T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKINLIK GAMMA HALKALAR

RAMAZAN EROL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

T. C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKINLIK GAMMA HALKALAR

Ramazan EROL

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Bu tez 03/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN
Danışman

Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKINLIK GAMMA HALKALAR

Ramazan EROL

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN
Yıl : 2019, Sayfa sayısı: 55 + vi

Jüri : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN
Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN

Bu çalışmanın birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmanın amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, yakın kümeler, yakın yaklaşım uzayları, yakınlık grupları, yakınlık halkaları ve gamma halkalar ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, yakınlık gamma halka tanımlanmış ve bazı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca, yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık gamma halkasından bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yakın küme; Yakın yaklaşım uzayı; Yakınlık halkası; Gamma halka; Yakınlık gamma halkası

ABSTRACT

MSc Thesis

NEARNESS GAMMA RINGS

Ramazan EROL

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN
Year : 2019, Number of Pages: 55 + vi

Jury : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Assist. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN
Assist. Prof. Dr. Ebubekir İNAN

In the first chapter of this study, the aim and importance of the study are mentioned. In the second chapter, a summary of the literature is presented in accordance with the purpose of this study.

In the third chapter, some results are given about near sets, nearness approximation spaces, nearness groups, nearness rings and gamma rings.

In the fourth chapter, the nearness gamma ring is also defined, and some basic features are investigated. Moreover, the nearness gamma ring of the near weak cosets is introduced.

Key Words: Near set; Nearness approximation space; Nearness ring; Gamma ring; Nearness gamma ring

BEYAN

"**Yakınlık Gamma Halkalar**" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve ayrıca, alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Ramazan EROL

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen ve bu tezi hazırlarken bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN’a minnet ve şükranlarımı sunarım. Bu çalışmada verilen orijinal sonuçların kontrol edilmesinde desteğini ve teknik yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{O}$	: Algılanabilen nesnelerin kümesi
$\mathcal{F}$	: Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi
φ	: Çıkarım fonksiyonu
$\sim_B$	: Ayırt edilemezlik bağıntısı
$[x]_B$	: Yakınlık sınıfı
ξ_B	: Bölüm kümesi
$N_r(B)$	: Ayrışımların kümesi
$N_r(B)_* X$	: $N_r(B)$-alt yaklaşımı
$N_r(B)^* X$	: $N_r(B)$-üst yaklaşımı
S	: Yakınlık yarı-grup
G	: Yakınlık grup
$\sim_r$	: Sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısı
$\sim_\ell$	: Sol zayıf eşdeğerlik bağıntısı
$G/\sim_\ell$	: Sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G de belirttiği tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi
R	: Yakınlık halka
M	: Yakınlık gamma halka

1. GİRİŞ

Yakın küme teorisi, ayrık kümelerdeki nesnelerden elde edilen benzer bilgilerin kullanılabilmesini sağlar, yani nesnelerin gözlemlenmesi, karşılaştırılması ve sınıflandırılması için yakın küme teorisi kullanılır. Yakın kümelerin keşfi, gözlemlenen nesneler için uygun bir tanımlama yöntemi seçilmesi ile başlar. Bu ise gözlemlenen nesnelerin özelliklerini temsil eden fonksiyonların seçimi ile mümkün olmaktadır. Bu fonksiyonlar için ilk model Pavel tarafından, dijital görüntülerin sınıflandırılması için verilmiştir [1].

Yakın küme teorisinde nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları bir nesneden, gözlemlenebilen özelliklerin değerine karşılık gelen bir reel sayıya tanımlıdır [2].

Yakın kümeler, mühendislik ve doğa problemlerinin yanı sıra özellikle görüntü işleme, görüntü analizi gibi insan algısı ile ilgili problemlerin çözümü için ideal bir yapı sunar. Yakın küme teorisindeki algı kavramı, felsefik algı fikri ile psikofizikteki [3] algı fikrinin kombinasyonlarından oluşur [4].

Bu çalışmanın birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmanın amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde, yakın kümeler, yakın yaklaşım uzayları, yakınlık grupları, yakınlık halkaları ve gamma halkalar ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, yakınlık gamma halka tanımlanmış ve bazı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca, yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık gamma halkasından bahsedilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2002 yılında Peters, yaklaşımlı küme kavramının bir genelleştirmesi olarak yakın küme kavramını tanımladı. Yakın küme teorisi ile ilgili bilgiler için [5] ve [2] kaynakları incelenebilir.

Küme teorisi dikkate alındığında yakın küme kavramının Cantor'un klasik küme kavramını tamamlayan ve belirsizlik durumlarının modellenmesine yardımcı olan bir kavram olduğu görülmektedir.

Nobusawa [6] halka kavramından daha genel olan gamma halka kavramını tanımladı. Daha sonra Barnes, Nobusawa anlamında gamma halka kavramının tanımındaki koşulları biraz zayıflatmış ve gamma halka kavramını yeniden tanımladı [7]. Birçok matematikçi gamma halkasının yapısını incelemeye devam etmiş ve halka teorisindeki sonuçlar ile ilgili olarak bazı genelleştirmeler elde etmiştir [8, 9].

Günümüz matematik ve mühendislik dünyasında küme teorisi ve cebirsel yapılar önemli bir yere sahiptir [10–12]. Bu nedenle lisansüstü (yüksek lisans) programda bu eksikliği gidermek amacıyla, özellikle aşağıda belirtilen [13–18] kaynaklar dikkate alınarak, yakın küme teorisinde cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar incelenmiş ve yakınlık halkaları, yakınlık gamma halkalarına genelleştirilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Yakın Kümeler ve Yakın Yaklaşım Uzayları

Bu kısımda yakın küme kavramının temelleri, çıkarım fonksiyonları, yakın kümeler ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecektir [2].

Tanım 3.1.1. *[2, 19] Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyonlara çıkarım fonksiyonu denir.*

Çıkarım fonksiyonları nesneler arasında olduğu gibi benzer nesnelerden oluşan kümeler arasında da benzerlikler kurar [20]. Nesnelerin aralarındaki benzerlikler dikkate alınırsa birbirlerine yakın oldukları gözlemlenir. Benzer şekilde nesnelerin oluşturduğu kümeler de benzerlikler yönüyle birbirlerine belli derecelerde yakın olurlar. Bir çıkarım, çevremizdeki nesnelerin gözlemlenebilen fiziksel karakteristiklerini ölçer. Diğer bir ifade ile çıkarım fonksiyonu, genellikle karakteristik özelliklerin çıkarımı olarak adlandırılan işin temelidir [21].

Çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve algılanabilen nesnelerin kümesi yakın küme teorisinin temelinde yer alır. Bu iki kavram birlikte düşünüldüğünde ortaya bilgi sistemi dediğimiz yapı çıkar [4].

Aksiyom 3.1.1. *[4] Bir nesne algılanabilirdir ancak ve ancak bu nesne tanımlanabilirdir.*

Merleau-Ponty nin görüşüne göre bir nesne tanımlanabildiği ölçüde algılanabilir. Diğer bir deyimle bir nesne ne kadar tanımlanabiliyorsa o kadar algılanabilir. Poincaré

[22] deki bir duyunun kavranması ve yakın küme teorisinden bir çıkarım fonksiyonu için bir fiziksel model [23, 24], görsel algı açısından Zeeman tarafından açıklanmıştır [25]. Yapılan bu tespitler yakın küme teorisindeki çıkarım fonksiyonlarının nasıl belirlenebileceği ile ilgili yapısal bir model oluşturur [2, 4, 23].

Aksiyom 3.1.2. *[4] Nesne tanımlamalarını formülleştirmek nesnelerin matematiksel olarak algılanmasını sağlar.*

Yakın küme kavramında, kümelerin yakınlığı algılanabilen sistemler dikkate alınarak incelenir [23]. Poincaré'in, bir fiziksel zaman-mekan sürekliliğindeki dijital görüntüler gibi nesnelerin algılanması fikri, algılanabilir bilgi sistemleri ile benzer olan ancak aynı olmayan algılanabilir sistemler ile mümkün olabilmektedir [23, 24].

Tanım 3.1.2. *[2] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının boş olmayan bir kümesi olmak üzere $\langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle$ ye bir algılanabilir sistem denir.*

Çıkarım fonksiyonları daha genel olarak reel değerli olmayan fonksiyonlar olarak da dikkate alınabilir, yani V boştan farklı herhengi bir küme, $X \subseteq \mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olmak üzere, çıkarım fonksiyonu

$$\varphi : X \longrightarrow V$$

şeklinde tanımlanabilir [26]. Reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılarak her ne kadar cebirsel yapılar çalışılabilse de, bu tanım yakın kümeler teorisinde mantık ve cebirsel yapıların teorik olarak da çalışılabilmesine imkan sağlar.

Nesneler ancak matematiksel bir takım tanımlamalar yardımıyla bilgisayar sistemleri tarafından algılanabilirler. Bir $x \in X$ nesnesinin tanımı, çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlenir. Burada önemli konulardan biri de $\varphi_i \in B$ çıkarım fonksiyonlarının, nesnelerin hangi yönüyle tanımlandığı dikkate alınarak belirlenmesidir. $B \subseteq \mathcal{F}$, $X \subseteq \mathcal{O}$ örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \longrightarrow$

$\mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa, tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^L$ nesne tanımlaması elde edilir, yani

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

vektörü bir nesne tanımlamasıdır. Bu kavramlar Tablo 3.1 de verilmiştir.

Sembol	*Anlamı*
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathcal{O}$	Algılanabilir nesnelerin kümesi,
X	$X \subseteq \mathcal{O}$, örnek nesnelerin kümesi,
x	$x \in \mathcal{O}$, örnek nesne,
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi,
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,
L	Tanım uzunluğu,
i	$i \leq L$, $L \in \mathbb{Z}^+$,
φ_i	$\varphi_i : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$, çıkarım fonksiyonu,
Φ	$\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^L$, nesne tanımlaması,
$\Phi(x)$	$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$

Tablo 3.1

$X \subseteq \mathcal{O}$ kümelerindeki nesneler benzer tanımlamalara sahip ise o zaman nesneler birbirlerine yakındırlar. Her bir φ, bir nesnenin ayırt edici bir özelliğini belirtir (Tablo 3.1). Bu durumda $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere, Δ_{φ_i} farkı

$$\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Δ_φ farkı, Pawlak tarafından tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısını belirler [27].

Tanım 3.1.3. *[2] $x, x' \in \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. $i \leq |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere,*

$$\{(x, x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \forall \varphi_i \in B \;\; \Delta_{\varphi_i} = 0\,\}$$

ile tanımlanan bağıntıya $\mathcal{O}$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir ve "$\sim_{B_r}$" ile gösterilir.

Bu kavramlar Tablo 3.2 de verilmiştir.

$Sembol$	$Anlamı$
$\sim_B$	$\sim_B = \{(x, x') \mid f(x) = f(x'),\;\; \forall f \in B\}$, ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_B$	$[x]_B = \{x' \in X \mid x \sim_B x'\}$, yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O} / \sim_B$	$\mathcal{O} / \sim_B = \{[x]_B \mid x \in \mathcal{O}\}$, bölüm kümesi,
ξ_B	$\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$,
Δ_{φ_i}	$\Delta_{\varphi_i} = \lvert\varphi_i(x') - \varphi_i(x)\rvert$, çıkarım fonksiyonlarının farkı.

$Tablo$ 3.2

Yakın küme yaklaşımında nesnelerin tanınması için temel düşünce, nesne tanımlamalarının karşılaştırılmasıdır.

Tanım 3.1.4. *[2] $X, X' \subseteq \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $x \in X$, $x' \in X'$ için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ varsa X kümesi X' kümesine yakındır denir.*

Teorem 3.1.1. *[2] $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$ ayrışımındaki her bir sınıf yakın kümedir.*

Teorem 3.1.2. *[2] ξ_B ayrışımı bir yakın kümedir.*

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $\mathcal{F}$ kümesi de nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

r, kısıtlanmış $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümesinin kardinalitesi olmak üzere; $\sim_{B_r}$, yaklaşımlı küme teorisinden $B_r \subseteq B$ alt kümesine kısıtlanmışı olan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi, "$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısının $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin farklı bir ayrışımının tanımlanmasına yol açar. Bu seçim $|B|$, B deki fonksiyonların sayısı ve r, B_r kümesinin kardinalitesi olmak üzere, $\binom{|B|}{r}$ farklı şekilde yapılabilir.

