T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKINLIK GAMMA YARI GRUPLAR

ABDURRAHMAN İZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2018

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKINLIK GAMMA YARI GRUPLAR

Abdurrahman İZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 19/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Başkan

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Üye (Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Ebubekir İNAN
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

BEYAN

“Yakınlık Gamma Yarı Gruplar” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Abdurrahman İz

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKINLIK GAMMA YARI GRUPLAR

Abdurrahman İZ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Yıl : 2018, Sayfa sayısı: 64+vi

Jüri : Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Yrd. Doç. Dr. Ebubekir İNAN

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanan bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılması için yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler, temel yaklaşım uzayı, yakın yaklaşım uzayı ve özellikleri, yakın yarı gruplar, Γ −yarı gruplar ile ilgili tanım, teoremler ve örneklere yer verildi. Ayrıca yakınlık yarı gruplar incelendi. Bu bölümde tam ayırt edilemezlik bağıntısı kavramına ve yakın yaklaşım uzaylarında alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerine yer verilerek, yakın yaklaşım uzaylarında bir kümenin üst yaklaşımı dikkate alınarak, yakınlık yarı grupları ve yakınlık yarı gruplarının yakınlık idealleri verildi. İkinci bölümde; yakın yaklaşım uzaylarında üst yaklaşımı dikkate alınarak; Γ −yakınlık yarı grubu tanımlandı ve örnekler verildi. Bu bölümün ikinci kısmında, tam ayırt edilemezlik bağıntısı kavramı ve yakın yaklaşım uzaylarında alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerine yer verildi. Ayrıca Γ −yakınlık yarı grubu dikkate alınarak; Γ −yakınlık alt yarı grubu ve ideali tanımlandı ve bunlarla ilgili teoremler ifade edilip, ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Yaklaşımlı Küme; Yakın Küme; Yakınlık Yarı Grup; Γ −Yarı Grup; Γ −Yakınlık Yarı Grup.

ABSTRACT

MSc Thesis

NEARNESS GAMMA SEMIGROUPS

Abdurrahman İZ

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Year : 2018 , Number of pages: 64+vi

Jury : Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Asst. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Asst. Prof. Dr. Ebubekir İNAN

This study which is designed as a graduate thesis consist of two chapters. In the first chapter, some basic concepts such as rough sets, near sets, fundamental approximation spaces, nearness approximation spaces and their properties, nearness $\Gamma -$semigroups were given for the rest of the thesis to be understood better. Nearness semigroups were also studied. In this chapter, complete indiscernibility relation and some properties of lower and upper approximations on nearness approximation spaces were abtained and nearness semigroups were studied considering the upper approximation of nonempty set on nearness aproximation spaces.
In the second chapter, $\Gamma -$nearness semigroups were introduced and examples were given taking into consideration upper approximation in nearness approximation spaces. In the second section of this chapter, concept of complete indiscernibility relation and some properties of lower and upper approximations on nearness approximation spaces were given. $\Gamma -$nearness subsemigroup and its ideal were introduced and theorems were abtained taking into consideration $\Gamma -$nearness semigroup.

Key Words: Rough Set; Near Set; Nearness Semigroup; $\Gamma -$Semigroup; $\Gamma -$Nearness Semigroup.

TEŞEKKÜR

Tez aşamasında konumu belirleyen, bilgi ve birikimini aktaran, çalışmalarımı yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her konuda yardımcı olan eşim Zahide'ye ve motivasyon kaynağım olan çocuklarım Eslem ve Eymen'e desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Abdurrahman İZ

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathcal{F}$	: Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonu
L	: Tanım uzunluğu
$\mathcal{O}$	: Algılanabilen nesneler kümesi
φ_i	: Çıkarım fonksiyonu
Φ	: Nesne tanımlaması

1. GİRİŞ

Tez olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin giriş kısmı bulunmaktadır. İkinci Bölümde kuramsal temeller başlığı altında beş kısım yer almaktadır. Birinci kısımda yaklaşımlı kümeler ve yakın kümelerin tanımı verilip bunlarla ilgili teorem ve özelliklere yer verildi [5]. Üçüncü kısmında ise temel yaklaşım uzayında alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgesi tanımı yapıldı. Bu yaklaşımlı kümelerin yakın küme olduğu teoremlerle ispat edildi [5]. Dördüncü kısımda da temel yaklaşım uzayı genişletilerek yakın yaklaşım uzayı tanımlandı. Yakın yaklaşım uzayı üzerinde alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgesi tanımı yapıldı. Bu kümelerinde yakın küme olduğu teoremlerle ispat edildi [5]. Ayrıca örnekler verilerek konunun daha iyi anlaşılması sağlandı. Beşinci kısımda yakın yaklaşım uzayı üzerinde yarı grup tanımlandı. Yakınlık yarı grupla ilgili teoremlere ve özeliklere yer verildi [5]. Bu bölümün son kısmı olan altıncı bölümde ise gamma yarı gruplara yer verildi. Gamma yarı gruplarla ilgili tanım ve özelliklere yer verildi [8]. Üçüncü bölümde materyal ve yöntem hakkında bilgi verildi. Dördüncü Bölümde bulgular başlığı altında zayıf yakın yaklaşım uzayı üzerinde gamma yarı grupların tanımı yapılıp teorem ve örneklere yer verildi. Son bölüm olan sonuç bölümünde yapılan çalışmanın daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırılması yapılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Yaklaşımlı küme fikri ilk olarak, 1982 de bilgi sistemindeki eksikliği ve belirsizliği giderme modellemesinde bir temel araç olarak; Pawlak tarafından ileri sürüldü [20]. Yaklaşımlı küme teorisi, bir evrensel kümesinin bir alt kümesi için, alt ve üst yaklaşım kullanarak bir küme çift olarak tanımlanan, küme teorisinin bir genişletilmesidir. Pawlak, tarafından tanımlanan yaklaşımlı küme modelindeki temel kavram denklik bağıntısıdır. Bir kümenin alt yaklaşımı, kümenin alt kümesi olan tüm denklik sınıflarının birleşimi ve üst yaklaşımı ise kümeyle kesişimi boş küme olmayan tüm denklik sınıflarının birleşimidir.

Yaklaşımlı küme üzerinde cebirsel yapının nasıl oluşturulacağın ilk fikir Iwinski tarafından belirlenmiştir [10]. Daha sonra yaklaşımlı alt gruplar, Biswas ve Nanda tarafından çalışılmış ve çalışmalarında yaklaşımlı alt grupların karakterizasyonlarını incelemişlerdir [1]. Kuroki, 1997 de yaptığı bir çalışmada, yarı grupta yaklaşımlı ideal kavramını tanımlayarak idealin karakterizasyonu inceledi [12]. Bu çalışmalardan sonra, cebir teorisinde bu konu hala araştırılmaya devam ediliyor.

2002 de Peters tarafından yaklaşımlı kümelerin genelleştirilmesi olarak "Yakın Küme" teorisi geliştirilmiş ve yaklaşımlı kümelerin bir çok kullanım zorluklarını gidermiştir. Bu teori de Peters nesnelerin yakınlığını tanımlamak için nesnelerin özelliklerine bağlı olan ayırt edilemezlik bağıntısını tanımlamış ve bu bağıntıyı kullanarak "Yakın Küme" teorisinin temellerini atmıştır [23].

2012 de İnan ve Öztürk "Yakın Küme" teorisini kullanarak, yakınlık gruplar kavramını tanımladı ve özelliklerini araştırdı [6,7]. Ayrıca, 2015 de Öztürk ve İnan yakınlık yarı grupları ve yakınlık halkaları tanımlayıp ve bunların temel özelliklerini belirleyip, ispatlamışlardır [8,9].

1986 da Sen ve Saha Gamma yarı gruplar üzerinde araştırma yaparak, Gamma yarı grupların özelliklerini incelemişlerdir [31]. Bu araştırmadan sonra birçok matematikçi yarı grup teorisine paralel olarak, Gamma yarı gruplar üzerinde çalışmalar yaptı.

Bu tez çalışmasının son bölümünde "Yakınlık yarı gruplar" ve "Gamma yarı gruplar" konusun daha genişleten "Gamma yakınlık yarı grup" teorisine giriş yapılmış, temel özellikleri incelenmiş ve bunlara örnekler verilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, temel olarak; yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler, temel yaklaşım uzayı, yakın yaklaşım uzayı ve özellikleri, yakın yarı gruplar, Γ-yarı gruplar ile ilgili tanım, teoremler ve örneklere yer verildi. Ayrıca, yakınlık yarı gruplar incelendi.

