'$ bir yakın-halka epimorfizması ise $Ker\,\varphi$, N nin bir idealidir ve $N/Ker\,\varphi\cong N'$ dür.

Teorem 6.4.12 [22] N ve N' iki yakın-halka ve $\varphi:N\rightarrow N'$ bir yakın-halka epimorfizması olsun. O zaman N nin $Ker\,\varphi$ yi kapsayan alt yakın-halkaları (idealleri) ile N' nün alt yakın-halkaları (idealleri) arasında birebir eşleme vardır.

Teorem 6.4.13 [22] N ve N' iki yakın-halka ve $\varphi : N \to N'$ bir yakın-halka epimorfizması olsun. O zaman N nin $Ker\,\varphi$ yi kapsayan I idealleri için $N/I \cong \varphi(N)/\varphi(I)$ dır.

Teorem 6.4.14 [22] N bir yakın-halka ve $I, J \lhd N$ olsun. Bu durumda $J \subseteq I$ olmak üzere, ${}^{N/J}\!\big/_{I/J} \cong N/I$ dır.

Not 2.4.15 Yukarıda verilen izomorfizma teoremleri N-gruplar için de geçerlidir.

7. BULGULAR ve TARTIŞMA

7.1 Yakınlık Yakın-Halkalar

Bu bölümde yakınlık yakın-halka kavramı tanımlanmış ve ilgili örneklere yer verilmiştir. Ayrıca, alt yakınlık yakın-halka, yakınlık N-grup ve yakınlık yakın-halkasının ideali ve yakınlık yakın-halka homomorfizması kavramları tanımlanarak, bu kavramlar ile alakalı bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 7.1.1 $\left(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r\left(B\right),\nu_{N_r}\right)$ yakın yaklaşım uzayı; "$+$" ve "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde ikili işlemler ve $M\subseteq\mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa M ye *yakın yaklaşım uzayı üzerinde yakın-halka* veya kısaca *yakınlık yakın-halka* denir:

$\left(YN_1\right)$ $\left(M,+\right)$ bir yakınlık gruptur (değişmeli olması gerekmez).

$\left(YN_2\right)$ $\left(M,\cdot\right)$ bir yakınlık yarı-gruptur.

$\left(YN_3\right)$ Her $x,y,z\in M$ için $\left(x+y\right)\cdot z=\left(x\cdot z\right)+\left(y\cdot z\right)$ özelliği $N_r\left(B\right)^* M$ de sağlanır.

Ayrıca, her $x,y\in M$ için $x\cdot y=y\cdot x$ ise M ye *değişmeli yakınlık yakın-halka* ve her $x\in M$ için $1_M\cdot x=x\cdot 1_M=x$ olacak biçimde $1_M\in N_r\left(B\right)^* M$ varsa M ye *birimli yakınlık yakın-halka* denir.

Not 7.1.1 Yukarıdaki tanım dikkate alındığında, $\left(YN_3\right)$ ten dolayı yakınlık yakın-halka kavramı yerine yakınlık sağ yakın-halka kavramı kullanılabilir. Ayrıca, $\left(YN_3\right)$ ün yerine her $x,y,z\in M$ için $x\cdot\left(y+z\right)=\left(x\cdot y\right)+\left(x\cdot z\right)$ özelliği yazılırsa, bu durumda yakınlık sol yakın-halka kavramı tanımlanır. Bu çalışma boyunca yakınlık sağ yakın-halka kavramı kullanılacaktır.

Not 7.1.2 Genellikle $\left(M,+\right)$ grubunun etkisiz elemanı, $\left(M,+,\cdot\right)$ yakınlık yakın-halkasının sıfırı olarak tanımlanır. Ayrıca, bütün yakınlık yakın-halkalarının kümesi

$\mathcal{M}$ ile gösterilir.

Bir M yakınlık yakın halkasında, $(YN_1)-(YN_3)$ özellikleri $N_r(B)^* M$ de geçerli olmak zorundadır. M deki elemanların sonlu tane toplamı veya çarpımı her zaman $N_r(B)^* M$ ye ait olmayabilir. Bu nedenle her $x \in M$ ve bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ ler için $x^n \in N_r(B)^* M$ veya $nx \in N_r(B)^* M$ olduğunu söylemek her zaman mümkün değildir. Buna rağmen $\left(N_r(B)^* M, +\right)$ ve $\left(N_r(B)^* M, \cdot\right)$ birer grupoid ise her $x \in M$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ ler için $x^n \in N_r(B)^* M$ veya her $x \in M$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ ler için $nx \in N_r(B)^* M$ olur.

M birimli bir yakınlık yakın-halka ve $x \in M$ olmak üzere, $y \cdot x = 1_M$ $\left(x \cdot z = 1_M\right)$ olacak şekilde bir $y \in N_r(B)^* M$ $\left(z \in N_r(B)^* M\right)$ varsa x elemanına *sol (sağ) yakın tersinirdir* ve y (z) elemanına x elemanının *sol (sağ) yakın tersi* denir. $x \in M$ hem sol hem de sağ yakın tersinir ise o zaman x elemanına *yakın tersinirdir* denir.

Lemma 7.1.3 Her yakın halka bir yakınlık yakın-halkadır.

İspat. $M \subseteq \mathcal{O}$ bir yakın-halka olmak üzere, $M \subseteq N_r(B)^* M$ olduğundan $(YN_1)-(YN_3)$ sağlanır. Böylece M bir yakınlık yakın-halkadır.

Lemma 7.1.4 Her yakınlık halka bir yakınlık yakın-halkadır.

İspat. $M \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halka olsun. Tanım 5.2.1 gereğince M nin bir yakınlık yakın-halka olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 7.1.5 $\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 7.1 deki gibi tanımlansın.

