T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK SAYILARI, ARALIK FONKSİYONLARI VE UYGULAMALAR

LOKMAN DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2018

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK SAYILARI, ARALIK FONKSİYONLARI VE UYGULAMALAR

Lokman DÜNDAR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 13/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ayhan ESİ
Danışman

Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR
Üye

Doç. Dr. Nazif ÇALIŞ
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ARALIK SAYILARI, ARALIK FONKSİYONLARI VE UYGULAMALAR

Lokman DÜNDAR

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ayhan ESİ
Yıl : 2018, Sayfa sayısı: 28

Jüri : Prof. Dr. Ayhan ESİ
Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR
Doç. Dr. Nazif ÇALIŞ

Bu tez çalışmasında Aralık sayılarının cebirsel özellikleri, aralık sayı dizi uzaylarının çeşitli topolojik ve cebirsel özellikleri ile aralık fonksiyonlarını çalıştık.

Anahtar Kelimeler: Aralık sayısı; Aralık fonksiyonu; Aralık sayılarının dizi uzayları.

ABSTRACT

MSc Thesis

INTERVAL NUMBERS, INTERVAL FUNCTIONS AND APPLICATIONS

Lokman DÜNDAR

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ayhan ESİ
Year : 2018 , Number of pages: 28

Jury : Prof. Dr. Ayhan ESİ
Assoc. Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR
Assoc. Prof. Dr. Nazif ÇALIŞ

In this thesis, we worked algebraic properties of interval numbers, spaces of sequences of interval numbers various properties of topological and algebraic with interval functions.

Key Words: Interval numbers; Interval function; Sequence spaces of interval numbers.

BEYAN

"Aralık Sayıları, Aralık Fonksiyonları ve Uygulamalar" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Lokman DÜNDAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübeleri ile bana destek olan, özgüvenimi arttıran, hayata bakış açımı genişleten çok değerli hocam Prof. Dr. Ayhan ESİ' ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim eşime ve aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

c	: Yakınsak diziler uzayı
$\overline{c}$	: Yakınsak aralık sayı dizileri uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\overline{c}_0$	: $\overline{0} = [0, 0]$ aralık sayısına yakınsak aralık sayı dizileri uzayı
$\mathrm{I}\mathbb{R}$	: Aralık sayıları cümlesi
l_∞	: Sınırlı diziler uzayı
$\overline{l}_\infty$	: Sınırlı aralık sayı dizileri uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
sup	: En küçük üst sınır
w	: Reel terimli diziler uzayı
$\overline{w}$	: Reel terimli tüm aralık sayı dizilerinin uzayı

1. GİRİŞ

Aralık analizi sayısal hesaplamalardaki sonuçların kesinliğiyle ilgilenen nümerik analizin bir dalıdır. Aralık analizinde, nümerik analizdeki reel sayıların yerine aralık sayıları ve reel aritmetiğin yerine ise aralık aritmetiği kullanılır. Aralık analizi, fiziksel ölçümlerdeki yanlışlıklar, sayıların yuvarlanması veya kesilmesi nedeniyle sayısal hesaplamada meydana gelen hatalar için tam bir hata sınırı belirler. Hesaplama sonuçları reel eksen üzerinde kesin doğru cevaptan bilinmeyen bir uzaklıktadır. Hesaplanan sonuç ile kesin doğru sonuç arasındaki fark hata miktarıdır. Genelde yuvarlama veya kesme hatalarından kaynaklanan hata miktarları çok küçük olduğundan önemsenmez. Ancak bazı durumlarda bu hata miktarlarının bilinmesi son derece önemlidir. Kesin doğru olan hesaplama sonucu bir alt ve bir üst sınırdan oluşan bir aralık ile belirlenir.

Aşağıdaki örnek aralık analizi kullanılarak sayısal hesaplamadaki yuvarlamadan kaynaklanan hatanın hesaplanma yöntemini göstermektedir.

$x = 0.315 \; için$

$$f = 1 - x + \frac{x^2}{2} \tag{1.1}$$

ifadesini hesaplayacağız.

$$f = 1 - 0.315 + \frac{(0.315)^2}{2} = 0.7346125$$

Bu ifade üç ondalıklı olarak yuvarlama yapılırsa $f = 0.735$ elde edilir. Bu durumda hatanın büyüklüğü

$$0.735 - 0.7346125 = 0.0003875$$

olur.

Aynı hesabı aynı makinede üç ondalığa kadar aralık kullanarak yeniden hesaplayalım. Öncelikle,

$$x^2 = (0.315)^2 = 0.099225 = [0.09, 0.10]$$

aralığını elde ederek bu aralığı hesaplama süresince kullanalım. O halde,

$$f = 1 - 0.315 + \frac{(0.315)^2}{2} \in 0.685 + \frac{1}{2}[0.09, 0.10]$$

$$\in 0.685 + [0.045, 0.050] = [0.730, 0.735]$$

elde edilir. Böylelikle f' nin kesin doğru değeri $[0.730, 0.735]$ aralığında bulunur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Aralık aritmetiği fikri matematikte tamamen yeni değildir. Bu kavram tarih boyunca farklı isimler altında ortaya çımıştır. Örneğin, Arşimet M.Ö. 3. yüzyılda π sayısının alt ve üst sınırlarını $\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$ şeklinde hesaplamıştır. Bu fikir 20. yüzyılın başlarında yeniden keşfedilmiş gibi görünüyordu. Aralık aritmetiğinin bir formu 1924 yılında J.C. Burkill [20] ile ortaya çıktı. 1931 yılında R.C. Young [19] aralıklarla ve reel sayıların diğer alt kümeleriyle hesaplama kurallarını gösterdi. Daha sonra dijital sistemlerin güvenirliğini geliştirmek için aralık sayıları üzerinde aritmetik işlemler 1951 yılında Paul S. Dwyer [2] tarafından gösterildi. 1956 yılında Mieczyslaw Warmus [5] aralıklarla hesaplamalar için formüller önerdi. 1958 yılında Teruo Sunaga [6] tarafından nümerik analizde aralık cebiri üzerine kapsamlı bir makale yayınlandı.

Aralık aritmetiğinin modern gelişmeleri 1959 yılında R.E. Moore' un yayınladığı [3] teknik rapor ve Moore ve Yang [4] ile başladı. Moore [3] raporunda bir sayı sistemi geliştirdi ve kapalı reel aralıklarla bir aritmetik işlem gerçekleştirip bir bilgisayar üzerinde aralık aritmetiğinin nasıl uygulanabileceğinden bahsetti. O zamandan beri birçok araştırma makelesi ve kitap yayınlandı. 2002 yılında Kuo-Ping Chiao [17] aralık sayı dizilerini tanıttı ve aralık sayı dizilerinin alışılmış yakınsaklığını tanımladı. Şengönül ve Eryilmaz [18] aralık sayılarının yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzayların tam metrik uzay olduklarını gösterdiler. Son zamanlarda, Esi [7-12], Esi ve arkadaşları [13-15] aralık sayı dizilerinin bazı yakınsaklıklarını tanımlayıp bu dizi uzaylarının özelliklerini çalışmışlardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1.1. “V boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y \in V \; ve \; \alpha \in F$ için $V \times V \; den \; V \; ye$ tanımlı

$$+: (x, y) \to x + y$$

fonksiyonu (işlemi) ve $F \times V \; den \; V \; ye$ tanımlı

$$\cdot: (a, x) \to ax$$

fonksiyonu (işlemi) aşağıdaki aksiyomları sağlarsa V kümesine F üzerinde bir vektör uzayı denir ($\alpha. x$ yerine kısaca αx yazarız).