3.1. Yaklaşımlı Kümeler

Yaklaşımlı kümeler kuramı, her nesnenin bilgi ve ölçümlerle tanımlanabildiği varsayılan evren dikkate alınarak tanımlanmıştır [15]. Klasik kümeler ile yaklaşımlı kümeleri birbirinden ayıran en önemli özelliği sınır bölgesi kavramı tanımlanmıştır. Örneğin bir kümenin üyeleri ya da tümleyeninin bileşenleriyle kesinlikle sınıflandırılmayacak nesneler kümesi ancak sınır bölgesi kavramı ile sınıflandırılabilir. Klasik kümelerde sınır bölgesi kavramı tanımlı değildir. Bu ise sınır bölgelerinin mevcut bilgilerle tam olarak sınıflandırılamayacağı anlamına gelir.

Bilgilerin parçalı yapısı nesnelerin ayrımını yapmamıza izin vermez ve aynı veya benzer olarak gözlemlenir. Sonuç olarak, yaklaşımlı küme kuramında tanımlı kavramlar klasik küme kuramı kavramlarının aksine elemanlarla ilgili bilgiler cinsinden tanımlanamaz. Bu yüzden önerilen yöntemle herhangi bir belirsiz kavram, alt ve üst belirsizlik kavramları olarak adlandırılan belirli iki kavramla yer değiştirir.

Alt yaklaşım, nitelik bakımından aynı değerlere sahip nesnelerden oluşur. Üst yaklaşım ise nitelik bakımından aynı değerlere sahip olması muhtemel tüm nesneleri içerir. Buradan sınır bölgesi tanımını oluşturacak olursak üst yaklaşımın alt yaklaşımdan farkı bize sınır bölgesini verecektir.

3.1.1. Alt, Üst Yaklaşımlar ve Sınır Bölgesi

Boş olmayan sonlu U ve A kümeleri dikkate alınsın. U evrensel küme, A nitelikler kümesi ve $a \in A$ olmak üzere; V_a niteliklerin değerler kümesi olsun. A kümesinin herhangi bir alt kümesi B olmak üzere; U üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı $I(B)$ şöyle tanımlanır.

Bir x nesnesinin a niteliğine göre değerlendirilmesi $a(x) \in V_a$ olmak üzere; her $a \in A$ için $a(x) = a(y)$ ise $xI(B)y$ dir. Yani x ve y nesneleri B nin nitelikleri ile ayırt edilemezdir. Açıkça görülüyor ki, $I(B)$ bir denklik bağıntısıdır. $I(B)$ nin bütün denklik sınıflarının ailesi, yani B tarafından belirlenen bölüm kümesi $U/I(B)$ ya da basitçe U/B şeklinde gösterilir. U/B bölüm kümesinde, x in bir denklik sınıfı $B(x)$ ile gösterilir.

Eğer $(x, y) \in I(B)$ ise x ve y, B −ayırt edilemezdir. $I(B)$ bağıntısının denklik sınıflarına B-temel kümeleri denir.

Tanım 3.1.1. [16] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$B_*(X) = \{x \in U | B(X) \subseteq X\}$$

kümesine X kümesinin B-alt yaklaşımı denir.

Tanım 3.1.2. [16] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$B^*(X) = \{x \in U | B(X) \cap X \neq \emptyset\}$$

kümesine X kümesinin B −üst yaklaşımı denir.

Tanım 3.1.3. [16] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$BN_B(X) = B^*(X) - B_*(X)$$

kümesine X kümesinin B-sınır bölgesi denir.

Eğer X kümesinin sınır bölgesi boş küme ise, yani $BN_B(X) = \emptyset$ ise, X kümesi B ye göre klasik kümedir. Diğer durumda, yani $BN_B(X) \neq \emptyset$ ise, X kümesi B ye göre yaklaşımlı kümedir.

Yaklaşımlı küme, yaklaşım kesinlik durumunu belirten

$$\alpha_B(X) = \frac{|B_*(X)|}{|B^*(X)|}$$

katsayısı ile ifade edilebilir. $|B_*(X)|$ ifadesi, $B_*(X)$ B −alt yaklaşımındaki nesnelerin sayısıdır. Açıkça $0 \leq \alpha_B(X) \leq 1$ dir. $\alpha_B(X) = 1$ ise X kümesi B ye göre klasiktir. $\alpha_B(X) < 1$ ise X kümesi B ye göre yaklaşımlı kümedir [16].

Yaklaşımlı kümeler,

$\mu_X^B(x) = \frac{|X \cap B(x)|}{|B(x)|}$ ile belirlenen

$\mu_X^B : U \to [0,1]$

yaklaşımlı üyelik fonksiyonu kullanarak da tanımlanabilir [15]. Buradan açıkça görülüyor ki $\mu_X^B(x) \in [0,1]$ dir.

Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu yardımıyla bir kümenin yaklaşımları ve sınır bölgesi aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$B_*(X) = \{x \in U | \mu_X^B(x) = 1\},$$

$$B^*(X) = \{x \in U | \mu_X^B(x) > 0\},$$

$$BN_B(X) = \{x \in U | \, 0 < \mu_X^B(x) < 1\}.$$

3.2. Yakın Kümeler

Bu kısımda yakın küme kavramının temelleri, çıkarım fonksiyonları, yakın kümeler ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecektir [17].

Yakın küme teorisi, ayrık kümelerdeki nesnelerden oluşan benzer bilgilerin metot olarak kullanılabilmesini sağlar. Yani nesnelerin gözlemlenmesi, karşılaştırılması ve sınıflandırılması için yakın küme teorisi kullanılır. Yakın kümelerin keşfi, gözlemlenen nesnelerin özelliklerini temsil eden fonksiyonların seçimi ile mümkün olmaktadır. Bu fonksiyonlar için temel model ilk olarak 1993 te M. Pavel tarafından, dijital görüntülerin sınıflandırılması için verilmiştir [12].

Yakın küme teorisinde nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları bir nesneden, gözlemlenebilen özelliklerin değerine karşılık gelen bir reel sayıya tanımlıdır [17].

Tanım 3.2.1. (Çıkarım Fonksiyonu) [17] Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyonlara çıkarım fonksiyonu denir.

V boştan farklı herhangi bir küme, $X \subseteq \mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olmak üzere, çıkarım fonksiyonu,

$$\varphi: X \to V$$

şeklinde tanımlanabilir. Reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanarak; her ne kadar cebirsel yapılar çalışılabilse de, bu tanım yakın kümeler teorisinde mantık ve cebirsel yapıların teorik olarak da çalışılabilmesine imkan sağlar.

Çıkarım fonksiyonları nesneler arasında olduğu gibi benzer nesnelerden oluşan kümeler arasında da benzerlik kurar. Nesnelerin aralarındaki benzerlikler dikkate alınırsa birbirine yakın oldukları gözlemlenir. Benzer şekilde nesnelerin oluşturduğu kümelerde benzerlik yönüyle birbirlerine belli derecelerde yakın olurlar.

Aksiyom 3.2.1. Bir nesne algılanabilirdir ancak ve ancak bu nesne tanımlanabilirdir.

Tanım 3.2.2. (Görsel Çıkarım Fonksiyonu) Algılanabilen nesneler yansıyan ışığın kaynağındaki görsel cisimlerin ayırt edici özellikleri olmak üzere, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olsun. R, reel sayılar kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere bir φ görsel çıkarım fonksiyonu

$$\varphi: X \to R$$

şeklinde tanımlıdır. $x \in X$ nesnesi için $\varphi(x), x$ nesnesinin görsel algıdaki zenginliği temsil eder.

Aksiyom 3.2.2. Nesne tanımlamalarını formülleştirmek nesnelerin matematiksel olarak algılanmasını sağlar.

Tanım 3.2.3. (*Algılanabilir Sistem*) [17] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının boş olmayan bir kümesi olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ ye bir algılanabilir sistem denir.

Nesne tanımlaması aşağıdaki yapılmıştır(Çizelge 3.1).