	A	b	c	d	e	f
φ_1	α_1	α_1	α_1	α_2	α_2	α_2
φ_2	β_1	β_2	β_2	β_3	β_3	β_3

Tablo 7.1

Bununla birlikte $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "+" "$\cdot$" ikili işlemleri Tablo 7.2 ve Tablo 7.3 teki gibi verilsin.

$+$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	f	d	e
c	c	a	b	e	f	d
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	d	c	a	b
f	f	d	e	b	c	a

Tablo 7.2

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e	e
f	f	f	f	f	f	f

Tablo 7.3

Tablo 7.2 den $d+(e+e)\neq(d+e)+e$ olduğundan $(\mathcal{O},+)$ bir grup değildir. Bu nedenle $(\mathcal{O},+,\cdot)$ bir halka değildir.

$M=\{a,d,e,f\}$, $\mathcal{O}$ nun bir alt kümesi olmak üzere, M üzerinde "+" ve "$\cdot$" ikili işlemleri Tablo 7.4 ve Tablo 7.5 teki gibi olur.

+	a	d	e	f
a	a	d	e	f
d	d	a	b	c
e	e	c	a	b
f	f	b	c	a

Tablo 7.4

$\cdot$	a	d	e	f
a	a	a	a	a
d	d	d	d	d
e	e	e	e	e
f	f	f	f	f

Tablo 7.5

Bu durumda

$$\begin{aligned}[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} \\ &= \{a,b,c\} = [b]_{\varphi_1} = [c]_{\varphi_1}, \\ [d]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(d) = \alpha_2\} \\ &= \{d,e,f\} = [e]_{\varphi_1} = [f]_{\varphi_1}\end{aligned}$$

dir. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [d]_{\varphi_1}\}$ olur.

$$\begin{aligned}[a]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \beta_1\} \\ &= \{a\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[b]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \,|\, \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \beta_2\} \\ &= \{b, c\} = [c]_{\varphi_2}, \\ [d]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \,|\, \varphi_2(x') = \varphi_2(d) = \beta_3\} \\ &= \{d, e, f\} = [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2}\end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{[a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}, [d]_{\varphi_2}\right\}$ olur. O zaman $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}N_1(B)^* M &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{a, b, c\} \cup \{d, e, f\} \cup \{a\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f\} = \mathcal{O}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$(\boldsymbol{YN_1})$:

(YG_1) Her $x, y \in M$ için $x + y \in N_r(B)^* M$ dir.

(YG_2) Her $x, y, z \in M$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ özelliği $N_r(B)^* M$ de sağlanır.

(YG_3) Her $x \in M$ için $x + e_M = e_M + x = x$ olacak biçimde bir $e_M \in N_r(B)^* M$ yakın birim elemanı vardır ki, $e_M = a$ dır.

(YG_4) Her $x \in M$ için $x + y = y + x = a$ olacak biçimde bir $y \in M$ vardır, yani $-a = a$, $-d = d$, $-e = e$ ve $-f = f$ dir.

Ayrıca, Tablo 7.4 ten $e + f = b$, $f + e = c$ ve $b \neq c$ olduğundan, "+" ikili işlemine göre değişme özelliği sağlanmaz.

O halde $(M, +)$ değişmeli olmayan bir yakınlık grubudur.

$\left(\boldsymbol{YN_2}\right)$**:**

$\left(YS_1\right)$ Her $x,y\in M$ için $x\cdot y\in N_r\left(B\right)^* M$ dir.

$\left(YS_2\right)$ Her $x,y,z\in M$ için $\left(x\cdot y\right)\cdot z=x\cdot\left(y\cdot z\right)$ özelliği $N_r\left(B\right)^* M$ de sağlanır.

O zaman $\left(M,\cdot\right)$ bir yakınlık yarı-gruptur.

$\left(\boldsymbol{YN_3}\right)$**:** Her $x,y,z\in M$ için $\left(x+y\right)\cdot z=\left(x\cdot z\right)+\left(y\cdot z\right)$ özelliği $N_r\left(B\right)^* M$ de sağlanır.

Böylece $\left(M,+,\cdot\right)$ bir yakınlık yakın-halkadır.

Lemma 7.1.6 $M\subseteq\mathcal{O}$ bir yakınlık yakın-halkası ve $0_M\in M$ olsun. Bu durumda her $x\in M$ için $0_M\cdot x,\ x\cdot 0_M\in M$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $x\in M$ için $0_M\cdot x=0_M$ dir.

(2) Her $x,y\in M$ için $\left(-x\right)\cdot y=-\left(x\cdot y\right)$ dir.

İspat. (1) Her $x\in M$ için

$$0_M\cdot x=\left(0_M+0_M\right)\cdot x=0_M\cdot x+0_M\cdot x$$

olur ve "+" işlemine göre mevcut olan etkisiz elemanın tekliğinden dolayı $0_M\cdot x=0_M$ dir.

(7) (1) den dolayı, her $y\in M$ için $0_M\cdot y=0_M$ dir. Bu durumda

$$0_M=0_M\cdot y=\left(\left(-x\right)+x\right)\cdot y=\left(-x\right)\cdot y+x\cdot y$$

olup, "+" işlemine göre mevcut olan ters elemanın tekliğinden dolayı $\left(-x\right)\cdot y=-\left(x\cdot y\right)$ dir.

Not 7.1.7 M bir yakınlık yakın-halka olmak üzere, her $x,y\in M$ için $x\cdot 0_M=0_M$ ve $x\cdot\left(-y\right)=-\left(x\cdot y\right)$ eşitlikleri sağlanmayabilir.

Tanım 7.1.8 M bir yakınlık yakın-halka olsun. O zaman $M_0 = \{x \in M \mid x \cdot 0_M = 0_M\}$ kümesine M nin *sıfır-simetrik kısmı* ve $M_c = \{x \in M \mid x \cdot 0_M = x\}$ kümesine de M nin *sabit kısmı* denir.