"$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısı, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesini ikişer ikişer ayrık olan $[x]_{B_r}$ yakınlık sınıflarına ayırır. Bu sınıfların $\mathcal{O}/\sim_{B_r}= \left\{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\right\}$ kümesi bölüm kümesidir. $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ dir. Ayrışımların bir kümeler ailesi olan $N_r(B)$ kümesi de $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ dir.

Ayrıca, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $\nu_{N_r} : \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \longrightarrow [0,1]$ şeklindedir. Yakınlık fonksiyonu bir küme çiftinden, $[0,1]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olup, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $B_r \subseteq B$ deki fonksiyonlar yardımıyla özellikleri belli olan nesne kümeleri arasındaki yakınlık derecesini temsil eder [28].

Nesne özelliklerini temsil eden $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümelerinin herbirinin $\binom{|B|}{r}$ farklı seçimi, birer farklı $\sim_{B_r}= \{(x,x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \forall\varphi_i \in B_r,\ \varphi_i(x) = \varphi_i(x')\}$ ayırt edilemezlik bağıntısı, $[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \forall\varphi \in B_r,\ \varphi(x') = \varphi(x)\}$ denklik sınıfları, $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ kümesi ve ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu belirler. Bu durumda $(x,x') \in \sim_{B_r}$ ise x ve x' nesnelerine B_r deki tüm çıkarım fonksiyonlarına göre B-ayırt edilemezdir denir.

Tanım 3.1.5. *[2] $\mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r \leq |B|$ olmak üzere, "$\sim_{B_r}$" $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ ayrışımların kümesi ve ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu olsun. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ yapısına yakın yaklaşım uzayı NAS (Nearness Approximation Space) denir.*

Teorem 3.1.3. *[2] Ayrışımların ailesi olan $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.*

Tanım 3.1.6. *[2] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile* *ilgili $N_r\left(B\right)$-alt yaklaşımı,*

$$N_r\left(B\right)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.1.7. *[2] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $N_r\left(B\right)$-üst yaklaşımı,*

$$N_r\left(B\right)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.1.8. *[2] Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin sınır bölgesi,*

$$\begin{aligned} Bnd_{N_r(B)}\left(X\right) &= N_r\left(B\right)^* X \diagdown N_r\left(B\right)_* X \\ &= \left\{x \in N_r\left(B\right)^* X \mid x \notin N_r\left(B\right)_* X\right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu kavramlar Tablo 3.3 te özetlenmiştir.

$Sembol$	$Anlamı$
B	$B \subseteq \mathcal{F},$
$\binom{\lvert B\rvert}{r}$	$\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu,
B_r	$r \leq \lvert B\rvert\,,$
$\sim_{B_r}$	B_r yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_{B_r}$	$[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$, yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O}/\sim_{B_r}$	$\mathcal{O}/\sim_{B_r} = \left\{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\right\}$, bölüm kümesi,
$\xi_{\mathcal{O},B_r}$	$\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$,
$N_r\left(B\right)$	$N_r\left(B\right) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$, ayrışımların kümesi,
ν_{N_r}	$\nu_{N_r} : \wp\left(\mathcal{O}\right) \times \wp\left(\mathcal{O}\right) \longrightarrow [0,1]$, yakınlık fonksiyonu
$N_r\left(B\right)_* X$	$N_r\left(B\right)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$, yakın alt yaklaşım,
$N_r\left(B\right)^* X$	$N_r\left(B\right)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing} [x]_{B_r}$, yakın üst yaklaşım,
$Bnd_{N_r(B)}\left(X\right)$	$N_r\left(B\right)^* X \diagdown N_r\left(B\right)_* X = \{x \in N_r\left(B\right)^* X \mid x \notin N_r\left(B\right)_* X\}$
	yakın sınır bölgesi.

$Tablo\,3.3$

Tanım 3.1.9. *$X \subseteq \mathcal{O}$, $r \leq \lvert B\rvert$ ve $B_r \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere; $\sim_{B_r}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Her $x, y \in X$ için $[x]_{B_r}[y]_{B_r} = [xy]_{B_r}$ ise "$\sim_{B_r}$ " ayırt edilemezlik bağıntısına $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı denir.*

Teorem 3.1.4. *[15, 18]$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı ve $X, Y \subset \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1) $N_r\left(B\right)_*\left(X\right) \subseteq X \subseteq N_r\left(B\right)^*\left(X\right)$.

(2) $N_r\left(B\right)^*\left(X \cup Y\right) = N_r\left(B\right)^*\left(X\right) \cup N_r\left(B\right)^*\left(Y\right)$.

(3) $N_r\left(B\right)_*\left(X \cap Y\right) = N_r\left(B\right)_*\left(X\right) \cap N_r\left(B\right)_*\left(Y\right)$.

(4) $X \subseteq Y$ *ise* $N_r\left(B\right)_*\left(X\right) \subseteq N_r\left(B\right)_*\left(Y\right)$ *dir.*

(5) $X \subseteq Y$ *ise* $N_r\left(B\right)^*\left(X\right) \subseteq N_r\left(B\right)^*\left(Y\right)$ *dir.*

(6) $N_r(B)_*(X \cup Y) \supseteq N_r(B)_*(X) \cup N_r(B)_*(Y)$.

(7) $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*(X) \cap N_r(B)^*(Y)$.

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; bir $x \in X$ algılanabilir nesnesinin tanımı, nesnenin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlidir. $B \subseteq \mathcal{F}$ örnek nesnelerin çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa, tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^L$,

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

nesne tanımlaması elde edilir. Algılanabilir elemanlardan oluşan kümelerdeki elemanların tanımlamalarının dikkate alınması, tanımsal tabanlı küme işlemlerinin çıkış noktasıdır. Bu kısımdaki tüm kümeler algılanabilir nesnelerden oluşan kümelerdir. Genel olarak, Φ tanımlama fonksiyonu V boştan farklı herhengi bir küme olmak üzere, $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow V^L$ şeklindedir.

Tanım 3.1.10. *[29] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi, $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Phi(x) \in V^L$ olsun.*

$$\mathcal{Q}(X) = \{\Phi(x) \mid x \in X\}$$

kümesine X in küme tanımlaması denir.

Tanım 3.1.11. *[30] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun.*

$$X \underset{\Phi}{\cup} Y = \{a \in X \cup Y \mid \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \text{ veya } \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal birleşimi denir.

Tanım 3.1.12. *[29, 31] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,*

$$X \underset{\Phi}{\cap} Y = \{a \in X \cup Y \mid \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \text{ ve } \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal arakesiti denir.

3.2 Yakınlık Grupları

$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı (Nearness Aproximation Spaces - NAS) ve "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere, bu kısımda her $x, y \in \mathcal{O}$ için "$x \cdot y$" yerine "xy" kullanılmıştır.

Tanım 3.2.1. *[15, 18] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı; "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa S ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde yarı grup veya kısaca yakınlık yarı grubu denir:*

(1) Her $x, y \in S$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* S$.

(2) Her $x, y, z \in S$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır.

$N_r(B)$ ayrışımların kümesi $r = 1$ olmak üzere, $N_1(B) = \{\xi_{\mathcal{O}, B_1} \mid B_1 \subseteq B\}$ şeklinde tanımlıdır. Burada $N_1(B)$, B deki çıkarım fonksiyonlarının birli kombinasyonları $\binom{|B|}{1}$ kullanılarak elde edilir, yani her bir çıkarım fonksiyonu için tek bir ayrışım elde edilir. $r = 2$ için çıkarım fonksiyonlarının ikili kombinasyonları dikkate alınarak ayrışımlar hesaplanır.

Tanım 3.2.2. *[15, 18]$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı, S yakınlık yarı grubu ve I, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $N_r(B)^*(I)$, S yakınlık yarı grubunun bir sol(sağ, iki yanlı) ideali ise, bu durumda I, S yakınlık yarı grubunun bir sol(sağ, iki yanlı) yakınlık idealidir.*

Teorem 3.2.1. *[15, 18] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,*

(1) S bir yarı grup ise bu durumda S bir yakınlık yarı grubudur.

(2) I, S yakınlık yarı grubunun bir sol(sağ, iki yanlı) ideali ise bu durumda I, S yakınlık yarı grubunun bir yakınlık sol(sağ, iki yanlı) idealidir.

Teorem 3.2.1 dikkate alınırsa, yakınlık yarı grubu ve yakınlık sol (sağ veya iki yanlı) ideal kavramları, yarı grup ve yarı grubun sol (sağ veya iki yanlı) ideal kavramlarının genelleştirmeleridir.

Teorem 3.2.2. *[15, 18] $\sim_{B_r}$, $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı, $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yarı grup ve $A \subseteq S$ olsun.*

(1) A, S yarı grubunun bir alt yarı grubu ise $N_r(B)_*(A)$ boştan farklı olmak üzere, S nin bir alt yarı grubudur.

(2) I, S nin bir sol (sağ veya iki yanlı) ideali ise $N_r(B)_*(I)$ boştan farklı olmak üzere, $N_r(B)_*(S)$ nin bir sol (sağ veya iki yanlı) idealidir.

Tanım 3.2.3. *[13, 18] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı; "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $G \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa G ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde grup veya kısaca yakınlık grubu denir:*

(YG_1) Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* G$ dir.

(YG_2) Her $x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanır.

(YG_3) Her $x \in G$ için $x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$ olacak biçimde bir $e \in N_r(B)^* G$ vardır (burada e_G, G nin yakın birim elemanıdır).

(YG_4) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak biçimde bir $y \in G$ vardır (burada y, G deki x elemanının yakın tersidir).

Örnek 3.2.1. *[13, 18] $\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$
$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

Tablo 3.4 teki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_2	α_3	α_2	α_2	α_1	α_1	α_3	α_1	α_2	α_3
φ_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2
φ_3	α_3	α_1	α_3	α_3	α_4	α_2	α_2	α_4	α_3	α_1

Tablo 3.4

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir "·" ikili işlemi Tablo 3.5 teki gibi verilsin.

$\cdot$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a
c	c	d	e	f	g	h	i	j	a	b
d	d	e	f	g	h	i	j	a	b	c
e	e	f	g	h	i	j	a	b	c	d
f	f	g	h	i	j	a	b	c	d	e
g	g	h	i	j	a	b	c	d	e	f
h	h	i	j	a	b	c	d	e	f	g
i	i	j	a	b	c	d	e	f	g	h
j	j	a	b	c	d	e	f	g	h	i

$Tablo\,3.5$

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesinin "·" işlemi ile bir grup olduğu kolayca görülebilir. $G = \{a, b, c, f, i, j\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere $G \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde "·" ikili işlemi Tablo 3.6 daki gibi olur.

$\cdot$	a	b	c	f	i	j
a	a	b	c	f	i	j
b	b	c	d	g	j	a
c	c	d	d	h	a	b
f	f	g	h	a	d	d
i	i	j	a	d	g	h
j	j	a	b	d	h	i

$Tablo\,3.6$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_2\} \\
&= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_1} = [d]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1}, \\
[b]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_3\} \\
&= \{b, g, j\} = [g]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}, \\
[e]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(e) = \alpha_1\} \\
&= \{e, f, h\} = [f]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1}
\end{aligned}$$

dir. O zaman $\xi_{\varphi_1} = \left\{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1}\right\}$ *dir.*

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, c, e, f, h, i\} = [c]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2}, \\
[b]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b, d, g, j\} = [d]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{[a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}\right\}$ *olur. Son olarak,*

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\} \\
&= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_3} = [d]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3}, \\
[b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_1\} \\
&= \{b, j\} = [j]_{\varphi_3}, \\
[e]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_4\} \\
&= \{e, h\} = [h]_{\varphi_3}, \\
[f]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_2\} \\
&= \{f, g\} = [g]_{\varphi_3}
\end{aligned}$$

tür ve dolayısıyla $\xi_{\varphi_3} = \left\{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3}\right\}$ *elde edilir.*

Böylece $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ *tür.*

Bu durumda

$$\begin{aligned}
N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\
&= [a]_{\varphi_1} \cup [b]_{\varphi_1} \cup [e]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [b]_{\varphi_2} \cup [b]_{\varphi_3} \cup [f]_{\varphi_3} \\
&= \{a,c,d,i\} \cup \{b,g,j\} \cup \{e,f,h\} \cup \{a,c,e,f,h,i\} \\
&\quad \cup \{b,d,g,j\} \cup \{b,j\} \cup \{f,g\} \\
&= \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} = \mathcal{O}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte

(YG_1) *Her* $x, y \in G$ *için* $x \cdot y \in N_r(B)^* G = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ *dir.*

(YG_2) *Her* $x, y, z \in G$ *için* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *özelliği* $N_r(B)^* G$ *de sağlanır.*