Çizelge 3.1 Nesne tanımlaması

Sembol	*Anlamı*
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathcal{O}$	Algılanabilen nesnelerin kümesi,
X	$X \subseteq \mathcal{O}$, örnek nesnelerin kümesi,
x	$x \in \mathcal{O}$, örnek nesne,
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi,
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,
L	Tanım uzunluğu,
i	$i \leq L, L \in \mathbb{Z}^{+}$,
φ_i	$\varphi_i: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, çıkarım fonksiyonu,
Φ	$\Phi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L$ nesne tanımlaması,
$\Phi(x)$	$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_L(x))$

Nesneler ancak matematiksel bir takım tanımlamalar yardımıyla bilgisayar sistemleri tarafından algılanabilirler. Bir $x \in X$ nesnesinin tanımı, çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlenir. Burada önemli konulardan biri de $\varphi_i \in B$ çıkarım fonksiyonlarının, nesnelerin hangi yönüyle tanımlandığı dikkate alınarak belirlenmesidir.$B \subseteq \mathcal{F}, X \subseteq \mathcal{O}$ örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa

$$\Phi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L, \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_L(x))$$

tanım uzunluğu $|\Phi| = \mathrm{L}$ olan nesne tanımlamasıdır.

$X \subseteq \mathcal{O}$ kümelerinde ki nesneler benzer tanımlamalara sahip ise o zaman nesneler birbirine yakındırlar. Her bir φ, bir nesnenin ayırt edici bir özelliğini belirtir. Bu durumda $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere; Δ_{φ_i} farkı,

$$\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Δ_{φ_i} farkı, Z. Pawlak tarafından tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısını belirler.

Tanım 3.2.4. [17] $x, x' \in \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. $i \leq |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere;
$\{(x, x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} | \forall \varphi_i \in B, \Delta_{\varphi_i} = 0\}$

şeklinde tanımlanan bağıntıya $\mathcal{O}$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir ve $\sim_B$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.5. [17] $B \subseteq \mathcal{F}$, nesnelerin tanımlanması ile ilgili çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere, $x \sim_{\{\varphi_i\}} x' (\Delta_{\varphi_i} = 0)$ olacak şekilde en az bir $\varphi_i \in B$ var ise x ve x' nesneleri birbirlerine minimal yakındır denir. Minimal yakınlık, "*Yakınlık Tanımlama İlkesi-NDP*" olarak adlandırılır. Kısaca aşağıdaki gibi sembolleştirilmiştir(Çizelge3.2).

Çizelge 3.2 Yakınlık tanımlama ilkesi

Sembol	*Anlamı*
$\sim_B$	$\sim_B = \{(x, x') \| \varphi(x) = \varphi(x'), \forall \varphi \in B\}$, ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_B$	$[x]_B = \{x' \in X \| x \sim_B x'\}$, yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O} /\sim_B$	$\mathcal{O}/\sim_B = \{[x]_B \| x \in \mathcal{O}\}$, bölüm kümesi,
ξ_B	$\xi_B = \mathcal{O} /\sim_B$,
Δ_{φ_i}	$\Delta_{\varphi_i} = \|\varphi_i(x') - \varphi_i(x)\|$, çıkarım fonksiyonlarının farkı

Teorem 3.2.1. [17] $[x]_B \in \xi_B$ sınıfındaki nesneler yakın nesnelerdir.

Tanım 3.2.6. [17] $X, X' \in X$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $x' \in X'$ için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ var ise X kümesi X' kümesine yakındır denir.

Tanım 3.2.7. [17] $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $x,\ x' \in X$ olsun. $x,\ x'$ nesnesine yakın ise X kümesine kendisi ile ilgili yakın küme veya bu duruma X kümesinin yansımalı yakınlığı denir.

Teorem 3.2.2. [17] $\xi_B = \mathcal{O} /\sim_B$, ayrışımındaki her bir sınıf yakın kümedir.

İspat: $\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B = \{[x]_B | x \in \mathcal{O}\}$ ayrışımında ki herhangi bir $[x]_B$ sınıfı aynı tanımlamalara sahip nesnelerin kümesidir, yani

$x, x' \in [x]_B$ ise $x \sim_B x'$ (her $\varphi_i \in B$ için $\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)| = 0$)

olur. Yansımalı yakınlık tanımı dikkate alınırsa, $[x]_B \in \xi_B$ sınıfı yakın kümedir.

Teorem 3.2.3. ξ_B ayrışımı bir yakın kümedir.

İspat: " $\sim_B$ ", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $\xi_B = \mathcal{O} /\sim_B$, ayrışımını tanımlayan bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. $[x]_B \in \xi_B$ sınıfının yakın küme olduğu ve ξ_B ayrışımı birbirleriyle yakın olan nesneler içerdiğinden ξ_B bir yakın kümedir.

Tanım 3.2.8. (Yakın kümelerin hiyerarşisi) [17] $X \subseteq \mathcal{O}$ *ve* $X', X'' \subseteq X$ olsun. Bu durumda X', X'' yakın kümeler ise X de bir yakın kümedir. Buna yakın kümelerin hiyerarşisi denir.

Tanım 3.2.9. (Kalıtımsal Yakınlık) [17] Yakın küme içeren herhangi bir küme yakın kümedir. Buna kalıtımsal yakınlık denir.

Teorem 3.2.4. [17] Yakın küme içeren bir kümenin kendisi de yakın kümedir.

İspat: X kümesinin bir yakın küme içerdiğini kabul edelim. Yakın kümelerin hiyerarşisi ve kalıtımsal yakınlık kavramları dikkate alınırsa, X bir yakın kümedir.

3.3. Temel Yaklaşım Uzayı

Tanım 3.3.1. (*Temel Yaklaşım Uzayı*) [17] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi, $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve "$\sim_B$", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_B = \mathcal{O} /\sim_B$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$ yapısına temel yaklaşım uzayı (*FAS- Fundamental Approximation Space*) denir.

Tanım 3.3.2. (Bir kümenin alt yaklaşımı) [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi olmak üzere; $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin bir yaklaşımı, X in alt kümesi olan $[x]_B = \mathcal{O}/\sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X kümesinin $B-$ alt yaklaşımı denir ve

$$B_*X = \bigcup_{[x]_B \subseteq X} [x]_B$$

ile gösterilir. Sonuç olarak, B_*X boştan farklı ise B_*X in her bir sınıfındaki nesneler, X deki nesnelerin tanımlamaları ile eşleşen tanımlamalara sahiptir.

Lemma 3.3.1. [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X kümesinin $B-$ alt yaklaşımı B_*X bir yakın kümedir.

Teorem 3.3.1. [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X boştan farklı bir B_*X alt yaklaşımına sahip ise X bir yakın kümedir.

İspat: Boştan farklı bir B_*X alt yaklaşıma sahip olan bir X kümesi dikkate alınsın. B_*X alt yaklaşımı yakın küme olduğundan ve *Teorem 3.2.4* den yakın küme içeren bir küme yakın küme olduğundan X bir yakın kümedir.

Tanım 3.3.3. [17] (Bir kümenin üst yaklaşımı) $X \subseteq \mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi ve B kümesi de, $\mathcal{O}$ daki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin başka bir yaklaşımı, X kümesi ile ara kesiti boştan farklı olan $[x]_B \in \mathcal{O}/\sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X in $B-$ üst yaklaşımı denir ve

$$B^*X = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset} [x]_B$$

ile gösterilir. Diğer bir ifade ile B^*X üst yaklaşımın X deki bir nesneye tanımı ile eşleşen en az bir nesne tanımı içeren sınıfının birleşiminden oluşur.

B_*X alt yaklaşımı, B^*X üst yaklaşımının alt kümesidir. B^*X üst yaklaşımının alt kümesi olmayan bir veya birden fazla $[x]_B \in \mathcal{O}/\sim_B$ sınıfları olabilir ya da olmayabilir.

Teorem 3.3.2. [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; B^*X üst yaklaşımı ve X kümesi yakın kümelerdir.

Tanım 3.3.4. (Sınır bölgesi) [17] Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X yakın kümesinin sınır bölgesi

$$B^*X \setminus B_*X = \{ x | x \in B^*X \ ve \ x \notin B_*X \}$$

şeklinde tanımlıdır ve $Bnd_B X$ ile gösterilir. Aşağıdaki gibi gösterilebilir(Çizelge 3.3).

Çizelge 3.3 Temel yaklaşım uzayı

Sembol	*Anlamı*
$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$	Temel yaklaşım uzayı (FAS), $B \subseteq \mathcal{F}$
B_*X	$\underset{[x]_B \subseteq X}{\cup} [x]_B$, X in B −alt yaklaşımı,
B^*X	$\underset{[x]_B \cap X \neq \emptyset}{\cup} [x]_B$, X in B −üst yaklaşımı,
$Bnd_B X$	$Bnd_B X = B^*X \setminus B_*X = \{x \| x \in B^*X \ ve \ x \notin B_*X\}$.

