T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS PROBLEMLER

SİNAN SEVİNÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2018

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPEATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

Sinan SEVİNÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 07/09/2018 tarihinde aşağıdaki juri üyeleri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Danışman

Prof. Dr. Seyit TEMİR
Üye

Doç. Dr. Murat ŞAT
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPEATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

Sinan SEVİNÇ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Yıl : 2018, Sayfa Sayısı 49

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr. Seyit TEMİR
Doç. Dr. Murat ŞAT

Bu çalışmanın birinci kısmında, diferansiyel operatörler, Sturm-Liouville operatörü ve ters spektral problemler ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Sturm-Liouville operatörü ve dönüşüm operatörü için genel bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde, düz spektral problemler ile ilgili açıklamalar, teoremler ters problem formülleri ve teklik teoremleri verilmiştir. Beşinci bölümde genelleşmiş fonksiyon katsayılı Sturm-Liouville operatörünün spektral karakteristikleri incelenmiş ve ters problem çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville operatörü; Özdeğer; Özfonksiyon; Ters problem; Ters spektral problemler.

ABSTRACT

MSc Thesis

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR STURM LIOUVLLE OPERATORS WITH GENERALIZED FUNCTION

Sinan SEVİNÇ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Year : 2018, Number of pages 49

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr. Seyit TEMİR
Doç. Dr. Murat ŞAT

In first section of this seminar, informations about differential operators, Sturm-Liouville Operators and inverse spectral problems are given.In the second section, Some fundamental definitions and theorems that use of often in spectral theory of differential operators are given.In the third chapter, General informations of Sturm-Liouville operators and tranformation operators are examined In the fourth chapter, explanations about straight spectral problems are given theorems, inverse problem formulas and uniqueness theorems. In the fifth chapter, the spectral characteristics of the Sturm-Liouville operator with generalized function coefficients are investigated and the inverse problem is solved.

KeyWords: Sturm-LiouvilleOperators; Eigenvalue; Eigenfunction; Inverse problem; Inverse spectral problems**.**

BEYAN

“Genelleşmiş Fonksiyon Katsayılı Sturm-Liouville Opeatörü İçin Düz ve Ters Spektral Problemler” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Sinan SEVİNÇ

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında geniş bilgi birikimiyle benden desteğini esirgemeyen, her zaman yol gösterici olan ve karşılaşılan zorlukların üstesinden gelinmesinde bana yardımcı olan sayın danışman hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında bana her türlü desteği sunan sevgili eşim Gözde ve motivasyon kaynağım olan kızım Zeynep Fadime'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

a	: Normlaştırıcı Sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$C[a,b]$	:$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların uzayı
H	: Hilbert Uzayı
L	: Lineer Operatör
L^*	: L operatörünün eşleniği
$L^2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
O, o	: Asimptotik davranışları tarif etmek için kullanılan simgeler
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$W(f,g)$	: Wronskian Determinantı
$y(x,\lambda)$	: Özfonksiyon
λ	: Özdeğer
$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$	: Özdeğerlerin cümlesi

Kısaltmalar

SDP	: Sınır değer problemi

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları titreşim teorisinin problemleridir. Özellikle $l_2$ve L_2 soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer öz eşlenik operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. 19. ve 20. yüzyıllarda bu konularda çalışan matematikçiler tarafından geliştirilerek üst seviyelere çıkarılmıştır. Bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlamış ve farklı yöntemlerle veriler için asimptotik formüller bulunmuştur. Spektral teori için önemli olan açılım teoremleri de ispatlanmıştır. Bu çalışmada amaç Sturm-Liouville operatörünün süreksiz bir a noktasının yarattığı değişimleri, spektral verileri, özdeğerleri ve özfonsiyonları belirlemek, onların asimptotik davranışlarını incelemek ve spektral verilere göre ters problemi çözmektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz nokta olan diferansiyel operatörlere singüler diferansiyel operatör denir. 2. Mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. İlk defa 19. Yüzyılda Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulmuştur. Başlangıçta ısı iletimi problemlerinde yoğun olarak kullanılan teori, günümüzde farklı fiziksel problemlerde de uygulanmaktadır. Başta Naimark [1] olmak üzere, Titchmarsh [2], Jorgens [3], Atkinson [4] bu teoriye büyük katkı sağlamıştır.

Spektral analizin ters problemleri spektral karakteristiklerine göre başlangıç verilerinin bulunuşundan oluşur. Bu tarz problemler mekanik, matematik, fizik, elektronik, meteoroloji, jeofizik gibi bilim dallarında kullanılır. Ters problem teorisi son yıllarda giderek artan şekilde bir ilgi görmektedir. Bu konudaki ilk çalışmalar bir dizinin titreşimini açıklayan denklemin çözümü ile ilgili olarak D. Bernoulli, Euler, Liouville ve Sturm tarafından yapılmıştır. Ters spektral problemlerin temel sonuçlar 20. Yüzyılın sonlarına doğru ortaya konulmuştur. Son zamanlarda ters spektral problemlerin uygulamaları için yeni uygulama alanları ortaya çıkmıştır.

Diferansiyel operatörlerin spektral problemleri düz ve ters spektral problemler olmak üzere iki ana dalda incelenmiştir. Spektral analizin doğrudan problemleri bir operatörün spektral özelliklerinin araştırılmasından oluşur. Ters problem, operatörleri spektral özelliklerine dayanarak operatörünün kurulmasını oluşturmaktır. Bu spektral verileri bir, iki veya daha çok spektrum, spektral fonksiyon ve normalleştirici sabitler, Weyl fonksiyonu gibi kavramlar oluşturur. Klasik Sturm-Liouville operatörleri için doğrudan ve ters problem kapsamlı olarak incelenmiştir [5-9]. Süreksizliklerin varlığı, sınır değer probleminin araştırılmasında önemli niteleyici değişiklikler üretir. Çeşitli formülasyonlarda süreksiz Sturm-Liouville sınır değer problemi için düz ve ters problemler incelenmiştir [6-14].

Bu tezde çözümlerin integral temsillerini elde etmek için teknikler verilecek ve çözümlerin özellikleri incelenecek.

Buna ek olarak, iç noktada süreksiz fonksiyon katsayılı Sturm-Liouville spektral problemler farklı yaklaşımlar da incelenmiştir [15-17].

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir H lineer vektör uzayını ele alalım. H deki bir vektör çiftine bir sayı karşı getiren $<.,.>: H \times H \to C$ fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahipse $<.,.>$ 'ye X üzerinde bir *iç çarpım,* $(X, <.,.>)$ *ikilisine iç çarpım uzayı* denir.

Her u, v $\in H$ için $< u, v > = \overline{< u, v >}$

Her u, v $\in H$ ve $a \in \mathbb{C}$ için $< au, v > = a < u, v >$

Her u, v, w $\in H$ için $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$

Her u $\in H$, $u \neq 0$ için $< u, u > \geq 0$

Bu iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{< u - v, u - v >}$$

metriğine göre tam bir iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.2. $L^2[a, b]$ uzayı

$$L^2[a, b] = \left\{ x(t): \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım,

$$< f, g > = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3. Bir $X = (X, d)$ metrik uzayında (x_n) dizisi ele alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısna karşılık her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.4. $X = (X, d)$ metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına *tamdır* denir.

Tanım 3.5. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|,\|: x \to R_+, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|$$
$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa Xüzerinde norm adını alır ve $(X, \|.\|)$ ikilisine *normlu vektör uzayı* denir.

Tanım 3.6. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 3.7. Bir T lineer operatörü, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir operatördür. T'nin tanım kümesi bir vektör uzay olup, değer kümesi de aynı cisim üzerinde bir vektör uzaydır.

$\forall x, y \in D(T)$ ve a skaleri için (D(T): tanım kümesi)

$$T(x+y) = Tx + Ty$$
$$T(ax) = aTx$$

Tanım 3.8. $A: S(x,\delta) \to S(Ax,\varepsilon)$ olsun. $|x - x_0| < \delta$ için $|Ax - Ax_0| < \varepsilon$ ise A operatörüne süreklidir denir.

Tanım 3.9. H_1ve H_2iki Hilbert uzayı ve $L: H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer, $L^*: H_2 \to H_1$ operatörü $< Lx, y > = < x, L^*y >$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin eşleniği denir. Eğer $L = L^*$ise L operatörüne *öz eşlenik operatör* denir.

Tanım 3.10. L, $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 3.11. $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\}$ kompleks sayılar kümesine A operatörünün regüler değerler kümesi $\sigma(A) = {}^{\mathbb{C}}/_{\rho(A)}$ kümesine ise A operatörünün *spektrumu* denir. $\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolventi* denir.

Tanım 3. 12. $x \to 0$ veya $(x \to \infty)$ iken eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ $(x) = f(x) = o\big(g(x)\big)$ ve $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir.

Tanım 3.13. $y_1, y_2, \dots \dots \dots \dots, y_n$ ler ortak *I* aralığında tanımlı ise ve (n-1) kez türevleri alınabilir n tane fonksiyonlar olsun.

$$W(y_1, y_2, \dots \dots \dots \dots ., y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ifadesinin determinantına n fonksiyonunun *Wronski'si* denir.

Bu bölümdeki tanım ve teoremler [14]' den alınmıştır.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde sonlu aralıktaki Sturm Liouville operatörleri için spektral teoriye giriş yapılacaktır. Bölüm 4.1. de spektral analizin düz problemleri anlatılacaktır. Bölüm 4.2. de Sturm-Liouville operatörünün sınır değer problemleri için ana spektral karakteristiklerini sunulacak. Özellikle özfonksiyon ve özdeğerlerin varlığının asimptotik davranışları üzerindeki teoremi ispatlanacaktır. Bölüm 4.2 de özfonksiyonların özellikleri incelenecektir. Özfonksiyon sisteminin tamamlandığı ve $L_2(0,\pi)$ de ortogonal bir sistem oluşturduğu kanıtlanacaktır. Biz özfonksiyonları karakterlerini araştırıp ve $(0,\pi)$ aralığında n. dereceden özfonksiyonların tam olarak n tane sıfırları olduğunu kanıtlayacağız.

4.1. Sturm Liouville Operatörü

Aşağıdaki $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \pi \tag{4.1}$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{4.2}$$

Burada λ spektral parametre, $q(x), H, h$ reel sayı ve $q(x)\epsilon L_2(0,\lambda)$. Burada l operatörü *Sturm-Liouville* operatörüdür.

Tanım 4.1.1. L deki λ parametresinin değerleri sıfırdan farklı çözümleri özdeğerlere ve bunlara karşılık gelen fonksiyonlara da özfonksiyonlar denir. Özdeğerlerin dizisi L nin spektrumlarına denk gelir.

Biz bu bölümde L nin basit spektral özelliklerini elde edeceğiz ve özfonksiyonların ve özdeğerlerin asimptotik davranışlarını çalışacağız.

İlk şartlar altında (3.1) in çözümleri $C(x,\lambda), S(x,\lambda), \varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda)$ olsun.

$$C(0,\lambda) = 1, \quad C'(0,\lambda) = 0, \quad S(0,\lambda) = 0, \quad S'(0,\lambda) = 1$$

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h, \quad \psi(\pi,\lambda) = 1, \quad \psi'(\pi,\lambda) = -H$$

Her sabit x için $\varphi(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda),\ C(x,\lambda),\ S(x,\lambda)$ x e bağlı fonksiyonlardır.

$$U(\varphi) = \varphi'(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0, \quad V(\psi) = \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0 \tag{4.3}$$

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) \rangle \tag{4.4}$$

olur. $\Delta(\lambda)$ L nin *karakteristik fonksiyonudur*.

$\langle y(x), z(x)\rangle = y(x).z'(x) - y'(x).z(x)$ ifadesi y ve z nin Wronskianıdır. Liouvile'nin formülü $\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\rangle$ Wronskianı x bağlı değildir[21]. (3.4)' de x=0 ve x=π yazılırsa şunu elde edilir.

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi) \tag{4.5}$$

Teorem 4.1.1. Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları L nin sınır değer probleminin değerleri ile çakışır. $\varphi(x,\lambda_n)\ ve\ \psi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları özfonksiyonlardır ve aşağıdaki şartı sağlayan bir ardışık $\{\beta_n\}$ ler vardır:

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(x,\lambda_n) \qquad \beta_n \neq 0 \tag{4.6}$$

İspat:

λ_0, $\Delta(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. (4.3) ve (4.5) sayesinde $\psi(x,\lambda_0) = \beta_0.\varphi(x,\lambda_0)$ olur ve fonksiyonlar $\psi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_0)$ (4.2) değer şartlarını sağlar. Bundan dolayı λ_0 bir öz değer ve $\psi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarıda buna karşılık gelen özfonksiyonlardır.

λ_0 L' nin bir özdeğeri olsun ve y_0 da buna karşılık gelen özfonksiyon olsun. $U(y_0) = V(y_0) = 0$ olur buradan $y_0(0) \neq 0$ olur. $y_0(0) = 1$ yazabiliriz. $y_0'(0) = h$ ve bu yüzden $y_0(x) \equiv \varphi(x,\lambda_0)$, (4.5) bize $\Delta(\lambda_0) = V\big(\varphi(x,\lambda_0)\big) = V\big(y_0(x)\big) = 0$ ifadesini verir. Dolayısıyla biz her özdeğere bir özfonksiyon karşılık geldiğini kanıtlamış olduk. Bölüm boyunca aşağıdaki notasyonu kullanacağız.

$$a_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n).dx \tag{4.7}$$

$\{a_n\}$ sayıları *normlaştırıcı sayıları* ve $\{a_n, \lambda_n\}$ sayıları da L nin *spektral verileridir*.

Lemma 4.1.1. $$\beta_n a_n = -\Delta(\lambda_n) \tag{4.8}$$

ifadesi (4.6) yardımıyla β_n sayıları tanımlanır ve $\Delta(\lambda) = \frac{d}{dy}\Delta(\lambda)$

İspat:

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x).\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda) \ -\varphi''(x,\lambda_n) + q(x).\varphi(x,\lambda_n)$$
$$= \lambda_n.\varphi(x,\lambda_n)$$

Buradan şunu elde ederiz.

$$\frac{d}{dx}.\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\rangle = \psi(x,\lambda).\varphi''(x,\lambda_n) - \psi''(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)$$
$$= (\lambda - \lambda_n).\psi(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)$$

ifadesi ve (3.5) yardımıyla

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi}\psi(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n).dx$$

$$=\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)\rangle\begin{cases}\pi\\0\end{cases}$$

$$=\varphi'(\pi,\lambda_n)+H.\varphi(\pi,\lambda_n)+\psi'(0,\lambda)-h.\psi(0,\lambda)=-\Delta(\lambda)$$

olur. $\lambda\to\lambda_n$ için bu terim şöyle olur:

$$\int_0^{\pi}\psi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n).dx=-\Delta(\lambda_n)$$

(4.6) ve (4.7) kullanılarak (4.8) elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.2. $\{\lambda_n\}$ özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n) ve\ \psi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonları reeldir. $\Delta(\lambda)$ nın bütün sıfırları basittir. $\Delta(\lambda_n)\neq 0$. $L_2(0,\pi)$ deki farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir.