$Her \; \alpha, \beta \in F \; ve \; her \; x, y, z \in V \; için$

$(\boldsymbol{a})$ $x + y = y + x, x + (y + z) = (x + y) + z;$

$(\boldsymbol{b})$ $x + 0 = x \; olacak \; şekilde \; (x \; den \; bağımsız) \; bir \; tek \; 0 \in V \; vardır;$

$(\boldsymbol{c})$ $x + (-x) = 0 \; olacak \; şekilde \; bir \; tek - x \in V \; vardır;$

$(\boldsymbol{d})$ $1x = x, \qquad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$

$(\boldsymbol{e})$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$

$x + y$ işlemine vektör toplamı, αx işlemine skaler çarpım adı verilir. $V \; nin$ elemanlarına nokta veya vektör adı verilir ve $\alpha, \beta, ... \in F$ sayılarına skaler denir. Eğer α rastgele bir reel sayı ise (yani $F = \mathbb{R}$ ise) V ye bir reel vektör uzay adı verilir ve α rastgele bir kompleks sayı ise (yani $F = \mathbb{C}$ ise) V ye bir kompleks vektör uzay adı verilir.” [21]

Tanım 3.1.2. “V bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq U \subset V$ olsun. Eğer $U \; nun$ kendisi bir vektör uzay (vektör toplamı ve skaler çarpım $V \; deki$ ile aynı olmak üzere) ise $U \; ya \; V \; nin$ bir vektör alt uzayı (veya lineer manifold, lineer alt uzayı) denir. Bu tanım her $\alpha, \beta \in F, ve \; x, y \in U \; için$

$$\alpha x + \beta y \in U$$

olma koşulu ile denktir (buna altuzay testi adı verilir).” [21]

Tanım 3.1.3. “X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde tanımlı bir metrik, her $x, y \in X \; için$

$(\boldsymbol{a})$ $d(x, y) \geq 0;$

$(\boldsymbol{b})$ $d(x,y)=0 \;\Leftrightarrow x=y$

$(\boldsymbol{c})$ $d(x,y)=d(y,x);\; (simetri)$

$ve\ her\ x,y,z \in X\ için$

$(\boldsymbol{d})$ $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ (üç$gen\ eşitsizliği$)

özelliklerini sağlayan bir

$$d : X \text{ x } X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur. Eğer d, X üzerinde bir metrik ise o zaman (X,d) çiftine bir metrik uzay denir." [21]

Tanım 3.1.4. "X $(F$ ü$zerinde)$ bir vektör uzay olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur. Her $x,y \in X\ ve\ her\ \alpha \in F\ için$

(a) $\|x\| \geq 0;$

(b) $\|x\| = 0\ ancak\ ve\ ancak\ x = 0;$

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|;$

(d) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına normlu vektör uzay ya da sadece normlu uzay adı verilir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir." [21]

Tanım 3.1.5. "Bir (X,d) metrik uzayında bir dizi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden (X,d) metrik uzayı içine tanımı bir f fonksiyonudur. Pratikte yaygın olarak bir dizi için bir altindis notasyonu kullanılır ve $f(n)\ yerine\ x_n$ yazılır ve dizi

$$(x_n) \equiv x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

ile gösterilir. O halde eğer (x_n), X kümesinde bir dizi ise $(x_n)\ ye$ (X,d) metrik uzayında bir dizidir denir." [21]

Tanım 3.1.6. "(X,d) metrik uzayında bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > N\ için$

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine $x \in X\ ye$ yakınsıyor denir. Bu durumda $(x_n), x$ limitli bir yakınsak dizidir deriz ve

$$n \to \infty\ için\ d(x_n, x) \to 0$$

yazarız veya yakınsaklığı tanımlayan metrik genel durumdan açıkça anlaşılabiliyorsa basitçe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ veya \ x_n \to x$$

yazarız.” [21]

Tanım 3.1.7. “Bir (X, d) metrik uzayında bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n > N \ için$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.” [21]

Tanım 3.1.8. “Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir metrik uzaya bir tam metrik uzay denir; yani bir (X, d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi $X \ nin$ bir elemanına yakınsarsa $X \ e$ tamdır denir.” [21]

Tanım 3.1.9. $X = \mathbb{R} \ yada \ X = \mathbb{C}$ olmak üzere $her \ n = 1,2,3, \dots için \ x_n \in X$ olan $x = (x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots))$ biçimindeki tüm dizilerin kümesi w olsun.

$$c_0 = \left\{x = (x_n) \in w : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$$

$$c = \{x = (x_n) \in w : (x_n) \ yakınsak\}$$

$$l_\infty = \{x = (x_n) \in w : (x_n) \ sınırlı\}$$

şeklinde tanımlanan dizi uzaylarına sırasıyla sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizi uzayı denir.

Lemma 3.1.1. Her k için $p_k > 0$ ve $H = \sup_k p_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$|a_k + b_k|^{p_k} \le C[|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}]$$

$C = \max(1, 2^{H-1})$ dir.

Lemma 3.1.2. $k = 1,2,3, \dots, n \ ve \ a_k, b_k \ge 0$ olmak üzere

a) $0 < p_k \le 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p_k} \le \sum_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k} + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^{p_k}$$

b) $p_k \ge 1$ ise

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p_k}\right\}^{1/p_k} \le \left\{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k}\right\}^{1/p_k} + \left\{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^{p_k}\right\}^{1/p_k} \ dir.$$

Lemma 3.1.3. Normlu vektör uzaydaki toplama ve skalerle çarpma (yani lineer uzay işlemleri) bu uzaydaki norm metriğine göre süreklidir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. Aralık Sayıları

Bu çalışmada iki reel sayı ile sınırlanan reel sayıların kapalı bir alt kümesine bir aralık sayısı diyeceğiz ve $X = [\underline{X}, \overline{X}] = \{x \in \mathbb{R}: \underline{X} \le x \le \overline{X}\}$ şeklinde göstereceğiz. Bu şekilde bir aralık bir cümle olarak düşünülebilir ve bu sayede üzerinde cümle işlemleri ile aritmetik işlemler tanımlanabilir. Tüm aralık sayılarının cümlesini $\mathrm{I}\mathbb{R}$ ile göstereceğiz. Burada $\underline{X}$ ve $\overline{X}$, X aralık sayısının sırası ile alt ve üst sınırlarını göstermektedir.

Tanım 4.1.1 (Aralık Sayılarının Eşitliği). $X, Y \in \mathrm{I}\mathbb{R}$ aralık sayıları için,

$$X = Y \Leftrightarrow \underline{X} = \underline{Y}\,,\ \overline{X} = \overline{Y} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.2 (Dejenere Aralık). Eğer $\underline{X} = \overline{X}$ ise X aralığına dejenere aralık denir. Bir $[X, X]$ dejenere aralığı X ile gösterilir. Örneğin sıfır dejenere aralığı aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\overline{0} = [0, 0]$$

Tanım 4.1.3 (Kesişim ve Birleşim). X ve Y iki aralık sayısının kesişimi

$$X \cap Y = [max\{\underline{X}, \underline{Y}\}\,, min\{\overline{X}, \overline{Y}\}]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$\overline{Y} < \underline{X}\ veya\ \overline{X} < \underline{Y} \Longrightarrow X \cap Y = \emptyset \text{ dir.}$$

X ve Y iki aralık sayısının birleşimi ise

$$X \cup Y = [min\{\underline{X}, \underline{Y}\}\,, max\{\overline{X}, \overline{Y}\}]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.1. $X = [-3,3]\ ve\ Y = [2,4]$ aralık sayıları için,

$$X \cap Y = [max\{-3,2\}\,, min\{3,4\}] = [2,3]$$

$$X \cup Y = [min\{-3,2\}\,, max\{3,4\}] = [-3,4]$$

Kesişimin Önemi : Kesişim aralık analizinde önemli bir rol oynar. Bir hesaplama sonucunda iki aralık sayısı elde edildiği zaman kesişim daha dar bir sonuç verebilir.