Boştan farklı Sınır Bölgesi olan Yakın Küme: Bir yakın kümenin sınırı boştan farklı olduğunda X kümesi alt ve üst yaklaşıma sahip olan küme olarak dikkate alınabilir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise X, yaklaşıma sahip olan ya da yaklaşık olarak B deki fonksiyonlarla ilişkili olan yakın kümedir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise $|\, Bnd_B X| > 0$ dır. Bu durumda X yaklaşıma sahip olan yakın kümedir.

Teorem 3.3.3. (Temel Yakın Küme Teoremi) [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; $|\, Bnd_B X| \geq 0$ ise X kümesi yakın kümedir.

3.4. Yakın Yaklaşım Uzayı ve Özellikleri

Bu kısımda yakın yaklaşım uzayı kavramı yapısal olarak tüm bileşenleri ile dikkate alınacaktır. Yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan alt, üst yaklaşım ve sınır bölgesi kavramları örneklerle birlikte verilecektir. Yakın kümeler ile yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan yaklaşımlar arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir [5].

Yakın yaklaşım uzayı tanımlaması aşağıdaki gibi sembolleştirilebilir(Çizelge 3.4).

Çizelge 3.4 Yakın yaklaşım uzayı

Sembol	*Anlamı*
B	$B \subseteq \mathcal{F}$
r	$\binom{\lvert B\rvert}{r}$, yani $\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu,
B_r	$r \leq \lvert B\rvert$,
$\sim_{B_r}$	B_r yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_{B_r}$	$r \leq \lvert B\rvert, [x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$ yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O} /\sim_{B_r}$	$\mathcal{O} /\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$, bölüm kümesi,
$\xi_{\mathcal{O},B_r}$	$\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O} /\sim_{B_r}$,
$N_r B$	$N_r B = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$, ayrışımların kümesi,
V_{N_r}	$V_{N_r}: \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \to [0,1]$, yakınlık fonksiyonu,
$N_r(B)_* X$	$N_r(B)_* X = \underset{[x]_{B_r} \subseteq X}{\cup} [x]_{B_r}$, alt yaklaşım,
$N_r(B)^* X$	$N_r(B)^* X = \underset{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset}{\cup} [x]_{B_r}$, üst yaklaşım,
$Bnd_{N_r(B)}(X)$	$N_r(B)^* X \setminus N_r(B)_* X = \{x \in N_r(B)^* X \mid x \notin N_r(B)_* X\}$ yakın sınır bölgesi.

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $\mathcal{F}$ kümesi de nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

r, kısıtlanmış $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümesinin kardinalitesi olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", yaklaşımlı küme teorisinden $B_r \subseteq B$ alt kümesine kısıtlanmışı olan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi, "$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısının $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin farklı bir ayrışımının tanımlanmasına yol açar. Bu seçim; $\lvert B\rvert$, Bdeki çıkarım fonksiyonlarının sayısı ve r , B_r kümesinin kardinalitesi olmak üzere, $\binom{\lvert B\rvert}{r}$farklı şekilde yapılabilir.

"$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısı, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesini ikişer ikişer ayrık olan $[x]_{B_r}$ yakınlık sınıflarına ayırır. Bu sınıfların $\mathcal{O}/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$ kümesi bölüm kümesidir. $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ dir. Ayrışımların bir ailesi olan $N_r(B)$ kümesi de $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ dir.

Ayrıca, v_{N_r} yakınlık fonksiyonu $v_{N_r}: \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \to [0,1]$ şeklindedir. Yakınlık fonksiyonu bir küme çiftinden, $[0,1]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olup,

v_{N_r} yakınlık fonksiyonu $B_r \subseteq B$ deki fonksiyonlar yardımıyla özellikleri belli olan nesne kümeleri arasındaki yakınlık derecesini temsil eder [25].

Nesne özelliklerini temsil eden $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümelerinin her birinin $\binom{|B|}{r}$ farklı seçimi, birer farklı $\sim_{B_r} = \{(x, x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} | \forall \varphi_i \in B_r, \varphi_i(x') = \varphi_i(x)\}$ ayırt edilemezlik bağıntısı, $[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} | \forall \varphi_i \in B_r,\ \varphi_i(x') = \varphi_i(x)\}$ yakınlık sınıfı, $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} | B_r \subseteq B\}$ kümesi ve v_{N_r} yakınlık fonksiyonu belirler. Bu durumda $(x, x') \in \sim_{B_r}$ ise x ve x' nesnelerine B_r deki tüm çıkarım fonksiyonlarına göre B $-$ayırt edilemezdir denir.

Tanım 3.4.1. $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r < |B|$ olmak üzere; "$\sim_{B_r}$" , $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} | B_r \subseteq B\}$ ayrışımların kümesi ve v_{N_r} yakınlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), v_{N_r})$ yapısına yakın yaklaşım uzayı (*NAS-Nearness Approximation Space*) denir.

Teorem 3.4.1. [17] Ayrışımların ailesi olan $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.

İspat: $\xi_{\mathcal{O},B_r} = N_r(B)$ ayrışımı $[x]_{B_r}$ sınıflarını içerdiğinden ve bu sınıflar birer yakın küme olduklarından $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ bir yakın kümedir. Böylece $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.

Tanım 3.4.2. $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $N_r(B)-$ alt yaklaşımı

$$N_r(B)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.4.3. $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $N_r(B)-$ üst yaklaşımı

$$N_1(B)^*X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.2. [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $N_r(B) -$ alt yaklaşımı bir yakın kümedir.

İspat: Alt yaklaşımın tanımı dikkate alınırsa, $N_r(B)_*X \subseteq X$ ve $N_r(B)_*X$, X in alt kümeleri olan $[x]_{B_r}$ sınıflarından oluşur. $[x]_{B_r}$ sınıflarının her biri yakın küme olduğundan $N_r(B)_*X$ -alt yaklaşımı da bir yakın kümedir.
Benzer durum üst yaklaşım için de geçerlidir.

Teorem 3.4.3. [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $N_r(B)^*X -$ üst yaklaşımı bir yakın kümedir.

Tanım 3.4.4. Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin sınır bölgesi,

$$Bnd_{N_r(B)}(X) = N_r(B)^*X \setminus N_r(B)_*X$$

$$= \{x \in \mathcal{O} | x \in N_r(B)^*X \; ve \; x \notin N_r(B)_*X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.4. [17] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinde $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ ise X kümesi bir yakın kümedir.

İspat: $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ve $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ olmak üzere, iki durum söz konusudur.

(i) $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ $\left(\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \neq 0\right)$ olsun. Boştan farklı sınır bölgesi olan $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesi dikkate alınsın. Bunun anlamı, $N_r(B)_*X \subset N_r(B)^*X$ yani $N_r(B)_*X$ alt yaklaşımı $N_r(B)^*X$ üst yaklaşımının bir alt kümesi ve aynı zamanda $N_r(B)_*X$ alt yaklaşımı X in bir alt kümesidir. Böylece *Teorem 1.2.2* den X bir yakın kümedir.

(ii) $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise $Bnd_{N_r(B)}(X) = \emptyset$ ve dolayısıyla $N_r(B)_*X = N_r(B)^*X$ ve $N_r(B)_*X \subseteq X$ dir. Bu nedenle $N_r(B)_*X$ ve X ortak tanımlamalara sahip nesneler içerir. Her yakınlık sınıfı bir yakın kümedir. Alt yaklaşımın tanımından $N_r(B)_*X$ deki tüm sınıflar aynı zamanda X in alt kümeleridir. Böylece X bir yakın kümedir.

Teorem 3.4.5. [17] Alt veya üst yaklaşıma sahip olan her küme bir yakın kümedir.

İspat: *Teorem 3.2.4* dikkate alınırsa, X kümesi bir yakın kümedir ancak ve ancak $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ dır. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ise X kümesi yaklaşıma sahip olan kümedir, yani X kümesi bir yakın kümedir. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise X yakın küme olarak dikkate alınabilir, ancak alt veya üst yaklaşıma sahip olamaz. Sonuç olarak, alt veya üst yaklaşıma sahip olan bir küme yakın kümedir, ancak her yakın küme alt veya üst yaklaşıma sahip değildir.