(YG_3) *Her* $x \in G$ *için* $x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$ *olacak biçimde bir* $e_G = a \in N_r(B)^* G$ *yakın birim elemanı vardır.*

(YG_4) *Her* $x \in G$ *için* $x \cdot y = y \cdot x = a$ *olacak biçimde en az bir* $y \in G$ *vardır, yani* $a^{-1} = a$, $b^{-1} = j$, $c^{-1} = i$, $f^{-1} = f$, $i^{-1} = c$ *ve* $j^{-1} = b$ *dir.*

O halde $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin* G *alt kümesi bir yakınlık grubudur.*

Uyarı 3.2.1. *[13, 18] Tanım 3.2.3 te* $(YG1)$ *ve* $(YG2)$ *özellikleri* G *nin üst yaklaşımı* $N_r(B)^* G$ *de sağlanmak zorundadır. Bazı durumlarda bu özellikler* $\mathcal{O} \setminus N_r(B)^* G$ *de sağlanabilir. Bu durumda* G*, bir yakınlık grubu olamaz.*

Örnek 3.2.2. *[13, 18]* $G = \{a,b,c,f,i,j\}$ *yakın grubunun bir alt kümesi* $H = \{a,c,f,i\}$ *olsun.* $H \subset \mathcal{O}$ *üzerinde "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 3.7 deki gibi tanımlansın.*

$\cdot$	a	c	f	i
a	a	c	f	i
c	c	e	h	a
f	f	h	a	d
i	i	a	d	g

$Tablo\ 3.7$

Örnek 3.2.1 den, $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin bir ayrışımı,*

$N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür. Böylece

$$\begin{aligned} N_1(B)^* H &= \bigcup_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap H \neq \varnothing} [x]_{\{\varphi_i\}} \\ &= \{a, c, d, i\} \cup \{e, f, h\} \cup \{a, c, e, f, h, i\} \cup \{f, g\} \\ &= \{a, c, d, e, f, g, h, i\} \neq \mathcal{O} \end{aligned}$$

olur. $c, f \in H \subset \mathcal{O}$ için $(c \cdot f) \cdot c = c \cdot (f \cdot c)$ birleşme özelliğine bakılırsa $j = j$ dir. Ancak $j \in \mathcal{O} \setminus N_1(B)^* H$ olduğundan birleşme özelliği $N_1(B)^* H$ de sağlanmaz. Bu durumda Uyarı 3.2.1 den H bir yakınlık grubu olamaz.

Uyarı 3.2.2. *[13, 18] $G \subseteq \mathcal{O}$ daki elemanların sonlu sayıdaki çarpımları her zaman $N_r(B)^* G$ ye ait olmayabilir, yani her $x \in G$ ve bazı $n \in \mathbb{N}$ için her zaman $x^n \in N_r(B)^* G$ geçerli değildir. O zaman $(N_r(B)^* G, \cdot)$ grupoid ise, her $x \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in N_r(B)^* G$ dir.*

Lemma 3.2.1. *[13, 18] G bir yakınlık grubu olsun. Bu durumda*

(i) G nin bir ve yalnız bir yakın birim elemanı ($e_G \in N_r(B)^* G$) vardır.

(ii) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak şekilde bir tek $y \in G$ elemanı vardır ve $y = x^{-1}$ şeklinde gösterilir.

(iii) Her $x \in G$ için $(x^{-1})^{-1} = x$ dir.

(iv) Her $x, y \in G$ için $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ dir.

Lemma 3.2.2. *[13, 18] G bir yakınlık grubu olmak üzere, her $a, x, x', y, y' \in G$ için*

(i) $a \cdot x = a \cdot x'$ ise $x = x'$,

(ii) $y \cdot a = y' \cdot a$ ise $y = y'$

olur.

Tanım 3.2.4. *[13, 18] H, G yakınlık grubunun boştan farklı bir alt kümesi olsun. H, G deki "$\cdot$" işlemi ile yakınlık grubu ise H ye G nin alt yakınlık grubu denir.*

Uyarı 3.2.3. *[13, 18] G yakınlık grubunun kesin olarak sadece bir tane aşikar alt yakınlık grubu vardır. Bu aşikar alt yakınlık grubu G nin kendisidir. Ayrıca $\{e_G\}$ nin G yakınlık grubunun aşikar alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul $e_G \in G$ olmasıdır.*

Teorem 3.2.3. *[13, 18] G bir yakınlık grubu, H; G nin boştan farklı bir alt kümesi ve $N_r(B)^*$ H grupoid olsun. Bu durumda H nin G yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olmasıdır.*

Örnek 3.2.3. *[13, 18] $\mathcal{O} = \{o, p, r, s, t, v, y, z\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 3.8 deki gibi tanımlansın.

	o	p	r	s	t	v	w	x
φ_1	α_4	α_2	α_1	α_2	α_1	α_3	α_4	α_3
φ_2	β_1	β_3	β_2	β_3	β_2	β_3	β_1	β_3

$Tablo\ 3.8$

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "$+$" ikili işlemi Tablo 3.9 daki gibi verilsin.

$+$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	p	r	s	t	v	w	x
p	p	r	s	t	v	w	x	o
r	r	s	t	v	w	x	o	p
s	s	t	v	w	x	o	p	r
t	t	v	w	x	o	p	r	s
v	v	w	x	p	o	r	s	t
w	w	x	o	p	r	s	t	v
x	x	o	p	r	s	t	v	w

$Tablo\ 3.9$

Tablo 3.9 dan $s + (v + v) \neq (s + v) + v$ olduğundan $(\mathcal{O}, +)$ bir grup değildir.

$G = \{r, t, w\}$ *algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere,* G *üzerinde "+" ikili işlemi Tablo 3.10 daki gibi olur.*

$+$	r	t	w
r	t	w	o
t	w	o	r
w	o	r	t

$Tablo\,3.10$

Bu durumda

$$\begin{aligned}[o]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(o) = \alpha_4\} \\ &= \{o, w\} \\ &= [w]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[p]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(p) = \alpha_2\} \\ &= \{p, s\} \\ &= [s]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[r]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(r) = \alpha_1\} \\ &= \{r, t\} \\ &= [t]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[v]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(v) = \alpha_3\} \\ &= \{v, x\} \\ &= [x]_{\varphi_1}\end{aligned}$$

dir. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \left\{[o]_{\varphi_1}, [r]_{\varphi_1}, [v]_{\varphi_1}, [w]_{\varphi_1}\right\}$ *olur.*

$$\begin{aligned}[o]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(o) = \beta_1\} \\ &= \{o, w\} \\ &= [w]_{\varphi_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[p]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(p) = \beta_3\} \\ &= \{p, s, v, x\} \\ &= [s]_{\varphi_2} = [v]_{\varphi_2} = [x]_{\varphi_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[r]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(r) = \beta_2\} \\ &= \{r, t\} \\ &= [t]_{\varphi_2}\end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{[o]_{\varphi_2}, [p]_{\varphi_2}, [r]_{\varphi_2}\right\}$ *olur ve dolayısıyla* $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ *elde edilir.*

Böylece

$$\begin{aligned}N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{r, t\} \cup \{o, w\} \cup \{o, w\} \cup \{r, t\} \\ &= \{o, r, t, w\} \neq \mathcal{O}\end{aligned}$$

olur.

(YG_1) *Her* $x, y \in G$ *için* $x + y \in N_r(B)^* G$ *dir.*

(YG_2) *Her* $x, y, z \in G$ *için* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *özelliği* $N_r(B)^* G$ *de sağlanır.*

(YG_3) *Her* $x \in G$ *için* $x + e_G = e_G + x = x$ *olacak biçimde bir* $e_G = o \in N_r(B)^* G$ *yakın birim elemanı vardır.*

(YG_4) *Her* $x \in G$ *için* $x + y = y + x = o$ *olacak biçimde en az bir* $y \in G$ *vardır, yani* $-r = w$, $-t = t$ *ve* $-w = r$ *dir.*

O halde $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin* G *alt kümesi bir yakınlık grubudur.*

G *yakınlık grubunun* $H = \{r, w\}$ *alt kümesi dikkate alınsın. Bu durumda* $N_1(B)^* H = \{o, r, t, w\}$ *ve* $(N_1(B)^* H, +)$ *grupoid olur. Teorem 3.2.3 dikkate alınırsa* $-r = w$, $-w = r \in H$ *olduğundan* H, G *yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubudur.*

Yakınlık grupları ile gruplar arasındaki önemli farklardan biri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.4. *[13, 18] G bir yakınlık grubu, H_1 ve H_2, G nin iki alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda $N_r(B)^* H_1$ ve $N_r(B)^* H_2$ grupoid olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* H_1) \cap (N_r(B)^* H_2) = N_r(B)^* (H_1 \cap H_2)$$

ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yakınlık grubudur.

Tanım 3.2.5. *[13, 18] G bir yakınlık grubu olmak üzere, her $x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanıyorsa G ye değişmeli yakınlık grubu denir.*

Örnek 3.2.4. *[13, 18] Örnek 3.2.1 deki yakınlık grubu, değişmeli yakınlık grubudur.*

$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı, $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $a, b \in G$ olmak üzere, G nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_r$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a \sim_r b :\Longleftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H \cup \{e\}.$$

Teorem 3.2.5. *[13, 18] G bir yakınlık grubu olmak üzere, "$\sim_r$" bağıntısı G üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

Herhangi bir $a \in G$ için "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıf

$$\tilde{a} \quad = \{h \cdot a \mid h \in H,\ a \in G,\ h \cdot a \in G\} \cup \{a\}$$

dır.

Tanım 3.2.6. *[13, 18] G bir yakınlık grubu ve H, G nin alt yakınlık grubu olsun. "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıflara yakın zayıf sağ* *kalan sınıf denir. Herhangi bir a elemanı için yakın zayıf sağ kalan sınıflar $H \cdot a$ ile gösterilir, yani*

$$H \cdot a = \{h \cdot a \mid h \in H,\ a \in G,\ h \cdot a \in G\} \cup \{a\}$$

dır.

$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı, $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda G yakınlık grubunun elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_\ell$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a \sim_\ell b :\iff a^{-1} \cdot b \in H \cup \{e\}\,.$$

Teorem 3.2.6. *[13, 18] G bir yakınlık grubu ve H, G nin alt yakınlık grubu olsun. G bir yakınlık grubu olmak üzere, "$\sim_\ell$" bağıntısı G üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

Tanım 3.2.7. *[13, 18]"$\sim_\ell$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıflara yakın zayıf sol kalan sınıflar denir. Herhangi bir a elemanı için yakın zayıf sol kalan sınıflar $a \cdot H$ ile gösterilir, yani*

$$a \cdot H = \{a \cdot h \mid h \in H,\ a \in G,\ a \cdot h \in G\} \cup \{a\}$$

şeklindedir.

Uyarı 3.2.4. *[13, 18] Genel olarak, yakınlık grubunun ikili işlemi her zaman değişme özelliğini sağlamayabilir. Bundan dolayı "$\sim_r$" ve "$\sim_\ell$" zayıf eşdeğerlik bağıntıları farklıdır. Sonuç olarak, yakın sol zayıf ve yakın sağ zayıf kalan sınıfları da farklıdır.*

Teorem 3.2.7. *[13, 18] G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olmak üzere, yakın sağ zayıf ve yakın sol zayıf kalan sınıflarının sayıları aynıdır.*

Tanım 3.2.8. *[13, 18] G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olmak üzere, yakın sol zayıf kalan sınıflarının veya yakın sağ zayıf kalan sınıflarının sayısına H alt yakınlık grubunun G deki indeksi denir ve $[G : H]$ ile gösterilir.*

G bir yakınlık grubu; H, G nin bir alt yakınlık grubu ve $a \in G$ olmak üzere, bundan sonra G nin H ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi için "$a \cdot H$" yerine "aH" kullanılmıştır.

G nin H ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi

$$G/_{\sim_\ell} = \{aH \mid a \in G\}$$

dir. Burada G yerine $N_r(B)^* G$ alınırsa

$$(N_r(B)^* G)/_{\sim_\ell} = \{aH \mid a \in N_r(B)^* G\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$aH = \{a \cdot h \mid h \in H,\ a \in N_r(B)^* G,\ a \cdot h \in G\} \cup \{a\}$$

olur.