İspat:

$\lambda_n\ ve\ \lambda_k$ özdeğerler ve sırasıyla bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar $y_n(x)\ ve\ y_k(x)$ olsun.

$$\int_0^{\pi}ly_n(x).y_k(x).dx=\int_0^{\pi}y_n(x).ly_k(x).dx$$

ve buradan

$$\lambda_n.\int_0^{\pi}y_n(x).y_k(x).dx=\lambda_k.\int_0^{\pi}y_n(x).y_k(x).dx$$

veya

$$\int_0^{\pi}y_n(x).y_k(x).dx$$

olur.

İlave olarak $\lambda^0=u+iv, v\neq 0$ reel olmayan bir özdeğer ve $y^0(x)\neq 0$. $q(x),h,H$ reel olduğu için $\overline{\lambda^0}=u-iv$ i ayrıca $y^0(x)$ özfonksiyonunu elde ederiz. $\lambda^0\neq\overline{\lambda^0}$ olduğu için

$\|y^0\|_{L_2}^2=\int_0^{\pi}y^0(x).\overline{y^0(x)}.dx=0$ olur. Böylece L nin $\{\lambda_n\}$ bütün özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n)ve\ \psi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonları da reeldir.$a_n\ ve\ \beta_n$ sıfırdan farklı olduğundan (4.8) i elde ederiz. $\Delta(\lambda_n)\neq 0$

Lemma 4.1.2. $|k|\to\infty$ için aşağıdaki asimptotik formül

$$\varphi(x,\lambda) = coskx + O\left(\frac{1}{|k|}\exp(|\tau|x)\right) = O(\exp(|\tau|x))$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -k.sinkx + O(exp|\tau|x) = O(|k|exp|\tau|x) \qquad (4.9)$$

$$\psi(x,\lambda) = cosk(\pi - x) + O\left(\frac{1}{|k|}\exp\big(|\tau|(\pi - x)\big)\right) = O\big(exp\big(|\tau|(\pi - x)\big)$$

$$\psi'(x,\lambda) = k.sink(\pi - x) + O\big(exp|\tau|(\pi - x)\big) = O\big(|k|\exp\big(|\tau|(\pi - x)\big)\big) \; (4.10)$$

$x\epsilon[0,\pi]$ ile eşittir. Burada ve devamında $\lambda = k^2$ ve $\tau = Imp$, o ve O Landau sembolleridir.

İspat:

$$\varphi(x,\lambda) = coskx + h.\frac{sinkx}{k} + \int_0^{\pi}\frac{sink(x-t)}{k}.q(t).\varphi(t,\lambda) \qquad (4.11)$$

olduğunu gösterelim. Aslında Volterra integral denklemi

$y(x,\lambda) = coskx + h.\frac{sinkx}{k} + \int_0^{\pi}\frac{sink(x-t)}{k}.q(t).y(t,\lambda)$ tek bir çözüme sahiptir. Öte yandan belli bir $y(x,\lambda)$ fonksiyonu bu denklemi sağlar. Buradan türev alırsak

$$y''(x,\lambda) + k^2.y(x,\lambda) = q(x).y(x,\lambda), \qquad y(0,\lambda) = 1 \qquad y'(0,\lambda) = h$$

$y(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)$ ve (4.1) sağlanır. (4.11) i şöyle hesaplayabiliriz.

$$\varphi'(x,\lambda) = -k.sinkx + h.coskx + \int_0^x cosk(x-t).q(t).\varphi(t,\lambda).dt \quad (4.12)$$

$$\mu(\lambda) = \max_{0\le x\le\pi}(|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x)).$$

$$|sinkx| \le \exp(|\tau|x) \;\; ve \;\; |coskx| \le \exp(|\tau|x)$$

olduğu için $|k| \ge 1, x\epsilon[0,\pi]$ için (3.11) sağlanır.

$|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x) \le 1 + \frac{1}{|k|}.(h + \mu(\lambda).\int_0^x|q(t)|.dt \le C_1 + \frac{C_2}{|k|}.\mu(\lambda)$ ve sonuç olarak $\mu(\lambda) \le C_1 + \frac{C_2}{|k|}$ olur.

Yeterli büyüklükte bir $|k|$ için $\mu(\lambda) = O(1)$ olur. Bu sonucun sağ tarafına (4.11) ve (4.12) konulursa (4.9)'a ve benzer şekilde (4.10) ulaşabiliriz. (4.10) doğrudan (4.9) u verir. Aslında

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x).\psi(x,\lambda) = \lambda.\psi(x,\lambda), \qquad \psi(\pi,\lambda) = 1, \qquad \psi'(\pi,\lambda) = -H$$

olduğundan $\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \psi(\pi - x,\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonu sağlar ve başlangıç koşullarına göre

$$-\tilde{\varphi}''(x,\lambda) + q(\pi - x).\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \lambda.\tilde{\varphi}(,\lambda) \quad \tilde{\varphi}(0,\lambda) = 1, \;\; \tilde{\varphi}'0,\lambda) = H$$

Bu nedenle (4.9) asimptotik formülü $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ fonksiyonu için de geçerlidir. Buradan (4.10) a ulaşırız.

Teorem 4.1.3. L nin sınır değer problemi sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, $n \geq 0$ için

$$p_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\}\epsilon l_2 \tag{4.13}$$

$$\varphi(x,\lambda_n) = cosnx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \leq \mathbb{C}, \tag{4.14}$$

$$w = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t).dt$$

Burada ve her yerde aynı $\{K_n\}$ gibi aynı semboller l_2 deki çeşitli dizileri gösterir. C sembolü x,λ,n gibi bağımlı olmayan pozitif sabitleri belirtir.

İspat:

(4.9) daki $\varphi(x,\lambda)$ için (4.11) ve (4.12) deki sağ tarafların asimptotlarını değiştirirsek şunu hesaplayabiliriz

$$\varphi(x,\lambda) = coskx + q_1(x).\frac{sinkx}{k} + \frac{1}{2k}.\int_0^x q(t).sink(x-2t).dt + O\left(\frac{exp(|\tau|x)}{p^2}\right)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -k.sinkx + q_1(x).coskx$$
$$+\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).cosk(x-2t).dt + O\left(\frac{exp(|\tau|x)}{p}\right)$$

$\varphi(x,\lambda)\ ve\varphi'(x,\lambda)$ ifadelerine (4.15) d''iyelim. Burada $q_1(x) = h + \frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt$ olur. (4.5) e göre ve (4.15) yardımıyla $\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda) + H.\varphi(\pi,\lambda)$ yazılır.

$$\Delta(\lambda) = -k.sink\pi + w.cosk\pi + K(k) \tag{4.16}$$

$$K(k) = \frac{1}{2}.\int_0^\pi q(t).cosk(\pi-2t).dt + O\left(\frac{1}{p}\exp(|\tau|\pi)\right)$$

$G_\delta = \{k: |k-K| \geq \delta,\ K = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots\ldots..\}$, $\delta > 0$ olsun. Yeterli büyüklükte bir $k^* = k^*(\delta)$ için

$$|sink\pi| \geq C_\delta.|k|.\exp(|\tau|\pi), \quad k\epsilon G_\delta, \tag{4.17}$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta.|k|.\exp(|\tau|\pi), \quad k\epsilon G_\delta, |k| \geq k^* \tag{4.18}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$k = \sigma + i\zeta$ olsun. (4.17) i kanıtlamak yeterli olacaktır.

$$D_\delta = \left\{k: \sigma \epsilon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \zeta \geq 0, |k| \geq \delta\right\}$$

$\theta(k) = |sink\pi| \exp(-|\tau|\pi)$ alalım. $k \epsilon D_\delta$ olsun. $r \leq 1$ için $\theta(k) \geq G_\delta$ olur.

$$sink\pi = \frac{(\exp(ik\pi) - \exp(-ik\pi))}{2i}$$

$r \geq 1$ için $\theta(k) = \frac{|1-\exp(2i\sigma\pi)\exp(-2\zeta\pi|)}{2} \geq \frac{1}{4}$ olur. Böylece (4.17) kanıtlanmış oldu. Sonuç olarak (4.16) yı kullanarak $k \epsilon G_\delta$ için

$$\Delta(\lambda) = -k.sink\pi\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

ve bu yüzden (4.18) geçerlidir. $\tau_n = \left\{\lambda: |\lambda| = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\}$ alalım. (4.16) yardımıyla $\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$, $f(\lambda) = -k.sink\pi$, $|g(\lambda)| \leq Cexp(|\tau|\pi)$ elde edilir. (4.17) ye göre yeterli büyüklükte bir $n(n \geq n^*)$ için $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$, $\lambda \epsilon \tau_n$ olur. Rouche teoremine [5] göre $\Delta(\lambda)$ nın τ_n içindeki sıfırlarının sayısı $f(\lambda) = -k.sink\pi$ sıfırlarının sayısı ile aynıdır ve n+1 tanedir. Böylece $|\lambda| < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ yuvarında L nin tam olarak n+1 özdeğeri vardır. Şimdi Rouche teoremini $\gamma_n(\delta) = \{k: |k-n| \leq \delta\}$ yuvarında uygulayarak $\gamma_n(\delta)$ yuvarındaki yeterince büyük bir n için $\Delta(k^2)$ nın bir sıfırı vardır yani $k_n = \sqrt{\lambda_n}$. Keyfi bir $\delta > 0$ için

$$k = n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = o(1), \quad n \to \infty \tag{4.19}$$

(4.19) u (4.16) da yerine koyarsak:

$$0 = \Delta(k_n^2) = -(n+\varepsilon_n).\sin(n+\varepsilon_n).\pi + w.\cos(n+\varepsilon_n).\pi + K_n$$

$$-n.sin\varepsilon_n\pi + w.cos\varepsilon_n\pi + K_n = 0 \tag{4.20}$$

$$sin\varepsilon_n\pi = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \varepsilon_n = O(\frac{1}{n})$$

(4.20) yi kullanarak bir kez daha $\varepsilon_n = \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n}$ olduğunu buluruz dolayısıyla (4.13) geçerlidir. (4.13) ü (4.15) de yerine koyarsak (4.14) e ulaşırız.

$$\varepsilon_n(x) = \left(h + \frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt - x.\frac{w}{\pi} - x.K_n\right).sinnx$$

$$+\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).sinn(x-2t).dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.21}$$

Sonuç olarak $|\varepsilon_n(x)| \leq C$ olur ve (3.1.3) teoremi kanıtlanmış olur.

(4.6) yardımıyla $x=\pi$ için $\beta_n=(\varphi(\pi,\lambda_n))^{-1}$ olur. (4.7), (4.8), (4.14) ve (4.21) kullanılarak

$$a_n=\frac{\pi}{2}+\frac{K_n}{n},\quad \beta_n=(-1)^n+\frac{K_n}{n},\quad \Delta(\lambda_n)=(-1)^{n+1}.\frac{\pi}{2}+\frac{K_n}{n} \tag{4.22}$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$ basit sıfırlara sahip olduğundan ve $n\geq 0$ için $\Delta(\lambda_n)=(-1)^{n+1}$ dir.

Açıklama: Eğer $q(x)\epsilon W_2^N$ ve $N\geq 1$ olursa daha öncede hesaplandığı gibi asimptotik formüller şöyle olur.

$$\begin{cases} k_n=n+\sum_{j=1}^{N+1}\frac{w_j}{n^j}+\frac{K_n}{n^{N+1}},\quad w_{2k}=0,\quad k\geq 0,\quad w_1=\frac{w}{\pi} \\ a_n=\frac{\pi}{2}+\sum_{j=1}^{N+1}\frac{w_j^+}{n^j}+\frac{K_n}{n^{N+1}},\quad w_{2k+1}^+=,\quad k\geq 0,\quad a_n>0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Gerçekten $q(x)\epsilon W_2^1$ olsun.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.\int_0^x q(t).cosk(x-2t).dt=\frac{sinpx}{4k}.(q(x)+q(0))+\frac{1}{4k}.\int_0^x q'(t).cosk(x-2t).dt, \\ \frac{1}{2p}.\int_0^x q(t).sink(x-2t).dt=\frac{cospx}{4k^2}.(q(x)-q(0))-\frac{1}{4k^2}.\int_0^x q'(t).cosk(x-2t).dt \end{cases}$$

(4.24)

(4.15) ve (4.24) den

$$\varphi(x,\lambda)=coskx+\left(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t).dt\right).\frac{sinkx}{k}+O\left(\frac{exp(|\tau|x)}{k^3}\right)$$

(4.11) ve (4.12) nin sağ taraflarında yerine koyarsak, (4.24) ve (4.16) yı kullanarak $\Delta(\lambda) ve\ \varphi^v(x,\lambda)$ için asimptotlar elde edilir. (4.15) ve (4.16)

$$\varphi(x,\lambda)=coskx+q_1(x).\frac{sinkx}{k}+q_{20}(x).\frac{coskx}{k^2}$$
$$-\frac{1}{4k^2}.\int_0^x q'(t).cosk(x-2t).dt+O\left(\frac{exp(|\tau|x)}{k^3}\right)$$

$$\varphi'(x,\lambda)=-k.sinkx+q_1(x).coskx+q_{21}(x).\frac{sinkx}{k}$$
$$+\frac{1}{4k}.\int_0^x q'(t).sink(x-2t).dt+O\left(\frac{exp(|\tau|x)}{k^2}\right)$$

$$\Delta(\lambda)=-k.sink\pi+w.cosk\pi+w_0.\frac{sink\pi}{k}+\frac{K_0(k)}{k} \tag{4.25}$$

$$q_1(x)=h+\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt,\quad w_0=q_{21}(\pi)+H.q_1(\pi),$$

$$q_{2j}(x)=\frac{1}{4}.\big(q(x)+(-1)^{j+1}.q(0)\big)+\frac{(-1)^{j+1}}{2}.\int_0^x q(t).q_1(t).dt,\quad j=0,1,$$

$$K_0(k) = \frac{1}{4} . \int_0^{\pi} q'(t). sink(\pi - 2t). dt + O\left(\frac{exp(|\tau|\pi)}{k}\right)$$

(4.25) den benzer argümanlar çıkarılır.

$$k_n = n + \varepsilon_n , \qquad - n. sin\varepsilon_n . \pi + w. cos\varepsilon_n \pi + \frac{K_n}{n} = 0$$

olur. Bu nedenle

$$k_n = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n^2}, \qquad \{K_n\} \epsilon l_2$$

olur. Benzer şekilde (4.23) deki formüllerde hesaplanabilir.

Teorem 4.1.2. $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ spektrumlarının şartlarını tek başına $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu belirler. Şöyle formüle edilir.

$$\Delta(\lambda) = \pi. (\lambda_0 - \lambda). \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2} \tag{4.26}$$

İspat:

(4.1.16) dan itibaren $\Delta(\lambda)$ nın bütün λ ları $^1/_2$ dir. Sonuç olarak Hadamardın çarpanlara ayırma teoremi [5] $\Delta(\lambda)$ çarpım sabiti sıfırları yardımıyla belirlenir.

$$\Delta(\lambda) = C. \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \tag{4.27}$$

$$\Delta(\lambda) = -p. sinp\pi = -\lambda. \pi. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^2}\right)$$

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\overline{\overline{\Delta(\lambda)}}} = C. \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 . \pi. \lambda} . \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} . \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda^2}{n^2 - \lambda}\right)$$

(4.13) ve (4.16) yı ele alarak hesaplarsak

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\Delta(\lambda)}{\overline{\overline{\Delta(\lambda)}}} = 1, \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - \lambda}\right) = 1$$

ve bu nedenle

$$C = \pi. \lambda_0 . \prod_{n01}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}$$

Bunu (4.27) de yerine koyarsak (4.26) ya ulaşırız.