Örnek 3.4.1. [5,6] (*Bir Kümenin Alt ve Üst Yaklaşımları*) $\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r = 1$ olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$\varphi_{1:}\mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$,

$\varphi_{2:}\mathcal{O} \to V_2 = \{\alpha_1\}$,

$\varphi_{3:}\mathcal{O} \to V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

Aşağıdaki gibi tanımlansın(Çizelge 3.5).

Çizelge 3.5 Çıkarım fonksiyonu

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_2	α_1	α_2	α_2	α_1	α_1	α_1	α_1	α_2	α_1
φ_2	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1
φ_3	α_3	α_1	α_3	α_3	α_1	α_2	α_2	α_1	α_3	α_1

Bu durumda

$[a]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_2\}$

$$= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_1} = [d]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1},$$

$$[b]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_1\}$$

$$= \{b, e, f, g, h, j\} = [e]_{\varphi_1} = [f]_{\varphi_1} = [g]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}$$

dir. O zaman $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}\}$ olur.

$$[a]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} = [b]_{\varphi_2} = [c]_{\varphi_2} = [d]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2}$$

$$= [g]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}\}$ olur. Son olarak,

$$[a]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\}$$

$$= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_3} = [d]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3},$$

$$[b]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_1\}$$

$$= \{b, e, h, j\} = [e]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3} = [j]_{\varphi_3},$$

$$[f]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_2\}$$

$$= \{f, g\} = [f]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3}$$

tür ve dolayısıyla $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3}\}$ olur. Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür. Bu durumda $X = \{a, c, f, i\} \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin üst yaklaşımı

$$N_1(B)^* X = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap X \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$

$$= [a]_{\varphi_1} \cup [b]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \cup [f]_{\varphi_3}$$

$$= \{a, c, d, i\} \cup \{b, e, f, g, h, j\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \cup \{f, g\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} = \mathcal{O}$$

dir. X kümesinin alt yaklaşımı

$$N_1(B)_*X = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \subseteq X} [x]_{\varphi_i} = \emptyset$$

dir. Ayrıca, X kümesinin sınır bölgesi de

$$\begin{aligned} Bnd_{N_1(B)}(X) &= N_1(B)^*X \setminus N_1(B)_*X \\ &= \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \setminus \emptyset \\ &= \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.4.5. $X \subseteq \mathcal{O}, r \leq |B|$ ve $B_r \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere; $\sim_{B_r,}$ $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Her $x, y \in X$ için $[x]_{B_r}[y]_{B_r} = [xy]_{B_r}$ ise $\sim_{B_r}$ ayırt edilemezlik bağıntısına $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Teorem 3.4.6. [5,6] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) $N_r(B)_*X \subseteq X \subseteq N_r(B)^*X$.
2) $N_r(B)^*(X \cup Y) = N_r(B)^*X \cup N_r(B)^*Y$.
3) $N_r(B)_*(X \cap Y) = N_r(B)_*X \cap N_r(B)_*Y$.
4) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)_*X \subseteq N_r(B)_*Y$.
5) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)^*X \subseteq N_r(B)^*Y$.
6) $N_r(B)_*(X \cup Y) \supseteq N_r(B)_*X \cup N_r(B)_*Y$.
7) $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*X \cap N_r(B)^*Y$.

İspat: **(1)** $x \in N_r(B)_*(X)$ olsun. Bu durumda $x \in [x]_{B_r} \subseteq X$ olduğundan $N_r(B)_*(X) \subseteq X$ olur. $x \in X$ olmak üzere; $x \in [x]_{B_r}$ olduğundan $[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset$ dir. O halde $x \in N_r(B)^*(X)$ olur. Böylece $X \subseteq N_r(B)^*(X)$ dir.

(2) $$\begin{aligned} x \in N_r(B)^*(X \cup Y) &\Leftrightarrow [x]_{B_r} \cap (X \cup Y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow ([x]_{B_r} \cap X) \cup ([x]_{B_r} \cap Y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \left([x]_{B_r} \cap X\right) \neq \emptyset \text{ veya } ([x]_{B_r} \cap Y) \neq \emptyset \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x \in N_r(B)^*X$ veya $x \in N_r(B)^*Y$

$\Leftrightarrow x \in (N_r(B)^*X \cup N_r(B)^*Y)$

dir. Böylece $N_r(B)^*(X \cup Y) = N_r(B)^*X \cup N_r(B)^*Y$ elde edilir.

(3) $x \in N_r(B)_*(X \cap Y) \Leftrightarrow [x]_{B_r} \subseteq X \cap Y$

$\Leftrightarrow [x]_{B_r} \subseteq X$ ve $[x]_{B_r} \subseteq Y$

$\Leftrightarrow x \in N_r(B)_*X$ ve $x \in N_r(B)_*Y$

$\Leftrightarrow x \in (N_r(B)_*X \cap N_r(B)_*Y)$

dir. Sonuç olarak, $N_r(B)_*(X \cap Y) = N_r(B)_*X \cap N_r(B)_*Y$ olur.

(4) $X \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $X \cap Y = X$. *(3)* özellik dikkate alınırsa,

$N_r(B)_*X = N_r(B)_*(X \cap Y) = N_r(B)_*X \cap N_r(B)_*Y$

olur. Böylece $N_r(B)_*X \subseteq N_r(B)_*Y$ elde edilir.

(5) $X \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $X \cup Y = Y$ olur. *(2)* özelliği kullanılırsa

$N_r(B)^*Y = N_r(B)^*(X \cup Y) = N_r(B)^*X \cup N_r(B)^*Y$

dir. Buradan $N_r(B)^*X \subseteq N_r(B)^*Y$ olduğu görülür.

(6) $X \subseteq X \cup Y$ ve $Y \subseteq X \cup Y$ olduğundan *(4)* özelliği kullanılırsa

$N_r(B)_*X \subseteq N_r(B)_*(X \cup Y)$ ve $N_r(B)_*Y \subseteq N_r(B)_*(X \cup Y)$

elde edilir. Böylece $N_r(B)_*X \cup N_r(B)_*\mathrm{Y} \subseteq N_r(B)_*(X \cup Y)$ olur.

(7) $X \cap Y \subseteq X$ ve $X \cap Y \subseteq Y$ olduğundan *(5)* özelliği kullanılırsa

$N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*X$ ve $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*Y$ dir. Buradan

$N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*X \cap N_r(B)^*Y$ bulunur.

Teorem 3.4.7. $(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r,V_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı olsun. X ve Y, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere,

$(N_r(B)^*X)(N_{\boldsymbol{r}}(B)^*Y) \subseteq N_{\boldsymbol{r}}(B)^*(XY)$ dir.

İspat: $x \in (N_r(B)^*X)(N_{\boldsymbol{r}}(B)^*Y) \Rightarrow x = ab$; $a \in N_{\boldsymbol{r}}(B)^*X$, $b \in N_{\boldsymbol{r}}(B)^*Y$

$\Rightarrow [a]_{B_r} \cap X \neq \emptyset$, $[b]_{B_r} \cap Y \neq \emptyset$

$\Rightarrow a \in [a]_{B_r}$ ve $a \in X$, $b \in [b]_{B_r}$ ve $b \in Y$

$\Rightarrow x = ab \in [a]_{B_r}\ [b]_{B_r} \subseteq [ab]_{B_r}$ ve $x = ab \in XY$

$\Rightarrow x = ab \in [ab]_{B_r}$ ve $x = ab \in XY$

$\Rightarrow x \in [ab]_{B_r} \cap XY$

$\Rightarrow [ab]_{B_r} \cap XY \neq \emptyset$

ve dolayısıyla $ab \in N_r(B)^*(XY)$ olur. Buradan $N_{\boldsymbol{r}}(B)^*X\ N_{\boldsymbol{r}}(B)^*Y \subseteq N_{\boldsymbol{r}}(B)^*(XY)$ elde edilir.

Teorem 3.4.8. $\sim_{B_r}$ **,** $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. $X\ ve\ Y\ \ \mathcal{O}$ nun boştan farklı alt kümeleri olmak üzere
$(N_r(B)_*X)(\,N_r(B)_*Y) \subseteq N_r(B)_*(XY)$ dir.