Örnek 4.1.2. Varsayalım ki fiziksel bir q niceliğinin birbirinden bağımsız bir ölçümü olsun. Birinci ölçüm 0.2' den az bir hata payı ile $q = 10.3$ olsun. İkinci ölçüm ise 0.2' den az bir hata payı ile $q = 10.4$ olsun. Bu ölçümleri sırasıyla

$$X = [10.1\,, 10.5]\ ve\ Y = [10.2\,, 10.6]$$

aralık sayıları olarak yazabiliriz. Bu q değeri $X \cap Y = [10.2\,, 10.5]$ aralığında olur.

Tanım 4.1.4 (Genişlik, Mutlak Değer, Orta Nokta). Bir X aralık sayısının genişliği

$$w(X) = \overline{X} - \underline{X} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir X aralık sayısının mutlak değeri $|X|$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$|X| = max\{|\underline{X}|\,, |\overline{X}|\} \tag{4.3}$$

Bir X aralık sayısının orta noktası

$$m(X) = \frac{1}{2}(\overline{X} + \underline{X})$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.3. $X = [0,4]\ ve\ Y = [-2,3]$ olsun.

$$w(X) = 4 - 0 = 4$$

$$w(Y) = 3 - (-2) = 5$$

$$|X| = max\{|0|\,, |4|\} = 4$$

$$|Y| = max\{|-2|\,, |3|\} = 3$$

$$m(X) = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2$$

$$m(Y) = \frac{1}{2}(-2 + 3) = \frac{1}{2}$$

Tanım 4.1.5 (Sıralama Bağıntısı). Aralık sayıları için reel sayılardaki " $<$ " bağıntısının yerini tutan geçişken özelliğine sahip sıralama bağıntısı aralık sayıları için cümle içermesi şeklindedir ve

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \overline{X} \leq \overline{Y}\ ve\ \underline{Y} \leq \underline{X}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2. Aralık Aritmetiği

Aralık sayıları üzerinde aritmetik işlemler tanımlanabilir. Aralık sayıları üzerinde yapılan işlemler aslında cümle üzerinde yapılan işlemlerdir. Örneğin iki aralık sayısını topladığımızda sonuç olarak ortaya çıkan aralık sayısı bu aralık sayılarının içindeki tüm ikili sayıların toplamından oluşan bir cümledir. $X \; ve \; Y$ aralık sayıları ve $\odot \in \{+ \, , - \, , \cdot \, , : \}$ olsun. Aritmetik işlemlerin kümesi

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X \, , y \in Y\}$$

şeklinde genel bir form ile tanımlanır.

Tanım 4.2.1 (Aralık Sayılarının Toplamı). $X = [\underline{X}, \overline{X}] \; ve \; Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ aralık sayılarının toplamı aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$x \in X \Rightarrow \underline{X} \leq x \leq \overline{X} \text{ ve } y \in Y \Rightarrow \underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$$

olduğundan dolayı eşitsizlikler toplanırsa

$$\underline{X} + \underline{Y} \leq x + y \leq \overline{X} + \overline{Y}$$

ve

$$x + y \in X + Y$$

elde edilir. Buradan iki aralık sayısının toplamı

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y} \, , \overline{X} + \overline{Y} \,] \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.1. $X = [-1{,}4] \; ve \; Y = [-2{,}2]$ olsun.

$$X + Y = [(-1) + (-2) \, , 4 + 2] = [-3{,}6]$$

Tanım 4.2.2 (Aralık Sayılarının Farkı). $X = [\underline{X}, \overline{X}] \; ve \; Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ aralık sayılarının farkı toplama işlemine benzer şekilde aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\underline{X} \leq x \leq \overline{X} \; ve - \overline{Y} \leq -y \leq -\underline{Y}$$

olduğundan dolayı eşitsizlikler toplanırsa

$$\underline{X} - \overline{Y} \leq x - y \leq \overline{X} - \underline{Y}$$

elde edilir ve buradan iki aralık sayısının farkı

$$X - Y = [\underline{X} - \overline{Y} \, , \overline{X} - \underline{Y}]$$

şeklinde tanımlanır. $X - Y = X + (-Y)$ olduğu dikkate alındığında burada

$$-Y = \left[-\overline{Y}\,, -\underline{Y}\right] = \{y :\ -y \in Y\}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.2. $X = [-2{,}1]\ ve\ Y = [1{,}3]$ olsun.

$$-Y = [-3, -1] \text{ ve}$$

$$X - Y = X + (-Y) = [-2\,, 1] + [-3\,, -1] = [-5\,, 0]$$

elde edilir.

Tanım 4.2.3 (Aralık Sayılarının Çarpımı). $X = \left[\underline{X}, \overline{X}\right]\ ve\ Y = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]$ iki aralık sayısı için çarpma işlemi,

$$S = \left\{\underline{XY}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{XY}\right\} \text{ olmak üzere}$$

$$X.Y = [minS, maxS]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.3. $X = [-3, -1]\ ve\ Y = [0{,}2]$ olsun.

$$S = \{-3.0, -3.2, -1.0, -1.2\} = \{-6, -2, 0\} \text{ ve}$$

$$X.Y = [minS, maxS] = [-6, 0]$$

elde edilir.

Tanım 4.2.4 (Aralık Sayılarının Skalerle Çarpımı). $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ herhangi bir aralık sayısı için,

$$\alpha \geq 0\ ise\ \alpha X = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \underline{X} \leq x \leq \overline{X}\right\} = [\alpha\underline{X}, \alpha\overline{X}]$$

ve

$$\alpha < 0\ ise\ \alpha X = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \overline{X} \leq x \leq \underline{X}\right\} = [\alpha\overline{X}, \alpha\underline{X}]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.4. $X = [1, 2]$ olsun.

$$\alpha = 3 \text{ için } 3.\,[1{,}2] = [3.1, 3.2] = [3, 6]$$

$$\alpha = -2 \text{ için } -2.\,[1, 2] = [-2.2, -2.1] = [-4, -2] \text{ olur.}$$

Tanım 4.2.5 (Aralık Sayılarının Bölümü). $X = \left[\underline{X}, \overline{X}\right]\ ve\ Y = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]$ iki aralık sayısı için bölme işlemi,

$$X/Y = X.(1/Y)$$

$$\overline{0} \neq \overline{Y}\ için\ 1/Y = \{y : 1/y \in Y\} = [1/\overline{Y}, 1/\underline{Y}]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.5. $X = [-2,3]\ ve\ Y = [2,5]$ olsun.

$$\frac{1}{Y} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$$

$$X/Y = X.(1/Y) = [-2,3].\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right] = [-1, \frac{3}{2}]$$

elde edilir.

4.3. Aralık Aritmetiğinin Cebirsel Özellikleri

Aralık aritmetiğinin işlemleri, $X\ ve\ Y$ aralık sayıları ve $\odot \in \{+\,,-\,,\cdot\,,:\}$ olmak üzere

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X\,, y \in Y\} \tag{4.5}$$

şeklinde genel bir formda tanımlanmıştı. Bu aritmetik işlemlerin bazı cebirsel özelliklerini inceleyelim.

Teorem 4.3.1. X, Y, Z aralık sayıları olmak üzere

Değişme özelliği : $X + Y = Y + X, \quad X.Y = Y.X$ (4.6)

Birleşme özelliği : $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z, \quad X.(Y.Z) = (X.Y).Z$ (4.7)

Toplama işleminin birim elemanı : $X + \overline{0} = \overline{0} + X = X$ (4.8)

Çarpma işleminin yutan elemanı : $X.\overline{0} = \overline{0}.X = \overline{0}$ (4.9)

Çarpma işleminin birim elemanı : $X.\overline{1} = \overline{1}.X = X$ (4.10)

Soldan dağılım : $Z(X + Y) \subseteq ZX + ZY$ (4.11)

a) $Z = [Z, Z]$ bir dejenere aralık

b) $X = Y = \overline{0}$

c) $\forall\, x \in X\ ve\ \forall\, y \in Y$ için $xy \geq 0$

Bu durumlar hariç $Z(X + Y) \neq ZX + ZY$ dir.