Açıklama: Benzer sonuçlar, diğer ayrılmış sınır koşulları türlerine sahip Sturm-Liouville operatörleri için geçerlidir. Aşağıda kullanılacak bu sonuçları kısaca özetleyelim.

Sınır koşulları $U(y) = 0,\ \ y(\pi) = 0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi $L_1 = L_1(q(x), h)$ düşünelim. L_1 in $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerleri basittir ve $d(\lambda) = \varphi(\pi, \lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır.

$$d(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{\left(n + {}^1\!/_2\right)^2} \tag{4.28}$$

$$\{\mu_n, a_{n1}\}_{n\geq 0}, \qquad a_{n1} = \int_0^{\pi} \varphi^2(x, \mu_n).\,dx$$

L_1 in asimtotik formülü:

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{w_1}{\pi.n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \epsilon l_2 \tag{4.29}$$

$$a_{n1} = \frac{\pi}{2} + \frac{K_{n1}}{n}, \quad \{K_{n1}\} \epsilon l_2 \tag{4.30}$$

$$w_1 = h + \frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).\,dt$$

Sınır koşulları $V(y) = 0,\ \ y(0) = 0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi $L^0 = L^0(q(x), H)$ düşünelim. L^0 ın $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ özdeğerleri basittir ve $\Delta^0(\lambda) = \psi(0, \lambda) = S'(\pi, \lambda) + H.S(\pi, \lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır.$S(x, \lambda)$ volterra integral denklemini sağlar.

$$S(x, \lambda) = \frac{sinkx}{k} + \int_0^{x} \frac{sink(x - 2t)}{k}.\,q(t).S(t, \lambda).\,dt \tag{4.31}$$

$|k| \to \infty$ için

$$\begin{cases} S(x, \lambda) = \dfrac{sinkx}{k} + O\left(\dfrac{1}{|k|^2}.\,exp(|\tau|x)\right) = O\left(\dfrac{1}{|k|}.\,exp(|\tau|x)\right), \\ S'(x, \lambda) = coskx + \left(\dfrac{1}{|k|} exp(|\tau|x)\right) = O\big(exp(|\tau|x)\big), \\ \Delta^0(\lambda) = cosk\pi + \left(\dfrac{1}{|k|}.\,exp(|\tau|\pi)\right), \qquad \tau = Imp \end{cases} \tag{4.32}$$

Diğer taraftan

$$\Delta^0(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^0 - \lambda}{\left(n + {}^1\!/_2\right)^2}$$

$$\sqrt{\lambda_n^0} = n + \frac{1}{2} + \frac{w^0}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \epsilon l_2$$

$$w^0 = H + \frac{1}{2} . \int_0^{\pi} q(t). dt$$

Sınır koşulları $y(\pi) = 0,\ \ y(0) = 0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi $L_1^0 = L_1^0(q(x))$ düşünelim. L_1^0 in $\{\mu_n^0\}_{n\geq 1}$ özdeğerleri basittir ve $d^0(\lambda) = S(\pi, \lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır ve

$$d^0(\lambda) = \pi. \prod_{n=1} \frac{\mu_n^0 - \lambda}{n^2}$$

$$\sqrt{\mu_n^0} = n + \frac{w_1^0}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \epsilon l_2$$

$$w_1^0 = \frac{1}{2} . \int_0^{\pi} q(t). dt$$

olur.

Lemma 4.1.3. $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \quad n \geq 0$ iki sınır değer probleminin $L\ ve\ L_1$ özdeğerleri dönüşümlüdür.

İspat:

Lemma (4.1.1) in ispatından

$$\frac{d}{dx} \langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle = (\lambda - \mu). \varphi(x, \lambda). \varphi(x, \mu) \tag{4.34}$$

$$(\lambda - \mu). \int_0^{\pi} \varphi(x, \lambda). \varphi(x, \mu). dx = \langle \varphi(x, \lambda). \varphi(x, \mu) \rangle \begin{cases} \pi \\ 0 \end{cases}$$

$$= \varphi(\pi, \lambda). \varphi'(\pi, \mu) - \varphi'(\pi, \lambda). \varphi(\pi, \mu) = d(\lambda). \Delta(\mu) - d(\mu). \Delta(\lambda)$$

$\mu \to \lambda$ için şunu elde ederiz.

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(x, \lambda). dx = d(\lambda). \Delta(\lambda) - d(\lambda). \Delta(\lambda)\ ile\ \Delta(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}. \Delta(\lambda), \quad d(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} d(\lambda)$$

Özellikle bu sonuç aşağıdaki ifadeyi verir:

$$a_n = -\Delta(\lambda_n). d(\lambda_n) \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{d^2(\lambda)}.\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda).dx=-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}\right),\quad -\infty<\lambda<+\infty,\qquad d(\lambda)\neq 0$$

Böylece $\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}$ fonksiyonu $R-\{\mu_n|n\geq 0\}$ üzerinde monoton azalandır.

$$\lim_{\lambda\to\mu_n\pm 0}\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}=\pm\infty$$

Sonuç olarak (4.13) ve (4.29) kullanılarak (4.33) e ulaşılır.
Bu bölümdeki bilgiler [20] ‘den alınmıştır.

4.2. Özfonksiyonların Özellikleri

Bu bölümde Sturm-Liouville sınır değer operatörü L nin özfonksiyonlarının eksiksiz olduğunu ve $L_2(0,\pi)$ de ortogonal bir temel oluşturduğunu kanıtlayacağız. Aynı zamanda özfonksiyonların Fourier serilerinin $[0,\pi]$ üzerinde tek bir noktada birleştiğini göstereceğiz. Tamlık ve genişleme problemleri matematiksel fizikteki çeşitli problemleri Fourier yöntemi ile çözmek ve spektral teori için önemlidir.

Teorem 4.2.1. Sınır değer problemi L nin $\{\varphi(x,\lambda_n),n\geq 0\}$ özfonksiyonların sistemleri de $L_2(0,\pi)$ de tamdır.

$f(x), x\epsilon[0,\pi]$ de kesin sürekli bir fonksiyon olsun.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.\varphi(x,\lambda_n),\quad a_n=\frac{1}{a_n}.\int_0^{\pi}f(t).\varphi(t,\lambda_n).dt,\tag{4.34}$$

$f(x)\epsilon L_2(0,\pi)$ için (4.34) serisi $L_2(0,\pi)$de yakınsaktır.

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2.dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.|a_n|^2\quad (parseval\ eşitliği)\tag{4.35}$$

İspat:

$G(x,t,\lambda)=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\varphi(x,\lambda).\psi(t,\lambda), & x\leq t,\\ \varphi(t,\lambda).\psi(x,\lambda), & x\geq t,\end{cases}$ ve aşağıdaki fonksiyonu düşünelim

$$Y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t,\lambda).f(t).dt$$

$$= -\frac{1}{\Delta(\lambda)}.\left(\psi(x,\lambda).\int_0^\pi \varphi(t,\lambda).f(t).dt\right.$$

$$\left. + \varphi(x,\lambda).\int_x^\pi \psi(t,\lambda).f(t).dt\right)$$

$G(x,t,\lambda)$ fonksiyonu L için Green fonksiyonudur. $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonu Sturm-Liouville operatörü için ters operatörün çekirdeğidir. Yani $Y(x,\lambda)$ sınır değer probleminin çözümüdür.

$$lY - \lambda Y + f(x) = 0, \quad U(Y) = V(Y) = 0, \tag{4.36}$$

İfadesi ile kolayca doğrulanmış olur. (4.6) ve (4.2) teoremini kullanarak

$$Res_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda)$$

$$= -\frac{1}{\Delta(\lambda_n)}\left(\psi(t,\lambda_n).\int_0^x \varphi(t,\lambda_n).f(t).dt\right.$$

$$\left. + \varphi(t,\lambda_n).\int_x^\pi \psi(t,\lambda_n).f(t).dt\right)$$

$$= -\frac{\beta_n}{\Delta(\lambda_n)}.\varphi(x,\lambda_n).\int_0^\pi f(t).\varphi(t,\lambda_n).dt$$

ifadesi ve (4.8) yardımıyla

$$Res_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = \frac{1}{a_n}.\varphi(x,\lambda_n).\int_0^\pi f(t).\varphi(t,\lambda_n).dt \tag{4.37}$$

$f(x)\epsilon L_2(0,\pi)$ olsun.

$$\int_0^\pi f(t).\varphi(t,\lambda_n).dt = 0, \quad n \geq 0$$

O halde (4.2.4), $Res_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = 0$, ve sonuç olarak her sabit $x\epsilon[0,\pi]$ için $Y(x,\lambda)$ tamdır. Dahası her sabit $\delta > 0$ ve yeterince büyük bir $k^* > 0$ için (4.9), (4.10), (4.18) den

$$|Y(x,\lambda)| \leq \frac{C_\delta}{|k|}, \quad p\epsilon G_\delta, \quad |k| \geq k^*$$

Maksimum kuralı ve Liouville teoremi kullanılarak $Y(x,\lambda) = 0$. Bundan ve ve (4.36) den $f(x) = 0$ olur.

Şimdi $f\epsilon AC[0,\pi]$ keyfi ve sürekli bir işlevi olsun. $\varphi(x,\lambda) ve\, \psi(x,\lambda)$ (4.1) in çözümleri, $Y(x,\lambda)$ dönüştürürsek

$$Y(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda.\Delta(\lambda)}.\left(\psi(x,\lambda).\int_0^x (-\varphi''(t,\lambda) + q(t).\varphi(t,\lambda)\right).f(t).dt$$
$$+\varphi(x,\lambda).\int_x^\pi \big(-\psi''(t,\lambda) + q(t).\psi(t,\lambda)\big).f(t).dt)$$

(4.4) ün parçaları yardımıyla ikinci türev içeren terimlerin bütünleştirilmesi,

$$Y(x,\lambda) = \frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}.(Z_1(x,\lambda) + Z_2(x,\lambda)) \tag{4.38}$$

$$Z_1(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}.\left(\psi(x,\lambda).\int_0^x g(t).\varphi'(t,\lambda).dt\right.$$
$$\left.+\varphi(x,\lambda).\int_x^\pi g(t).\psi'(t,\lambda).dt\right),\quad g(t) = f'(t)$$

$$Z_2(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}.\left(h.f(0).\psi(x,\lambda) + H.\int_x^\pi f(\pi).\varphi(x,\lambda)\right)$$
$$+\psi(x,\lambda).\int_0^x q(t).\varphi(t,\lambda).f(t).dt + \varphi(x,\lambda).\int_x^\pi q(t).\psi(t,\lambda).f(t).dt$$

Sabit bir $\delta > 0$ ve yeterince büyük $k^* > 0$ için (4.9), (4.10), (4.18) kullanılarak

$$\max_{0\le x\le\pi}|Z_2(x,\lambda)| \le \frac{C}{|k|},\qquad k\epsilon G_\delta,\quad |k| \ge k^* \tag{4.39}$$

$$\lim_{p\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda)| = 0 \tag{4.40}$$

İlk olarak $g(x)$ in $[0,\pi]$ üzerinde kesintisiz olduğunu varsayalım.

$$Z_1(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(\psi(x,\lambda).g(t).\varphi(t,\lambda)\Big|_0^x + \varphi(x,\lambda).g(t).\psi(t,\lambda)\Big|_x^\pi\right.$$
$$\left.-\psi'(x,\lambda).\int_0^x g'(t).\psi(t,\lambda).dt\right)$$

(4.9), (4.10) ve (4.18) yardımıyla

$$\max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda)| \le \frac{C}{|k|},\quad k\epsilon G_\delta,\ |k| \ge k^*$$

Şimdi $g(t)\epsilon L(0,\pi)$ olsun. Sabit bir $\delta > 0$ ve sürekli bir $g_\varepsilon(t)$ seçelim.

$$\int_0^\pi |g(t) - g_\varepsilon(t)|.dt < \frac{\varepsilon}{2C^+}$$

$$C^{+} = \max_{0\le x\le\pi} sup \frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\left(|\psi(x,\lambda)|.\int_0^x |\varphi'(t,\lambda)|.dt + |\varphi(x,\lambda)|.\int_x^\pi |\psi'(t,\lambda)|.dt\right)$$

$k\epsilon G_\delta,\ |k| \ge k^*$ için

$$\max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda)| \le \max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda;g_\varepsilon)| + \max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda;g-g_\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C(\varepsilon)}{|k|}$$

Bundan dolayı bir $k^0 > 0$ vardır ki $|k| \ge k^0$ için $\max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda)| \le \varepsilon$ sağlar. Keyfi $\varepsilon > 0$ için (4.40) a ulaşırız.

$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int Y(x,\lambda).d\lambda$ integralini düşünelim. $\tau_n = \left\{\lambda: |\lambda| = \left(n + {}^1/_2\right)^2\right\}$ (4.38) ve (4.40) yi takip eden

$$I_n(x) = f(x) + \varepsilon_N(x), \quad \lim_{N\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}|\varepsilon_N(x)| = 0 \tag{4.41}$$

Rezidü teoremi yardımıyla $I_n(x)$ i hesaplayabiliriz. (4.37) yardımıyla

$$I_n(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n.\varphi(x,\lambda_n), \qquad a_n = \frac{1}{a_n}.\int_0^\pi f(t).\varphi(t,\lambda_n).dt$$

(4.41) ile (4.34) e ulaşabiliriz.

4) $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\ge0}$ özfonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de ortogonaldir ve tamdır. $L_2(0,\pi)$ deki ortogonal temel ve parseval eşitliğinden geçerlidir.

Bu bölümdeki bilgiler [6]'den alınmıştır.

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

5.1. Genelleşmiş Fonksiyon Katsayılı Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Karakteristiklerinin İncelenmesi

Operatörlerin spektral teorisinde kullanılan STURM-LIOUVILLE operatörü şöyle tanımlanır.

$L = L(q(x), h, H)$ sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$ly := -y'' + q(x).y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

Burada l operatörü *Sturm-Liouville* operatörüdür.

Yukarıdaki şekilde ifade edilen sınır değer problemini inceleyelim. Verilen λ spektral parametre q(x) reel değerli fonksiyon olup $W_2'(0,\pi)$dendir. h ve H birer reel sayıdır.

Tanım 5.1.1. L'nin sıfırdan farklı λ parametresinin değerleri *özdeğelerdir*. Bu özdeğerlere karşılık gelen basit olmayan çözümler *özfonksiyonlardır*. Özdeğerlerin kümesi L'nin spektrumlarıdır.