Not 7.1.9 $M = M_0$ ise M ye *sıfır-simetrik yakınlık yakın-halka* ve $M = M_c$ ise M ye *sabit yakınlık yakın-halka* denir. Ayrıca, bütün sıfır-simetrik yakınlık yakın-halkalarının kümesi $\mathcal{M}_0$ ve bütün sabit yakınlık yakın-halkalarının kümesi de $\mathcal{M}_c$ ile gösterilir.

Her $x, y \in M$ için $d \cdot (x + y) = d \cdot x + d \cdot y$ özelliği $N_r(B)^* M$ de geçerli ise d elemanına *distribütif* (*dağılmalı*) *eleman* denir. Ayrıca, bütün birimli yakınlık yakın-halkalarının kümesi $\mathcal{M}_1$ ve bütün distribütif elemanların kümesi de M_d ile gösterilir. $M = M_d$ ise M ye *distribütif yakınlık yakın-halka* denir.

7.2 Yakınlık M-Gruplar ve Alt Cebirsel Yapılar

Tanım 7.2.1 $(G,+)$ bir yakınlık grup ve M bir yakınlık yakın-halka olsun. Bu durumda

$$\eta : N_r(B)^* M \times G \to N_r(B)^* G \quad , \quad \eta((x,g)) = xg$$

şeklinde tanımlanan dış çarpım dikkate alındığında, aşağıdaki özellikler $N_r(B)^* G$ de sağlanırsa (G,η) ikilisine bir *yakınlık* M*-grup* (veya *yakınlık yakın-modül*) denir:

Her $g \in G$ ve her $x, y \in M$ için

$$(x+y)g = xg + yg \quad \text{ve} \quad (x \cdot y)g = x(yg).$$

Yakınlık M-grup kavramı kısaca ${}_M G$ ile gösterilir. Ayrıca, bütün yakınlık M-grupların kümesi ${}_M\mathcal{G}$ ile gösterilir.

Örnek 7.2.2 $(M,+,\cdot)$ bir yakınlık yakın-halkası ise M bir yakınlık M -gruptur.

Tanım 7.2.3 $M \in \mathcal{M}_1$ ve ${}_M G \in {}_M\mathcal{G}$ olmak üzere, her $g \in G$ için $1_M\ g = g$ özelliği $N_r(B)^* G$ de geçerli ise ${}_M G$ ye bir *üniter (birimsel) yakınlık* M *-grup* denir.

Lemma 7.2.4 M bir yakınlık yakın-halka ve G bir yakınlık M -grup olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $g \in G$ için $0_M g = 0_G$ dir.

(2) Her $g \in G$ ve her $x \in M$ için $(-x)g = -xg$ dir.

(3) Her $x \in M_0$ için $x0_G = 0_G$ dir.

(4) Her $g \in G$ ve her $x \in M_c$ için $xg = x0_G$ dir.

İspat. (1) Her $g \in G$ için

$$0_M g = (0_M + 0_M)g = 0_M g + 0_M g$$

olur ve "+" işlemine göre mevcut olan etkisiz elemanın tekliğinden dolayı $0_M g = 0_G$ dir.

(2) (1) den dolayı, her $g \in G$ için $0_M g = 0_G$ dir. O zaman

$$0_G = 0_M g = ((-x)+x)g = (-x)g + xg$$

olup, "+" işlemine göre mevcut olan ters elemanın tekliğinden dolayı $(-x)g = -xg$ dir.

(3) Her $x \in M_0$ için $x \cdot 0_M = 0_M$ olup, (1) den dolayı

$$x0_G = x(0_M g) = (x \cdot 0_M)g = 0_M g = 0_G$$

elde edilir.

(4) Her $x \in M_c$ için $x \cdot 0_M = x$ dir. O halde (1) den dolayı

$$xg = (x \cdot 0_M)g = x(0_M g) = x0_G$$

olur.

Tanım 7.2.5 M bir yakınlık yakın-halka ve $(K,+)$, $(M,+)$ nın bir alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda $K \cdot K \subseteq N_r(B)^* K$ ise K ya M nin bir *alt yakınlık yakın-halkası* denir.

Örnek 7.2.6 $(M,+,\cdot)$ bir yakınlık yakın-halka olsun. O zaman M_0 ve M_c, M üzerinde tanımlanan "+" ve "$\cdot$" işlemlerine göre birer alt yakınlık yakın-halkadır.

Teorem 7.2.7 M bir yakınlık yakın-halka ve K da M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $(N_r(B)^* K,+)$ ve $(N_r(B)^* K,\cdot)$ birer grupoid olsun. Bu durumda K nın M yakınlık yakın-halkasının bir alt yakınlık yakın-halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in K$ için $-x \in K$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: K nın M yakınlık yakın-halkasının bir alt yakınlık yakın-halkası olsun. Bu durumda $(K,+)$ bir yakınlık grubudur. Böylece her $x \in K$ için $-x \in K$ dir.

$(\Leftarrow)$: Hipotezden $(N_r(B)^* K,+)$ bir grupoid ve $K \subseteq M$ olduğundan ve Teorem 5.1.15 gereğince $(K,+)$ bir yakınlık grubudur. $(N_r(B)^* K,\cdot)$ bir grupoid ve $K \subseteq M$ olduğundan, her $x,y,z \in K$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* K$ ve $(x \cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ birleşme özelliği $N_r(B)^* K$ de sağlanır. O zaman $(K,\cdot)$ bir yakınlık yarı-gruptur. Ayrıca, $(N_r(B)^* K,+)$ ve $(N_r(B)^* K,\cdot)$ birer grupoid ve M bir yakınlık yakın-halka olduğundan, her $x,y,z \in K$ için $(x+y)\cdot z = (x \cdot z)+(y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* K$ da sağlanır. Böylece K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

Örnek 7.2.8 Örnek 7.1.5 te verilen $(M,+,\cdot)$ yakınlık yakın-halkasının $K=\{a,f\}$ alt kümesi dikkate alındığında; K, M üzerinde tanımlanan "+" ve "$\cdot$" işlemlerine göre bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

Tanım 7.2.9 M bir yakınlık yakın-halka ve G bir yakınlık M-grup olsun. H, $(G,+)$ nın bir alt yakınlık grubu olsun. O zaman $H\cdot M\subseteq N_r(B)^* H$ koşulu sağlanıyorsa H ye G nin bir *alt yakınlık M-grubu* denir.