İspat.

(4.6) : $\odot \in \{+\,, \cdot\}$ olsun. Bu durumda,

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X\,, y \in Y\}$$
$$= \{y \odot x : y \in Y\,, x \in X\} = Y \odot X$$

(4.7) : $\odot \in \{+\,, \cdot\}$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
(X \odot Y) \odot Z &= \{a \odot z : a \in X \odot Y, z \in Z\} \\
&= \{(x \odot y) \odot z : x \in X, y \in Y, z \in Z\} \\
&= \{x \odot (y \odot z) : x \in X, y \in Y, z \in Z\} \\
&= \{x \odot b : x \in X, b \in Y \odot Z\} = X \odot (Y \odot Z)
\end{aligned}
$$

(4.8) ve (4.9) için $\odot \in \{+, \cdot\}$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
X \odot \overline{0} &= \{x \odot 0 : x \in X, 0 \in \overline{0}\} \\
&= \{0 \odot x : 0 \in \overline{0}, x \in X\} = \overline{0} \odot X
\end{aligned}
$$

(4.10) :

$$
\begin{aligned}
X.\overline{1} &= \{x.1 : x \in X, 1 \in \overline{1}\} \\
&= \{1.x : 1 \in \overline{1}, x \in X\} \\
&= \{x : x \in X\} = X
\end{aligned}
$$

(4.11) :

a) : $Z = [Z, Z]$ bir dejenere aralık olmak üzere

$$
\begin{aligned}
Z.(X+Y) &= \{Z.a : a \in X+Y\} \\
&= \{Z.(x+y) : x \in X, y \in Y\} \\
&= \{Z.x + Z.y : x \in X, y \in Y\} = ZX + ZY
\end{aligned}
$$

elde edilir.

b) : $Z(\overline{0}+\overline{0}) = Z\overline{0} = \overline{0} = Z\overline{0} + Z\overline{0}$

c) : $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ aralık sayıları için genelliği bozmadan $\underline{X} \geq 0$ ve $\underline{Y} \geq 0$ durumunu düşünelim. $Z = [\underline{Z}, \overline{Z}]$ aralık sayısı için eğer $\underline{Z} \geq 0$ ise,

$$
Z(X+Y) = [\underline{Z}(\underline{X}+\underline{Y}), \overline{Z}(\overline{X}+\overline{Y})]
$$

ve

$$
\begin{aligned}
ZX + ZY &= [\underline{ZX}, \overline{ZX}] + [\underline{ZY}, \overline{ZY}] \\
&= [\underline{Z}(\underline{X}+\underline{Y}), \overline{Z}(\overline{X}+\overline{Y})]
\end{aligned}
$$

Eğer $\overline{Z} \leq 0$ ise $-Z$ durumu dikkate alınırsa $\underline{Z} \geq 0$ ile aynı durum ve sonuç olur. Eğer $\underline{Z}\overline{Z} < 0$ ise

$$
Z(X+Y) = [\underline{Z}(\overline{X}+\overline{Y}), \overline{Z}(\overline{X}+\overline{Y})]
$$

ve

$$ZX + ZY = [\underline{Z}\underline{X}, \overline{Z}\overline{X}] + [\underline{Z}\underline{Y}, \overline{Z}\overline{Y}]$$
$$= [\underline{Z}(\underline{X} + \underline{Y}), \overline{Z}(\overline{X} + \overline{Y})]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.3.1. $Z = [1,2]$, $X = \overline{1} = [1,1]$ ve $Y = -\overline{1} = [-1,-1]$ aralık sayıları için

$$Z(X + Y) = [1,2].\left(\overline{1} - \overline{1}\right) = [1,2].0 = 0$$
$$ZX + ZY = [1,2].[1,1] + [1,2].[-1,-1] = [-1,1] \neq 0$$

$Z(X + Y) \neq ZX + ZY$ olur.

Teorem 4.3.2. Herhangi X, Y ve Z aralık sayıları için,

$X + Z = Y + Z \Longrightarrow X = Y$ dir.

İspat. Herhangi $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ ve $Z = [\underline{Z}, \overline{Z}]$ aralık sayıları için,

$$X + Z = Y + Z$$

ise

$$[\underline{X}, \overline{X}] + [\underline{Z}, \overline{Z}] = [\underline{Y}, \overline{Y}] + [\underline{Z}, \overline{Z}]$$
$$[\underline{X} + \underline{Z}, \overline{X} + \overline{Z}] = [\underline{Y} + \underline{Z}, \overline{Y} + \overline{Z}]$$

elde edilir. Aralık sayılarının eşitliği tanımındaki (4.1) ifadesinden

$$\underline{X} + \underline{Z} = \underline{Y} + \underline{Z} \; ve \; \overline{X} + \overline{Z} = \overline{Y} + \overline{Z}$$

olur. $\underline{X}, \overline{X}, \underline{Y}, \overline{Y}, \underline{Z}, \overline{Z} \in \mathbb{R}$ olduğundan reel sayıların kısaltma özelliğinden

$\underline{X} = \underline{Y}$ ve $\overline{X} = \overline{Y}$ elde edilir.

Aralık sayılarının eşitliği tanımındaki (4.1) ifadesinden $X = [\underline{X}, \overline{X}] = [\underline{Y}, \overline{Y}] = Y$ olur.

Teorem 4.3.3. Herhangi X, Y ve Z aralık sayıları için,

$$ZX = ZY$$

ise $X = Y$ eşitliği her zaman doğru olmayabilir.

İspat. Varsayalım ki herhangi X, Y ve Z aralık sayıları için $ZX = ZY$ olsun. $X = Y$ eşitliğinin sağlayamayabileceğini aşağıdaki örnekle gösterelim.

$X = [0,1]$, $Y = [1,1]$ ve $Z = [0,2]$ aralık sayılarını alalım. Bu durumda,

$$[0,2].[0,1] = [0,2].[1,1]$$
$$[0,2] = [0,2]$$

elde edilir. Ancak $[0,1] \neq [1,1]$ olduğundan varsayamımızla çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.3.1 (Simetrik Aralıklar). $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ aralık sayısı olsun. Eğer

$$\underline{X} = -\overline{X}$$

ise X aralık sayısına simetrik aralık denir. Örneğin $[-3, 3]\ ve\ [-\pi, \pi]$ aralık sayıları simetrik aralıklardır. Her simetrik aralık 0 orta noktasına sahiptir.

X bir simetrik aralık sayısı ise (4.2) ve (4.3) ifadelerinden

$$|X| = \frac{1}{2}w(X)\ ve\ X = |X|[-1, 1]$$

eşitlikleri yazılabilir.

Teorem 4.3.4. $X, Y, Z\ , T$ aralık sayıları ve $\odot \in \{+\ , -\ ,\ \cdot\ ,\ /\}$ olsun.

$$X \subseteq Z\ ve\ Y \subseteq T \Longrightarrow X \odot Y \subseteq Z \odot T$$

ifadesi yazılabilir.

İspat. $X \subseteq Z\ ve\ Y \subseteq T$ olsun.

$$\begin{aligned} X \odot Y &= \{x \odot y : x \in X\ , y \in Y\} \\ &\subseteq \{z \odot t\ : z \in Z\ , t \in T\} \\ &= Z \odot T \end{aligned}$$

4.4. Aralık Fonksiyonları

$x \in \mathbb{R}\ ve\ f(x)$ reel değerli bir fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}$ değeri bir X aralığında yer aldığından

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

şeklinde f fonksiyonu altında bu X aralığının bir görünütüsü bulunabilir.