L nin spektral özelliklerini, özdeğerlerini ve özfonksiyonların asimptotik davranışlarını inceleyelim. Kendi sınır şartlarımıza göre operatörü ifade edersek şöyle olur:

$$-y'' + q(x).y = \lambda y, \qquad x \in (0,\mathrm{a}) \cup (\mathrm{a},\pi) \qquad q(x) \epsilon L_2(0,\pi) \tag{5.1}$$

$$U(y) = y'(0) - h.y(0) = 0 \qquad V(y) = y'(\pi) + H.y(\pi) = 0 \tag{5.2}$$

$$I(y) = \begin{cases} y(\mathrm{a}+0) - y(\mathrm{a}-0) = \alpha y'(\mathrm{a}) \\ y'\mathrm{a}(+0) = y'(\mathrm{a}-0) = y'(\mathrm{a}) \end{cases} \tag{5.3}$$

ve (5.3) ifadeleri aşağıdaki denkleme denktir [1]:

$$-y'' + \left(\alpha.\delta'(x-\mathrm{a}) + q(x)\right).y = \lambda.y$$

$\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $C(x,\lambda) ve\ S(x,\lambda)$ ifadeleri (5.1) denkleminin ilk şartlar altındaki çözümleri olsun.

$$\varphi(x,\lambda):\ \varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = h \Rightarrow U(\varphi) = 0$$

$$\psi(x,\lambda):\ \psi(\pi,\lambda) = 1,\ \psi'(\pi,\lambda) = -H \Rightarrow V(\psi) = 0,\ \lambda = k^2$$

olur.

$$\Delta(\lambda) =< \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) > \tag{5.4}$$

olduğunu gösterelim. Wronskian determinantına göre

$$< \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) >= \begin{vmatrix} \psi(x,\lambda) & \varphi(x,\lambda) \\ \psi'(x,\lambda) & \varphi'(x,\lambda) \end{vmatrix} = \psi(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda).\varphi(x,\lambda)$$

olur. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu L nin karakteristik fonksiyonudur. x=0 ve x=π koyarsak

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi) \tag{5.5}$$

elde edilir.

Şimdi $\Delta(\lambda)$ ifadesinin sürekli olduğunu gösterelim:

$$< y,z >_{x=\mathrm{a}+0} = y(\mathrm{a}+0).z'(\mathrm{a}+0) - y'(\mathrm{a}+0).z(\mathrm{a}+0)$$

$$= \big(y(\mathrm{a}-0) + \alpha.y'(\mathrm{a}-0)\big).z'(\mathrm{a}-0) - y'(\mathrm{a}-0).\big(z(\mathrm{a}-0) + \alpha.z'(\mathrm{a}-0)\big)$$

$$= y(\mathrm{a}-0).z'(\mathrm{a}-0) + \alpha.y'(\mathrm{a}-0).z'(\mathrm{a}-0) - y'(\mathrm{a}-0).z(\mathrm{a}-0)$$

$$- \alpha.y'(\mathrm{a}-0).z'(\mathrm{a}-0)$$

$$= (y.z' - y'.z)_{x=\mathrm{a}-0} =< y,z >_{x=\mathrm{a}-0}$$

$$< \mathrm{y},\mathrm{z} >=< \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) > = \psi(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda).\varphi(x,\lambda) = V(\varphi)$$

$$= -U(\psi)$$

olduğundan $< y,z >$ a noktası da dahil olmak üzere tüm $(0,\pi)$' de süreklidir.

Teorem 5.1.1. Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları sınır değer probleminin özdeğerleriyle çakışır.$\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları özfonksiyonlar ve aşağıdaki şartı sağlayan ardışık $\{\beta_n\}$ ler vardır.

$$\psi(x,\lambda) = \beta_n.\varphi(x,\lambda), \quad \beta_n \neq 0 \tag{5.6}$$

Burada a_n için şu notasyonu kullanacağız.

$$a_n := \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n).dx \tag{5.7}$$

$\{a_n\}$ *sayıları normalleştirilmiş sayılar* ve $\{\lambda_n, a_n\}$ *spektral verilerdir*.

İspat:

1) λ_0, $\Delta(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. (5.2)-(5.5) den $\psi(x,\lambda_0) = \beta_0\varphi(x,\lambda_0)$ olur ve $\varphi(x,\lambda_0), \psi(x,\lambda_0)$fonksiyonları (5.2) sınır şartlarını sağlar. Bundan dolayı λ_0 özdeğer ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlarda $\varphi(x,\lambda_0), \psi(x,\lambda_0)$ olur.

2) λ_0 L nin bir özdeğeri olsun.y_0 uygun bir özfonksiyon olsun. Buradan $U(y_0) = V(y_0) = 0$ olur. $y_0 \neq 0$ olduğu açıktır. Genelliği bozmadan $y_0(0) = 1$ yazalım. Buradan $y_0'(0) = h$ olur. Sonuç olarak $y_0(x) \equiv \varphi(x,\lambda_0)$ olur. Bu nedenle (5.5) bize

$$\Delta(\lambda_0) = V\big(\varphi(x,\lambda_0)\big) = V\big(y_0(x)\big) = 0$$

olduğunu verir. Sonuç olarak her bir özdeğer için yalnız bir özfonksiyon vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 5.1.1. Önceki teoremden ve $\Delta(\lambda)$ ifadesinden

$$\beta_n . a_n = -\Delta(\lambda) \tag{5.8}$$

olduğu ortaya çıkar.

İspat:

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x).\psi(x,\lambda) = \lambda.\psi(x,\lambda)$$

$$-\varphi''(x,\lambda_n) + q(x).\varphi(x,\lambda_n) = \lambda_n.\varphi(x,\lambda_n)$$

Buradan

$$\frac{d}{dx} < \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n) > = \frac{d}{dx}(\psi(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda_n) - \psi'(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)$$

Çarpımın türevinden yararlanırsak:

$$= \psi'(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda_n) + \psi(x,\lambda).\varphi''(x,\lambda_n) - \psi''(x,\lambda).\varphi(x.\lambda_n)$$
$$- \psi'(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda_n)$$

$$= \psi(x,\lambda).\varphi''(x,\lambda_n) - \psi''(x,).\varphi(x,\lambda_n)$$

$$= \psi(x,\lambda).[q(x).\varphi(x,\lambda_n) - \lambda_n.\varphi(x,\lambda_n)] - [q(x).\psi(x,\lambda) - \lambda.\psi(x,\lambda)].\varphi(x,\lambda_n)$$

$$= (\lambda - \lambda_n).\psi(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)$$

$$= (\lambda - \lambda_n).\int_0^{\pi} \varphi(x\lambda_n).\psi(x,\lambda).dx = < \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n) >_0^{\pi}$$

$$= \big(\psi(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda_n) - \psi'(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)\big)_0^{\pi}$$

$$= \psi(\pi,\lambda).\varphi'(\pi,\lambda_n) - \psi'(\pi,\lambda).\varphi(\pi,\lambda_n) + \psi'(0,\lambda).\varphi(0,\lambda_n) - \psi(0,\lambda).\varphi'(0,\lambda_n)$$

$$= \varphi'(\pi,\lambda_n) + H.\varphi(\pi,\lambda_n) + \psi'(0,\lambda) - h.\psi(0,\lambda) = -\Delta(\lambda_n)$$

olur. Burada λ_n: $\Delta(\lambda_n) = 0$ ve $\lambda \to \lambda_n$ için

$$\int_0^{\pi} \varphi(x,\lambda_n).\psi(x,\lambda).dx = -\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)/_{\lambda=\lambda_n}$$

$$\beta_n.\int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda_n).dx = -\Delta(\lambda_n)$$

(5.7) den

$$a_n.\beta_n = -\Delta(\lambda_n) \tag{5.9}$$

olarak elde edilir.

Şimdi çözümleri kuralım:

$x < a$ için :

$$C(x,\lambda) = C_0(x,\lambda) \text{ ve } S(x,\lambda) = S_0(x,\lambda) \tag{5.10}$$

$x > a$ için:

$$C(x,\lambda) = A_1.C_0(x,\lambda) + B_1.S_0(x,\lambda)$$

$$S(x,\lambda) = A_2.C_0(x,\lambda) + B_2.S_0(x,\lambda)$$

$$\varphi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + h.S(x,\lambda) \tag{5.11}$$

Olacak şekilde ve (5.3) kullanırsak:

$$A_1.C_0(\mathrm{a},\lambda) + B_1.S_0(\mathrm{a},\lambda) = C_0(\mathrm{a},\lambda) + \alpha.C_0'(\mathrm{a},\lambda)$$

$$A_1.C_0'\mathrm{a}(,\lambda) + B_1.S_0'(\mathrm{a},\lambda) = C_0'(\mathrm{a},\lambda)$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} C_0(\mathrm{a},\lambda) + \alpha.C_0'(\mathrm{a},\lambda)S_0(\mathrm{a},\lambda) \\ C_0'(\mathrm{a},\lambda)S_0'(\mathrm{a},\lambda) \end{vmatrix}$$

$$A_1 = C_0(\mathrm{a},\lambda).S_0'(\mathrm{a},\lambda) + \alpha.C_0'(,\mathrm{a}\lambda).S_0'(\mathrm{a},\lambda) - C_0'(\mathrm{a},\lambda).S_0(\mathrm{a},\lambda)$$

$$A_1 = 1 + \alpha.C_0'(\mathrm{a},\lambda).S_0'(\mathrm{a},\lambda) \tag{5.12}$$

Aynı metotla $B_1{}'i$ de buluruz.

$$B_1 = \begin{vmatrix} C_0(\mathrm{a},\lambda) & C_0(\mathrm{a},\lambda) + \alpha.C_0'(\mathrm{a},\lambda) \\ C_0'(\mathrm{a},\lambda) & C_0'(\mathrm{a},\lambda) \end{vmatrix}$$

$= C_0(\mathrm{a},\lambda).C_0'(,\mathrm{a}\lambda) - C_0(,\lambda\mathrm{a}).C_0'(,\mathrm{a}\lambda) - \alpha.[C_0'(\mathrm{a},\lambda)]^2$

$$B_1 = -\alpha.[C_0'(\mathrm{a},\lambda)]^2 \tag{5.13}$$

Şimdi denklemi kendi şartlarımıza göre, A_2 ve B_2katsayılarına göre yazalım:

$$A_2.C_0(\mathrm{a},\lambda) + B_2.S_0(\mathrm{a},\lambda) = S_0(\mathrm{a},\lambda) + \alpha.S_0'(\mathrm{a},\lambda)$$

$$A_2.C_0'(\mathrm{a},\lambda) + B_2.S_0'(\mathrm{a},\lambda) = S_0'(,\mathrm{a}\lambda)$$

Buradan

$$A_2 = \begin{vmatrix} S_0(,\mathrm{a}\lambda) + \alpha.S_0'(\mathrm{a},\lambda) & S_0(\mathrm{a},\lambda) \\ S_0'(\mathrm{a},\lambda) & S_0'(\mathrm{a},\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= S_0'(\mathrm{a},\lambda).S_0(\mathrm{a},\lambda) + \alpha.S_0'(\mathrm{a},\lambda).S_0'(\mathrm{a},\lambda) - S_0'(\mathrm{a},\lambda).S_0(\mathrm{a},\lambda)$$

$$A_2 = \alpha.[S_0'\mathrm{a}(,\lambda)]^2 \tag{5.14}$$

Aynı yöntemle devam edersek

$$B_2 = \begin{bmatrix} C_0(a,\lambda) & S_0(a,\lambda) + \alpha.S_0'(a,\lambda) \\ C_0'(a,\lambda) & S_0'(a,\lambda) \end{bmatrix}$$

$= S_0'(a,\lambda).C_0(a,\lambda) - C_0'(a,\lambda).S_0(a,\lambda) - \alpha.S_0'(a,\lambda).C_0'(a,\lambda)$

$$B_2 = 1 - \alpha.S_0'(a,\lambda).C_0'(a,\lambda) \tag{5.15}$$

i sağlayan $C_0(x,\lambda)$ aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$C_0(x,\lambda) = coskx + \int_0^x \frac{sink(x-t)}{k}.q(t).C_0(t,\lambda).dt$$

Ardışık yaklaşımlar metoduna göre 1. ve 2. Terimi yerine yazarsak:

$$=\cos kx + \int_0^x \frac{sink(x-t)}{k}.q(t).coskt.dt +$$

$$\int_0^x \frac{sink(x-t)}{k}.q(t).\int_0^x \frac{sink(t-y)}{k}.q(t).cosky.dy + o(\tfrac{1}{k^2})$$

Burada integral içlerinde bazı cebirsel işlemler yaparsak:

$$\cos kx + \frac{1}{2k}.\sin kx.\int_0^x q(t).dt$$

$$+\frac{1}{2k}.\int_0^x \text{sink}(x-2t).q(t).dt$$

$$+\frac{1}{2k^2}.\int_0^x \text{sink}(x-t).q(t).sinkt.\int_0^t q(y).dy.dt$$

$$=\cos kx + \tfrac{1}{2}.\sin kx.\int_0^x q(t).dt + \tfrac{1}{4k^2}.\int_0^x q(t).d\cos k(x-2t) -$$

$$\tfrac{1}{4k^2}.\cos kx.\int_0^x q(t).\int_0^t q(y).dy.dt$$

$$= \cos kx + \tfrac{1}{2}.\sin kx.\int_0^x q(t).dt + \tfrac{1}{4k^2}.q(t).\text{cosk}(x-2t).\Big|_0^x$$

$$-\frac{1}{4k^2}.\int_0^x \text{cosk}(x-2t).q'(t).dt$$

$$=\cos kx + \tfrac{1}{2}.\sin kx.\int_0^x q(t).dt + \tfrac{1}{4k^2}.[q(x)-q(0)].\cos kx -$$

$$\frac{1}{4k^2}.\int_0^x \text{cosk}(x-2t).q'(t).dt$$

Son terim kısmi integrasyon yardımıyla şu hale gelir:

$$C_0(x,\lambda) = \cos kx + \frac{1}{2k}.\sin kx.\int_0^x q(t).dt$$

$$+\tfrac{1}{4k^2}.\left\{[q(x)-q(0)] - \tfrac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right\}.\cos kx + o(\tfrac{1}{k^2}) \qquad (5.16)$$

Bulunur. Şimdi $C_0(x,\lambda)$ ifadesinin türevini alalım:

$$C_0'(x,\lambda) = -k.\sin kx + \frac{1}{2}.\cos kx.\int_0^x q(t).dt$$

$$-\tfrac{1}{4k}.\left\{[q(x)-q(0)] - \tfrac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right\}.\sin kx + o(\tfrac{1}{k}) \qquad (5.17)$$

olur. Şimdi de $S_0(x,\lambda)$ ifadesini inceleyip bulalım:

$$S_0(x,\lambda)=\frac{\sin kx}{k}+\frac{1}{k}.\int_0^x \sin k(x-t)\,.\,q(t).S_0(t,\lambda).dt$$

Ardışık yaklaşımlar yöntemiyle birinci ve ikinci terimi yerine yazalım:

$$S_0(x,\lambda)=\frac{sinkx}{k}+\frac{1}{k^2}.\int_0^x sink(x-t).q(t).sinkt.dt$$

$$+\frac{1}{k^3}.\int_0^x sink(x-t).q(t).\int_0^t sink(t-y).q(y).sinky.dy.dt+o(\frac{1}{k^3})$$

İntegral içlerinde bazı cebirsel işlemler yaparsak ifade şöyle olur:

$$S_0(x,\lambda)=\frac{sinkx}{k}-\frac{1}{2k^2}.coskx.\int_0^x q(t).dt+\frac{1}{2k^2}.\int_0^x q(t).cosk(x-2t)$$

$$-\frac{1}{2k^3}.\int_0^x sink(x-t).q(t).coskt.\int_0^t q(y).dy.dt$$

$$=\frac{sinkx}{k}-\frac{1}{2k^2}.coskx.\int_0^x q(t).dt$$

$$-\frac{1}{4k^3}.\int_0^x q(t).dsink(x-2t)-\frac{1}{4k^3}.\left[\int_0^x q(t).\int_0^t q(y).dy\right].sinkx$$

$$=\frac{sinkx}{k}-\frac{1}{2k^2}.coskx.\int_0^x q(t).dt+\frac{1}{4k^3}.[q(x)+q(0)].sinkx-$$

$$\frac{1}{4k^3}.\left[\int_0^x q(t).\int_0^t q(y).dy\right].sinkx$$

Son terimde kısmi integrasyon yapılırsa $S_0(x,\lambda)$ ifadesi şu hale gelir:

$$S_0(x,\lambda)=\frac{sinkx}{k}-\frac{1}{2k^2}.coskx.\int_0^x q(t).dt$$

$$+\frac{1}{4k^3}.\left[\big(q(x)+q(0)\big)-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right].sinkx+o\left(\frac{1}{k^3}\right) \tag{5.18}$$