Tanım 7.2.10 M bir yakınlık yakın-halka ve I, $(M,+)$ nın bir alt yakınlık grubu olsun. $\left(N_r(B)^* I,+\right)$ ve $\left(N_r(B)^* I,\cdot\right)$ birer grupoid olsun. Bu durumda

(i) $I\cdot M\subseteq N_r(B)^* I$,

(ii) Her $x,y\in M$ ve her $a\in I$ için $x\cdot(y+a)-x\cdot y\in N_r(B)^* I$

koşulları sağlanıyorsa I ya M nin bir *yakınlık ideali* denir.

Ayrıca, sadece (i) koşulunu sağlayan I ya M nin *sağ yakınlık ideali* denir ve sadece (ii) koşulunu sağlayan I ya M nin *sol yakınlık ideali* denir.

Örnek 7.2.11 Örnek 7.1.5 te verilen $(M,+,\cdot)$ yakınlık yakın-halkasının $K=\{a,f\}$ alt kümesi dikkate alındığında; K, M üzerinde tanımlanan "+" ve "$\cdot$" işlemlerine göre bir yakınlık idealidir.

Tanım 7.2.12 M bir yakınlık yakın-halka ve G bir yakınlık M-grup olsun. O zaman H, G nin bir alt yakınlık M-grubu olmak üzere, her $g\in G$, her $h\in H$ ve her $x\in M$ için $x(g+h)-xg\in N_r(B)^* H$ koşulu sağlanıyorsa H ye G nin bir *yakınlık ideali* denir.

7.3 Yakın Zayıf Kalan Sınıflarının Yakınlık Yakın-Halkası

$M\subseteq\mathcal{O}$ bir yakınlık yakın-halka ve K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkası olsun. Bu durumda $x,y\in M$ olmak üzere, M nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_r$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_r y :\Leftrightarrow x + (-y) \in K \cup \{0_M\}.$$

Teorem 7.3.1 M bir yakınlık yakın-halka olmak üzere; "$\sim_r$" bağıntısı M üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $(M,+)$ bir yakınlık grubu olduğundan, her $x \in M$ için $-x \in M$ dir. $x+(-x) = 0_M \in K \cup \{0_M\}$ olduğundan $x \sim_r x$ olur. Her $x, y \in M$ için $x \sim_r y$ ise $x+(-y) \in K \cup \{0_M\}$, yani $x+(-y) \in K$ veya $x+(-y) \in \{0_M\}$ olur. $x+(-y) \in K$ ise $(K,+)$, $(M,+)$ nın bir alt yakınlık grubu olduğundan $-(x+(-y)) = y+(-x) \in K$ dır. Böylece $y \sim_r x$ bulunur. Ayrıca, $x+(-y) \in \{0_M\}$ ise $x+(-y) = 0_M$ dir. Buradan $y+(-x) = -(x+(-y)) = -0_M = 0_M$ ve böylece $y \sim_r x$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_r$" bağıntısı M üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in M$ için, "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının M yakınlık yakın-halkasında belirttiği sınıf

$$\tilde{x}_r = \{k + x \mid k \in K, x \in M, k + x \in M\} \cup \{x\}$$

dir.

Tanım 7.3.2 M bir yakınlık yakın-halka olmak üzere, "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının M de belirttiği sınıflara *yakın sağ zayıf kalan sınıfı* denir.

Herhangi bir $x \in M$ için yakın sağ zayıf kalan sınıfı $K + x$ ile gösterilir, yani

$$K + x = \{k + x \mid k \in K, x \in M, k + x \in K\} \cup \{x\}$$

dir.

Benzer olarak $x, y \in M$ olmak üzere, M yakınlık yakın-halkasının elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_\ell$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_\ell y :\Leftrightarrow (-x)+y \in K \cup \{0\}.$$

Teorem 7.3.3 M bir yakınlık yakın-halka olmak üzere, “$\sim_\ell$” bağıntısı M üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $(M,+)$ bir yakınlık grubu olduğundan, her $x \in M$ için $-x \in M$ dir. $(-x)+x = 0_M \in K \cup \{0_M\}$ olduğundan $x \sim_\ell x$ olur. Her $x, y \in M$ için $x \sim_\ell y$ ise $(-x)+y \in K \cup \{0_M\}$, yani $(-x)+y \in K$ veya $(-x)+y \in \{0_M\}$ olur. $(-x)+y \in K$ ise $(K,+)$, $(M,+)$ nın bir alt yakınlık grubu olduğundan $-((-x)+y) = (-y)+x \in K$ dır. Böylece $y \sim_\ell x$ bulunur. Ayrıca, $(-x)+y \in \{0_M\}$ ise $(-x)+y = 0_M$ dir. Buradan $(-y)+x = -((-x)+y) = -0_M = 0_M$ ve böylece $y \sim_\ell x$ olur. Sonuç olarak, “$\sim_\ell$” bağıntısı M üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Herhangi bir $x \in R$ için, “$\sim_\ell$” sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının M yakınlık yakın-halkasında belirttiği sınıf

$$\tilde{x}_\ell = \{x+k \mid k \in K, x \in M, x+k \in M\} \cup \{x\}$$

dir.