Bu f fonksiyonu çok değişkenli bir fonksiyon olarak ele alınırsa daha genel olarak

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \{f(x_1, \ldots, x_n) :\ x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi $f(x) = x^2\ ,\ x \in \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ise, $f(X) = \{x^2 : x \in X\}$ şeklinde olacaktır. Bu cümleyi

$$f(X) = \begin{cases} \left[\underline{X}^2, \overline{X}^2\right], & 0 \le \underline{X} \le \overline{X} \\ \left[\overline{X}^2, \underline{X}^2\right], & \underline{X} \le \overline{X} \le 0 \\ \left[0, max\left\{\underline{X}^2, \overline{X}^2\right\}\right], & \underline{X} < 0 < \overline{X} \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

4.4.1. Aralık Değişkenli Monoton Fonksiyonlar

Şimdi fonksiyonlara aralık değerlerini uygulayalım. $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ aralık sayısı için

$$f(X) = [f(\underline{X}), f(\overline{X})]$$

şeklinde gösterilir. Örneğin,

$$f(x) = \exp(\mathrm{x}) = e^x, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir $x \in X$ değeri $[\underline{X}, \overline{X}]$ aralığında değiştiğinden üstel fonksiyon $\exp(\underline{X})$ ile $\exp(\overline{X})$ arasında değerler alır. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilir :

$$\exp(X) = [\exp(\underline{X}), \exp(\overline{X})]$$

Bu durum logaritmik fonksiyonlar içinde benzer şekildedir ve

$$f(x) = \log x\,, \qquad (x > 0) \text{ için}$$

$$\log X = [\log(\underline{X}), \log(\overline{X})], \qquad \underline{X} > 0 \; için$$

şeklinde tanımlanır.

Üstel fonksiyon daha genel bir formda,

$$x > 0 \; ve \; y > 0 \; için \; f(x) = x^y \text{ olmak üzere}$$

$$X^y = [\underline{X}^y, \overline{X}^y], \qquad \underline{X} > 0 \; ve \; y > 0 \; için$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda yazdığımız fonksiyonlar artan fonksiyonlardır. Azalan bir fonksiyonda sınır noktaları farklı olacaktır. Örneğin x değeri $\underline{X}$ ile $\overline{X}$ aralığında arttıkça $\exp(-x)$ değeri $\exp(-\underline{X})$ ile $\exp(-\overline{X})$ aralığında azalır. Bu durumda aşağıdaki sonuç ortaya çıkar :

$$\exp(-X) = [\exp(-\overline{X}), \exp(-\underline{X})]$$

4.4.2. Reel Fonksiyonların Aralık Değerli Uzantısı

$X = [\underline{X}, \overline{X}]$ olmak üzere $f(x) = 1 - x,\; x \in X$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu fonksiyonun aralık değerli uzantısı

$X = [\underline{X}, \overline{X}]$ olmak üzere $F(X) = 1 - X$

şeklinde tanımlanır.

Eğer aralık dejenere aralık ise f fonksiyonunun aralık uzantısı

$$F([x, x]) = f(x)$$

şeklindedir.

Reel değerli fonksiyonlar ile aralık değerli fonksiyonlar arasındaki özel bir farkı bir örnek üzerinde gösterelim :

$$f(x) = x(1 - x), \qquad x \in [0,1]$$

$$g(x) = x - x^2 \qquad x \in [0,1]$$

olmak üzere f ve g reel değişkenli fonksiyonları göz önüne alalım.

Reel aritmetikte $x(1 - x) = x - x^2$ olduğundan her iki fonksiyon eşittir. x değişkeni 0 ile 1 arasında arttıkça $f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonlarının değerleri 0 ile $\frac{1}{4}$ arasında artar ve $0'$ a doğru geri azalır. Buradan,

$$f([0,1]) = g([0,1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

elde edilir.

Şimdi bu f ve g fonksiyonlarının aralık değerli uzantılarını inceleyelim. Bu fonksiyonların aralık değerli uzantıları

$$F(X) = X(1 - X), \qquad X = [\underline{X}, \overline{X}]$$

$$G(X) = X - X^2, \qquad X = [\underline{X}, \overline{X}]$$

şeklindedir. Aralık aritmetiğinde $X^2 \neq X.X$ olduğunu biliyoruz.

$X = [\underline{X}, \overline{X}] \subseteq [0,1]$ aralığı için

$$\begin{aligned} F(X) &= [\underline{X}, \overline{X}]([1,1] - [\underline{X}, \overline{X}]) \\ &= [\underline{X}, \overline{X}]([1,1] + [-\overline{X}, -\underline{X}]) \\ &= [\underline{X}, \overline{X}]([1 - \overline{X}, 1 - \underline{X}]) \\ &= [minS\,, maxS] \end{aligned}$$

$$S = \{\underline{X}(1 - \overline{X}), \underline{X}(1 - \underline{X}), \overline{X}(1 - \overline{X}), \overline{X}(1 - \underline{X})\}$$

Diğer yandan,

$$G(X) = [\underline{X}, \overline{X}] - [\underline{X}, \overline{X}]^2$$

$$= [\underline{X}, \overline{X}] - [\underline{X}^2, \overline{X}^2]$$
$$= [\underline{X}, \overline{X}] + [-\overline{X}^2, -\underline{X}^2,]$$
$$= [\underline{X} - \overline{X}^2, \overline{X} - \underline{X}^2]$$

$X = [0,1]$ değeri yerine konulursa $F(X) \neq G(X)$ olduğu görülür. Ayrıca $F([0,1]) = [0,1]\ ve\ G([0,1]) = [-1,1]$ değerlerinin reel değerli fonksiyon değerleri ile eşit olmadığı da görülür. Reel değerli fonksiyonlarda eşitliğin sağlanırken aralık değerli fonksiyonlarda bu eşitliğin her zaman sağlanmamasının nedeni aralık aritmetiğinde dağılımın eksikliği ile toplama ve çarpma işlemlerinin tersinden dolayıdır.

Tanım 4.4.2.1. Bir f fonksiyonunun aralık değerli uzantısı olan F fonksiyonunun değişkenleri dejenere aralıklar ise bu f fonksiyonunun çok değişkenli uzantısı

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.4.1. Eğer $\forall\ i = 1,2, \dots, n\ için\ Y_i \subseteq X_i \Longrightarrow F(Y_1, \dots, Y_n) \subseteq F(X_1, \dots, X_n)$ ise $F(X_1, \dots, X_n)$ aralık değerli uzantısı izotonik kapsama olarak adlandırılır.

Tanım 4.4.2. Bir rasyonel aralık fonksiyonu, bütün değerleri aralık değerli aritmetik işlemlerin özel bir sonlu dizisiyle tanımlanmış bir aralık değerli fonksiyondur.

Örnek 4.4.1. $F(X_1, X_2) = ([1, 2]X_1 + [0,1])X_2$ fonksiyonunu alalım. $F(X_1, X_2)$ fonksiyonu

$$T_1 = [1,2]X_1$$
$$T_2 = T_1 + [0,1]$$
$$F(X_1, X_2) = T_2X_2$$

şeklinde aralık aritmetiği işlemlerinin sonlu dizisine parçalanabildiğinden F rasyonel aralıklı bir fonksiyondur.

Teorem 4.4.1 (Aralık Analizinin Esas Teoremi). Eğer F, f fonksiyonun aralık uzantısı olan izotonik kapsama ise

$$f(X_1, \dots, X_n) \subseteq F(X_1, \dots, X_n)$$

olur.

İspat. Aralık uzantısı tanımı (4.12) ifadesinden $f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$ dir. Eğer F izotonik kapsama ise o zaman $(X_1, \dots, X_n)$ deki her $(x_1, \dots, x_n)$ için $F(X_1, \dots, X_n)$, f değerini içerir.

Tanım 4.4.3. f fonksiyonunun x reel değişkenleri ile X aralık değişkenlerinin ve reel aritmetik işlemleri ile aralık aritmetiği işlemlerinin değiştirilmesi sonucunda elde edilen F uzantısı doğal aralık uzantısı olarak adlandırılır.