Şimdi $S_0(x,\lambda)$ ifadesinin türevini alalım:

$$S_0'(x,\lambda)=coskx+$$

$$\frac{1}{2k}.sinkx.\int_0^x q(t).dt+\frac{1}{4k^2}.\left[\big(q(x)+q(0)\big)-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right].coskx$$

$$+o\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{5.19}$$

Şimdi A_1, B_1 katsayılarını hesaplayıp bu katsayılar yardımıyla $C(x,\lambda)$ terimini bulalım:

$$A_1=1+\alpha.C_0'(\mathrm{a},\lambda).S_0'(\mathrm{a},\lambda)=1+$$

$$\alpha.\Big\{\Big[-k.sink\text{a}+\tfrac{1}{2}.cosk\text{a}.\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt-\tfrac{1}{4k}.\Big[\big(q(\text{a})-q(0)\big)-$$
$$\tfrac{1}{2}.\big[\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt\big]^2\Big]\Big].sink\text{a}\Big\}.$$
$$\Big\{cosk\text{a}+\frac{1}{2k}.sink\text{a}.\int_0^{\text{a}}q(t).dt$$
$$+\frac{1}{4k^2}.\left[(q(\text{a})+q(0))-\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\text{a}}q(t).dt\right]^2\right].cosk\text{a}\Big\}$$
$$=1-\alpha.k.sink\text{a}.cosk\text{a}-\tfrac{\alpha}{2}.sin^2k\text{a}.\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt-\tfrac{\alpha}{4k}\Big\{\big(q(\text{a})+q(0)\big)-$$
$$\tfrac{1}{2}\big[\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt\big]^2\Big\}.sink\text{a}.cosk\text{a}+\tfrac{\alpha}{2}cos^2k\text{a}.\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt+$$
$$\tfrac{\alpha}{4k}.sink\text{a}.cosk\text{a}.\big[\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt\big]^2-\tfrac{\alpha}{4k}.\Big\{\big(q(\text{a})-q(0)\big)-$$
$$\tfrac{1}{2}.\big[\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt\big]^2\Big\}.sink\text{a}.cosk\text{a}+O(\tfrac{1}{k^2})$$

Bazı cebirsel işlemler sonucunda:

$$=1-\frac{\alpha}{2}.k.sin2k\text{a}+\frac{\alpha}{2}.cos2k\text{a}.\int_0^{\text{a}}q(t).dt$$
$$-\frac{\alpha}{8k}.sin2k\text{a}.\left[\left[\int_0^{\text{a}}q(t).dt\right]^2-[q(\text{a})-q(0)]+\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\text{a}}q(t).dt\right]^2-[q(\text{a})-q(0)]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\text{a}}q(t).dt\right]^2\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak A_1 ifadesi şöyle olur:

$$A_1=1-\tfrac{\alpha}{2}.k.sin2k\text{a}+\tfrac{\alpha}{2}.cos2k\text{a}.\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt$$
$$+\tfrac{\alpha}{4k}.sin2k\text{a}.\Big[\big[\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt\big]^2+q(\text{a})\Big] \tag{5.20}$$

Şimdi B_1 katsayısını bulalım:

$$B_1=-\alpha.[C_0'(\text{a},\lambda)]^2$$
$$=-\alpha\Big[\Big[-k.sink\text{a}+\tfrac{1}{2}.cosk\text{a}.\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt-\tfrac{1}{4k}.\Big[\big(q(\text{a})-q(0)\big)-$$
$$\tfrac{1}{2}.\big[\textstyle\int_0^{\text{a}}q(t).dt\big]^2\Big]\Big].sink\text{a}\Big]^2$$
$$=-\alpha.k^2.sin^2k\text{a}-\frac{\alpha}{4}.cos^2k\text{a}.\left[\int_0^{\text{a}}q(t).dt\right]^2+\frac{\alpha}{2}.k.2.sink\text{a}.cosk\text{a}.\int_0^{\text{a}}q(t).dt$$

$$-\frac{\alpha}{2}.\left[(q(\mathrm{a})-q(0))-\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2.sin^2k\mathrm{a}\right]+O(\frac{1}{k})$$

Bazı cebirsel işlemler sonucunda:

$$B_1=-\frac{\alpha.k^2}{2}.(1-cos2k\mathrm{a})-\frac{\alpha}{8}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2+\frac{\alpha}{4}.\big(q(\mathrm{a})-q(0)\big)$$

$$-\frac{\alpha}{8}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2$$

$$-\frac{\alpha}{8}.cos2k\mathrm{a}.\left[\frac{\alpha}{8}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2-\frac{\alpha}{4}.\big(q(\mathrm{a})-q(0)\big)+\frac{\alpha}{8}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2\right]$$

$$+\frac{\alpha}{2}.k.sin2k\mathrm{a}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt$$

$$B_1=\frac{\alpha.k^2}{2}.(cos2k\mathrm{a}-1)+\frac{\alpha}{2}.k.sin2k\mathrm{a}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt$$

$$+\frac{\alpha}{4}.[q(\mathrm{a})+q(0)]$$

$$-\frac{\alpha}{4}.\left[\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2+\big(q(\mathrm{a})+q(0)\big)\right].cos2k\mathrm{a}+O(\frac{1}{k}) \qquad (5.21)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Şimdi A_2ifadesini bulalım:

$$A_2=\alpha.[S_0'(\mathrm{a},\lambda)]^2$$

$$A_2=\alpha.(coskx+\frac{1}{2k}.sinkx$$

$$.\int_0^x q(t).dt+\frac{1}{4k^2}.\left[\big(q(x)+q(0)\big)-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right].coskx)^2$$

$$=a.cos^2k\mathrm{a}+\frac{\alpha}{2}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt.sin2k\mathrm{a}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$A_2=\frac{\alpha}{2}.(1+cos2k\mathrm{a})+\frac{\alpha}{2k}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt.sin2k\mathrm{a}+\ O\left(\frac{1}{k^2}\right) \qquad (5.22)$$

Son olarak B_2ifadesini hesaplayalm:

$$B_2=1-\ \alpha.S_0'(\mathrm{a},\lambda).C_0'(\mathrm{a},\lambda)$$

$$=1-\alpha.\left\{-k.\sin kx+\frac{1}{2}.\cos kx.\int_0^x q(t).dt\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4k}.\left\{[q(x)-q(0)]-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right\}.\sin kx\right\}.$$

$$\left\{coskx+\frac{1}{2k}.sinkx.\int_0^x q(t).dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4k^2}.\left[\left(q(x)+q(0)\right)-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right].coskx\right\}$$

$$B_2=1+\frac{\alpha}{2}.k.sin2k\mathrm{a}-\frac{\alpha}{2}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt.cos2k\mathrm{a}+O(\frac{1}{k}) \tag{5.23}$$

Şimdi $C(x,\lambda)$ çözümünü yazalım:

$$C(x,\lambda)=A_1.C_0(x,\lambda)+B_1.S_0(x,\lambda)$$

$$=\left\{1-\frac{\alpha}{2}.k.sin2k\mathrm{a}+\frac{\alpha}{2}.cos2k\mathrm{a}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{4k}.sin2k\mathrm{a}.\left[\frac{1}{2}\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2+q(\mathrm{a})\right]\right\}$$

$$\left\{\cos kx+\frac{1}{2k}.\sin kx.\int_0^x q(t).dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4k^2}.\left\{[q(x)-q(0)]-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right\}.\cos kx\right\}$$

$$+(\frac{\alpha.k^2}{2}.(cos2k\mathrm{a}-1)+\frac{\alpha}{2}.k.sin2k\mathrm{a}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt+\frac{\alpha}{4}.[q(\mathrm{a})+q(0)]$$

$$-\frac{\alpha}{4}.\left[\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2+\left(q(\mathrm{a})-q(0)\right)\right].cos2k\mathrm{a}).$$

$$\left\{\frac{sinkx}{k}-\frac{1}{2k^2}.coskx.\int_0^x q(t).dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4k^3}.\left[\left(q(x)+q(0)\right)-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right].sinkx\right\}$$

$$=-\frac{\alpha}{2}.k.sink(2\mathrm{a}-x)-\frac{\alpha}{2}.k.sinkx-\frac{\alpha}{4}.sin2k\mathrm{a}.sinkx.\int_0^x q(t).dt$$

$$+coskx+\frac{\alpha}{2}.cos2k\mathrm{a}.coskx.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt$$

$$-\frac{\alpha}{4}.(cos2k\mathrm{a}-1).coskx.\int_0^x q(t).dt+\frac{\alpha}{2}.sin2k\mathrm{a}.sinkx.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt$$

$$-\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-x).\int_0^x q(t).dt$$

$$+\frac{a}{4}.coskx.\int_0^x q(t).dt+\frac{a}{2}.cosk(2\mathrm{a}-x).\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt$$

$$-\frac{a}{8k}\left\{q(x)-q(0)-\frac{1}{2}\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right\}.sin2k\mathrm{a}.coskx$$

$$+\frac{1}{2k}.\int_0^x q(t).dt.sinkx+1+\frac{a}{2}.cos2k\mathrm{a}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt$$

$$+\frac{a}{4k}.\left\{q(\mathrm{a})+\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2\right\}.sin2k\mathrm{a}.coskx+\frac{a}{8k}.(cos2k\mathrm{a}-1)$$

$$\left\{q(x)+q(\mathrm{a})-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right\}.sinkx$$

$$-\frac{a}{4k}.\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt.sin2k\mathrm{a}.coskx$$

$$+\frac{a}{4k}.\{q(\mathrm{a})+q(0)\}.sinkx-\frac{a}{4k}.\left\{q(x)+q(0)+\frac{1}{2}\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2\right\}.sinkx.cos2k\mathrm{a}$$

$$=-\frac{a}{8k}.sin2k\mathrm{a}.coskx\left\{q(x)-q(0)-\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2-2.q(\mathrm{a})-\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2\right.$$

$$\left.+2.\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right\}$$

$$+\frac{a}{8k}.(2.\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt+q(x)+q(0))$$

$$-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2-2.q(\mathrm{a})-2.q(0)-\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2$$

Buradan ifadeyi toparlarsak:

$$C(x,\lambda)=-\frac{a}{2}.k.sink(2\mathrm{a}-x)-\frac{a}{2}.k.sinkx+\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-x).$$

$$\left\{2.\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right\}+\frac{a}{4}.coskx.\int_0^x q(t).dt-\frac{a}{8k}.sink(2\mathrm{a}-x).$$

$$\left\{q(x) - 2.q(\mathrm{a}) - q(0) - \frac{1}{2}\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2 - \left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2 + 2.\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right\}$$

$$+\frac{a}{8k}.sinkx\left\{q(\mathrm{a}) + q(0) - \frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2 + \frac{4}{a}.\int_0^x q(t).dt\right\} \tag{5.24}$$

elde edilir.

Böylece $C(x,\lambda)$ ifadesini oluşturduk. Şimdi $S(x,\lambda)$ ifadesini oluşturalım:

$$S(x,\lambda) = A_2.C_0(x,\lambda) + B_2.S_0(x,\lambda)$$

$$= \left[a.cos^2k\mathrm{a} + \frac{a}{2k}.sin2k\mathrm{a}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt + O(\frac{1}{k})\right].\left[coskx + \frac{1}{2k}.sinkx.\int_0^x q(t).dt\right]$$

$$+\left[\frac{a}{2}.k.sin2k\mathrm{a} + 1 - \frac{a}{2}.cos2ka.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right].\left[\frac{sinkx}{k} - \frac{1}{2k^2}.coskx.\int_0^x q(t).dt\right]$$

$$= \frac{a}{2}.cos2k\mathrm{a}.coskx - \frac{a}{2}.coskz + \frac{a}{4k}.cos2k\mathrm{a}.sinkx.\int_0^x q(t).dt$$

$$-\frac{a}{4k}.sinkx.\int_0^x q(t).dt + \frac{a}{2k}.sin2k\mathrm{a}.coskx.\int_0^a q(t).dt + \frac{a}{2}.sin2k\mathrm{a}.sinkx$$

$$-\frac{a}{4k}.sin2k\mathrm{a}.coskx.\int_0^x q(t).dt + \frac{sinkx}{k}$$

$$-\frac{a}{2k}.cos2k\mathrm{a}.sinkx.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$S(x,\lambda) = \frac{a}{2}.(cos2k\mathrm{a}.coskx + sin2k\mathrm{a}.sinkx)$$

$$+\frac{a}{4k}.(cos2k\mathrm{a}.sinkx - sin2k\mathrm{a}.coskx).\int_0^x q(t).dt$$

$$+\frac{a}{2k}.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt.(sin2k\mathrm{a}.coskx - cos2k\mathrm{a}.sinkx)$$

$$-\frac{a}{2}.coskx - \frac{a}{4k}.sinkx.\int_0^x q(t).dt + \frac{sinkx}{k}$$

$$S(x,\lambda) = \frac{a}{2}.cosk(2\mathrm{a} - x) - \frac{a}{2}.coskx - \frac{a}{4k}.sink(2\mathrm{a} - x).\int_0^x q(t).dt$$

$$-\frac{a}{2k}.sink(2\mathrm{a} - x).\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt - \frac{a}{4k}.sinkx.\int_0^x q(t).dt - \frac{sinkx}{k}$$

$$S(x,\lambda)=\frac{a}{2}.cosk(2\mathrm{a}-x)-\frac{a}{2}.coskx-$$

$\frac{a}{4k}.sink(2\mathrm{a}-x).\left[\int_0^x q(t).dt+2.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]-\frac{a}{4k}.sinkx.\left[\int_0^x q(t).dt+\frac{4}{a}\right]$ (5.25)

şeklinde bulunmuş olur. Şimdi $Q(x,\lambda)$ çözümünü kurmaya çalışalım:

$$\varphi(x,\lambda)=C(x,\lambda)+h.S(x,\lambda)$$

$$\varphi(x,\lambda)=\Bigg[-\frac{a}{2}.k.sink(2\mathrm{a}-x)-\frac{a}{2}.k.sinkx$$
$$+\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-x).\left\{2.\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right\}$$
$$+\frac{a}{4}.coskx.\int_0^x q(t).dt$$
$$-\frac{a}{8k}.sink(2\mathrm{a}-x).\Bigg\{q(x)-2.q(\mathrm{a})-q(0)-\frac{1}{2}\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2$$
$$-\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2+2.\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\Bigg\}$$
$$+\frac{a}{8k}.sinkx\left\{q(\mathrm{a})+q(0)-\frac{1}{2}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2+\frac{4}{a}.\int_0^x q(t).dt\right\}\Bigg]$$

$$h.\left[\frac{a}{2}.cosk(2\mathrm{a}-x)-\frac{a}{2}.coskx-\frac{a}{4k}.sink(2\mathrm{a}-x).\left[\int_0^x q(t).dt+2.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]\right.$$
$$\left.-\frac{a}{4k}.sinkx.\left[\int_0^x q(t).dt+\frac{4}{a}\right]\right]$$