Tanım 7.3.4 M bir yakınlık yakın-halka olmak üzere, “$\sim_\ell$” eşdeğerlik bağıntısının M de belirttiği sınıflara *yakın sol zayıf kalan sınıfı* denir.

Herhangi bir $x \in M$ için yakın sol zayıf kalan sınıfı $x+K$ ile gösterilir, yani

$$x+K = \{x+k \mid k \in K, x \in M, x+k \in M\} \cup \{x\}$$

dir.

$(M,+)$ yakınlık grubu değişmeli ise $\tilde{x}_\ell = \tilde{x}_r$ olur. Fakat yakınlık yakın-halka tanımı gereğince $(M,+)$ yakınlık grubunun değişmeli olması gerekmediğinden $\tilde{x}_\ell$

ile $\tilde{x}_r$ birbirine eşit olmayabilir.

M bir yakınlık yakın-halka ve K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkası olmak üzere,

$$M/_{\sim_\ell} = \{x + K \mid x \in M\}$$

M nin K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada M yerine $N_r(B)^* M$ alınırsa,

$$\left(N_r(B)^* M\right)/_{\sim_\ell} = \left\{x + K \mid x \in N_r(B)^* M\right\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$x + K = \left\{x + k \mid k \in K, x \in N_r(B)^* M, x + k \in M\right\} \cup \{x\}$$

olur.

Tanım 7.3.5 M bir yakınlık yakın-halka ve K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkası olsun. $x, y \in M$ olmak üzere, $x + K$ ve $y + K$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x + y \in N_r(B)^* M$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfının toplamı

$$\left\{(x + y) + k \mid k \in K, x + y \in N_r(B)^* M, (x + y) + k \in M\right\} \cup \{x + y\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(x + K) \oplus (y + K) = (x + y) + K$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 7.3.6 M bir yakınlık yakın-halka ve K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkası olsun. $x, y \in M$ olmak üzere, $x + K$ ve $y + K$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x \cdot y \in N_r(B)^* M$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfının çarpımı

$$\left\{ (x \cdot y) + k \mid k \in K, x \cdot y \in N_r(B)^* M, (x \cdot y) + k \in M \right\} \cup \{x \cdot y\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(x+K) \odot (y+K) = (x \cdot y) + K$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 7.3.7 $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $M \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık yakın-halka ve K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkası olsun. $M/_{\sim_\ell}$, M nin K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere,

$$N_r(B)^* \left(M/_{\sim_\ell}\right) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \underset{\Phi}{\cap} M/_{\sim_\ell} \neq \varnothing} \xi_\Phi(A)$$

kümesine $M/_{\sim_\ell}$ *nin üst yaklaşımı* denir.

Teorem 7.3.8 M bir yakınlık yakın-halka; K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkası ve $M/_{\sim_\ell}$, M nin K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda

$$\left(N_r(B)^* M\right)/_{\sim_\ell} \subseteq N_r(B)^* \left(M/_{\sim_\ell}\right)$$

ise $M/_{\sim_\ell}$, her $x, y \in M$ için

$$(x+K) \oplus (y+K) = (x+y) + K$$

ve

$$\left(x+K\right)\odot\left(y+K\right)=\left(x\cdot y\right)+K$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yakınlık yakın-halkadır.

İspat. $\left(\boldsymbol{YN_1}\right):\left(\boldsymbol{YG_1}\right)$ $\left(M,+\right)$ bir yakınlık grubu olduğundan, $x+y\in N_r\left(B\right)^{*}M$ ve $x+K, y+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$\left(x+K\right)\oplus\left(y+K\right)=\left(x+y\right)+K\in\left(N_r\left(B\right)^{*}M\right)/_{\sim_\ell}$$

dir. Hipotezden, $x+K, y+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$\left(x+K\right)\oplus\left(y+K\right)=\left(x+y\right)+K\in N_r\left(B\right)^{*}\left(M/_{\sim_\ell}\right)$$

olur.

$\left(\boldsymbol{YG_2}\right)$ $\left(M,+\right)$ bir yakınlık grubu olduğundan, her $x,y,z\in M$ için birleşme özelliği $N_r\left(B\right)^{*}M$ de geçerlidir. Bu durumda $x+K, y+K, z+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$\begin{aligned}\left(\left(x+K\right)\oplus\left(y+K\right)\right)\oplus\left(z+K\right)&=\left(\left(x+y\right)+K\right)\oplus\left(z+K\right)\\&=\left(\left(x+y\right)+z\right)+K\\&=\left(x+\left(y+z\right)\right)+K\\&=\left(x+K\right)\oplus\left(\left(y+z\right)+K\right)\\&=\left(x+K\right)\oplus\left(\left(y+K\right)\oplus\left(z+K\right)\right)\end{aligned}$$

eşitliği $\left(N_r\left(B\right)^{*}M\right)/_{\sim_\ell}$ de sağlanır. O zaman hipotez gereğince, $x+K, y+K, z+K\in M/_{\sim_\ell}$ için birleşme özelliği $N_r\left(B\right)^{*}\left(M/_{\sim_\ell}\right)$ de geçerlidir.

$\left(\boldsymbol{YG_3}\right)$ $\left(M,+\right)$ bir yakınlık grubu olduğundan, her $x\in M$ için $x+0_M=0_M+x=x$ olacak şekilde bir $0_M\in N_r\left(B\right)^{*}M$ vardır. Bu durumda her $x+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$(x+K)\oplus(0_M+K)=(x+0_M)+K=x+K\,,$$
$$(0_M+K)\oplus(x+K)=(0_M+x)+K=x+K$$

bulunur. Böylece $0_M+K\in\left(N_r(B)^* M\right)/_{\sim_\ell}\subseteq N_r(B)^*\left(M/_{\sim_\ell}\right)$, $M/_{\sim_\ell}$ nin "$\oplus$" işlemine göre yakın birim elemanıdır.