Sonuç 4.4.1. Eğer F, rasyonel aralık fonksiyonu ve f fonksiyonunun aralık uzantısı ise

$$f(X_1, \dots, X_n) \subseteq F(X_1, \dots, X_n)$$

ifadesi yazılabilir.

Örnek 4.4.2. $p(x) = 1 - 5x + \frac{1}{3}x^3$ polinomu ve $2 \leq x \leq 3$ aralığı verildiğinde $p(x)$ polinomunun alabileceği değerlerin bir aralığını bulalım.

$p(x)$ polinomunun doğal bir aralık uzantısı olan aralık polinomu $P(X)$

$$1 - 5X + \frac{1}{3}X.X.X$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$P([2,3]) = 1 - 5.[2,3] + \frac{1}{3}[8,27] = \left[-\frac{34}{3}, 0\right]$$

olur. $\left[-\frac{34}{3}, 0\right]$ aralığı $p(x)$ polinomunun gerçek değerlerinin bir aralığıdır.

Şimdi $p(x)$ polinomunun farklı bir uzantısı

$$q(x) = 1 - x(5 - \frac{x^2}{3})$$

şeklinde yazılabilir. Bu $q(x)$ polinomunun doğal bir aralık uzantısı olan $Q(X)$

$$Q(X) = 1 - X.(5 - \frac{X.X}{3})$$

olur. Buradan,

$$Q([2,3]) = 1 - [2,3]\left(5 - \frac{[4,9]}{3}\right) = 1 - [2,3]\left[2, \frac{11}{3}\right] = 1 - [4,11] = [-10, -3]$$

olur. $[-10, -3]$ aralığı birinci aralık olan $\left[-\frac{34}{3}, 0\right]$ aralığından daha dar bir aralık olduğundan $p(x)$ polinomunun alabileceği değerler için daha iyi bir tahmin sağlar.

4.5. Aralık Dizileri

Tanım 4.5.1. $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $[\underline{Y}, \overline{Y}]$ iki aralık sayısı olmak üzere aralarındaki uzaklık,

$$\overline{d}(X,Y) = max\{|\underline{X}-\underline{Y}|\,,|\overline{X}-\overline{Y}|\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $X = [X,X]\ ve\ Y = [Y,Y]$ dejenere aralıkları özel olarak seçilirse $X\ ve\ Y$ arasındaki uzaklık reel sayılar arasındaki uzaklığa indirgenir ve ℝ' nin mutlak değer metriği

$$\overline{d}(X,Y) = |X-Y|$$

elde edilir.

Örnek 4.5.1. $X = [1{,}5]\ ve\ Y = [0{,}2]$ iki aralık sayısı arasındaki uzaklık

$$\overline{d}(X,Y) = max\{|1-0|\,,|5-2|\} = 3$$

olur.

İki aralık arasındaki uzaklık fonksiyonu olarak tanımlanan $\overline{d}$ fonksiyonunun Iℝ üzerinde bir metrik tanımladığı kolaylıkla gösterilebilir :

i) $\overline{d}(X,Y) \geq 0$;

ii) $\overline{d}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$;

iii) $\overline{d}(X,Y) = \overline{d}(Y,X)$;

iv) $\overline{d}(X,Y) \leq \overline{d}(X,Z) + \overline{d}(Z,Y)$.

Üçgen eşitsizliğinin sağlandığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir :

$$\begin{aligned}
\overline{d}(X,Z) + \overline{d}(Z,Y) &= max\{|\underline{X}-\underline{Z}|\,,|\overline{X}-\overline{Z}|\} + max\{|\underline{Z}-\underline{Y}|\,,|\overline{Z}-\overline{Y}|\} \\
&\geq max\{|\underline{X}-\underline{Z}| + |\underline{Z}-\underline{Y}|\,,|\overline{X}-\overline{Z}| + |\overline{Z}-\overline{Y}|\} \\
&\geq max\{|\underline{X}-\underline{Y}|\,,|\overline{X}-\overline{Y}|\} \\
&= \overline{d}(X,Y)
\end{aligned}$$

Tanım 4.5.2. $f\ :\ \mathbb{N} \to$ Iℝ ile $k \to f(k) = X\ ,\ X = (X_k)$ dönüşümünü tanımlayalım. $X = (X_k)$ aralık sayı dizisi ve X_k bu aralık sayı dizisinin k. terimi olarak adlandırılır.

Tanım 4.5.3. $X = (X_k)$ bir aralık sayı dizisi ve $X_0 = [\underline{X}_0, \overline{X}_0]$ bir aralık sayısı olsun. $\forall\ \varepsilon > 0\ \ ve\ \forall\ k \geq N$ için $\overline{d}(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $X = (X_k)$ aralık sayı dizisi $X_0 = [\underline{X}_0, \overline{X}_0]$ aralık sayısına yakınsaktır denir ve $\lim_{k\to\infty} X_k = X_0$ ile gösterilir. Yani;

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X_0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \underline{X}_k = \underline{X}_0\ ve\ \lim_{k\to\infty} \overline{X}_k = \overline{X}_0.$$

Örnek 4.5.2. $(X_k) = \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ olmak üzere (X_k) aralık sayı dizisini göz önüne alalım.

$$\lim_{k\to\infty} X_k = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] = [0,0] = \overline{0}$$

olup (X_k) dizisi $[0,0] = \overline{0}$ aralık sayısına yakınsar.

Teorem 4.5.1. Aralık aritmetiğindeki $\{+\,, -\,,\ \cdot\,,\ /\}$ işlemleri süreklidir.

İspat. Diğerleri benzer şekilde gösterilebileceğinden dolayı sadece $"+"$ işleminin sürekli olduğunu gösterelim. Metrik uzayda dizisel sürekli bir fonksiyonun sürekli olduğu gerçeğinden hareket ederek (X_k) ve (Y_k) iki aralık sayı dizisini göz önüne alalım ve $k\to\infty$ için

$$X_k \to X_0 \ \ ve\ Y_k \to Y_0$$

olsun. Aralık toplamları dizisi $(X_k + Y_k)$ olup,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(X_k + Y_k) &= \lim_{k\to\infty}\left[\underline{X}_k + \underline{Y}_k\,, \overline{X}_k + \overline{Y}_k\right]\\ &= \left[\lim_{k\to\infty}\left(\underline{X}_k + \underline{Y}_k\right), \lim_{k\to\infty}\left(\overline{X}_k + \overline{Y}_k\right)\right]\\ &= \left[\underline{X}_0 + \underline{Y}_0\,, \overline{X}_0 + \overline{Y}_0\right]\\ &= X_0 + Y_0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece + fonksiyonu dizisel sürekli, dolayısıyla süreklidir.

Tanım 4.5.4. Her k için $X_{k+1} \subseteq X_k$ ise (X_k) dizisine iç içe aralık dizisi denir.

Lemma 4.5.1. Her iç içe aralık dizisi (X_k) yakınsar ve $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$.

İspat. Dizilerin sınırlarını ele alalım.

$$\underline{X}_1 \le \underline{X}_2 \le \underline{X}_3 \le \cdots \le \overline{X}_3 \le \overline{X}_2 \le \overline{X}_1$$

$\left(\underline{X}_k\right)$ dizisi $\overline{X}_1$ ile üstten sınırlı reel sayıların azalmayan bir dizisidir ve $\lim\limits_{k\to\infty}\underline{X}_k = \underline{X}$ dir. Benzer şekilde $\left(\overline{X}_k\right)$ dizisi $\underline{X}_1$ ile alttan sınırlı reel sayıların artmayan bir dizisidir ve $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{X}_k = \overline{X}$ dir. Ayrıca her k için $\underline{X}_k \le \overline{X}_k$ olduğundan $\underline{X} \le \overline{X}$ olur. Böylelikle (X_k) dizisi $X = \left[\underline{X}\,, \overline{X}\right] = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ ‘ e yakınsar.