Tanım 3.2.9. *[13, 18] G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $a, b \in G$ olmak üzere, aH ve bH sırasıyla a ve b elemanlarının belirlediği yakın zayıf sol kalan sınıflar olsun. Bu durumda $a \cdot b \in N_r(B)^* G$ elemanının belirlediği iki yakın zayıf sol kalan sınıfının çarpımı*

$$(a \cdot b)H = \{(a \cdot b)h \mid h \in H,\ a \cdot b \in N_r(B)^* G,\ (a \cdot b) \cdot h \in G\} \cup \{a \cdot b\}$$

ile tanımlıdır ve

$$aH \odot bH = (a \cdot b)H$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.10. *[13, 18] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $G \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $G/_{\sim_\ell}$, G nin H ile belirlenen tüm yakın zayıf sol kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık kolleksiyonu olmak üzere,*

$$N_r(B)^* (G/_{\sim_\ell}) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \underset{\Phi}{\cap} G/_{\sim_L} \neq \emptyset} \xi_\Phi(A)$$

kümesine $G/_{\sim_\ell}$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 3.2.8. *[13, 18] G bir yakınlık grubu; H, G nin bir alt yakınlık grubu ve $G/_{\sim_\ell}$, G nin H ile belirlenen tüm yakın zayıf sol kalan sınıflarının kümesi olsun. O zaman*

$$(N_r(B)^* G)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^* (G/_{\sim_L})$$

ise her $a, b \in G$ için

$$aH \odot bH = (a \cdot b) H$$

ile tanımlı işlemle $G/_{\sim_\ell}$ bir yakınlık grubudur.

Tanım 3.2.11. *[13, 18] G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $G/_{\sim_\ell}$ yakınlık grubuna G nin H ile belirlenen tüm yakın zayıf sol kalan sınıflarının yakınlık grubu denir ve $G/_w H$ şeklinde gösterilir.*

3.3 Yakınlık Halkaları

Bu kısımda yakınlık halkaları ve alt yakınlık halkaları kavramları verilecektir. Bir yakınlık halkasının boştan farklı bir alt kümesinin alt yakınlık halkası ve iki (veya sonlu sayıda) alt yakınlık halkalarının (ideallerinin) arakesitlerinin yine bir alt yakınlık halkası (ideali) olabilmesi için gerek ve yeter koşullara yer verilecektir.

Tanım 3.3.1. *[18] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı; "$+$" ve "$\cdot$" $\mathcal{O}$ üzerinde ikili işlemler ve $R \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa R ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde halka veya kısaca yakınlık halkası denir:*

(YH_1) R, "$+$" ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli yakınlık grubudur.

(YH_2) R, "$\cdot$" ikili işlemi ile birlikte bir yakınlık yarı grubudur.

(YH_3) Her $x, y, z \in R$ için $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

özellikleri $N_r(B)^* R$ de sağlanır.

Buna ek olarak,

(YH_4) Her $x, y \in R$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise R ye değişmeli yakınlık halkası,

(YH_5) *Her* $x \in R$ *için* $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ *olacak şekilde* $1_R \in N_r(B)^* R$ *varsa* R *ye birimli yakınlık halkası denir.*

Bir R yakınlık halkasında, (YH_1)-(YH_5) özellikleri $N_r(B)^* R$ de sağlanmak zorundadır. Bu özellikler bazı durumlarda $\mathcal{O}\backslash N_r(B)^* R$ de sağlanabilir. Bu durumda R yakınlık halkası olamaz. R deki elemanların sonlu tane toplamı veya çarpımı her zaman $N_r(B)^* R$ ait olmayabilir. Böylece her zaman, her $x \in R$ ve bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ ler için $x^n \in N_r(B)^* R$ veya $nx \in N_r(B)^* R$ olduğu söylenemez. Eğer $(N_r(B)^* R, +)$ ve $(N_r(B)^* R, \cdot)$ grupoidlerse, o zaman her $x \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ ler için $x^n \in N_r(B)^* R$ veya her $x \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ ler için $nx \in N_r(B)^* R$ olur.

R birimli bir yakınlık halkası ve $x \in R$ olmak üzere, $y \cdot x = 1_R$ $(x \cdot z = 1_R)$ olacak şekilde bir $y \in N_r(B)^* R$ ($z \in N_r(B)^* R$) varsa x elemanına *sol (sağ) yakın tersinirdir* denir. y (z) elemanına x elemanının *sol (sağ) yakın tersi* denir. $x \in R$ hem sol hem de sağ yakın tersinir ise bu durumda x elemanına *yakın tersinirdir* denir. Birimli bir R yakınlık halkasının yakın tersinir elemanlarından oluşan küme "$\cdot$" işlemi ile bir yakınlık grubudur.

Tanım 3.3.2. *[18] Bir* R *yakınlık halkasında* $(R\backslash\{0\}, \cdot)$ *bir yakınlık grubu, yani* R *deki sıfırdan farklı her eleman yakın tersinir ise* R *ye yakınlık bölüm (division) halkası denir.*

Tanım 3.3.3. *[18] Bir* R *yakınlık halkasında* $(R\backslash\{0\}, \cdot)$ *bir değişmeli yakınlık grubu ise* R *ye yakınlık cismi denir.*

Yakınlık halkasının elemanlarının ikili işlemlerle ilgili bazı temel özellikleri, klasik halkalarda olduğu gibi her zaman sağlanmayabilir. $N_r(B)^* R$ yaklaşımı klasik halka olarak dikkate alınırsa, o zaman yakınlık halkasının elemanları ikili işlemlerle ilgili temel özellikleri sağlar.

Lemma 3.3.1. *[18] Yakın yaklaşım uzayı üzerindeki her halka yakınlık halkasıdır.*

İspat. $R \subseteq \mathcal{O}$ yakın yaklaşım uzayı üzerinde bir halka olmak üzere, $R \subseteq N_r(B)^* R$ olduğundan $(YH_1) - (YH_3)$ sağlanır. Böylece R bir yakınlık halkasıdır. $\square$

Örnek 3.3.1. *[18] $\mathcal{O} = \{o, p, r, s, t, v, y, z\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 3.11 deki gibi tanımlansın.

	o	p	r	s	t	v	w	x
φ_1	α_4	α_2	α_1	α_2	α_1	α_3	α_4	α_3
φ_2	β_1	β_3	β_2	β_3	β_2	β_3	β_1	β_3

$Tablo\ 3.11$

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri Tablo 3.12 ve Tablo 3.13 teki gibi verilsin.

$+$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	p	r	s	t	v	w	x
p	p	r	s	t	v	w	x	o
r	r	s	t	v	w	x	o	p
s	s	t	v	w	x	o	p	r
t	t	v	w	x	o	p	r	s
v	v	w	x	p	o	r	s	t
w	w	x	o	p	r	s	t	v
x	x	o	p	r	s	t	v	w

$Tablo\ 3.12$

$\cdot$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	o	p	r	s	t	v	w	x
r	o	r	t	w	o	r	t	w
s	o	s	w	p	t	o	r	v
t	o	t	o	t	o	t	o	t
v	o	v	r	x	t	p	w	s
w	o	w	t	r	o	w	t	r
x	o	x	w	v	t	s	r	p

$Tablo\ 3.13$

Tablo 3.12 den $r+(s+s)\neq(r+s)+s$ olduğundan $(\mathcal{O},+)$ bir grup değildir. O halde $(\mathcal{O},+,\cdot)$ bir halka değildir.

$R=\{r,t,w\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, R üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri Tablo 3.14 ve Tablo 3.15 teki gibi olur.

$+$	r	t	w
r	t	w	o
t	w	o	r
w	o	r	t

$Tablo$ 3.14

$\cdot$	r	t	w
r	t	o	t
t	o	o	o
w	t	o	t

$Tablo$ 3.15

Örnek 3.2.3 ten $r=1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B)=\{\xi_{\varphi_1},\xi_{\varphi_2}\}$ dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} N_1(B)^* R &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i}\cap R\neq\varnothing}[x]_{\varphi_i} \\ &= \{o,r,t,w\}\neq\mathcal{O} \end{aligned}$$

elde edilir. Bunun la birlikte Tanım 3.3.1 den,

(YH_1) *R, "$+$" işlemi ile bir yakınlık grubudur.*

(YH_2) *R, "$\cdot$" işlemi ile bir yakınlık yarı grubudur.*

(YH_3)***Her** $x,y,z\in R$ için $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$, $(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$*

özellikleri $N_r(B)^*R$ de sağlanır.

O halde $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin R alt kümesi bir yakınlık halkasıdır.

Lemma 3.3.2. *[18] $R\subseteq\mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve $0_R\in R$ olsun. $0_R\cdot x, x\cdot 0_R\in R$ ise her $x,y\in R$ için*

(1) $x\cdot 0_R=0_R\cdot x=0_R$,

(2) $x\cdot(-y)=(-x)\cdot y=-(x\cdot y)$,

(3) $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$

dir.

Tanım 3.3.4. *[18] R bir yakınlık halkası ve S, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S, R deki "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile yakınlık halkası ise S ye R nin alt yakınlık halkası denir.*

Teorem 3.3.1. *[18] R bir yakınlık halkası, S, R nin boştan farklı bir alt kümesi ve $(N_r(B)^* S, +)$ ile $(N_r(B)^* S, \cdot)$ birer grupoid olsun. Bu durumda S nin R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkası olması için gerek ve yeter koşul her $x \in S$ için $-x \in S$ olmasıdır.*

Teorem 3.3.2. *[18] R bir yakınlık halkasıve S_1 ile S_2 de R nin iki alt yakınlık halkası*

olsun. Bu durumda $N_r(B)^* S_1$ ve $N_r(B)^* S_2$, "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,

$$(N_r(B)^* S_1) \cap (N_r(B)^* S_2) = N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$$

ise $S_1 \cap S_2$, R nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Sonuç 3.3.1. *[18] R bir yakınlık halkası ve R nin alt yakınlık halkalarının boştan farklı bir ailesi $\{S_i : i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r(B)^* S_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,*

$$\bigcap_{i\in\Delta} (N_r(B)^* S_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i\in\Delta} S_i\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta} S_i$, R nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Tanım 3.3.5. *[18] R bir yakınlık halkası ve I, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in I$, $r \in R$ için $x+y \in N_r(B)^* I$, $-x \in I$ $r\cdot x \in N_r(B)^* I$ $(x\cdot r \in N_r(B)^* I)$ ise I ya R nin sol(sağ) yakınlık ideali denir. I hem sol hem de sağ yakınlık ideali ise bu durumda I ya R nin yakınlık ideali denir.*

Uyarı 3.3.1. *[18] R yakınlık halkasının kesin olarak sadece bir tane aşikar yakınlık ideali vardır. Bu aşikar yakınlık ideali R nin kendisidir. Ayrıca $\{0_R\}$ nin R yakınlık halkasının aşikar alt yakınlık halkası olması için gerek ve yeter koşul $0_R \in R$ olmasıdır.*

Lemma 3.3.3. *[18] I, R yakınlık halkasının bir yakınlık ideali olsun. $(N_r(B)^* I, +)$ ve $(N_r(B)^* I, \cdot)$ grupoid ise I, R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkasıdır.*

Bazı durumlarda yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkası, yakınlık ideali olabilir.

Teorem 3.3.3. *[18] R bir yakınlık halkası ve I_1 ile I_2 de R nin iki yakınlık ideali olsun. Bu durumda $N_r(B)^* I_1$ ve $N_r(B)^* I_2$, "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2) = N_r(B)^* (I_1 \cap I_2)$$

ise $I_1 \cap I_2$, R nin bir yakınlık idealidir.

Sonuç 3.3.2. *[18] R bir yakınlık halkası ve R nin yakınlık ideallerinin boştan farklı bir ailesi $\{I_i : i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r(B)^* I_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere,*

$$\bigcap_{i\in\Delta} (N_r(B)^* I_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i\in\Delta} I_i\right)$$

ise $\bigcap_{i\in\Delta} I_i$, R nin bir yakınlık idealidir.

$R \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. Bu durumda $x, y \in R$ olmak üzere, R nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir " $\sim_r$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_r y :\Leftrightarrow x + (-y) \in S \cup \{0_R\}.$$

Teorem 3.3.4. *[18] R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_r$" bağıntısı R üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

Herhangi bir $x \in R$ için "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yakınlık halkasında belirttiği sınıflar

$$\tilde{x}_r \quad = \{s + x \mid s \in S,\ x \in R,\ s + x \in R\} \cup \{x\}$$

ile belirlidir.

Tanım 3.3.6. *[18] R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_R$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıflara yakın sağ zayıf kalan sınıflar denir.*

Herhangi bir $x \in R$ için yakın sağ zayıf kalan sınıflar $S + x$ ile gösterilir, yani

$$S + x = \{s + x \mid s \in S,\ x \in R,\ s + x \in R\} \cup \{x\}$$

olur.