$\varphi(x,\lambda)=-\frac{a}{2}.k.[sink(2\mathrm{a}-x)+sinkx]+\frac{a}{2}.coskx.\left[\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt+h\right]+$
$\frac{a}{2}.cosk(2\mathrm{a}-x).\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt+h\right]+\frac{a}{4k}.sinkx.\left[\frac{1}{2}.\big(q(\mathrm{a})+q(0)\big)-\right.$
$\left.\frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2+\frac{2-h}{a}.\int_0^x q(t).dt-\frac{4}{a}.h\right]+\frac{a}{4k}.sink(2\mathrm{a}-x).\left\{\left[\frac{1}{2}.q(x)-q(\mathrm{a})-\right.\right.$
$\left.\frac{1}{2}.q(0)\right]-\frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2-\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2+\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt+$
$\left.2.h.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-h.\int_0^x q(t).dt\right\}$ (5.26)

$\varphi(x,\lambda)$ ifadesini oluşturmuş olduk. Şimdi de türevini hesaplayalım:

$$\varphi'(x,\lambda)=\frac{a}{2}.k^2.[cosk(2\mathrm{a}-x)-coskx]-k.\frac{a}{2}.sinkx.\left[\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt+h\right]$$

$$+\frac{a}{4}.coskx.q(x)+k.\frac{a}{2}.sink(2\mathrm{a}-x).\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt+h\right]$$

$$+\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-x).q(x)$$

$$+\frac{a}{4}.coskx.\left\{\left[\frac{1}{2}.(q(\mathrm{a})+q(0))-\frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2-h}{a}.\int_0^x q(t).dt-h.\frac{4}{a}\right]\right\}$$

$$-\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-x).\left\{\frac{1}{2}.q(x)-q(\mathrm{a})-\frac{1}{2}.q(0)-\frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right.$$

$$-\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2$$

$$\left.+\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt+2.h.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-h.\int_0^x q(t).dt\right\}$$

$$=\frac{a}{2}.k^2.[cosk(2\mathrm{a}-x)-coskx]-k.\frac{a}{2}.sinkx.\left[\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt+h\right]+ k.\frac{a}{2}.sink(2\mathrm{a}-x).\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt+h\right]+\frac{a}{4}.coskx.\left\{q(x)+\frac{1}{2}.q(\mathrm{a})+ \frac{1}{2}.q(0)-\frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2+\frac{2-h}{a}.\int_0^x q(t).dt-\frac{4}{a}.h\right\}+\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-x).\left\{\frac{1}{2}.q(x)+ q(\mathrm{a})+\frac{1}{2}.q(0)+\frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2+\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2-\int_0^x q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt- 2.h.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt+h.\int_0^x q(t).dt\right\} \qquad (5.27)$$

Şimdi çözümümüzü başlangıç şartlarına göre yazalım:

$$\Delta(\lambda)=-V(\varphi)=-\varphi'(\pi,\lambda)-H.\varphi(\pi,\lambda)$$

$$\Delta(\lambda)=\frac{a}{2}.k^2.[cosk\pi-cosk(2\mathrm{a}-\pi)]+k.\frac{a}{2}.sink\pi.\left[\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt+h\right]$$

$$-k.\frac{a}{2}.sink(2\mathrm{a}-\pi).\left[\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt-\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-h\right]$$

$$+\frac{a}{4}.cosk\pi\left\{\frac{1}{4}.\left[\int_0^{\pi} q(t).dt\right]^2-\left[q(\pi)+\frac{1}{2}.q(\mathrm{a})+\frac{1}{2}.q(0)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{h-2}{a}.\int_0^{\pi} q(t).dt+\frac{4}{a}.h\right\}$$

$$+\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-\pi).\left\{\int_0^{\pi} q(t).dt.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right.$$

$$+2.h.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-\left[\frac{1}{2}.q(\pi)+q(\mathrm{a})+\frac{1}{2}.q(0)\right]-\frac{1}{4}.\left[\int_0^{\pi} q(t).dt\right]^2$$

$$\left.-\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2-h.\int_0^{\pi} q(t).dt\right\}+$$

$$+\frac{a}{2}.H.k.[sink(2\mathrm{a}-\pi)+sink\pi]-\frac{a}{2}.H.cosk\pi\left[\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt+h\right]$$

$$-\frac{a}{2}.H.cosk(2\mathrm{a}-\pi).\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt+h\right]+O\left(\frac{1}{k}.exp(|\tau|\pi)\right)$$

$$=\frac{a}{2}.k^2.[cosk\pi-cosk(2\mathrm{a}-\pi)]+k.\frac{a}{2}.sink\pi.\left[\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt+h+H\right]$$

$$+k.\frac{a}{2}.sink(2\mathrm{a}-\pi).\left[\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt-\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-h+H\right]$$

$$+\frac{a}{4}.cosk\pi\left\{\frac{1}{4}.\left[\int_0^{\pi} q(t).dt\right]^2-\left[q(\pi)+\frac{1}{2}.q(\mathrm{a})+\frac{1}{2}.q(0)\right]\right\}$$

$$+\int_0^{\pi} q(t).dt.\left[\frac{h-2}{a}-H\right]+\frac{4}{a}.h-2.h.H$$

$$+\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-\pi).\left\{\int_0^{\pi} q(t).dt.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt+H\right]\right.$$

$$+2.\int_0^{a} q(t).dt.[h-H]-\left[\frac{1}{2}.q(\pi)+q(\mathrm{a})+\frac{1}{2}.q(0)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{4}.\left[\int_0^{\pi} q(t).dt\right]^2-\frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2-h.\int_0^{\pi} q(t).dt-2.h.H\right\}$$

$$+o(exp(|\tau|\pi))$$

$$\Delta_0(\lambda)=\frac{a}{2}.k^2.[cosk\pi-cosk(2\mathrm{a}-\pi)]$$

$$w_1=\frac{a}{2}.\left[\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt+h+H\right]$$

$$w_2=\frac{a}{2}.\left[\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt-\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt-h+H\right]$$

$$w_3 = \frac{a}{4}.\left\{\frac{1}{4}.\left[\int_0^{\pi} q(t).dt\right]^2 - \left[q(\pi) + \frac{1}{2}.q(\mathrm{a}) + \frac{1}{2}.q(0)\right]\right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} q(t).dt.\left[\frac{h-2}{a} - H\right] + \frac{4}{a}.h - 2.h.H\right\}$$

$$w_4 = \frac{a}{4}.\left[\int_0^{\pi} q(t).dt.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt + H\right]\right.$$

$$+ 2.\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt.[h - H] - \left[\frac{1}{2}.q(\pi) + q(\mathrm{a}) + \frac{1}{2}.q(0)\right]$$

$$\left. - \frac{1}{4}.\left[\int_0^{\pi} q(t).dt\right]^2 - \frac{1}{2}.\left[\int_0^{\mathrm{a}} q(t).dt\right]^2 - h.\int_0^{\pi} q(t).dt - 2.h.H\right]$$

olarak tanımlayalım. Sonuç olarak:

$$\Delta(\lambda) = \frac{a}{2}.k^2.[cosk\pi - cosk(2\mathrm{a} - \pi)] + w_1.k.sink\pi + w_2.k.sink(2\mathrm{a} - \pi) +$$

$$w_3.cosk\pi + w_4.cosk(2\mathrm{a} - \pi) \qquad (5.28)$$

olur.

$\Delta(\lambda)$ yı bilinen yöntemler kullanarak karakteristik fonksiyonun aşağıdaki özelliklerini ve sınır problemlerinin özdeğerlerini $\lambda_n = k_n^2$ elde ederiz.

$$|k| \to \infty \; için \; \Delta(\lambda) = 0\big(|k|exp(|\Gamma|\pi)\big)$$

$h > 0, C_h > 0$ vardır ki $|Imk| \geq h$ $için$ $|\Delta(\lambda)| \geq C_h\big(|k|exp(|\Gamma|\pi)\big)$ dolayısıyla $\{\lambda_n\}$ özdeğerleri $|Imk| < h$ içerisindedir.

$G_\delta = \{k: |k - k_n| \geq \delta\}$ belirtir. $|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta|k|\,\mathrm{exp}(|\Gamma|\pi)$, $\;k\epsilon G_\delta\; \lambda_n^0 = (k_n^0)^2$ olsun. $\Delta_0(\lambda) = k.((w_1.sink\pi + w_2.sink(2\mathrm{a} - \pi))$ olur. $k_n = k_n^0 + o(1)$, $n \to \infty$ ifadesi (5.10), (5.11) i (5.7) de yerine koyarsak

$$a_n = \int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda).dx = \int_0^{\pi}\left(-\frac{a}{2}.k.[sink(2\mathrm{a} - x) + sinkx]\right)^2.dx =$$

$$\frac{a^2.k^2}{4}.\left[\int_0^{\pi} sin^2k(2\mathrm{a} - x).dx + \int_0^{\pi} sin^2kx.dx + \int_0^{\pi} 2.sinkx.sink(2\mathrm{a} - x).dx\right]) \qquad (5.29)$$

olur.

$$a_n^0 = \int_0^{\pi} \left(k.\left((w_1.sink\pi + w_2.sink(2\mathrm{a}-\pi)\right)\right)^2.dx$$

$$= \left(\frac{w_1^2 + w_2^2}{2} - w_1.w_2.cos2k\mathrm{a}\right)\pi$$

Buradan $|a_n| \approx C$ olur. Bunun anlamı $a_n = O(1) ve\ a_n{}^{-1} = O(1)$ olmasıdır. Buradan

$\beta_n = \psi(0,\lambda_n) = \frac{1}{\varphi(\pi,\lambda_n)}$ (5.30)

olur ve buradan $|\beta_n| \approx C$ 4..29 ve $\beta_n.a_n = \Delta_1(\lambda_n)$, $\left\{\Delta_1(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)\right\}$ den sonucu elde ederiz.

5.2.Ters Problem

Ters problemi aşağıdaki spektral özelliklere göre çözeceğiz.

1. Weyl fonksiyonundan $M(\lambda)$
2. Spektral veriler $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$
3. İki spektrum $\{\lambda_n, \varrho_n\}_{n\geq 0}$

Bu ters problemler süreksizlikler olmaksızın Sturm-Liouville denklemleri için iyi bilinen ters problemin genelleştirilmesidir. [21, 25]

Öncelikle ispatlarımızı (i)-;(iii) için yapalım. Bunun için, L ile birlikte, aynı formdaki sınır katsayısı olan bir $\tilde{L}$ harfini dikkate alalım, ancak katsayılar $\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H}, \tilde{a}, \tilde{a}_k$) farklıdır.

Eğer belirli bir a sembolü, L ile ilgili bir nesne anlamına gelirse, $\tilde{a}$, $\tilde{L}$ ile ilgili benzer nesneyi gösterir ve $\hat{a} = a - \tilde{a}$

$\Phi(x,\lambda)$, (5.1) in $U(\Phi) = 1, \mathrm{V}(\Phi) = 0$ ve (5.3) sınır şartları altında bir çözümü olsun. $M(\lambda) = \Phi(0,\lambda)$ olsun. $\Phi(x,\lambda)$, $M(\lambda)$ fonksiyonlarının Weyl çözümleri ve sınır değer problemi için Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = S(x,\lambda) + M(\lambda).\varphi(x,\lambda) \quad (5.31)$$

$$\langle\varphi(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\rangle = 1 \quad (5.32)$$

$$\langle\varphi(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\rangle = \varphi'(x,\lambda).\Phi(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda).\Phi'(x,\lambda) = U(\Phi) = 1$$

$$M(\lambda) = \frac{\delta(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (5.33)$$

$\delta(\lambda) = \psi(0,\lambda) = V(S)$, sınır şartları $U(y) = 0, y(\pi) = 0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi L_1'nin ve atlama koşulları (4.3)'ün karakteristik fonksiyonudur. $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ $\delta(\lambda)$ nın sıfırları olsun.

Teorem 5.2.1 Eğer $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ ise $L = \tilde{L}$ olur. Böylece Weyl fonksiyonunun şartları, operatörü tek şekilde belirler.

İspat:

$$\varphi^{\upsilon}(x,\lambda) = O\big(|k|^{\upsilon} exp(|\tau|(\pi - x))\big) \tag{5.34}$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |k| exp(|\tau|\pi), \qquad k\epsilon G_\delta \quad G_\delta = \{k: |k - k_n| \geq \delta\} \tag{5.35}$$

(5.31) , (5.32) ve (5.35) yardımıyla

$$|\Phi^{\upsilon}(x,\lambda)| \leq C_\delta |k|^{\upsilon-1} exp(-|\tau|\pi), \;\; k\epsilon G_\delta \tag{5.36}$$

$P(x,\lambda) = \left[P_{jk}(x,\lambda)\right]_{jl=1,2}$ formülü ile matrisleri tanımlayalım:

$$\begin{cases} P_{j1}(x,\lambda) = \varphi^{(j-1)}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \Phi^{(j-1)}.\tilde{\varphi}'(x,\lambda), \\ P_{j2}(x,\lambda) = \Phi^{(j-1)}(x,\lambda).\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \varphi^{(j-1)}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \end{cases} \tag{5.37}$$

$$P_{11}(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \tilde{\varphi}'(x,\lambda)$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)$$

Buradan

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = P_{11}(x,\lambda).\tilde{\varphi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda).\tilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ \Phi(x,\lambda) = P_{11}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) \end{cases} \tag{5.38}$$

$$\varphi(x,\lambda) = \left[\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \tilde{\varphi}'(x,\lambda)\right].[\tilde{\varphi}(x,\lambda)] + \left[\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right].[\tilde{\varphi}'(x,\lambda)]$$

$$\varphi(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}'(x,\lambda).\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda).\tilde{\varphi}'(x,\lambda)$$

$$\Phi(x,\lambda) = \left[\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right].\widetilde{\Phi}(x,\lambda) + \left[\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right].\widetilde{\Phi}'(x,\lambda)$$

$$\Phi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \tilde{\varphi}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$$

(5.31) ve (5.37)'ye göre, her sabit x için, $P_{jl}(x,\lambda)$ fonksiyonları λ ile basit kutuplar λ_n ve $\tilde{\lambda}_n$ meromorfiktir. $G_\delta^0 = G_\delta \cap \tilde{G}_\delta$ olur.

$$\varphi^{(\upsilon)}(x,\lambda) = O\big(|k|^{\upsilon} exp(|\tau|\pi)\big) \tag{5.39}$$

(5.36), (5.37) ve (5.39) ifadelerinden

$$|P_{12}(x,\lambda)| \leq C_\delta |k|^{-1}, \quad |P_{11}(x,\lambda)| \leq C_\delta, \quad k\epsilon G_\delta^0 \tag{5.40}$$

(5.31) ve (5.37)'den sonra, eğer $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ ise, her sabit x için, $P_{1l}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının hepsi λ'dadır. (5.40) ile birlikte bu $P_{12}(x,\lambda) = 0, P_{11}(x,\lambda) = A(x)$ verir. Buradan (5.38)'i kullanarak şuna ulaşırız.

$$\varphi(x,\lambda) = A(x).\tilde{\varphi}(x,\lambda), \quad \Phi(x,\lambda) = A(x).\tilde{\Phi}(x,\lambda) \tag{5.41}$$

Buradan

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{a}{2}.k^2.[cosk(2\mathrm{a}-x) - coskx] - k.\frac{a}{2}.sinkx.\left[\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt + h\right]$$
$$+ k.\frac{a}{2}.sink(2\mathrm{a}-x).\left[\int_0^a q(t).dt - \frac{1}{2}.\int_0^x q(t).dt + h\right]$$
$$+\frac{a}{4}.coskx.\left\{q(x) + \frac{1}{2}.q(\mathrm{a}) + \frac{1}{2}.q(0) - \frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2\right.$$
$$\left.+\frac{2-h}{a}.\int_0^x q(t).dt - \frac{4}{a}.h\right\}$$
$$+\frac{a}{4}.cosk(2\mathrm{a}-x)$$

$.\left\{\frac{1}{2}.q(x) + q(\mathrm{a}) + \frac{1}{2}.q(0) + \frac{1}{4}.\left[\int_0^x q(t).dt\right]^2 + \frac{1}{2}.\left[\int_0^a q(t).dt\right]^2 -\right.$
$\left.\int_0^x q(t).dt.\int_0^a q(t).dt - 2.h.\int_0^a q(t).dt + h.\int_0^x q(t).dt\right\} + O\left(\frac{1}{k}\right), \qquad x < \mathrm{a}$

(5.42)

$$\varphi(x,\lambda) = (-b_1.coskx + b_2.cosk(2\mathrm{a}-x))$$
$$+o\left(\frac{1}{k}exp(|\tau|\pi)\right), \tag{5.43}$$

İfadeleri $|k| \to \infty$, $argk\epsilon[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ için hesaplanırsa

$$\varphi(x,\lambda) = 2^{-1}bexp(-ik\pi)\big(1 + O(k^{-1})\big),$$

$x < a$ için $b = 1$ ve $x > a$ için $b = b_1$ olur. Benzer şekilde hesaplarsak

$$\Phi(x,\lambda) = (ikb)^{-1}exp(ik\pi)\big(1 + O(k^{-1})\big)$$

şeklinde olur. (5.32) ve (5.41) ile birlikte bütün x ve λ için $b_1 = \tilde{b}_1$, $A(x) = 1$, $\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\Phi(\mathrm{x},\lambda) = \tilde{\Phi}(\mathrm{x},\lambda)$ olarak bulunur. Sonuç olarak $L = \tilde{L}$ dir.