Reel terimli tüm aralık sayı dizilerinin kümesini $\overline{w}$ ile göstereceğiz. $\overline{w}$ dizi uzayı aşağıdaki özellikleri sağlayan bir quasi-vektör uzayıdır. [22]

1. $(X_k) + (Y_k) = (Y_k) + (X_k)$

2. $(X_k) + (Y_k) = (X_k) + (Z_k)\ ise\ (Y_k) = (Z_k)$

3. $(X_k) + \big((Y_k) + (Z_k)\big) = \big((X_k) + (Y_k)\big) + (Z_k)$

4. $(\alpha + \beta)(X_k) = \alpha(X_k) + \beta(X_k)$

5. $\alpha\big((X_k) + (Y_k)\big) = \alpha(X_k) + \alpha(Y_k)$

6. $\alpha\big(\beta(X_k)\big) = (\alpha\beta)(X_k) \quad (\alpha\beta \geq 0)$

7. $(X_k) = [1,1](X_k)$

$\overline{w}'nin$ sıfır elemanı $\overline{0} = [0, 0]$ şeklindedir.

4.6. Aralık Sayılarının Bazı Dizi Uzayları

$\overline{c}_0\,,\overline{c}\ ve\ \overline{l}_\infty$ aralık dizi uzayları sırasıyla sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı aralık sayı dizilerinin uzaylarıdır. Bu diziler sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$\overline{c}_0 = \left\{X = (X_k) \in \overline{w} : \lim_k X_k = \theta\,, \theta = [0,0]\right\},$$

$$\overline{c} = \left\{X = (X_k) \in \overline{w} : \lim_k X_k = \overline{x}_0\,, \overline{x}_0 \in \mathrm{I}\mathbb{R}\right\},$$

$$\overline{l}_\infty = \left\{X = (X_k) \in \overline{w} : \sup_k\{|\underline{X}_k|\,, |\overline{X}_k|\,\} < \infty\right\}.$$

$\overline{c}_0\,,\overline{c}\ ve\ \overline{l}_\infty$ aralık sayı dizi uzayları $\overline{w}$ uzayının alt uzaylarıdır. Ayrıca her $(X_k), (Y_k) \in \overline{c}_0$ (veya $\overline{c}\ ve\ \overline{l}_\infty$) için :

$$\overline{d}(X_k, Y_k) = \sup_k \max\{|\underline{X}_k - \underline{Y}_k|\,, |\overline{X}_k - \overline{Y}_k|\} \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{d}$ fonksiyonu metrik aksiyomlarını sağlar [18]. Böylece $(\overline{c}_0\,, \overline{d})$ $(veya\ (\overline{c}\,, \overline{d})\ ve\ (\,\overline{l}_\infty\,, \overline{d}))$ bir metrik uzaydır.

Tanım 4.6.1. Varsayalım ki $Y \in \overline{w}\ ve\ Y = [\underline{Y}_k, \overline{Y}_k]$ olsun. Eğer $\underline{Y}_k = \overline{Y}_k$ ise $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $Y = (Y_k)$ dizisine dejenere aralık dizisi adı verilir.

Eğer $X = (X_k)\ ve\ Y = (Y_k)$ dejenere aralık dizileri ise (4.13) ifadesinde tanımlanan $\overline{d}$ metriği klasik dizi uzaylarında (reel veya kompleks sayıların yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı) tanımlı

$$\overline{d}(X_k, Y_k) = \sup_k |\underline{X}_k - \underline{Y}_k|$$

metriğine indirgenir.

Her reel sayının aynı zamanda bir dejenere aralık olmasından dolayı tüm reel değerli dizilerin uzayı olan w uzayının tüm aralık sayı dizilerinin uzayı olan $\overline{w}$ uzayının dejenere olmuş şekli olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Bu nedenle $w'nin$ her alt uzayına bir dejenere dizi uzayı adı verilir. $c_0, c\,, l_\infty$ dizi uzayları sırası ile dejenere sıfıra yakınsak, dejenere yakınsak ve dejenere sınırlı dizi uzayları olarak adlandırılabilir.

Tanım 4.6.2. $X = (X_k) \in \overline{w}\ olsun.$ $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için $her\ n, m \geq N\ için\ \overline{d}(X_n, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ var ise $X = (X_k)$ aralık sayı dizisine aralık Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.6.1. $(\overline{c}_0\,, \overline{d})\,, (\,\overline{l}_\infty\,, \overline{d})\ ve\ (\overline{c}\,, \overline{d})$ aralık sayı dizi uzayları (4.13) ifadesinde tanımlanan metrik ile tam metrik uzaylardır.

İspat. Yalnızca $(\overline{c}_0\,, \overline{d})$ uzayının tam metrik uzay olduğunu gösterelim. Benzer bir biçimde diğerleri de gösterilebilir.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $(X^n) = (X_k^n) = (X_0^n, X_1^n,\ X_2^n, \ldots) \in \overline{c}_0$ ve $(\overline{x}^n)$ bir Cauchy dizisi olsun. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ için $\overline{d}(X_k^n, X_k^m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısını bulabiliriz. Dolayısıyla,

$$\overline{d}(X_k^n, X_k^m) = \sup_{n,m}\max\left\{\left|\underline{X}_k^n - \underline{X}_k^m\right|, \left|\overline{X}_k^n - \overline{X}_k^m\right|\right\} < \varepsilon$$

ve

$$\left|\underline{X}_k^n - \underline{X}_k^m\right| < \varepsilon\,, \qquad \left|\overline{X}_k^n - \overline{X}_k^m\right| < \varepsilon$$

yazılabilir. Böylelikle (X_k^n) $\mathbb{R}'de$ bir Cauchy dizisi olup $\mathbb{R}$ de bir Banach uzayı olduğundan (X_k^n) yakınsaktır. Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} X_k^n = X_k$ olsun. Böylece $\forall\, n, m \geq k_0$ için $\overline{d}(X_k^n, X_k^m) < \varepsilon$ olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} \overline{d}(X_k^n, X_k^m) = \overline{d}\left(X_k^n, \lim_{m\to\infty} X_k^m\right) = \overline{d}(X_k^n, X_k) < \varepsilon.$$

Böylece $n \to \infty$ için $X^n \to X$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\overline{d}(X_k, X_k^n - X_k^n) &= \sup_k\max\left\{\left|\underline{X}_k - \left(\underline{X}_k^n - \underline{X}_k^n\right)\right|, \left|\overline{X}_k - \left(\overline{X}_k^n - \overline{X}_k^n\right)\right|\right\} \\ &\leq \sup_k\max\left\{\left|\underline{X}_k - \underline{X}_k^n\right| + \left|\underline{X}_k^n\right|, \left|\overline{X}_k - \overline{X}_k^n\right| + \left|\overline{X}_k^n\right|\right\} \\ &\leq \sup_k\max\left\{\left|\underline{X}_k - \underline{X}_k^n\right|, \left|\overline{X}_k - \overline{X}_k^n\right|\right\} + \sup_k\max\{\left|\underline{X}_k\right|, \left|\overline{X}_k\right|\}\end{aligned}$$

olduğundan dolayı $X \in \overline{c}_0\ 'dir.$

Klasik dizi uzaylarındaki norm fonksiyonu, aralık sayılarının dizi uzaylarına genişletilebilir.

Tanım 4.6.3. $\overline{\lambda}$, $\overline{w}$ nin bir alt cümlesi olsun. $\overline{\lambda}$ üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan negatif olmayan $\|\cdot\|_{\overline{\lambda}} : \overline{\lambda} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonudur.