Benzer olarak $x, y \in R$ olmak üzere, R yakınlık halkasının elemanları arasında aşağıdaki gibi bir " $\sim_l$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_l y :\Leftrightarrow (-x) + y \in S \cup \{0_R\}.$$

Teorem 3.3.5. *[18] R bir yakınlık halkası olmak üzere, " $\sim_l$" bağıntısı R üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

Tanım 3.3.7. *[18] R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_l$" eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıflara yakın sol zayıf kalan sınıflar denir.*

Herhangi bir $x \in R$ için yakın sol zayıf kalan sınıflar $x + S$ ile gösterilir, yani

$$x + S = \{x + s \mid s \in S,\ x \in R,\ x + s \in R\} \cup \{x\}$$

şeklindedir.

Burada $\tilde{x}_l = x + S$ ve $\tilde{x}_r = S + x$ olduğu kolayca görülür. $(R, +)$ değişmeli yakınlık grubu olduğundan $\tilde{x}_l = \tilde{x}_r$ olur. Bu durumda $\tilde{x}_l$ ve $\tilde{x}_r$ notasyonları yerine sadece $\tilde{x}$ kullanılır.

R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olmak üzere,

$$R/_\sim = \{x + S \mid x \in R\}$$

R nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada R yerine $N_r(B)^* R$ alınırsa

$$(N_r(B)^* R)/_\sim = \{x + S \mid x \in N_r(B)^* R\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$x + S = \{x + s \mid s \in S,\ x \in N_r(B)^* R,\ x + s \in R\} \cup \{x\}$$

olur.

Tanım 3.3.8. *[18] R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $x, y \in R$ olmak üzere, $x + S$ ve $y + S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x + y \in N_r(B)^* R$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfının toplamı*

$$\{(x + y) + s \mid s \in S,\ x + y \in N_r(B)^* R,\ \ (x + y) + s \in R\} \cup \{x + y\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(x + S) \oplus (y + S) = (x + y) + S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.9. *[18] R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $x, y \in R$ olmak üzere, $x + S$ ve $y + S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın zayıf sol kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x \cdot y \in N_r(B)^* R$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfının çarpımı*

$$\{(x \cdot y) + s \mid s \in S,\ x \cdot y \in N_r(B)^* R,\ \ (x \cdot y) + s \in R\} \cup \{x \cdot y\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(x + S) \odot (y + S) = (x \cdot y) + S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.10. *[18] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $R \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S de R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $R/_\sim$, R nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere,*

$$N_r(B)^*(R/_{\sim_l}) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \underset{\Phi}{\cap} R/_\sim \neq \emptyset} \xi_\Phi(A)$$

kümesine $R/_\sim$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 3.3.6. *[18] R bir yakınlık halkası ve S de R nin bir alt yakınlık halkası olsun. O zaman $R/_{\sim_l}$ de R nın S ile belirlenen tüm yakın zayıf sol kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* R)/_\sim \subseteq N_r(B)^* (R/_{\sim_l})$$

ise bu durumda $R/_\sim$, her $x, y \in R$ için

$$(x+S) \oplus (y+S) = (x+y)+S,$$
$$(x+S) \odot (y+S) = (x \cdot y)+S$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yakınlık halkasıdır.

Tanım 3.3.11. *[18] R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $R/_\sim$ yakınlık halkasına R nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf sol kalan sınıflarının yakınlık halkası denir ve $R/_w S$ şeklinde gösterilir.*

3.4 Γ-Halkalar

Tanım 3.4.1. *[7] $M = \{a, b, c, ...\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ değişmeli toplamsal gruplar olmak üzere, $(-,-,-) : M \times \Gamma \times M \to M$, $(a, \alpha, b) \longmapsto a\alpha b$ işlemi dikkate alınsın. Her $a, b, c \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için*

- $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$,
- $a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b$,
- $a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$,
- $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

şartları sağlanıyorsa M ye (Barnes anlamında) bir Γ-halka denir.

Örnek 3.4.1. *[7] X ve Y değişmeli toplamsal gruplar olmak üzere,*

$$M = Hom(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ homomorfizma}\}$$

ve

$$\Gamma = Hom(Y, X) = \{\alpha : Y \to X : \alpha \text{ homomorfizma}\}$$

olsun. Bu durumda $(-,-,-) : M \times \Gamma \times M \to M$, $(a,\alpha,b) \longmapsto a\alpha b$ *(bileşke) işlemi dikkate alındığında,* M *bir* Γ*-halkadır. Gerçekten,* M *ve* Γ *üzerinde tanımlanan toplama işlemi, dönüşümlerin toplamı anlamında (sırasıyla her* $f,g \in M$ *ve her* $x \in X$ *için* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *ve her* $\alpha,\beta \in \Gamma$ *ve her* $y \in Y$ *için* $(\alpha+\beta)(y) = \alpha(y)+\beta(y)$ *) olmak üzere,* M *ve* Γ *nın birer değişmeli toplamsal grup olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi* M *nin Barnes anlamında bir* Γ*-halkası olduğunu gösterelim.*

- *Her* $f,g \in M$*, her* $\alpha \in \Gamma$ *ve her* $x,y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} f\alpha g(x+y) &= f\alpha(g(x)+g(y)) \\ &= f(\alpha(g(x))+\alpha(g(y))) \\ &= f(\alpha(g(x)))+f(\alpha(g(y))) \\ &= f\alpha g(x)+f\alpha g(y) \end{aligned}$$

olduğundan $f\alpha g \in M$ *olur.*

- *Her* $f,g,h \in M$*, her* $\alpha,\beta \in \Gamma$ *ve her* $x \in X$ *için*

$$\begin{aligned} ((f+g)\alpha h)(x) &= ((f+g)\alpha)(h(x)) \\ &= (f+g)(\alpha(h(x))) \\ &= f(\alpha(h(x)))+g(\alpha(h(x))) \\ &= f\alpha h(x)+g\alpha h(x) \end{aligned}$$

olduğundan $(f+g)\alpha h = f\alpha h + g\alpha h$ *dir.*

$$\begin{aligned} (f\alpha(g+h))(x) &= f\alpha((g+h)(x)) \\ &= f\alpha(g(x)+h(x)) \\ &= f(\alpha(g(x)))+f(\alpha(h(x))) \\ &= f\alpha g(x)+f\alpha h(x) \end{aligned}$$

olduğundan $f\alpha(g+h) = f\alpha g + f\alpha h$ *olur.*

$$\begin{aligned}(f(\alpha+\beta)h)(x) &= (f(\alpha+\beta))(h(x))\\ &= f((\alpha+\beta)h(x))\\ &= f(\alpha(h(x))+\beta(h(x)))\\ &= f(\alpha(h(x)))+f(\beta(h(x)))\\ &= f\alpha h(x)+f\beta h(x)\end{aligned}$$

olduğundan $f(\alpha+\beta)h = f\alpha h + f\beta h$ *elde edilir.*

- *Her* $f, g, h \in M$, *her* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *ve her* $x \in X$ *için*

$$\begin{aligned}((f\alpha g)\beta h)(x) &= (f\alpha g)\beta(h(x))\\ &= f\alpha g(\beta(h(x)))\\ &= f\alpha(g(\beta(h(x))))\\ &= (f\alpha(g\beta h))(x)\end{aligned}$$

olduğundan $(f\alpha g)\beta h = f\alpha(g\beta h)$ *bulunur.*

Tanım 3.4.2. *[7]* M *bir* Γ*-halka ve* U, M *nin toplamsal bir alt grubu olsun. Bu durumda* $M\Gamma U \subseteq U$ *(*$U\Gamma M \subseteq U$*) ise* U *ya* M *nin bir sol (sağ) ideali denir.* U, M *nin hem sol hem de sağ ideali ise* U *ya kısaca* M *nin bir ideali denir.*

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 Yakınlık Γ-Halkası

Bu kısımda yakınlık Γ-halkası ve alt yakınlık Γ-halkası kavramları örneklerle birlikte verilecektir. Bir yakınlık Γ-halkasının boştan farklı bir alt kümesinin alt yakınlık Γ-halkası ve iki (veya sonlu sayıda) alt yakınlık Γ-halkasının (idealinin) arakesitinin yine bir alt yakınlık Γ-halkası (ideali) olabilmesi için gerek ve yeter koşullara yer verilecektir.

Tanım 4.1.1. $M = \{a, b, c, ...\}$*,* $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\} \subseteq \mathcal{O}$ *iki toplamsal değişmeli yakınlık grubu ve her* $a, b, c \in M$ *ve her* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *için aşağıdaki koşullar sağlanırsa* M *ye bir yakınlık* Γ*-halka denir:*

(YGH_1) $a\alpha b \in N_r(B)^* M$*,*

(YGH_2) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$*,*

(YGH_3) $(a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$*,* $a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b$*,* $a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$ *özellikleri* $N_r(B)^* M$ *de sağlanır.*

Buna ek olarak,

(YGH_4) *Her* $a, b \in M$ *ve her* $\alpha \in \Gamma$ *için* $a\alpha b = b\alpha a$ *ise* M *ye değişmeli yakınlık* Γ*-halka,*

(YGH_5) *Her* $a \in M$ *ve her* $\alpha \in \Gamma$ *için* $1_M\alpha a = a\alpha 1_M = a$ *olacak şekilde* $1_M \in N_r(B)^* M$ *varsa* M *ye birimli yakınlık* Γ*-halka denir.*

Bir M yakınlık Γ-halkasında, (YGH_1)-(YGH_5) özellikleri $N_r(B)^* M$ de sağlanmak zorundadır. Bu özellikler bazı durumlarda $\mathcal{O} \backslash N_r(B)^* M$ de sağlanabilir. Bu durumda M yakınlık Γ-halka olamaz. M deki elemanlara sonlu tane işlem uygulandığında elde edilen sonuç her zaman $N_r(B)^* M$ ye ait olmayabilir. Böylece her $a \in M$, $\alpha \in \Gamma$ ve bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ ler için $a^n \in N_r(B)^* M$ veya $na \in N_r(B)^* M$ olduğu her zaman söylenemez. O zaman $N_r(B)^* M$ bir toplamsal grupoid ve aynı zamanda bir Γ-grupoid ise o zaman her $a \in M$, $\alpha \in \Gamma$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a^n \in N_r(B)^* M$ veya her $a \in M$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $na \in N_r(B)^* M$ olur.

M bir birimli yakınlık Γ-halka ve $a \in M$, $\alpha \in \Gamma$ olmak üzere, $b\alpha a = 1_M$ ($a\alpha c = 1_M$) olacak şekilde bir $b \in N_r(B)^* M$ ($c \in N_r(B)^* M$) varsa a elemanına *sol (sağ) yakın tersinirdir* denir. b (c) elemanına a elemanının *sol (sağ) yakın tersi* denir. $a \in M$ hem sol hem de sağ yakın tersinir ise bu durumda a elemanına *yakın tersinirdir* denir.

Yakınlık Γ-halkasında işlemlerle ilgili bazı temel özellikler, klasik Γ-halkasında olduğu gibi her zaman sağlanmayabilir.

Lemma 4.1.1. *Yakın yaklaşım uzayında her* Γ*-halka bir yakınlık* Γ*-halkadır.*

İspat. $M \subseteq \mathcal{O}$ yakın yaklaşım uzayı üzerinde bir Γ-halka olmak üzere, $M \subseteq N_r(B)^* M$ olduğundan $(YGH_1) - (YGH_3)$ sağlanır. Böylece M bir yakınlık Γ-halkadır. □

Örnek 4.1.1. $\mathcal{O} = \{a_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq 4\}$ *algılanabilen nesnelerin kümesi ve* $B = \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}$ *çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\},$$

çıkarım fonksiyonu da Tablo 4.1 deki gibi tanımlansın.