İspat: $x \in (N_r(B)_*X\,)(N_r(B)_*Y\,) \Rightarrow x = ab;\ a \in N_r(B)_*X,\ b \in N_r(B)_*Y$

$\Rightarrow x = ab$; $a \in [a]_{B_r} \subseteq X$ ve $b \in [b]_{B_r} \subseteq Y$

$\Rightarrow x = ab$; $ab \in [a]_{B_r}[b]_{B_r} = [ab]_{B_r}$ ve $ab \in XY$

$\Rightarrow x \in [ab]_{B_r} = [x]_{B_r}$ ve $x \in XY$

$\Rightarrow [x]_{B_r} \subseteq XY$

olur ve dolayısıyla $x \in N_r(B)_*(XY)$ olur. Buradan da
$(N_r(B)_*X)(N_r(B)_*Y) \subseteq N_r(B)_*(XY)$ elde edilir.

3.5. Yakınlık Yarı Gruplar

Bu kısımda yakınlık yarı grubu ve yakınlık ideali kavramları örneklerle verilecektir. Ayrıca, yakınlık yarı grubunun yakınlık sol, sağ ve iki yanlı ideali kavramları ile ilgili bazı özellikler incelenecektir [5].

Tanım 3.5.1. $(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r,V_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı; ". ", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $S\subseteq\mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa S ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde yarı grup veya kısaca yakınlık yarı grubu denir.

(i) Her $x,y\in S$ için $x\cdot y\in N_r(B)^*S$,

(ii) Her $x,y,z\in S$ için $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ özelliği $N_r(B)^*S$ de sağlanılır.

Tanım 3.5.2. $(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r,V_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı, S yakınlık yarı grubu ve I, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $N_r(B)^*I$, S yakınlık yarı grubunun bir sol (sağ, iki yanlı) ideali ise, bu durumda I, S yakınlık yarı grubunun bir sol (sağ iki yanlı) yakınlık idealidir.

Teorem 3.5.3. $(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r,V_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $S\subseteq\mathcal{O}$ olmak üzere;

(i) S bir yarı grup ise bu durumda S bir yakınlık yarı grubudur.

(ii) I, S yakınlık yarı grubunun bir sol (sağ iki yanlı) ideali ise bu durumda I, S yakınlık yarı grubunun bir yakınlık sol (sağ iki yanlı) idealidir.

İspat: **(i)** S bir yarı grup olsun. $S\subseteq\mathcal{O}$ olduğundan *Teorem 3.4.6.(1)* den, $\emptyset\neq S\subseteq N_r(B)^*S$ dir. Böylece her $x,y,z\in S$ için $x\cdot y\in N_r(B)^*S$ ve $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ özelliği $N_r(B)^*S$ de sağlanır ve dolayısıyla S bir yakınlık yarı grubudur.

(ii) I, S yakınlık yarı grubunun bir sol ideali ($SI\subseteq I$) olsun. $S\subseteq N_r(B)^*S$, olduğundan *Teorem 3.4.7* ve *Teorem 3.4.6.(5)* ten

$$\begin{aligned}S(N_r(B)^*I) &\subseteq (N_r(B)^*S)(N_r(B)^*I)\\ &\subseteq N_r(B)^*(SI)\\ &\subseteq N_r(B)^*I\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla $N_r(B)^*I, S$ yakınlık yarı grubunun bir sol idealidir. O halde; I, S yakınlık yarı grubunun bir yakınlık sol idealidir. Diğer durumlar benzer yol izlenerek kolayca görülür.

Teorem 3.5.4. $\sim_{\mathrm{B_r}}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere $(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{B_r},N_r,V_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı, $S\subseteq\mathcal{O}$ bir yarı grup ve $A\subseteq S$ olsun.

(i) A, S yarı grubunun bir alt yarı grubu ise $N_r(B)_*A$ boştan farklı olmak üzere; $N_r(B)_*A$, S nin bir alt yarı grubudur.

(ii) I, S nin bir sol (sağ veya iki yanlı) ideali ise $N_r(B)_*I$ boştan farklı olmak üzere; $N_r(B)_*S\ nin$ bir sol (sağ veya iki yanlı) idealidir.

İspat: **(i)** A, S yarı grubunun bir alt yarı grubu olsun. Bu durumda *Teorem 3.4.8* ve *Teorem 3.4.6.(4)* kullanılırsa

$$(N_r(B)_*A)(N_r(B)_*A) \subseteq N_r(B)_*(AA) \subseteq N_r(B)_*A$$

elde edilir. Böylece $N_r(B)_*A$, S nin bir alt yarı grubudur.

(ii) I, S nin bir sol ideali, yani $SI \subseteq I$ olsun. Bu durumda *Teorem 3.4.8* ve *Teorem 3.4.6.(4)* dikkate alınırsa,

$$(N_r(B)_*S)(N_r(B)_*I) \subseteq N_r(B)_*(SI) \subseteq N_r(B)_*I$$

bulunur. Buradan $N_r(B)_*I$, $N_r(B)_*S$ nin bir sol idealidir. Diğer durumlar benzer yol izlenerek kolayca görülür.

Tanım 3.5.5. $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık yarı grubu ve I, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $N_r(B)_*I$, S nin bir bi-ideali ise; I ya, S nin bir yakınlık bi-ideali denir.

Teorem 3.5.6. $\sim_{\mathrm{B_r}}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda I, S nin bir bi-ideali olmak üzere; I, S nin bir yakınlık bi-idealidir.

İspat: I, S nin bir bi-ideali olsun. Bu durumda *Teorem 3.4.7* ve *Teorem 3.4.6.(5)* dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}(N_r(B)^*I)S(N_r(B)^*I) &\subseteq (N_r(B)^*I)(N_r(B)^*S)(N_r(B)^*I)\\ &\subseteq N_r(B)^*(ISI)\\ &\subseteq N_r(B)^*I\end{aligned}$$

elde edilir. *Teorem 3.5.4.(1)* den $N_r(B)^*I$, S nin bir bi-idealidir. Böylece; I, S nin bir yakınlık bi-idealidir.

Teorem 3.5.7. $\sim_{\mathrm{B_r}}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir tam ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. I, S nin bir bi- ideali ise $N_r(B)_*I$ de $N_r(B)_*S$ nin bir bi-idealidir.

İspat: I, S nin bir bi-ideali olsun. *Teorem 3.4.8* ve *Teorem 3.4.6.(6)* dan

$$(N_r(B)_*I)(N_r(B)_*S)(N_r(B)_*I) \subseteq N_r(B)_*(ISI) \subseteq N_r(B)_*I$$

elde edilir. *Teorem 3.5.4.(1)* den $N_r(B)_*I$; $N_r(B)_*S$ nin bir bi-idealidir.

Teorem 3.5.8. $\sim_{\mathrm{B_r}}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. I ve J, sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere

$N_r(B)^*(IJ) \subseteq N_r(B)^*(I \cap J) \subseteq N_r(B)^*I \cap N_r(B)^*J$ dir.

İspat: I ve J, sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olsun. Bu durumda $IJ \subseteq IS \subseteq I$ ve $IJ \subseteq SJ \subseteq J$ olur. Buradan $IJ \subseteq I \cap J$ dir. Böylece, *Teorem 3.4.6.(5)* ve *Teorem 3.4.6.(7)* kullanılırsa

$N_r(B)^*(IJ) \subseteq N_r(B)^*(I \cap J) \subseteq N_r(B)^*I \cap N_r(B)^*J$ elde edilir.

Teorem 3.5.9. $\sim_{\mathrm{B_r}}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. I ve J, sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere

$N_rB_*(IJ) \subseteq N_r(B)_*I \cap N_r(B)_*J$ dir.

İspat: I ve J sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olsun. Bu durumda $IJ \subseteq IS \subseteq I$ ve $IJ \subseteq SJ \subseteq J$ olur. Buradan $IJ \subseteq I \cap J$ dir. Sonuç olarak; *Teorem 3.4.6.(3)* ve *Teorem 3.4.6.(4)* den

$N_r(B)_*(IJ) \subseteq N_r(B)_*(I \cap J) \subseteq N_r(B)_*I \cap N_r(B)_*J$ bulunur.

3.6. *Γ*-Yaklaşımlı Yarı Gruplar

Bu kısım da ilk olarak Γ-yaklaşımlı yarı gruplar için gerekli olan Γ −yarı grubun, Γ-alt yarı grubun, Γ −yarı grubun ideali tanımları ve Γ −yarı grubu örneği verilmiştir [24]. Daha sonra Γ-yaklaşımlı yarı gruplar hakkında genel bilgiler verilmiştir [8].