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\; ve\; \forall\, X, Y \in \overline{\lambda},\; X \in \overline{\lambda} \setminus \{0\}\; için$

N1) $\|X\|_{\overline{\lambda}} > 0$

N2) $\|X\|_{\overline{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow X = \theta = [0,0]$

N3) $\|X + Y\|_{\overline{\lambda}} \leq \|X\|_{\overline{\lambda}} + \|Y\|_{\overline{\lambda}}$

N4) $\|\alpha X\|_{\overline{\lambda}} = |\alpha|\|X\|_{\overline{\lambda}}$

$\|x\|$ normunun reel sayılar dizi uzayındaki x ile 0 arasındaki uzaklık olduğunu biliyoruz. $(\overline{c}\,, \overline{d})$, $(\overline{c}_0\,, \overline{d})\; ve\; (\,\overline{l}_\infty\,, \overline{d})$ metrik uzaylarının da birer normlu uzay haline getirilebildiği kolaylıkla gösterilebilir. Burada

$$\overline{d}(X_k\,, \theta) = \sup_k \max\{|\underline{X}_k - \underline{\theta}_k|\,, |\overline{X}_k - \overline{\theta}_k|\} = \sup_k \max\{|\underline{X}_k|\,, |\overline{X}_k|\}$$

$\theta = [0,0]$ elemanı $\overline{c}_0\,, \overline{c}\; ve\; \overline{l}_\infty$ uzaylarının birim elemanıdır.

Teorem 4.6.2. $\overline{c}_0\,, \overline{c}\; ve\; \overline{l}_\infty$ uzayları

$$\|X\| = \sup_k \max\{|\underline{X}_k|\,, |\overline{X}_k|\}$$

normu ile normlu aralık uzaylarıdır.

İspat. $\overline{\lambda} = \overline{c}_0\; (veya\; \overline{c}\,,\; \overline{l}_\infty)\; ve\; X, Y \in \overline{\lambda}$ olsun.

N1) $\|X\|_{\overline{\lambda}} = \sup_k \max\{|\underline{X}_k|\,, |\overline{X}_k|\}$ olduğundan $\forall\, X \in \overline{\lambda} \setminus \{0\}\; için\; \|X\|_{\overline{\lambda}} > 0$ olduğunu kolayca görürüz.

N2) $\|X\|_{\overline{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow \sup_k \max\{|\underline{X}_k|\,, |\overline{X}_k|\} = 0 \Leftrightarrow X = \theta = [0,0]$

N3)

$$\begin{aligned}
\|X + Y\|_{\overline{\lambda}} &= \sup_k \max\{|\underline{X}_k + \underline{Y}_k|\,, |\overline{X}_k + \overline{Y}_k|\} \\
&\leq \sup_k \max\{|\underline{X}_k| + |\underline{Y}_k|, |\overline{X}_k| + |\overline{Y}_k|\} \\
&= \sup_k \max\{(|\underline{X}_k|\,, |\overline{X}_k|) + (|\underline{Y}_k|\,, |\overline{Y}_k|)\} \\
&\leq \sup_k \max\{(|\underline{X}_k|\,, |\overline{X}_k|)\} + \sup_k \max\{(|\underline{Y}_k|\,, |\overline{Y}_k|)\} = \|X\|_{\overline{\lambda}} + \|Y\|_{\overline{\lambda}}
\end{aligned}$$

N4)

$$\|\alpha X\|_{\overline{\lambda}} = \sup_k \max\{|\alpha \underline{X}_k| , |\alpha \overline{X}_k|\}$$

$$= |\alpha| . \sup_k \max\{|\underline{X}_k| , |\overline{X}_k|\}$$

$$= |\alpha| . \|X\|_{\overline{\lambda}}$$

Böylece $\|X\|_{\overline{\lambda}}$, $\overline{\lambda}$ üzerinde bir normdur.

KAYNAKLAR

[1] B. Hayes, "A Lucid interval", *American Scientist*, 91(6), 484-488, 2003.

[2] P.S. Dwyer, *Linear Computations*, New York, Wiley, 1951.

[3] R.E. Moore, "Automatic error analysis in digital computation", *LMSD Technical report 48421*, 1959.

[4] R.E. Moore and C.T. Yang, "Interval Analysis I", *LMSD-285875, Lockheed Missiles and Spaces Company,* 1962.

[5] M. Warmus, "Calculus of approximations", *Bulletin de l'Academia Polonaise de Sciences*, 4(5), 253-257, 1956.

[6] T. Sunaga, "Theory of interval algebra and its application to numerical analysis", *RAAG Memoirs*, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, Tokyo, 2, 29-46, 1958.

[7] A. Esi, "λ-Sequence spaces of interval numbers", *Appl. Math. Inf. Sci*, 8(3),1099-1102, 2014.

[8] A. Esi, "A new class of interval numbers", *Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science*, pp. 98-102, 2012.

[9] A. Esi, "Lacunary sequence spaces of interval numbers", *Thai Journal of Mathematics*, 10 (2), pp. 445-451, 2012.

[10] A. Esi, "Double lacunary sequence spaces of double sequence of interval numbers", *Proyecciones Journal of Mathematics*, 31(1), 297-306, 2012.

[11] A. Esi, "Strongly almost λ-convergence and statistically almost λ-convergence of interval numbers", *Scientia Magna*, 7(2), pp. 117-122, 2011.

[12] A. Esi, "Statistical and lacunary statistical convergence of interval numbers in topological groups", *Acta Scientarium Technology*, 36(3), 491-495, 2014.

[13] A. Esi and N. Braha, "On asymptotically λ-statistical equivalent sequences of interval numbers", *Acta Scientarium Technology*, 35(3), 515-520, 2013.

[14] A. Esi and A. Esi, "Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences of interval numbers", *International Journal of Mathematics and Its Applications*, 1(1), 43-48, 2013.

[15] A. Esi and B. Hazarika, “Some ideal convergence of double ʌ-interval numbers sequences defined by Orlicz function”, *Global Journal of Mathematical Analysis*, 1(3), 110-116, 2013.

[16] E. Kreyzing, *Introduction Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons, Inc, Canada, 1978.

[17] Kuo-Ping Chiao, “Fundamental properties of interval vector max-norm”, *Tamsui Oxford Journal of Mathematics*, 18(2), 219-233, 2002.

[18] M. Şengönül and A. Eryılmaz, “On the sequence spaces of interval numbers”, *Thai Journal of Mathematics*, 8(3), 503-510, 2010.

[19] R.C. Young, “The algebra of many-valued quantities”, *Math. Ann*. 104, 260–290, 1931.

[20] J. C. Burkill, “Functions of intervals”, *Proc. London Math. Soc*. (2) 22, 275-310, 1924.

[21] Y. Soykan, *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Akademik Yayıncılık, 2012.

[22] S. Markov, “Quasilinear spaces and their relation to vector spaces”, *Electronic Journal on Mathematics of Computation*, 2(1), 2005.

[23] R.E. Moore, R. B. Kearfott, and M. J. Cloud, *Introduction to interval analysis*, SIAM, Philadelphia, PA, 2009.

[24] H. Dawood, *Theories of Interval Arithmetic: Mathematical Foundations and Applications*, LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, Germany, 2011.

[25] G. Alefeld and J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983.

[26] G. Chen and T.T. Pham, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*, USA, CRC Press, 2001.

[27] P.S. Dwyer, “Error of matrix computation, simultaneous equations and eigenvalues”, *National Bureu of Standarts, Applied Mathematics Series*, 29, 49-58, 1953.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Lokman DÜNDAR
Dogum Yeri	: Diyarbakır
Dogum Tarihi	: 01/03/1987
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
Email	: ldunda@gmail.com

Egitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Ziya Gökalp Lisesi – 2004
Lisans	: Çukurova Üniversitesi – 2012
Yüksek Lisans	: Adıyaman Üniversitesi – 2018

Çalıstıgı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Harran Üniversitesi	: Memur 2012 – 2015
Çukurova Üniversitesi	: Memur 2015 –