	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
φ	x_1	x_2	x_1	x_3	x_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
φ	x_4	x_3	x_6	x_4	x_7	x_3	x_4	x_7	x_8	x_9

	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
φ	x_3	x_4	x_1	x_9	x_5

$$Tablo\ 4.1$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}[a_{00}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{00}) = x_1\} \\ &= \{a_{00}, a_{02}, a_{10}, a_{42}\} = [a_{02}]_\varphi = [a_{10}]_\varphi = [a_{42}]_\varphi ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{01}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{01}) = x_2\} \\ &= \{a_{01}, a_{11}\} = [a_{11}]_\varphi ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{03}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{03}) = x_3\} \\ &= \{a_{03}, a_{04}, a_{12}, a_{21}, a_{30}, a_{40}\} \\ &= [a_{04}]_\varphi = [a_{12}]_\varphi = [a_{21}]_\varphi = [a_{30}]_\varphi = [a_{40}]_\varphi ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{13}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{13}) = x_4\} \\ &= \{a_{13}, a_{20}, a_{23}, a_{31}, a_{41}\} \\ &= [a_{20}]_\varphi = [a_{23}]_\varphi = [a_{31}]_\varphi = [a_{41}]_\varphi ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{14}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{14}) = x_5\} \\ &= \{a_{14}, a_{44}\} = [a_{44}]_\varphi ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{22}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{22}) = x_6\} \\ &= \{a_{22}\} ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{24}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{24}) = x_7\} \\ &= \{a_{24}, a_{32}\} = [a_{32}]_\varphi ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{33}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{33}) = x_8\} \\ &= \{a_{33}\} ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a_{34}]_\varphi &= \{a \in \mathcal{O}\ |\varphi(a) = \varphi(a_{34}) = x_9\} \\ &= \{a_{34}, a_{43}\} = [a_{43}]_\varphi\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\xi_\varphi = \left\{ [a_{00}]_\varphi , [a_{01}]_\varphi , [a_{03}]_\varphi , [a_{13}]_\varphi , [a_{14}]_\varphi , [a_{22}]_\varphi , [a_{24}]_\varphi , [a_{33}]_\varphi , [a_{34}]_\varphi \right\}$$

olur. Dolayısıyla $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_\varphi\}$ *elde edilir. Böylece*

$M = \{a_{01}, a_{10}\}$, $\Gamma = \{a_{42}\} \subseteq \mathcal{O}$ *alt kümeleri için*

$$\begin{aligned} N_1(B)^* M &= \bigcup_{[a]_\varphi \cap M \neq \varnothing} [a]_\varphi \\ &= \{a_{00}, a_{02}, a_{10}, a_{42}\} \cup \{a_{01}, a_{11}\} \\ &= \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{42}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_1(B)^* \Gamma &= \bigcup_{[a]_\varphi \cap \Gamma \neq \varnothing} [a]_\varphi \\ &= \{a_{00}, a_{02}, a_{10}, a_{42}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bununla birlikte, $M \subseteq \mathcal{O}$ *kümesi üzerinde toplama işlemi,*

$$+_1 \ : \ \begin{array}{ll} \mathcal{O} \times \mathcal{O} & \longrightarrow \mathcal{O} \\ (a_{ij}, a_{mn}) & \longmapsto a_{ij} +_1 a_{mn} \end{array} ,$$

$$a_{ij} +_1 a_{mn} = a_{pr} \quad , i + m \equiv p \ (\mathrm{mod}\ 2) \textit{ ve } j + n \equiv r \ (\mathrm{mod}\ 2)$$

ile tanımlansın. Bu durumda M*, "*$+_1$*" işlemi ile birlikte bir abel yakınlık grubudur. Ayrıca* $\Gamma = \{a_{42}\} \subseteq \mathcal{O}$ *kümesi üzerinde toplama işlemi,*

$$+_2 \ : \ \begin{array}{ll} \mathcal{O} \times \mathcal{O} & \longrightarrow \mathcal{O} \\ (a_{ij}, a_{mn}) & \longmapsto a_{ij} +_2 a_{mn} \end{array} ,$$

$$a_{ij} +_2 a_{mn} = a_{st} \quad , i + m \equiv s \ (\mathrm{mod}\ 4) \textit{ ve } j + n \equiv t \ (\mathrm{mod}\ 4)$$

ile verilsin. Bu durumda Γ*, "*$+_2$*" işlemi ile birlikte bir abel yakınlık grubudur.*

Burada $M \subseteq \mathcal{O}$ *“$+_1$” işlemi ile birlikte,* $a_{01} + a_{10} = a_{11} \notin M$ *olduğundan bir grup değildir ve dolayısıyla* M *bir* Γ*-halka olamaz.*

Bundan başka

$$\begin{array}{ll} \mathcal{O} \times \Gamma \times \mathcal{O} & \longrightarrow \mathcal{O} \\ (a_{ij}, a_{kl}, a_{mn}) & \longmapsto a_{ij}a_{kl}a_{mn} \end{array},$$

$$a_{ij}a_{kl}a_{mn} = a_{uv} \quad , u = \min\{i,k,m\} \text{ ve } v = \min\{j,l,n\}$$

ile tanımlanan işlem dikkate alınırsa, Tanım 4.1.1 den,

(YGH_1) $a\alpha b \in N_r(B)^* M$,

(YGH_2) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$,

(YGH_3) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$, $a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b$, $a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$ *özellikleri* $N_r(B)^* M$ *de sağlanır.*

O halde M *kümesi bir yakınlık* Γ*-halkadır.*

Lemma 4.1.2. *$M \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık Γ-halkası ve $0_M \in M$ olsun. $0_M\alpha a, a\alpha 0_M \in M$ ise her $a, b \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için*

(1) $a\alpha 0_M = 0_M\alpha a = 0_M$,

(2) $a\alpha(-b) = (-a)\alpha b = -(a\alpha b)$,

(3) $(-a)\alpha(-b) = a\alpha b$

dir.

İspat. (1) $a\alpha 0_M \in M$ olmak üzere, $a \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} a\alpha 0_M &= a\alpha(0_M + 0_M) \\ &= a\alpha 0_M + a\alpha 0_M \end{aligned}$$

dir. $a\alpha 0_M \in M$ nin toplamsal tersi olan $-(a\alpha 0_M) \in M$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} -(a\alpha 0_M) + a\alpha 0_M &= -(a\alpha 0_M) + a\alpha 0_M + a\alpha 0_M \\ &\Rightarrow 0_M = 0_M + a\alpha 0_M \\ &\Rightarrow 0_M = a\alpha 0_M \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $0_M\alpha a = 0_M$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla

$$a\alpha 0_M = 0_M\alpha a = 0_M$$

olur.

(2) İlk olarak $a\alpha\,(-b) = (-a)\,\alpha b$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & a\alpha 0_M = 0_M \\ \Rightarrow\ & a\alpha\,(b + (-b)) = 0_M \\ \Rightarrow\ & (a\alpha b) + (a\alpha\,(-b)) = 0_M \end{aligned}$$

dir. $(M, +)$ yakınlık grubu olduğundan $a\alpha b$ elemanının toplamsal tersi vardır ve ters elemanın tekliğinden

$$a\alpha\,(-b) = -\,(a\alpha b)$$

olur. Benzer biçimde $(-a)\,\alpha b = -\,(a\alpha b)$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla

$$a\alpha\,(-b) = (-a)\,\alpha b = -\,(a\alpha b)$$

dir.

(3) (2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (-a)\,\alpha\,(-b) &= -(a\alpha(-b)) = -(-(a\alpha b)), \\ (-a)\,\alpha\,(-b) &= -((-a)\alpha b) = -(-(a\alpha b)) \end{aligned}$$

dir. Burada $-(-(a\alpha b)) = a\alpha b$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

M yakınlık Γ-halkası olduğundan $a\alpha b$ elemanının toplamsal tersi vardır ve $-(a\alpha b)$ dir, yani

$$a\alpha b + (-(a\alpha b)) = -(a\alpha b) + a\alpha b = 0_M$$

olur. Benzer şekilde $-(a\alpha b)$ elemanının da toplamsal tersi vardır ve $-(-(a\alpha b))$ dir, yani

$$-(a\alpha b) + [-(-(a\alpha b))] = -(-(a\alpha b)) + (-(a\alpha b)) = 0_M$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} -(-(a\alpha b)) &= -(-(a\alpha b)) + 0_M \\ &= -(-(a\alpha b)) + (-(a\alpha b)) + (a\alpha b) \\ &= 0_M + (a\alpha b) \\ &= a\alpha b \\ \Rightarrow -(-(a\alpha b)) &= a\alpha b \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $(-a)\,\alpha\,(-b) = a\alpha b$ olur. □

Tanım 4.1.2. *M bir yakınlık Γ-halkası ve S de M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S, M deki işlemler ile yakınlık Γ-halkası ise S ye M nin alt yakınlık Γ-halkası denir.*

Teorem 4.1.1. *M bir yakınlık Γ-halkası, S, M nin boştan farklı bir alt kümesi, $(N_r\,(B)^*\,S,+)$ grupoid ve $N_r\,(B)^*\,S$ Γ-grupoid olsun. Bu durumda S nin M yakınlık Γ-halkasının bir alt yakınlık Γ-halkası olması için gerek ve yeter koşul her $x \in S$ için $-x \in S$ olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki S, M yakınlık Γ-halkasının bir alt yakınlık Γ-halkası olsun. Bu durumda Tanım 4.1.1 den S bir yakınlık Γ-halkasıdır. Böylece her $x \in S$ için $-x \in S$ dir.

$(\Leftarrow)$ Hipotezden $S \subseteq M$ ve $(N_r\,(B)^*\,S,+)$ grupoid olduğundan, Teorem 3.2.3 ten $(S,+)$ abel yakınlık grubudur. $S \subseteq M$ ve $N_r\,(B)^*\,S$ Γ-grupoid olduğundan birleşme özelliği $N_r\,(B)^*\,S$ de sağlanır. Her $x, y, z \in S$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $x+y, x\alpha z, y\alpha z, x\alpha z + y\alpha z \in N_r\,(B)^*\,S$ dir. M yakınlık Γ-halkası olduğundan $(x+y)\alpha z = x\alpha z + y\alpha z$ özelliği $N_r\,(B)^*\,S$ de sağlanır. Benzer olarak, $x(\alpha+\beta)y = x\alpha y + x\beta y$ ve $x\alpha(y+z) = x\alpha y + x\alpha z$ özellikleri de $N_r\,(B)^*\,S$ de sağlanır. Böylece S, M yakınlık Γ-halkasının bir alt yakınlık Γ-halkasıdır. □

Örnek 4.1.2. *Örnek 4.1.1 den, $M = \{a_{01}, a_{10}\}$ yakınlık Γ-halkası dikkate alınsın. $S = \{a_{10}\}$, M yakınlık Γ-halkasının bir alt kümesi olmak üzere,*

$$\begin{aligned} N_1\,(B)^*\,S &= \bigcup_{[a]_{\varphi_i} \cap S \neq \varnothing} [a]_{\varphi_i} \\ &= \{a_{00}, a_{02}, a_{10}, a_{42}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $N_r\,(B)^*\,S$, "$+_1$" işlemi ile birlikte bir grupoid ve $N_r\,(B)^*\,S$ Γ-grupoid olur. Ayrıca $-a_{10} = a_{10} \in S$ olduğundan Teorem 4.1.1 den S, M yakınlık Γ-halkasının bir alt yakınlık Γ-halkasıdır.

Teorem 4.1.2. *M bir yakınlık Γ-halkasıve S_1 ile S_2 de M nin iki alt yakınlık Γ-halkası olsun. Bu durumda $N_r(B)^* S_1$ ve $N_r(B)^* S_2$ grupoid ve Γ-grupoid olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* S_1) \cap (N_r(B)^* S_2) = N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$$

ise $S_1 \cap S_2$, M nin bir alt yakınlık Γ-halkasıdır.

İspat. S_1 ve S_2, R nin iki alt yakınlık Γ-halkası olsun. $S_1 \cap S_2 \subset M$ olduğu açıktır. $N_r(B)^* S_1$, $N_r(B)^* S_2$ M deki işlemler ile birlikte grupoid ve Γ-grupoid olduğu dikkate alınırsa, $(N_r(B)^* S_1) \cap (N_r(B)^* S_2) = N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$ gereğince $N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$ de M deki işlemler ile birlikte bir grupoid ve Γ-grupoid olur. $x \in S_1 \cap S_2$ olmak üzere, S_1 ve S_2 alt yakınlık Γ-halkaları olduğundan $-x \in S_1$ ve $-x \in S_2$, yani $-x \in S_1 \cap S_2$ dir. Sonuç olarak, Teorem 4.1.1 den $S_1 \cap S_2$, M nin bir alt yakınlık Γ-halkasıdır. □

Sonuç 4.1.1. *M bir yakınlık Γ-halkası ve , M nin alt yakınlık Γ-halkalarının boştan farklı bir ailesi $\{S_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r(B)^* S_i$ ler M deki işlemler ile birlikte grupoid ve Γ-grupoid olmak üzere,*

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^* S_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} S_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} S_i$, M nin bir alt yakınlık Γ-halkasıdır.

Tanım 4.1.3. *M bir yakınlık Γ-halkası ve $(\varnothing \neq) I \subset M$ olsun. Her $x, y \in I$ ve her $m \in M$ için*

(i) $x + y \in N_r(B)^* I$,

(ii) $-x \in I$,

(iii) $m\alpha x \in N_r(B)^* I$ $(x\alpha m \in N_r(B)^* I)$

ise I ya M nin sol(sağ) yakınlık Γ-ideali denir. I hem sol hem de sağ yakınlık Γ-ideali ise bu durumda I ya M nin yakınlık Γ-ideali denir.