Tanım 3.6.1. $S = \{x, y, z, \dots\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ herhangi iki küme olsun. S aşağıdaki özellikleri sağlarsa S ye Γ −yarı grubu denir. $\forall x, y, z \in S$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$

(i) $x\alpha y \in S$
(ii) $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta z$

Örnek 3.6.2. $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ kümeler olmak üzere,

$S = \{f | f: A \to B \text{ dönüşüm}\}$

$\Gamma = \{\gamma | \gamma: B \to A \text{ dönüşüm}\}$

kümeleri verilsin. $f, h \in S$ için $f \circ h \notin S$ dir, fakat $f, h \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f \circ \gamma \circ h : A \to B$ dönüşüm olduğundan $f \circ \gamma \circ h \in S$ dir. Bu durumda,

$\cdot : S \times \Gamma \times S \to S$

$(f, \gamma, h) \mapsto f \cdot \gamma \cdot h = f \circ \gamma \circ h$

ikili işlem ve

$\forall f, g, h \in S$ ve $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ $\quad f \cdot \gamma \cdot (g \cdot \beta \cdot h) = (f \cdot \gamma \cdot g) \cdot \beta \cdot h$

özelliği sağlandığından S bir Γ −yarı grubudur.

Örnek 3.6.3 F bir cisim ve

$S = \{A = (a_{ij}) \big| a_{ij} \in F;\ i = 1,2, \dots, m,\ j = 1,2, \dots, n; m, n \in \mathbb{Z}^+\}$

$\Gamma = \{\gamma = (\gamma_{ij}) \big| \gamma_{ij} \in F;\ i = 1,2, \dots, n,\ j = 1,2, \dots, m; m, n \in \mathbb{Z}^+\}$

olmak üzere;

$\cdot : S \times \Gamma \times S \quad \to \quad S$

$\left((a_{ij}), (\gamma_{ij}), (b_{ij})\right) \longmapsto \left((a_{ij})_{m \times n} \cdot (\gamma_{ij})_{n \times m} \cdot (b_{ij})_{m \times n}\right)$

işlemi tanımlansın. Bu durumda

1) $\forall A, B \in S$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ $\quad A\gamma B \in S$

2) $\forall A, B, C \in S$ ve $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ $\quad (A\gamma B)\beta C = A\gamma(B\beta C)$

özellikleri sağlandığından S bir $\Gamma -$ yarı gruptur.

Tanım 3.6.4. S bir $\Gamma -$yarı grup ve $A\,, S\,\Gamma -$yarı grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $A\Gamma A \subseteq A$ ise A ya S nin bir $\Gamma -$alt yarı grubu denir.

Tanım 3.6.5. S bir $\Gamma -$yarı grup ve A, $S\ \Gamma -$yarı grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. $A\Gamma S \subseteq A(S\Gamma A \subseteq A)$ ise o zaman A ya S nin bir sağ (sol) ideali denir.

Tanım 3.6.6. U, boş olmayan bir evrensel küme ve Θ, U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. (U, Θ) çiftine yaklaşım uzayı denir.

Tanım 3.6.7. Θ, $S\ \Gamma -$yarı grubun üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\forall x \in S$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ $(a, b) \in \Theta$ olduğunda $(a\gamma x, b\gamma x) \in \Theta$ ve $(x\gamma a, x\gamma b) \in \Theta$ özellikleri sağlanırsa Θ ya $S\ \Gamma -$yarı grubu üzerinde bir kongrüent bağıntısı denir.

Herhangi bir $a \in S$ elemanının belirttiği denklik sınıfı

$\overline{a} = [a]_\Theta = \{x \in S \mid a\Theta x\}$ ile gösterilir.

Tanım 3.6.8. Θ, $S\ \Gamma -$yarı grubun üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\forall a, b \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ $[a]_\Theta\, \gamma\, [b]_\Theta = [a\gamma b]_\Theta$ ise Θ denklik bağıntısına tamdır (complete) denir.

Tanım 3.6.9. A, $S\ \Gamma -$yarı grubunun boş olmayan bir alt kümesi ve Θ, $S\ \Gamma -$yarı grubu üzerinde kongrüent bağıntısı olsun.

$$\Theta_*(A) = \{x \in S | [x]_\Theta \subseteq A\}$$

$$\Theta^*(A) = \{x \in S | [x]_\Theta \cap A \neq \emptyset\}$$

kümelerine sırasıyla A nın $\Theta -$alt yaklaşımı ve $\Theta -$üst yaklaşımı denir.

Önerme 3.6.10. Θ ve Ψ; $S\ \Gamma -$yarı grubunun üzerinde bir kongrüent bağıntısı ve A, B; S nin boş olmayan alt kümeleri olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- **(i)** $\Theta_*(A) \subseteq A \subseteq \Theta^*(A)$
- **(ii)** $\Theta^*(A \cup B) = \Theta^*(A) \cup \Theta^*(B)$
- **(iii)** $\Theta_*(A \cap B) = \Theta_*(A) \cap \Theta_*(B)$

(iv) $A \subseteq B$ ise $\Theta_*(A) \subseteq \Theta_*(B)$ ve $\Theta^*(A) \subseteq \Theta^*(B)$

(v) $\Theta_*(A) \cup \Theta_*(B) \subseteq \Theta_*(A \cup B)$

(vi) $\Theta^*(A \cap B) \subseteq \Theta^*(A) \cap \Theta^*(B)$

(vii) $\Theta \subseteq \Psi$ ise $\Psi_*(A) \subseteq \Theta_*(A)$ ve $\Theta^*(A) \subseteq \Psi^*(A)$

(viii) $\Theta^*(A)\Gamma\, \Theta^*(B) \subseteq \Theta^*(A\Gamma B)$

(ix) Θ tam ise o zaman $\Theta_*(A)\Gamma\, \Theta_*(B) \subseteq \Theta_*(A\Gamma B)$

(x) $(\Theta \cap \Psi)^*(\mathrm{A}) \subseteq \Theta^*(\mathrm{A}) \cap \Psi^*(\mathrm{A})$

(xi) $\Theta_*(\mathrm{A}) \cap \Psi_*(\mathrm{A}) \subseteq (\Theta \cap \Psi)_*(\mathrm{A})$

İspat: (i) $x \in \Theta_*(A)$ olsun. $\Theta_*(A)$ tanımından $[x]_\Theta \subseteq A$ dır. $[x]_\Theta = \{x \in S | a\Theta x\}$ ve Θ kongrüent bağıntısı olduğundan yansıma özelliğinden $a \in S$ için $a\Theta a \Rightarrow a \in [a]_\Theta$ dır. Böylece, $x \in [x]_\Theta \Rightarrow x \in A$ olur. O halde; $\Theta_*(A) \subseteq A$ bulunur.

Şimdi $x \in A$ alalım. $x \in [x]_\Theta$ olduğundan $x \in [x]_\Theta \cap A$ olur ve buradan $[x]_\Theta \cap A \neq \emptyset$ dır. $\Theta^*(A)$ tanımından $\mathrm{x} \in \Theta^*(A)$ olur ve $A \subseteq \Theta^*(A)$ elde edilir.

(ii) $x \in \Theta^*(A \cup B) \Leftrightarrow [x]_\Theta \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists y \in [x]_\Theta \cap (A \cup B)$

$\Leftrightarrow y \in [x]_\Theta$ ve $y \in A \cup B$

$\Leftrightarrow y \in [x]_\Theta$ ve $(y \in A$ veya $y \in B)$

$\Leftrightarrow (y \in [x]_\Theta$ ve $y \in A)$ veya $(y \in [x]_\Theta$ ve $y \in B)$

$\Leftrightarrow y \in [x]_\Theta \cap A$ veya $y \in [x]_\Theta \cap B$

$\Leftrightarrow [x]_\Theta \cap A \neq \emptyset$ veya $[x]_\Theta \cap B \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \Theta^*(A)$ veya $x \in \Theta^*(B)$
$\Leftrightarrow x \in \Theta^*(A) \cup \Theta^*(B)$

O halde $\Theta^*(A \cup B) = \Theta^*(A) \cup \Theta^*(B)$ elde edilir.

(iii) $x \in \Theta_*(A \cap B) \Leftrightarrow [x]_\Theta \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow [x]_\Theta \subseteq A$ ve $[x]_\Theta \subseteq B$

$\Leftrightarrow x \in \Theta_*(A)$ ve $x \in \Theta_*(B)$

$$\Leftrightarrow x \in \Theta_*(A) \cap \Theta_*(B)$$

Buradan $\Theta_*(A \cap B) = \Theta_*(A) \cap \Theta_*(B)$ elde edilir.