$(\boldsymbol{YG_4})$ $(M,+)$ bir yakınlık grubu olduğundan, her $x\in M$ için $x+y=y+x=0_M$ olacak şekilde bir $y=-x\in M$ vardır. Bu durumda her $x+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$(x+K)\oplus\left((-x)+K\right)=\left(x+(-x)\right)+K=0_M+K\,,$$
$$\left((-x)+K\right)\oplus(x+K)=\left((-x)+x\right)+K=0_M+K$$

olur. Buradan $(-x)+K$, $x+K$ nın "$\oplus$" işlemine göre yakın tersidir.

Böylece $\left(M/_{\sim_\ell},\oplus\right)$ bir yakınlık grubudur.

$(\boldsymbol{YN_2}):(\boldsymbol{YS_1})$ $(M,\cdot)$ bir yakınlık yarı-grup olduğundan, $x\cdot y\in N_r(B)^* M$ ve $x+K,\, y+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$(x+K)\odot(y+K)=(x\cdot y)+K\in\left(N_r(B)^* M\right)/_{\sim_\ell}$$

dir. Hipotezden, $x+K,\, y+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$(x+K)\odot(y+K)=(x\cdot y)+K\in N_r(B)^*\left(M/_{\sim_\ell}\right)$$

olur.

$(\boldsymbol{YS_2})$ $(M,\cdot)$ bir yakınlık yarı-grup olduğundan, her $x,y,z\in M$ için birleşme özelliği $N_r(B)^* M$ de geçerlidir. Bu durumda $x+K,\, y+K,\, z+K\in M/_{\sim_\ell}$ için

$$\begin{aligned}\big((x+K)\odot(y+K)\big)\odot(z+K) &= \big((x\cdot y)+K\big)\odot(z+K)\\ &= \big((x\cdot y)\cdot z\big)+K\\ &= \big(x\cdot(y\cdot z)\big)+K\\ &= (x+K)\odot\big((y\cdot z)+K\big)\\ &= (x+K)\odot\big((y+K)\odot(z+K)\big)\end{aligned}$$

eşitliği $\left(N_r(B)^* M\right)/_{\sim_\ell}$ de sağlanır.

O zaman hipotez gereğince, $x+K, y+K, z+K \in M/_{\sim_\ell}$ için birleşme özelliği $N_r(B)^*\left(M/_{\sim_\ell}\right)$ de geçerlidir. Böylece $\left(M/_{\sim_\ell},\odot\right)$ bir yakınlık yarı-gruptur.

$(\boldsymbol{YN_3})$: M bir yakınlık yakın-halka olduğundan, her $x,y,z\in M$ için sağdan dağılma özelliği $N_r(B)^* M$ de geçerlidir. Bu durumda $x+K, y+K, z+K \in M/_{\sim_\ell}$ için

$$\begin{aligned}\big((x+K)\oplus(y+K)\big)\odot(z+K) &= \big((x+y)+K\big)\odot(z+K)\\ &= \big((x+y)\cdot z\big)+K\\ &= \big((x\cdot z)+(y\cdot z)\big)+K\\ &= \big((x\cdot z)+K\big)\oplus\big((y\cdot z)+K\big)\\ &= \big((x+K)\odot(z+K)\big)\oplus\big((y+K)\odot(z+K)\big)\end{aligned}$$

eşitliği $\left(N_r(B)^* M\right)/_{\sim_\ell}$ de sağlanır.

O zaman hipotezden, $x+K, y+K, z+K \in M/_{\sim_\ell}$ için sağdan dağılma özelliği $N_r(B)^*\left(M/_{\sim_\ell}\right)$ de geçerlidir.

Sonuç olarak, $(YN_1)-(YN_3)$ özellikleri sağlandığından $M/_{\sim_\ell}$ bir yakınlık yakın-halkadır.

Tanım 7.3.9 M bir yakınlık yakın-halka ve K, M nin bir alt yakınlık yakın-halkası olsun. $M/_{\sim_\ell}$ yakınlık yakın-halkasına *M nin K ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının yakınlık yakın-halkası* denir ve $M/_w K$ şeklinde gösterilir.

7.4 Homomorfizmalar

Tanım 7.4.1 $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka olsun. Her $x, y \in M_1$ için

$$\psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y)$$

ve

$$\psi(x\cdot y)=\psi(x)\cdot\psi(y)$$

olacak şekilde bir

$$\psi : N_r(B)^* M_1 \to N_r(B)^* M_2$$

fonksiyonu varsa ψ ye *yakınlık yakın-halka homomorfizması* denir. M_1 ve M_2 yakınlık yakın-halkalarına da *yakın homomorfiktir* denir ve $M_1 \simeq_n M_2$ ile gösterilir.

ψ, $N_r(B)^* M_1$ den $N_r(B)^* M_2$ ye bir yakınlık yakın-halka homomorfizması olmak üzere,

(i) ψ birebir ise ψ ye *yakınlık yakın-halka monomorfizması*,

(ii) ψ örten ise ψ ye *yakınlık yakın-halka epimorfizması*,

(iii) ψ birebir ve örten ise ψ ye *yakınlık yakın-halka izomorfizması*

denir.

$N_r(B)^* M_1$ den $N_r(B)^* M_2$ ye bütün yakınlık yakın-halka homomorfizmalarının kümesi $Hom\left(N_r(B)^* M_1, N_r(B)^* M_2\right)$ ile gösterilir.

Tanım 7.4.2 M bir yakınlık yakın-halka ve G_1 ile G_2 iki yakınlık M-grup olsun.

Her $g,h \in G_1$ ve her $x \in M$ için

$$\mu(g+h)=\mu(g)+\mu(h)$$

ve

$$\mu(xg)=x\mu(g)$$

olacak şekilde bir

$$\mu : N_r(B)^* G_1 \to N_r(B)^* G_2$$

fonksiyonu varsa μ ye *yakınlık* M *-homomorfizması* denir. G_1 ve G_2 yakınlık M -gruplarına da *yakın* M *-homomorfiktir* denir ve $G_1 \simeq_n G_2$ ile gösterilir.