Uyarı 4.1.1. *M yakınlık Γ-halkasının kesin olarak sadece bir tane aşikar yakınlık Γ-ideali vardır. Bu aşikar yakınlık Γ-ideali M nin kendisidir. Ayrıca $\{0_M\}$ nin M*

yakınlık Γ-halkasının aşikar alt yakınlık Γ-halkası olması için gerek ve yeter koşul $0_M \in M$ olmasıdır.

Yakınlık Γ-halkasının tanımı ve Teorem 4.1.1 dikkate alındığında, Lemma 4.1.3 ispatsız verilebilir.

Lemma 4.1.3. *I, M yakınlık Γ-halkasının bir yakınlık Γ-ideali olsun. $N_r(B)^* I$ grupoid ve Γ-grupoid ise I, M yakınlık Γ-halkasının bir alt yakınlık Γ-halkasıdır.*

Örnek 4.1.3. *Örnek 4.1.1 ve Örnek 4.1.2 den, $M = \{a_{01}, a_{10}\}$ yakınlık Γ-halkası ve M nin $S = \{a_{10}\}$ alt yakınlık Γ-halkası dikkate alınsın. Her $x, y \in S$ ve her $m \in M$ için $x + y \in N_r(B)^* S$, $-x \in S$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $m\alpha x \in N_r(B)^* S$ ve $x\alpha m \in N_r(B)^* S$ olduğu görülür. Böylece Tanım 4.1.3 ten S, M nin bir yakınlık Γ-idealidir.*

Teorem 4.1.3. *M bir yakınlık Γ-halkası ve I_1 ile I_2 de M nin iki yakınlık Γ-ideali olsun. Bu durumda $N_r(B)^* I_1$ ve $N_r(B)^* I_2$, M deki işlemler ile birlikte grupoid ve Γ-grupoid olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2) = N_r(B)^* (I_1 \cap I_2)$$

ise $I_1 \cap I_2$, M nin bir yakınlık Γ-idealidir.

İspat. I_1 ve I_2, M nin iki yakınlık Γ-ideali olsun. $I_1 \cap I_2 \subset M$ olduğu açıktır. $x, y \in I_1 \cap I_2$ olmak üzere, I_1 ve I_2 yakınlık Γ-idealleri olduğundan, her $x, y \in I_1 \cap I_2$ ve her $m \in M$ için

$$x + y \in N_r(B)^* I_1, \ -x \in I_1 \text{ ve } m\alpha x \in N_r(B)^* I_1,$$
$$x + y \in N_r(B)^* I_2, \ -x \in I_2 \text{ ve } m\alpha x \in N_r(B)^* I_2$$

olur. Bu durumda $x + y \in (N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2)$, $-x \in I_1 \cap I_2$ ve $m\alpha x \in (N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2)$ elde edilir. $(N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2) = N_r(B)^* (I_1 \cap I_2)$ olduğundan,

$$x + y \in N_r(B)^* (I_1 \cap I_2), \ -x \in I_1 \cap I_2 \text{ ve } m\alpha x \in N_r(B)^* (I_1 \cap I_2)$$

dir. Benzer şekilde $I_1 \cap I_2$ nin sağ yakınlık Γ-ideali olduğu da gösterilebilir. Böylece Tanım 4.1.3 ten $I_1 \cap I_2$, M nin bir yakınlık Γ-idealidir. $\square$

Sonuç 4.1.2. *M bir yakınlık Γ-halkası ve M nin yakınlık Γ-ideallerinin boştan farklı bir ailesi $\{I_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r(B)^* I_i$ ler M deki işlemler ile birlikte grupoid ve Γ-grupoid olmak üzere,*

$$\bigcap_{i\in\Delta} \left(N_r(B)^* I_i\right) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i\in\Delta} I_i\right)$$

ise $\bigcap\limits_{i\in\Delta} I_i$, M nin bir yakınlık Γ-idealidir.

4.2 Yakın Zayıf Kalan Sınıflarının Yakınlık Gamma Halkası

Bu kısımda $M \subseteq \mathcal{O}$ yakınlık Γ-halkası üzerinde zayıf eşdeğerlik bağıntısının tanımına ve zayıf eşdeğerlik bağıntısının M yakınlık Γ-halkasında belirttiği yakın zayıf kalan sınıflarına yer verilmiştir. İki yakın zayıf kalan sınıfının M deki işlemlerle ilgili tanımları verilmiştir. Bu işlemlerle birlikte yakınlık Γ-ideallerine gerek kalmaksızın yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık Γ-halkasının hangi şartlar altında var olduğu gösterilerek örnekler incelenmiştir.

$M \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık Γ-halkası ve S, M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olsun. Bu durumda $x, y \in M$ olmak üzere, M nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir " $\sim_r$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_r y :\Leftrightarrow x + (-y) \in S \cup \{0_M\}.$$

Teorem 4.2.1. *M bir yakınlık Γ-halkası olmak üzere, "$\sim_r$" bağıntısı M üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

İspat. M bir yakınlık Γ-grubu olduğundan her $x \in M$ için $-x \in M$ dir. $x + (-x) = 0_M$ olduğundan $x \sim_r x$ olur. Her $x, y \in M$ için $x \sim_r y$ ise $x + (-y) \in S \cup \{0_M\}$, yani $x + (-y) \in S$ veya $x + (-y) \in \{0_M\}$ olur. $x + (-y) \in S$ ise S, M nin bir alt yakınlık

Γ-halkası olduğundan $-(x+(-y)) = y+(-x) \in S$ dir. Böylece $y \sim_r x$ bulunur. Ayrıca $x+(-y) \in \{0_M\}$ ise $x+(-y) = 0_M$ dir. Buradan $y+(-x) = -(x+(-y)) = -0_M = 0_M$ ve böylece $y \sim_r x$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_r$" bağıntısı M üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır. $\square$

Herhangi bir $x \in M$ için "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının M yakınlık Γ-halkasında belirttiği sınıflar

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_r &= \{y \in M \mid y \sim_r x\} \\
&= \{y \in M \mid y+(-x) \in S \cup \{0_M\}\} \\
&= \{y \in M \mid y+(-x) \in S \text{ veya } y+(-x) \in \{0_M\}\} \\
&= \{y \in M \mid y \in S+x \text{ veya } y+(-x) = 0_M\} \\
&= \{y \in M \mid y \in S+x \text{ veya } x = y\} \\
&= \{s+x \mid s \in S,\ x \in M,\ s+x \in M\} \cup \{x\}
\end{aligned}$$

ile belirlidir.

Tanım 4.2.1. *M bir yakınlık Γ-halkası olmak üzere, "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının M de belirttiği sınıflara yakın sağ zayıf kalan sınıflar denir. Herhangi bir $x \in M$ için yakın sağ zayıf kalan sınıflar $S+x$ ile gösterilir ve*

$$S+x = \{s+x \mid s \in S,\ x \in M,\ s+x \in M\} \cup \{x\}$$

dir.

Benzer olarak $x, y \in M$ olmak üzere, M yakınlık Γ-halkasının elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_\ell$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_\ell y :\Leftrightarrow (-x)+y \in S \cup \{0_M\}.$$

Teorem 4.2.2. *M bir yakınlık Γ-halkası olmak üzere, "$\sim_\ell$" bağıntısı M üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

İspat. M bir yakınlık Γ-halkası olduğundan her $x \in M$ için $-x \in M$ dir. $x + (-x) = 0_M$ olduğundan $x \sim_\ell x$ olur. Her $x, y \in M$ için $x \sim_\ell y$ ise $(-x) + y \in S \cup \{0_M\}$, yani $(-x) + y \in S$ veya $(-x) + y \in \{0_M\}$ olur. $(-x) + y \in S$ ise S, M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olduğundan $-((-x) + y) = (-y) + x \in S$ dir. Böylece $y \sim_\ell x$ bulunur. Ayrıca $(-x)+y \in \{0_M\}$ ise $(-x)+y = 0_M$ dır. Buradan $(-y)+x = -((-x) + y) = -0_M = 0_M$ ve böylece $y \sim_\ell x$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_\ell$" bağıntısı M üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır. $\square$

Herhangi bir $x \in M$ için "$\sim_\ell$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının M yakınlık Γ-halkasında belirttiği sınıflar

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_l &= \{y \in M \mid y \sim_\ell x\} \\
&= \{y \in M \mid (-x) + y \in S \cup \{0_M\}\} \\
&= \{y \in M \mid (-x) + y \in S \text{ veya } (-x) + y \in \{0_M\}\} \\
&= \{y \in M \mid y \in x + S \text{ veya } (-x) + y = 0_M\} \\
&= \{y \in M \mid y \in x + S \text{ veya } y = x\} \\
&= \{x + s \mid s \in S,\ x \in M,\ x + s \in M\} \cup \{x\}
\end{aligned}$$

ile belirlidir.

Tanım 4.2.2. *M bir yakınlık Γ-halkası olmak üzere, "$\sim_\ell$" eşdeğerlik bağıntısının M de belirttiği sınıflara yakın sol zayıf kalan sınıflar denir. Herhangi bir $x \in M$ için yakın sol zayıf kalan sınıflar $x + S$ ile gösterilir, yani*

$$x + S = \{x + s \mid s \in S,\ x \in M,\ x + s \in M\} \cup \{x\}$$

şeklindedir.

Burada $\tilde{x}_\ell = x+S$ ve $\tilde{x}_r = S+x$ dir. $(M, +)$ değişmeli yakınlık grubu olduğundan $\tilde{x}_\ell = \tilde{x}_r$ olur. Bu durumda $\tilde{x}_\ell$ ve $\tilde{x}_r$ notasyonları yerine sadece $\tilde{x}$ kullanılır.

M bir yakınlık Γ-halkası ve S, M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olmak üzere,

$$M/_\sim = \{x + S \mid x \in M\}$$

M nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada M yerine $N_r(B)^* M$ alınırsa

$$(N_r(B)^* M)/_{\sim} = \{x + S \mid x \in N_r(B)^* M\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$x + S = \{x + s \mid s \in S,\ x \in N_r(B)^* M,\ x + s \in M\} \cup \{x\}$$

olur.

Tanım 4.2.3. *M bir yakınlık Γ-halkası ve S de M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olsun. $x, y \in M$ olmak üzere, $x + S$ ve $y + S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x + y \in N_r(B)^* M$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfının toplamı*

$$\{(x + y) + s \mid s \in S,\ x + y \in N_r(B)^* M,\ (x + y) + s \in M\} \cup \{x + y\}$$

ile tanımlıdır. Buna sol zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(x + S) \oplus (y + S) = (x + y) + S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2.4. *M bir yakınlık Γ-halkası ve S de M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olsun. $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ olmak üzere, $x+S$ ve $y+S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x\alpha y \in N_r(B)^* M$ elemanının belirlediği iki yakın sol zayıf kalan sınıfı*

$$\{(x\alpha y) + s \mid s \in S,\ x\alpha y \in N_r(B)^* M,\ (x\alpha y) + s \in M\} \cup \{x\alpha y\}$$

ile tanımlıdır ve

$$(x + S)\,\alpha\,(y + S) = (x\alpha y) + S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2.5. *$\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $M \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık Γ-halkası ve S de M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olsun. $M/_{\sim}$, M nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere,*

$$N_r(B)^*(M/_{\sim}) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \underset{\Phi}{\cap} M/_{\sim} \neq \emptyset} \xi_\Phi(A)$$

kümesine $M/_{\sim}$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 4.2.3. *M bir yakınlık Γ-halkasıve S de M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olsun. O zaman $M/_{\sim}$, M nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* M)/_{\sim} \subseteq N_r(B)^*(M/_{\sim})$$

ise $M/_{\sim}$, her $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ için

$$(x+S) \oplus (y+S) = (x+y)+S,$$
$$(x+S)\,\alpha\,(y+S) = (x\alpha y)+S$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yakınlık Γ-halkasıdır.

İspat. (YGH_1) $(N_r(B)^* M)/_{\sim} \subseteq N_r(B)^*(M/_{\sim})$ olsun. M bir yakınlık Γ-halkası olduğundan Teorem 3.2.8 den $(M/_{\sim}, \oplus)$, M nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının abel yakınlık grubudur.