Teorem 5.2.2. Eğer $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n, a_n = \tilde{a}_n, n \geq 0$ ise $L = \tilde{L}$ olur. Böylece Spektral verilere ait $\{\lambda_n, a_n\}_{n\geq 0}$ operatörleri tek şekilde belirler.

İspat: (5.33) den Weyl fonksiyonu $M(\lambda)$ basit kutup λ_n ile meromorfiktir.

$\beta_n = \psi(0,\lambda_n) = \frac{1}{\varphi(T,\lambda_n)}$, $\beta_n.a_n = \Delta_1(\lambda_n)$ ve (4.36) kullanılarak aşağıdaki ifade hesaplanır.

$$\underset{\lambda=\lambda_n}{Res} M(\lambda) = \frac{\delta(\lambda_n)}{\Delta_1(\lambda_n)} = \frac{\beta_n}{\Delta_1(\lambda_n)} = \frac{1}{a_n} \tag{5.44}$$

$\Gamma = \{\lambda = u + iv : u = (2h^2)^{-2}.v^2 - h^2\}$ ifadesi $Imk = \pm h$ ın $\lambda = k^2$ altındaki görüntüsü olsun. $\Gamma_n = \Gamma \cap \{\lambda : |\lambda| \le r_n\}$ belirtip aşağıdakileri dikkate alalım.

$$\Gamma_{n0} = \Gamma_n \cup \{\lambda : |\lambda| = r_n, \lambda \notin int\Gamma\}, \;\; \Gamma_{n1} = \Gamma_n \cup \{\lambda : |\lambda| = r_n, \lambda \notin int\Gamma\}$$

Weyl fonksiyonu $M(\lambda)$ için $\lambda \epsilon\, int\, \Gamma_{n0}$ düzenli olduğundan Cauchy teoremi yardımıyla

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}. \int_{\Gamma_{n0}} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda}.d\mu, \;\; \lambda \epsilon\, int\, \Gamma_{n0}$$

$\delta_n = \psi(x, \lambda)$ ifadesi bize

$$\delta_n = O\big(exp(|\tau|\pi)\big) \tag{5.45}$$

verir. (5.35), (5.33) ve (5.45) i kullanarak

$$|M(\lambda)| \le C_\delta . |k|^{-1}, \quad k \epsilon G_\delta \tag{5.46}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$M(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}. \int_{\Gamma_{n1}} \frac{M(\mu)}{\lambda - \mu}.d\mu$$

olur.

Bu integrali rezidü teoremi yardımıyla hesaplar ve aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$M(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_k.(\lambda - \lambda_k)} \tag{5.47}$$

Teoremin hipotezi altında (5.47) e baktığımızda $M(\lambda)$ve Teorem 5.2.1 yardımıyla $L = \tilde{L}$ elde edilir.

Teorem 5.2.3. Eğer $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n, \; \mu_n = \tilde{\mu}_n, \; n \ge 0$ ise $(0, \pi)$ aralığında $q(x) = \tilde{q}(x)$ $h = \tilde{h}, \; H = \tilde{H}, \; a = \tilde{a}, \; a_1 = \tilde{a}_1 \; ve \; a_2 = \tilde{a}_2$

İspat:

$$\Delta(\lambda) = k^2.\big(b_1.cosk\pi - b_2.cosk(2\mathrm{a} - \pi)\big) - w_1.sink\pi - w_2.sink(2\mathrm{a} - T)$$

$$+o\big(exp(|\tau|\pi)\big) \tag{5.48}$$

$\Delta(\lambda)$ dizisi, λ, $\frac{1}{2}$ olduğunda tamdır ve Sonuç olarak, $\Delta(\lambda)$, sıfırlarla çarpımsal bir sabite kadar tek bir şekilde belirlenir.

$$\Delta(\lambda) = C.\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \tag{5.49}$$

$$\Delta_0(\lambda) = k^2.\big(b_1.cosk\pi - b_2.cosk(2\text{a}-\pi)\big) \tag{5.50}$$

ifadesine göre

$$\Delta_0(\lambda) = \Omega_0.\lambda.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right),\quad \Omega_0 = \pi.b_1 - (2\text{a}-\pi).b_2$$

olur. Buradan

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)} = C.\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0.\Omega_0.\lambda}.\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^0}{\lambda_n}.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda}\right)$$

$\lambda \to -\infty$ alırsak

$$C = -\lambda_0.\Omega_0.\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n^0}$$

ifadesini elde ederiz. (5.49) da yerine yazarsak

$$\Delta(\lambda) = \Omega_0.(\lambda-\lambda_0)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n^0} \tag{5.51}$$

elde edilir. (5.51)'den itibaren $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumlarının spesifikasyonu karakteristik fonksiyon $\Delta(\lambda)$'i kesin olarak belirler. Benzer şekilde $\delta(\lambda)$ fonksiyonu $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sıfırları yardımıyla tek şekilde belirlenir. Şimdi $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\mu_n = \tilde{\mu}_n$, $n \geq 0$ alalım. $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)$, $\delta(\lambda) = \tilde{\delta}(\lambda)$ olur. Sonuç olarak (4.36) yardımıyla $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ elde edilir. Buradan ve Teorem 5.2.1' den $q(x) = \tilde{q}(x),\ h = \tilde{h},\ H = \tilde{H},\ a = \tilde{a},$ $a_1 = \tilde{a}_1\ ve\ a_2 = \tilde{a}_2$ olur.

5.3.Ters Problemin Çözümü

Bu bölümde, Cauchy'nin integral formülü, Rezidü teoremi ve spektral veriler yardımıyla L'nin sınır değer probleminin ters problemini çözeceğiz. Ana denklemin çözümünü kullan arak ters problemlerin çözümü için algoritmalar sağlıyoruz. L'nin spektral verilerin $(\lambda_n, \gamma_n)_{\,n=0,\mp1,\mp2,\ldots}$ kurtarılmasının tersine problem olduğunu düşünüyoruz. Sınır değer problemi $L\ ve\ \tilde{L}$ olacak şekilde $\zeta_n := |\lambda_n - \widetilde{\lambda_n}| + |\gamma_n - \tilde{\gamma}_n|$ olduğunda

$$a_s = \widetilde{a_s}, \quad s = \overline{1,m}, \qquad \sum_{n=\infty}^{\infty} \zeta_n . |\lambda_n| < \infty, \tag{5.52}$$

olur. $i, j = 0{,}1\ ve\ n, k = 0, \mp1, \mp2, \ldots.$ için $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ ilk başlangıç koşulları $\tilde{\varphi}(0,\lambda) = 1, \tilde{\varphi}'(0,\lambda) = \tilde{h}$ altında potansiyel $\tilde{q}$ ile (5.52)'in bir çözümü olduğunu göstereceğiz.

$$\lambda_{n0} = \lambda_n, \qquad \lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_n, \quad \gamma_{n0} = \gamma_n, \qquad \gamma_{n1} = \tilde{\gamma}_n,$$
$$\varphi_{ni}(x) = \varphi(x,\lambda_{ni}), \quad \tilde{\varphi}_{ni}(x) = \tilde{\varphi}(x,\lambda_{ni}),$$
$$Q_{kj} = \frac{< \varphi(x,\lambda), \varphi_{kj}(x) >}{2\lambda_{kj}.\gamma_{kj}(\lambda - \lambda_{kj})} = \frac{1}{2\lambda_{kj}.\gamma_{kj}} . \int_0^x \varphi(t,\lambda). \varphi_{kj}(t). dt,$$
$$Q_{ni,kj}(x) = Q_{kj}(x, \lambda_{ni})$$

Benzer şekilde yukarıdaki tanımda $\tilde{\varphi}$ ile φ'yi değiştirerek $\tilde{Q}_{kj}(x,\lambda)$'yı tanımlayabiliriz. Schwarz'ın lemmasını kullanarak $(Bak[5, p. 130])$ ve $\varphi(x,\lambda), \psi'(x,\lambda)\ ve\ \lambda_n = \lambda_n^0 + o(1),\ n \to \infty$ ifadelerinden aşağıdaki asimptotik ifadeleri elde ederiz:

$$\left|\varphi_{nj}^{(v)}(x)\right| \le C(|\lambda_n^0| + 1)^v \tag{5.53}$$

$$\left|Q_{ni,kj}(x)\right| \le \frac{C}{|\lambda_n^0 - \lambda_k^0| + 1}, \qquad \left|Q_{ni,kj}^{(v+1)}(x)\right| \le C\big(|\lambda_n^0| + |\lambda_k^0| + 1\big)^v \tag{5.54}$$

$n.k = 0, \mp1, \mp2, \ldots.\ \ i, j, v = 0{,}1\ ve\ C$ pozitif bir sabittir. Benzer sonuçlar $\tilde{\varphi}_{ni}(x)\ ve\ \tilde{Q}_{ni,kj}(x)$ için de geçerlidir.

Lemma 5.3.1. $\varphi_{nj}(x,\lambda) ve\ Q_{ni,kj}(x)$ yukarıdaki gibi tanımlansın. $i, j = 0{,}1\ ve\ n, k = 0, \mp1, \mp2, \ldots$ için

$$\tilde{\varphi}_{ni}(x) = \varphi_{ni}(x) + \textstyle\sum_{l=-\infty}^{\infty}\big(\tilde{Q}_{ni,l0}(x). \varphi_{k0}(x) - \tilde{Q}_{ni,l1}(x). \varphi_{k1}(x)\big) \tag{5.55}$$

serisi kesinlikle ve düzgün bir şekilde $x\epsilon\ [0,\pi]/\{a_s\}_{s=1}^m$'e yakınsar.

İspat:

(5.52)'den $a_s = \widetilde{a_s},\ \ a_s = \tilde{a}_s\ s = \overline{1,m}$ yazabiliriz. $\varphi(x,\lambda) ve\ \varphi'(x,\lambda)$ ifadelerinden

$$\left|\varphi^{(v)}(x,\lambda)-\tilde{\varphi}^{(v)}(x,\lambda)\right|\le C|\lambda|^{v-1}exp(|\tau|x) \quad (5.56)$$

Benzer şekilde

$$\left|\psi^{(v)}(x,\lambda)-\tilde{\psi}^{(v)}(x,\lambda)\right|\le C|\lambda|^{v-1}exp\big(|\tau|(\pi-x)\big) \quad (5.57)$$

$G_\delta^0=G_\delta\cap\tilde{G}_\delta$ olsun.

$$\left|\psi^{(v)}(x,\lambda)\right|=O\big(|\lambda|^v e^{|\tau|(\pi-x)}\big) \quad (5.58)$$

$$|\Delta(\lambda)|\ge C_\delta|\lambda|exp(|\tau|\pi) \quad tüm \quad \lambda\epsilon G_\delta \quad (\lambda>0) \quad (5.59)$$

(5.57), (5.58), (5.59) ve (5.32) dan

$$\left|\phi^{(v)}(x,\lambda)-\tilde{\phi}^{(v)}(x,\lambda)\right|\le C_\delta|\lambda|^{v-2}\exp(-|\tau|x), \qquad \lambda\epsilon G_\delta^0 \quad (5.60)$$

elde edilir. Şimdi $P(x,\lambda)$ ifadesini tanımlayalım:

$$P(x,\lambda)\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}(x,\lambda) & \tilde{\phi}(x,\lambda)\\ \tilde{\varphi}'(x,\lambda) & \tilde{\phi}'(x,\lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi(x,\lambda) & \phi(x,\lambda)\\ \varphi'(x,\lambda) & \phi'(x,\lambda)\end{bmatrix}$$

Her sabit x için $P_{1k}(x,\lambda)$ fonksiyonu $\lambda,\lambda_n\ ve\ \tilde{\lambda}_n$ basit noktalarda meromorfiktir. Cauchy'nin teoremini elde ettik [5].

$$P_{1k}(x,\lambda)-\delta_{1k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{P_{1k}(x,\zeta)}{\zeta-\lambda}, \quad k=1{,}2, \quad (5.61)$$

$\lambda\epsilon int\Gamma_n\ ve\ \delta_{jk}$ Kronecker deltadır.