μ, $N_r(B)^* G_1$ den $N_r(B)^* G_2$ ye bir yakınlık M -homomorfizması olmak üzere,

(i) μ birebir ise μ ye *yakınlık* M *-monomorfizması*,

(ii) μ örten ise μ ye *yakınlık* M *-epimorfizması*,

(iii) μ birebir ve örten ise μ ye *yakınlık* M *-izomorfizması*

denir.

$N_r(B)^* G_1$ den $N_r(B)^* G_2$ ye bütün yakınlık M -homomorfizmalarının kümesi $Hom_M\left(N_r(B)^* G_1, N_r(B)^* G_2\right)$ ile gösterilir.

Örnek 7.4.3 M bir yakınlık yakın-halka ve G bir yakınlık M -grup olsun. O zaman her $g \in G$ ve her $x \in M$ için $\mu(x)=xg$ şeklinde tanımlanan $\mu : N_r(B)^* M \to N_r(B)^* G$ fonksiyonu bir yakınlık M -homomorfizmasıdır, yani $\mu \in Hom_M\left(N_r(B)^* M, N_r(B)^* G\right)$ dir.

Teorem 7.4.4 $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka ve ψ, $N_r(B)^* M_1$ den

$N_r(B)^* M_2$ ye bir yakınlık yakın-halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(1) $0_{M_2} \in N_r(B)^* M_2$, M_2 nin yakın sıfır elemanı olmak üzere, $\psi(0_{M_1}) = 0_{M_2}$ dir.

(2) Her $x \in M_1$ için $\psi(-x) = -\psi(x)$ dir.

İspat. (1) $0_{M_1} = 0_{M_1} + 0_{M_1}$ olup, bu eşitliğe ψ yakınlık yakın-halka homomorfizması uygulanırsa

$$\psi(0_{M_1}) = \psi(0_{M_1} + 0_{M_1}) = \psi(0_{M_1}) + \psi(0_{M_1})$$

elde edilir. Böylece M_2 deki "+" işlemine göre mevcut olan etkisiz elemanın tekliğinden dolayı $\psi(0_{M_1}) = 0_{M_2}$ dir.

(2) $x \in M_1$ olmak üzere, $0_{M_1} = x + (-x)$ dir. Bu eşitliğe ψ yakınlık yakın-halka homomorfizması uygulanır ve (1) kullanılırsa

$$0_{M_2} = \psi(0_{M_1}) = \psi(x + (-x)) = \psi(x) + \psi(-x)$$

olur. Benzer şekilde, $x \in M_1$ için $0_{M_2} = \psi(-x) + \psi(x)$ olduğu gösterilebilir. Böylece M_2 deki "+" işlemine göre $\psi(x)$ elemanının mevcut olan tersinin tekliğinden dolayı $\psi(-x) = -\psi(x)$ dir.

Tanım 7.4.5 $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka ve

$$\psi \in Hom\left(N_r(B)^* M_1, N_r(B)^* M_2\right)$$

olmak üzere,

$$Ker\psi = \left\{x \in M_1 \;\middle|\; \psi(x) = 0_{M_2}\right\}$$

kümesine ψ yakınlık yakın-halka homomorfizmasının *çekirdeği* denir.

Teorem 7.4.6 $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka ve ψ, $N_r(B)^* M_1$ den $N_r(B)^* M_2$ ye bir yakınlık yakın-halka homomorfizması olsun. Bu durumda $\left(N_r(B)^* Ker\psi, +\right)$ ve $\left(N_r(B)^* Ker\psi, \cdot\right)$ birer grupoid olmak üzere; $Ker\psi$, M_1 in bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

İspat. $x \in Ker\psi$ olsun. O zaman $\psi(x) = 0_{M_2}$ dir. Ayrıca, $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka olduğundan $0_{M_1} \in N_r(B)^* M_1$ ve $0_{M_2} \in N_r(B)^* M_2$ olup, Teorem 7.4.4 (1) den $\psi\left(0_{M_1}\right) = 0_{M_2}$ dir. Bu durumda

$$0_{M_2} = \psi\left(0_{M_1}\right) = \psi\left(x + (-x)\right) = \psi(x) + \psi(-x)$$

olur ki, $\psi(x) = 0_{M_2}$ olduğundan $\psi(-x) = 0_{M_2}$ elde edilir. O zaman ψ yakınlık yakın-halka homomorfizmasının çekirdeğinin tanımı gereğince $-x \in Ker\psi$ dir. Böylece Teorem 7.2.7 dikkate alınırsa $Ker\psi$, M_1 in bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

Teorem 7.4.7 $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka, $K \subset M_1$ ve ψ, $N_r(B)^* M_1$ den $N_r(B)^* M_2$ ye bir yakınlık yakın-halka homomorfizması olsun. Bu durumda $\left(N_r(B)^* K, +\right)$ ve $\left(N_r(B)^* K, \cdot\right)$ birer grupoid olmak üzere; K, M_1 in alt yakınlık yakın-halkası ve

$$\psi\left(N_r(B)^* K\right) = N_r(B)^* \psi(K)$$

ise $\psi(K) = \left\{\psi(x) \mid x \in K\right\}$, M_2 nin bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