(YGH_2) M yakınlık Γ-halkası olduğundan, her $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$, $x\alpha y \in N_r(B)^* M$ ve her $(x+S), (y+S) \in M/_{\sim}$ için $(x+S)\,\alpha\,(y+S) = (x\alpha y)+S \in (N_r(B)^* M)/_{\sim}$ dir. Hipotezden her $(x+S), (y+S) \in M/_{\sim}$ için $(x+S)\,\alpha\,(y+S) = (x\alpha y)+S \in N_r(B)^*(M/_{\sim})$ bulunur.

Her $x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $(x\alpha y)\,\beta z = x\alpha\,(y\beta z)$ özelliği $N_r(B)^* M$ de sağlandığından, her $(x+S), (y+S), (z+S) \in M/_{\sim}$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}((x+S)\,\alpha\,(y+S))\,\beta\,(z+S) &= ((x\alpha y)+S)\,\beta\,(z+S) = ((x\alpha y)\,\beta z)+S \\ &= (x\alpha\,(y\beta z))+S = (x+S)\,\alpha\,((y\beta z)+S) \\ &= (x+S)\,\alpha\,((y+S)\,\beta\,(z+S))\end{aligned}$$

eşitliği $\left(N_r\left(B\right)^* M\right)/_\sim$ de sağlanır. Böylece hipotezden, her $\left(x+S\right),\left(y+S\right)$,$\left(z+S\right) \in M/_\sim$ için

$$\left(\left(x+S\right)\alpha\left(y+S\right)\right)\beta\left(z+S\right) = \left(x+S\right)\alpha\left(\left(y+S\right)\beta\left(z+S\right)\right)$$

özelliği $N_r\left(B\right)^*\left(M/_\sim\right)$ de sağlanır.

(YGH_3) M bir yakınlık Γ-halkası olduğundan, $N_r\left(B\right)^* M$ de soldan dağılma özelliği sağlanır. Her $\left(x+S\right),\left(y+S\right),\left(z+S\right) \in M/_\sim$ için

$$\begin{aligned}
\left(x+S\right)\alpha\left(\left(y+S\right)\oplus\left(z+S\right)\right) &= \left(x+S\right)\alpha\left(\left(y+z\right)+S\right)\\
&= \left(x\alpha\left(y+z\right)\right)+S = \left(\left(x\alpha y\right)+\left(x\alpha z\right)\right)+S\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)+S\right)\oplus\left(\left(x\alpha z\right)+S\right)\\
&= \left(\left(x+S\right)\alpha\left(y+S\right)\right)\oplus\left(\left(x+S\right)\alpha\left(z+S\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\left(N_r\left(B\right)^* M\right)/_\sim$ de soldan dağılma özelliği sağlanır. Benzer işlemlerle her $\left(x+S\right),\left(y+S\right),\left(z+S\right) \in R/_\sim$ için

$$\left(\left(x+S\right)\oplus\left(y+S\right)\right)\odot\left(z+S\right) = \left(\left(x+S\right)\odot\left(z+S\right)\right)\oplus\left(\left(x+S\right)\odot\left(z+S\right)\right)$$

sağdan dağılma özeliğinin de $\left(N_r\left(B\right)^* R\right)/_\sim$ de sağlandığı gösterilebilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
\left(x+S\right)\left(\alpha+\beta\right)\left(y+S\right) &= \left(\left(x+S\right)\alpha\left(y+S\right)\right)+\left(\left(x+S\right)\beta\left(y+S\right)\right)\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)+S\right)+\left(\left(x\beta y\right)+S\right)\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)+\left(x\beta y\right)\right)+S\\
&= \left(x\left(\alpha+\beta\right)y\right)+S
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\left(N_r\left(B\right)^* M\right)/_\sim$ de, yani hipotezden $N_r\left(B\right)^*\left(M/_\sim\right)$ de dağılma özellikleri sağlanır. Sonuç olarak, $M/_\sim$ bir yakınlık Γ-halkasıdır. □

Tanım 4.2.6. *M bir yakınlık Γ-halkası ve S de M nin bir alt yakınlık Γ-halkası olsun. $M/_\sim$ yakınlık Γ-halkasına M nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının yakınlık Γ-halkası denir ve $M/_w S$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 4.2.1. *$M = \{a_{01}, a_{10}\}$ yakınlık Γ-halkasının $S = \{a_{10}\}$ alt kümesini dikkate alalım. Örnek 4.1.2 den S, M yakınlık Γ-halkasının alt yakınlık Γ-halkasıdır.*

Bu durumda M nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıfları yazılabilir. Yakın sol zayıf kalan sınıfının tanımından,

$$a_{01} + S = \emptyset \cup \{a_{01}\} = \{a_{01}\},$$
$$a_{10} + S = \{a_{00}\} \cup \{a_{10}\} = \{a_{00}, a_{10}\}$$

elde edilir. Böylece $M/_{\sim} = \{a_{01} + S, a_{10} + S\}$ olur.

$N_1(B)^* M = \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{42}\}$ olduğundan $N_1(B)^* M$ nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıfları üstte yazdıklarımıza aşağıda yazacaklarımızı ilave edersek;

$$a_{00} + S = \{a_{10}\} \cup \{a_{00}\} = \{a_{00}, a_{10}\},$$
$$a_{02} + S = \{a_{10}\} \cup \{a_{02}\} = \{a_{02}, a_{10}\},$$
$$a_{11} + S = \{a_{01}\} \cup \{a_{11}\} = \{a_{01}, a_{11}\},$$
$$a_{42} + S = \{a_{10}\} \cup \{a_{42}\} = \{a_{10}, a_{42}\}$$

dir. Böylece $(N_1(B)^* M)/_{\sim} = \{a_{01} + S, a_{02} + S, a_{10} + S, a_{11} + S, a_{42} + S\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{O})$ elde edilir.

$M/_{\sim}$ üzerinde tanımlı işlemlerle, Tanım 4.2.3 ve Tanım 4.2.4 kullanılarak, Tablo 4.2 ve Tablo 4.3 teki gibi tanımlansın.

$\oplus$	$a_{01} + S$	$a_{10} + S$
$a_{01} + S$	$a_{00} + S$	$a_{11} + S$
$a_{10} + S$	$a_{11} + S$	$a_{00} + S$

$Tablo\ 4.2$

α	$a_{01} + S$	$a_{10} + S$
$a_{01} + S$	$a_{01} + S$	$a_{00} + S$
$a_{10} + S$	$a_{00} + S$	$a_{10} + S$

$Tablo\ 4.3$

$\left(N_r(B)^* M\right)/_\sim \subseteq N_r(B)^*\left(M/_\sim\right)$ *olduğunu göstermek için* $\left(N_1(B)^* M\right)/_\sim$ *den alınan her elemanın* $N_1(B)^*\left(M/_\sim\right)$ *de olduğunu göstermek yeterlidir.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(M/_\sim) &= \{\Phi(A) \mid A \in M/_\sim\} \\
&= \{\Phi(a_{01}+S), \Phi(a_{10}+S)\}, \\
&= \{\varphi(a_{01}), \varphi(a_{00}), \varphi(a_{10})\}, \\
&= \{x_1, x_2\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$N_1(B)^*\left(M/_\sim\right) = \{a_{01}+S, a_{10}+S, a_{00}+S, a_{02}+S, a_{11}+S, a_{42}+S\}$$

bulunur. Böylece $\left(N_r(B)^* M\right)/_\sim \subseteq N_r(B)^*\left(M/_\sim\right)$ *olduğundan Teorem 4.2.3 ten* $M/_\sim$ *bir yakınlık* Γ*-halkasıdır.*

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Günümüz matematik ve mühendislik dünyasında küme teorisi ve cebirsel yapılar önemli bir yere sahiptir. Yakın yaklaşım uzayları üzerinde tanımlanan yakınlık grupları, yakınlık halkalarıgibi yakınlık cebirsel yapılar son zamanlarda çalışılmaktadır. Bu tezde, yakınlık cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar incelemiş ve yakınlık halkaları, yakınlık gamma halkalarına genelleştirilmiştir. Böylece literatüre yeni bir kaynak kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] M. Pavel, *Fundamentals of pattern recognition*, 2^{nd} Ed. N.Y., Marcel Dekker, Inc., 1993.

[2] J. F. Peters, “Near sets: General theory about nearness of objects”, *Appl. Math. Sci.*, 1(53-56), 2609-2629, 2007.

[3] A. Hoogs, R. Collins, R. Kaucic and J. Mundy, “A common set of perceptual observables for grouping, figure-ground discrimination, and texture classification”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(4), 458-474, 2003.

[4] S. K. Pal and J. F. Peters, *Rough Fuzzy Image Analysis. Foundations and Methodologies*, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010, ISBN 10:1439803293.

[5] J. F. Peters, “Near sets: An introduction”, *Math. Comput. Sci.*, 7(1), 3-9, 2013.

[6] N. Nobusawa, “On a generalization of the ring theory”, *Osaka J. Math.*, 1, 81-89, 1964.

[7] W. E. Barnes, “On the Γ-rings of Nobusawa”, *Pacific J. Math.*, 18, 411-422, 1966.

[8] J. Luh, “On the Theory of Simple Γ-rings”, *Michigan Math. J.* 16, 65-75, 1969.

[9] S. Kyuno, “On Prime Gamma Rings”, *Pacific J. Math.*, 75(1), 185-190, 1978.

[10] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[11] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Pearson Education, Limited, 7^{th} Ed., 2013.

[12] N. H. McCoy, *The theory of rings*, 1^{st} Ed., The Macmillan Company, New York, 1964.

[13] E. İnan and M. A. Öztürk, "Near groups on nearness approximation spaces", *Hacet. J. Math. Stat.*, 41(4), 545-558, 2012.

[14] E. İnan and M. A. Öztürk, "Erratum and notes for near groups on nearness approximation spaces", *Hacet. J. Math. Stat.*, 43(2), 279-281, 2014.

[15] E. İnan and M. A. Öztürk, "Near semigroups on nearness approximation spaces", *Annals Fuzzy Math. Inform.*, 10(2), 287-297, 2015.

[16] M. A. Öztürk, M. Uçkun and E. İnan, "Near groups of weak cosets on nearness approximation spaces", *Fund. Inform.*, 133, 433-448, 2014.

[17] M. A. Öztürk and E. İnan, "Nearness rings", *Annals Fuzzy Math. Inform.*, 17(2) , 115-131, 2019.

[18] E. İnan, "Yakın Yaklaşım Uzaylarında Cebirsel Yapılar", Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2015.

[19] J. F. Peters, "Classification of perceptual objects by means of features", *Int. J. Info. Technol. Intell. Comput.*, 3(2), 1-35, 2008.

[20] J. F. Peters and S. Ramanna, *Affinities between perceptual granules: Foundations and perspectives.*, Eds. A. Bargiela and W. Pedrycz, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[21] I. Guyon, S. Gunn, M. Nikravesh and L. A. Zadeh, *Feature extraction, foundations and applications*, Berlin, Springer, 2006.

[22] J. H. Poincaré and D. Pensées, translated by J. W. Bolduc, *Mathematics and Science: Last Essays*, Paris & NY: Flammarion & Kessinger Pub., 1913 & 2009.

[23] J. F. Peters and P. Wasilewski, “Foundations of near sets”, *Inform. Sci.*, 179, 3091-3109, 2009.

[24] J. F. Peters, “Corrigenda and addenda: Tolerance near sets and image correspondence”, *Int. J. Bio-Inspired Comput.*, 2(5), 310-318, 2010.

[25] E. C. Zeeman, *The topology of the brain and the visual perception*, in M. K. 4^{th} Ed., Prentice Hall, New Jersey, 1962.

[26] L. Polkowski, *Rough Sets, Mathematical Foundations*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.

[27] Z. Pawlak, “Rough sets”, *Int. J. Comput. Inform. Sci.*, 11(5), 341-356, 1982.

[28] A. Skowron and J. Stepaniuk, “Tolerance approximation spaces”, *Fund. Inform.*, 27(2-3), 245-253, 1996.

[29] S. A. Naimpally and J. F. Peters, *Topology with applications. Topological spaces via near and far*, World Scientific, Singapore, 2012.

[30] C. Henry and G. Smith, *Proximity System*, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2012-021.

[31] J. F. Peters and S. Naimpally, “Applications of near sets”, *Notices Amer. Math. Soc.*, 59(4), 536-542, 2012.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Ramazan EROL
Doğum Yeri	:	Adıyaman
Doğum Tarihi	:	19/07/1980
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	ramazanerol80@hotmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi	2001
Lise		Adıyaman Merkez İmam Hatip Lisesi	1997

Yayınlar

[1] M. Uçkun, E. İnan and R. Erol, “Gamma-rings on nearness approximation spaces”, (submitted) 2019.