$<\phi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)>=1\ ve\ (5.40)$ ifadeleri aşağıdaki ifadeyi ima eder.

$$P_{11}(x,\lambda)=1+\big(\varphi(x,\lambda)-\tilde{\varphi}(x,\lambda)\big).\tilde{\phi}'(x,\lambda)$$
$$-\Big(\phi(x,\lambda)-\tilde{\phi}(x,\lambda)\Big).\tilde{\varphi}'(x,\lambda) \quad (5.62)$$

$$\left|\varphi^{(v)}(x,\lambda)\right|=O\big(|\lambda|^v e^{|\tau|x}\big) \qquad 0\le x\le\pi,\ \ v=0{,}1, \quad (5.63)$$

(5.58), (5.37), (5.56), (5.60) ve (5.62) ifadelerinden

$$|P_{1k}(x,\lambda)-\delta_{1k}|\le C_\delta|\lambda|^{-1},\ \ \lambda\epsilon G_\delta^0 \quad (5.64)$$

olduğunu çıkarabiliriz. (5.61) ve (5.64) ifadelerinden $\Gamma_{n1}=\{\lambda:|\lambda|=|\lambda_n^0|,\ n=0,\mp1,\mp2,\dots\}$ için aşağıdaki elde edilir.

$$P_{1k}(x,\lambda)-\delta_{1k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi \dot{I}}\int_{\Gamma_{N1}}\frac{P_{1k}(x,\zeta)}{\zeta-\lambda}.d\zeta$$

Bu ifadeyi (5.38) de yerine yazarsak:

$$\varphi(x,\lambda)=\tilde{\varphi}(x,\lambda)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi \dot{I}}\int_{\Gamma_{n1}}\frac{\tilde{\varphi}(x,\lambda).P_{11}(x,\zeta)+\tilde{\varphi}'(x,\lambda).P_{12}(x,\zeta)}{\lambda-\zeta}.d\zeta$$

olur. (5.34) ve (5.37) ifadelerini ele alarak yukarıdaki ifadeye yazalım:

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \dot{\mathrm{I}}} \int_{\Gamma_{n1}} \frac{< \tilde{\varphi}(x,\lambda), \tilde{\varphi}(x,\zeta) >}{\lambda - \zeta} . \widetilde{M}(\zeta). \varphi(x,\zeta). d\zeta \qquad (5.65)$$

(5.46) den

$$Res_{\zeta=\lambda_{kj}} \frac{< \tilde{\varphi}(x,\lambda), \tilde{\varphi}(x,\zeta) >}{\lambda - \zeta} . \widetilde{M}(\zeta). \varphi(x,\zeta) = \tilde{Q}_{kj}(x,\lambda). \varphi_{kj}(x)$$

Sonuç olarak (5.65) integralini Rezidü teoremi yardımıyla hesaplamış olduk. $[5, p. 112]$ $\lambda = \lambda_{ni}$ alarak $n \to \infty$ için (5.55) ifadesine ulaştık. (5.53) ve (5.54) asimptotik formüllerini $x\epsilon(a_s, a_{s+1}),\ 0 \le s \le m$ için türetiyoruz.

Yukarıdaki argümanlardan, her bir sabit x için, (5.3.4) ifadesinin $\varphi_{ni}(x) \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots ve\ i = 0,1,$ ’e göre lineer denklemler sistemi olarak düşünüldüğü görülmüştür.

Bu nedenle, (5.55)'ü ters problemin ana denklemi olarak kullanmak uygun değildir.

V, $u = (n, i),\ n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots\ ve\ i = 0,1,$ gibi bir dizi indeks olsun. her sabit $x\epsilon\ [0, \pi]/\{a_s\}_{s=1}^{m}$ için vektörleri şu şekilde tanımlayalım:

$$\phi(x,\lambda) = [\phi_u(x)]_{u\epsilon V} = \begin{bmatrix} \phi_{n0}(x) \\ \phi_{n1}(x) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\phi}(x) = \left[\tilde{\phi}_u(x)\right]_{u\epsilon V} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{n0}(x) \\ \tilde{\phi}_{n1}(x) \end{bmatrix}_{n=0,\mp1,\mp2,\dots}$$

Bu formül:

$$\begin{bmatrix} \phi_{n0}(x) \\ \phi_{n1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_n^{-1} & -\zeta_n^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n0}(x) \\ \varphi_{n1}(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{n0}(x) \\ \tilde{\phi}_{n1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_n^{-1} & -\zeta_n^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{n0}(x) \\ \tilde{\varphi}_{n1}(x) \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

halini alır. Eğer belli bir n için $\zeta_n = 0$ ise $\phi_{n0}(x) = \tilde{\phi}_{no}(x) = 0$ alırız.

Buradan blok matrisleri tanımlayalım: $u = (n, i), v = (k, j)$ iken

$$H(x) = \left[H_{u,v}(x)\right]_{u,v\epsilon V} = \begin{bmatrix} H_{no,ko}(x) & H_{no,k1}(x) \\ H_{n1,ko}(x) & H_{n1,k1}(x) \end{bmatrix}_{n,k=0,\mp1,\mp2,\dots}$$

olur.

$$\begin{bmatrix} H_{no,ko}(x) & H_{no,k1}(x) \\ H_{n1,ko}(x) & H_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_n^{-1} & -\zeta_n^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{no,ko}(x) & Q_{no,k1}(x) \\ Q_{n1,ko}(x) & Q_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_k & \zeta_k \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde, $\tilde{\varphi}_{ni}(x), \tilde{Q}_{ni,kj}(x)$ ile önceki tanımlarda $\varphi_{ni}(x), Q_{ni,kj}(x)$'i değiştirerek $\tilde{Q}(x), \tilde{H}(x)$'i tanımlarız. $\varphi(x,\lambda), \psi'(x,\lambda), \lambda_n = \lambda_n^0 + o(1),\ n \to \infty, \gamma_n = \gamma_n^0 + o(1),\ n \to \infty$, (5.53), (5.54) ve Schwarz'ın lemmasından

$$\left|\phi_{nj}^{(v)}(x)\right|, \left|\tilde{\phi}_{nj}^{(v)}(x)\right| \leq C(|\lambda_n^0| + 1)^v, \quad v = 0,1,$$

$$\left|H_{ni,kj}(x)\right|, \left|\tilde{H}_{ni,kj}(x)\right| \leq \frac{C.\zeta_{kj}}{\left|\lambda_n^0 - \lambda_k^0\right| + 1} \tag{5.67}$$

$$\left|H_{ni,kj}^{(v+1)}(x)\right|, \left|\tilde{H}_{ni,kj}^{(v+1)}(x)\right| \leq C\left(|\lambda_n^0| + \left|\lambda_k^0 + 1\right|\right)^v \zeta_k, \quad v = 0,1. \tag{5.68}$$

Sınırlı dizilerin $a = [a_u]_{u\epsilon V}$ Banach uzayını $\|a\|_B = sup_{u\epsilon V}|a_u|$ ile ele alalım. Her sabit $x\epsilon(a_s, a_{s+1})$, $0 \leq s \leq m$ için, B'den B'ye hareket eden operatör $E + \tilde{H}(x) ve\ E - H(x)$'in lineer sınırlı operatör olduğu (5.67) ve (5.68) de görülür ve

$$\|H(x)\| \left\|\tilde{H}(x)\right\| \leq Csup_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_k}{\left|\lambda_n^0 - \lambda_k^0\right| + 1} < \infty$$

Burada bölümün ana sonucunu veriyoruz.

Teorem 5.3.2. Her $x\epsilon\,[0,\pi]/\{a_s\}_{s=1}^m$ için $\phi(x)\epsilon B$ vektörü B Banach uzayında aşağıdaki denklemi verir:

$$\tilde{\phi}(x,\lambda) = \left(E + \tilde{H}(x)\right)\phi(x) \tag{5.69}$$

Ayrıca operatör $E + \tilde{H}(x)$'nin sınırlı bir ters operatörü vardır, (5.3.18) denklemi tek şekilde çözülebilir.

İspat: $\tilde{\phi}(x)$notasyonunu kullanarak yazacağımız formül

$$\tilde{\phi}_{ni}(x) = \phi_{ni}(x) + \sum_{k,j} \tilde{H}_{ni,kj}(x).\phi_{kj}(x), \quad (n,i)\epsilon V, \quad (k,j)\epsilon V$$

(5.55) formülü ile eşdeğerdir. Benzer şekilde H(x) notasyonunu kullanarak $(n,i), (l,j), (k,t)\epsilon V$ için

$$H_{ni,lj}(x) - \tilde{H}_{ni,lj}(x) + \sum_{k,t} \tilde{H}_{ni,kt}(x) H_{kt,lj}(x) = 0$$

veya başka formda

$$\left(E + \tilde{H}(x)\right)\left(E - H(x)\right) = E$$

$L\ ve\ \tilde{L}$ için yer değiştirirsek benzer şekilde aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\phi(x) = \big(E - H(x)\big)\tilde{\varphi}(x), \quad \big(E - H(x)\big)\Big(E + \widetilde{H}(x)\Big) = 0$$

Bundan dolayı operatör $\Big(E + \widetilde{H}(x)\Big)^{-1}$ var ve bir lincar sınırlı operatördür. (5.69) denklemi ters problemin temel denklemi olarak adlandırılır. (5.69) denklemini çözmek, $\phi(x)$ vektörü ve sonuç olarak $\varphi_{ni}(x)$ fonksiyonu bulmaya yarar. Bu nedenle, ters problemlerimizin çözümü için aşağıdaki algoritmaları elde ederiz.

Algoritma 5.3.3. $\{\lambda_n, \gamma_n\}_{n=0,\mp1,\mp2,\ldots}$ spektral verileri verilsin. $q(x), h, H, a_s, s = \overline{1,m}$ kuralım:

$\tilde{L}$ yi seçelim ve $\tilde{\phi}(x)\ ve\ \widetilde{H}(x)$'i hesaplayalım.

(5.69) denklemini çözerek (5.66) üzerinden $\phi(x)\ ve\ \ \varphi_{n0}(x)$'ı hesaplayalım.

Bazı n'ler seçelim ve aşağıdaki formüller yardımıyla $q(x), h, H, a\ ve$ a ifadeleri kurulur.

$$q(x) = \frac{\varphi''_{n0}(x)}{\varphi_{no}(x)} + \lambda_n, \qquad h = \varphi'_{n0}(0), \quad H = -\frac{\varphi'_{n0}(\pi)}{\varphi_{no}(\pi)}$$

$$\varphi'_{no}(\mathrm{a}+0) = \varphi'_{no}(\mathrm{a}-0); \quad a = \frac{\varphi_{n0}(\mathrm{a}+0) - \varphi_{no}(\mathrm{a}-0)}{\varphi'_{no}(\mathrm{a}-0)}$$

Algoritma 5.3.4. $\mathrm{M}(\lambda)$ verilsin. $q(x), h, H, a\ ve$ a ifadeleri kurulur.

(5.31) den $\{\lambda_n, \gamma_n\}_{n=0,\mp1,\mp2,\ldots}$ spektral verileri kurulur.

(5.54) algoritmasından $q(x), h, H, a\ ve$ a ifadeleri kurulur.

Algoritma 5.3.5. $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n=0,\mp1,\mp2,\ldots}$ iki spektrum verileri verilsin. $q(x), h, H, a\ ve$ a ifadeleri kurulur.

(5.33) den $\mathrm{M}(\lambda)$ ifadesini kurulur.

Algoritma (5.55) ile $q(x), h, H, a\ ve$ a ifadeleri kurulur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tezde genelleşmiş fonksiyon katsayılı Sturm-Liouville operatörü için $(0,\pi)$ aralığında süreksiz bir a noktası alarak operatör için oluşacak düz ve ters problemler incelenmiştir. Buradan hareketle bu a noktasının operatöre ve spektral verilere nasıl yansıdığı ters problemi nasıl etkilediği anlatılmıştır.

Bu tezde özgün sonuçlar olup elde edilen sonuçlar konuya derinlik kazandırmış olup bundan sonra yapılacak çalışmalara kaynak olabilecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] V. A. Marchenko, “Sturm-liouville operators and their applications”. *Operator Theory: Advanced and Application*, Birkhauser, Basel, 1986.

[2] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions* part 1, Oxford University Press (Clarendon Press), 1962.

[3] J. W. Atkinson, *An Introduction to Motivation Princeton*, N. J.: Van Nostrand, 1964.

[4] P. J. Jorgensen, “High temperature transport processes in lithium niobate”, *Journal of physics and chemistry of solids,* pp. 2639-2648, December, 1969.

[5] J. B. Conway, *Functions of one complex variable,* (2nd edition), Springer, New York, NY, USA, 1995.

[6] G. Freiling ve V. Yurko, “Inverse sturm-liouville problems and their applications”, *Nova Science Publ. Inc*., Hungtinton, NY, 2001.

[7] D.G. Shepelsky, “The inverse problems of reconstructiıon of the medium’s conductivity in a class of discontinuous and increasing functions”, *Advances in Soviet Mathematics,* 19, pp. 209-231, 1994.

[8] M. Sat, “On the inverse problem for sturm-liouville operators with boundary conditions dependent on the spectral parameter”, *Elect. J. Of Different Equations,* vol., no. 26, pp.1-7, 2017.

[9] Y. P. Wang ve M. Sat “A uniqueness theorem on the inverse problem fort he dirac operatör”, *Electr. J. Of Different Equations*, vol., no.155, pp. 1-10, 2016.

[10] M. Dzh. Manafov, “Inverse spectral problems for energy-dependent sturm-liouville equations wıth fınıtely many poınt δ-interactıons*”, Electronic Journal of Differential Equations*, Vol., No. 11, pp. 1–12, 2016.

[11] M. Dzh. Manafov, “Inverse spectral problems for energy-dependent sturm-liouville equations with δ−interaction”, *Filomat* 30:11, pp. 2935–2946, 2016.

[12] O. H. Hald, “Discontinuous inverse eigenvalue problems”, *Comm. on Pure ad Appl.* Math. 37, pp. 53-72, 1986.

[13] S. Albeverio ve F. Gesztesy, *R. Hoegh-Krohn, H. Holden with an Appendix by P. Exer, Solvable Models in Quantum Mechanics,* (second edition), AMS Chelsee Publ., 2005.

[14] R. K. Amirov, “On sturm-liouville operators with disontinuty conditions inside an interval”, *J. of Math. Anal. Appl.* 317, pp. 163-176, 2006.

[15] A. Kablan ve M. Dzh. Manafov; “Sturm-liouville problems with finitely many point δ- integrations and eigen-parameter in boundary condition”, *Miskole Math. Notes,* vol. 17, no 2, pp. 911-923, 2016.

[16] M. Kadakal ve O.S. Mukhtarov; “Sturm-liouville problems with discontinuites at two points”. *Comp. And Math. With Appl*., vol. 54, pp. 1367-1379, 2007.

[17] O. S. Mukhtarov, M. Kadakal ve F.S. Mukhtarov, ; “Eigenvalues and normalized eigenfunctions of discontinuous sturm-liouville problem with transmission conditions”. *Rep. Math. Phys,* v.54, pp. 41-56, 2004.

[18] L. I. Mammadova, “Represantationon the solution of sturm-liouville equation with discontinuity conditions interior to interval”, *Proceedings of IMM of NAS of Azerb.* 33, pp. 127-136, 2010.
[19] B. M. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville Problems*, VSP, Zeist, 1987.
[20] I. M. Guseniev ve L. I. Mammadova, “Reconstruction of the diffusion equation with singular coefficients for two spectra”, *Doklady Akademii Nauk*, 471:1, pp. 13-16; *Eng. Transl: Doklady Mathematics*, 90:1, pp. 401-404, 2014.
[21] E. A. Conddington ve N. Levinson, “Theory of ordinary differential equations”, *McGraw-Hill*, New York, 1955.
[22] W. Eberhard, G. Freiling, ve A. Schneider, “On the distribution of the eigenvalues of a class of indefinite eigenvalue problems”, *Different. and Integral Equations 3* pp. 1167-1179, 1990.
[23] B. Musayev ve M. Alp, *Foksiyonel Analiz*, Nobel Yayınları, 2000.
[24] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators*. Ungar, New York, 1968.
[25] J. Pöschel ve E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, New York, 1987.

KİŞİSEL BİLGİLER

Ad Soyad : Sinan SEVİNÇ

Doğum Yeri : Kırıkhan/HATAY

Doğum Tarihi : 22.01.1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E posta : sinan_svnc@hotmail.com

EĞİTİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Tezsiz Yüksek Lisans	Matematik Öğretmenliği	Adıyaman Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2009
Lise	Fen Bilimleri	Hatay/Dörtyol Atatürk Lisesi	2003

Yayınlar