İspat. $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka olduğundan $0_{M_1} \in N_r(B)^* M_1$ ve $0_{M_2} \in N_r(B)^* M_2$ olup, Teorem 7.4.4 (1) den $\psi\left(0_{M_1}\right) = 0_{M_2}$ dir. O zaman

$$0_{M_2} = \psi\left(0_{M_1}\right) = \psi\left(N_r\left(B\right)^* K\right) = N_r\left(B\right)^* \psi\left(K\right)$$

elde edilir ki, $N_r\left(B\right)^* \psi\left(K\right) \neq \varnothing$ ve dolayısıyla $\psi\left(K\right) \neq \varnothing$ olur. $x \in K$ olmak üzere; K, M_1 in bir alt yakınlık yakın-halkası olduğundan, Teorem 7.2.7 gereğince $-x \in K$ dır. Bu nedenle Teorem 7.4.4 (2) den, her $\psi\left(x\right) \in \psi\left(K\right)$ için

$$-\psi\left(x\right) = \psi\left(-x\right) \in \psi\left(K\right)$$

bulunur. Böylece Teorem 7.2.7 dikkate alındığında $\psi\left(K\right)$, M_2 nin bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

Teorem 7.4.8 $M_1, M_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık yakın-halka, $L \subset M_2$ ve ψ, $N_r\left(B\right)^* M_1$ den $N_r\left(B\right)^* M_2$ ye bir yakınlık yakın-halka homomorfizması olsun. Bu durumda $\left(N_r\left(B\right)^* L, +\right)$ ve $\left(N_r\left(B\right)^* L, \cdot\right)$ birer grupoid olmak üzere; L, M_2 nin alt yakınlık yakın-halkası ise $\psi^{-1}\left(L\right) = \left\{x \in M_1 \mid \psi\left(x\right) \in L\right\}$, M_2 nin bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

İspat. $x \in \psi^{-1}\left(L\right)$ olsun. Bu durumda $\psi\left(x\right) \in L$ olup; L, M_2 nin bir alt yakınlık yakın-halkası olduğundan, Teorem 7.2.7 gereğince $-\psi\left(x\right) \in L$ elde edilir. O zaman Teorem 7.4.4 (2) den $\psi\left(-x\right) \in L$ ve dolayısıyla $-x \in \psi^{-1}\left(L\right)$ bulunur. Böylece Teorem 7.2.7 dikkate alınırsa $\psi^{-1}\left(L\right) = \left\{x \in M_1 \mid \psi\left(x\right) \in L\right\}$, M_2 nin bir alt yakınlık yakın-halkasıdır.

8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Günümüz matematik ve mühendislik dünyasında fuzzy kümeler, yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler ve ilgili cebirsel yapılar önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle lisansüstü seviyede araştırmalar yapmak ve yeni sonuçlar elde etmek amacıyla, yakınlık cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda yakın-halka kavramı dikkate alınarak, yakın yaklaşım uzayında halka kavramı genelleştirilmiş ve bazı özgün sonuçlar elde edilmiştir. Böylece literatüre yeni bir kaynak kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Inform. and Comput.*, 8, 338-353, 1965.

[2] A. Rosenfeld, "Fuzzy groups", *J. Math. Anal. Appl.*, 35, 512-517, 1971.

[3] J. N. Mordeson and D. S. Malik, *Fuzzy commutative algebra*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

[4] J. N. Mordeson, K. R. Bhutani and A. Rosenfeld, *Fuzzy group theory*, Springer, 2005.

[5] Z. Pawlak, "Rough sets", *Int. J. Comput. Inform. Sci.*, 11(5), 341-356, 1982.

[6] B. Davvaz, "Roughness in rings", *Inform. Sci.*, 164, 147-163, 2004.

[7] L. Polkowski, *Rough sets*, *Mathematical foundations*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.

[8] R. Biswas and S. Nanda, "Rough groups and rough subgroups", *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 42, 251-254, 1994.

[9] J. F. Peters, "Near sets. Special theory about nearness of objects", *Fund. Inform.*, 75(1-4), 407-433, 2007.

[10] J. F. Peters, "Near sets. General theory about nearness of objects", *Appl. Math. Sci.*, 1(53-56), 2609-2629, 2007.

[11] J. F. Peters, "Near sets: An introduction", *Math. Comput. Sci.*, 7(1), 3-9, 2013.

[12] E. İnan and M. A. Öztürk, "Near groups on nearness approximation spaces", *Hacet. J. Math. Stat.*, 41(4), 545-558, 2012.

[13] E. İnan and M. A. Öztürk, "Near semigroups on nearness approximation spaces", *Annals Fuzzy Math. Inform.*, 10(2), 287-297, 2015.

[14] M. A. Öztürk, M. Uçkun and E. İnan, "Near groups of weak cosets on nearness approximation spaces", *Fund. Inform.*, 133, 433-448, 2014.

[15] M. A. Öztürk and E. İnan, Nearness rings, *Annals Fuzzy Math. Inform.*, 17(2), 115-131, 2019.

[16] E. İnan, "Yakın Yaklaşım Uzaylarında Cebirsel Yapılar", Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2015.

[17] S. A. Naimpally and J. F. Peters, *Topology with applications. Topological spaces via near and far*, World Scientific, Singapore, 2012.

[18] C. Henry and G. Smith, *Proximity System*, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2012-021.

[19] L. E. Dickson, “Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6, 198-204, 1905.

[20] L. E. Dickson, “On Finite Algebras”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 358-393, 1905.

[21] H. Zassenhaus, “Über Endliche Fastkörper”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11, 187-220, 1935/1936.

[22] G. Pilz, *Near-rings: The Theory and Its Applications*, 2nd ed., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983.

[23] J. F. Peters, *Topology of Digital Images. Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.

[24] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer, New York, 1974.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Abdurrahman GENÇ

Doğum Yeri : Adıyaman

Doğum Tarihi : 15.11.1988

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : agenc1987@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	**Alan**	**Üniversite//Lise**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi	2012
	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Adıyaman Eğitim Fakültesi	2016
Lise	Fen Bilimleri	Rekabet Kurumu	2005

Yayınlar

[1] M. Uçkun and A. Genç, “Near-rings on nearness approximation spaces”, (*submitted*) 2019.