(iv) $A \subseteq B$ olsun. $x \in \Theta_*(A) \Rightarrow [x]_\Theta \subseteq A \subseteq B$

$\Rightarrow [x]_\Theta \subseteq B$

$\Rightarrow x \in \Theta_*(B)$

olur ve buradan $\Theta_*(A) \subseteq \Theta_*(B)$ elde edilir.

$x \in \Theta^*(A) \Rightarrow [x]_\Theta \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists y \in [x]_\Theta \cap A$

$\Rightarrow y \in [x]_\Theta$ ve $y \in A \subseteq B$

$\Rightarrow y \in [x]_\Theta$ ve $y \in B$

$\Rightarrow y \in [x]_\Theta \cap B$

$\Rightarrow [x]_\Theta \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \Theta^*(B)$

olur ve dolayısıyla $\Theta^*(A) \subseteq \Theta^*(B)$ dır.

(v) $x \in \Theta_*(A) \cup \Theta_*(B) \Rightarrow x \in \Theta_*(A)$ veya $x \in \Theta_*(B)$

$\Rightarrow [x]_\Theta \subseteq A$ veya $[x]_\Theta \subseteq B$

$\Rightarrow [x]_\Theta \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow x \in \Theta_*(A \cup B)$

O halde $\Theta_*(A) \cup \Theta_*(B) \subseteq \Theta_*(A \cup B)$ elde edilir.

(vi) $x \in \Theta^*(A \cap B) \Rightarrow [x]_\Theta \cap (A \cap B) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists y \in [x]_\Theta \cap (A \cap B)$

$\Rightarrow y \in [x]_\Theta$ ve $y \in (A \cap B)$

$\Rightarrow y \in [x]_\Theta$ ve $(y \in A$ ve $y \in B)$

$\Rightarrow (\ y \in [x]_\Theta$ ve $y \in\ A\ )$ ve $(\ y \in [x]_\Theta$ ve $y \in B\ )$

$\Rightarrow\ y \in [x]_\Theta\ \cap\ A$ ve $y \in [x]_\Theta\ \cap\ B$

$\Rightarrow\ [x]_\Theta\ \cap\ A \neq \emptyset$ ve $[x]_\Theta\ \cap\ B \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \Theta^*(A)$ ve $x \in \Theta^*(B)$

$\Rightarrow x \in \Theta^*(A) \cap \Theta^*(B)$

Böylece $\Theta^*(A \cap B) \subseteq \Theta^*(A) \cap \Theta^*(B)$ elde edilir.

(vii) $\Theta \subseteq \Psi$ olsun. $x \in \Psi_*(A)\ \Rightarrow [x]_\Psi \subseteq A$ olur ve $\Theta \subseteq \Psi$ olduğundan $a \in [x]_\Theta$ için $(a, x) \in \Theta \subseteq \Psi\ \Rightarrow (a, x) \in \Psi\ \Rightarrow a \in [x]_\Psi$ ve buradan $[x]_\Theta \subseteq\ [x]_\Psi$ dir. Böylece $[x]_\Theta \subseteq\ A$ olur ve $x \in \Theta_*(A)$ dır. O halde $\Psi_*(A) \subseteq \Theta_*(A)$ elde edilir.

$x \in \Theta^*(A) \Rightarrow [x]_\Theta \cap A\ \neq \emptyset\ \Rightarrow \exists y \in [x]_\Theta \cap A\ \Rightarrow (y \in [x]_\Theta$ ve $y \in A)$ ve $\Theta \subseteq \Psi$ olduğundan $[x]_\Theta \subseteq\ [x]_\Psi$ dir ve dolayısıyla $y \in [x]_\Psi$ ve $y \in A \Rightarrow y \in [x]_\Psi \cap A$ $\Rightarrow [x]_\Psi \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \Psi^*(A)$ olur. O halde $\Theta^*(A) \subseteq \Psi^*(A)$ elde edilir.

(viii) $x \in \Theta^*(A)\Gamma\Theta^*(B)$ alalım. Bu durumda $x = a\gamma b;\ a \in \Theta^*(A),\ \gamma \in \Gamma, b \in \Theta^*(B)$ dır. Ayrıca;

$a \in \Theta^*(A) \Rightarrow [a]_\Theta \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in [a]_\Theta \cap A \Rightarrow (y \in [a]_\Theta$ ve $y \in A)$,

$b \in \Theta^*(B) \Rightarrow [b]_\Theta \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in [b]_\Theta \cap A \Rightarrow (z \in [b]_\Theta$ ve $z \in B)$

olur. Bu durumda; $w = y\gamma z \in [a]_\Theta\gamma[b]_\Theta \subseteq [a\gamma b]_\Theta \Rightarrow w \in [a\gamma b]_\Theta$ dır. Çünkü; $x' \in [a]_\Theta\gamma[b]_\Theta\ \ \Rightarrow x' = y'\gamma z';\ y' \in [a]_\Theta,\ \gamma \in \Gamma,\ z' \in [b]_\Theta\ \ \Rightarrow (a, y') \in \Theta$ ve $(b, z') \in \Theta$ olur ve Θ kongrüent bağıntısı olduğundan $(a\gamma b, y'\gamma b) \in \Theta$ ve $(y'\gamma b, y'\gamma z') \in \Theta \Rightarrow (a\gamma b, y'\gamma z') \in \Theta \Rightarrow x' = y'\gamma z' \in [a\gamma b]_\Theta$ dır. Öte yandan $w = y\gamma z \in A\Gamma B$ olduğundan $w \in [a\gamma b]_\Theta \cap A\Gamma B\ \Rightarrow [a\gamma b]_\Theta \cap A\Gamma B \neq \emptyset\ \Rightarrow a\gamma b = x \in \Theta^*(A\Gamma B)$ olur. Buradan $\Theta^*(A)\Gamma\ \Theta^*(B) \subseteq \Theta^*(A\Gamma B)$ elde edilir.

(ix) $x \in \Theta_*(A)\Gamma\Theta_*(B)$ olsun. Bu durumda $x = a\gamma b;\ a \in \Theta_*(A), \gamma \in \Gamma, b \in \Theta_*(B)$ $\quad a \in \Theta_*(A) \Rightarrow [a]_\Theta \subseteq A,\quad b \in \Theta_*(B) \Rightarrow\ [b]_\Theta \subseteq B$ ve dolayısıyla $\Rightarrow [a]_\Theta\gamma[b]_\Theta \subseteq A\Gamma B$ dir. Öte yandan Θ tam olduğundan $[a\gamma b]_\Theta = [a]_\Theta\gamma[b]_\Theta$ idi. O halde $[a\gamma b]_{\Theta} \subseteq A\Gamma B \Rightarrow x = a\gamma b \in \Theta_*(A\Gamma B)$ olur. Böylece $\Theta_*(A)\Gamma\Theta_*(B) \subseteq \Theta_*(A\Gamma B)$ elde edilir.

(x) $x \in (\Theta \cap \Psi)^* A \Rightarrow [x]_{\Theta\cap\Psi} \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists y \in [x]_{\Theta\cap\Psi} \cap A$

$\Rightarrow y \in [x]_{\Theta\cap\Psi}$ ve $y \in A$

$\Rightarrow x(\Theta \cap \Psi)y$ ve $y \in A$

$\Rightarrow (x, y) \in (\Theta \cap \Psi)$ ve $y \in A$

$\Rightarrow ((x, y) \in \Theta$ ve $(x, y) \in \Psi)$ ve $y \in A$

$\Rightarrow (x\Theta y$ ve $y \in A)$ ve $(x \Psi y$ ve $y \in A)$

$\Rightarrow (y \in [x]_{\Theta}$ ve $y \in A)$ ve $(y \in [x]_{\Psi}$ ve $y \in A)$

$\Rightarrow y \in [x]_{\Theta} \cap A$ ve $y \in [x]_{\Psi} \cap A$

$\Rightarrow [x]_{\Theta} \cap A \neq \emptyset$ ve $[x]_{\Psi} \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \Theta^*(A)$ ve $x \in \Psi^*(A)$

$\Rightarrow x \in \Theta^*(A) \cap \Psi^*(A)$

O halde $(\Theta \cap \Psi)^*(A) \subseteq \Theta^*(A) \cap \Psi^*(A)$ elde edilir.

(xi) $x \in \Theta_*(A) \cap \Psi_*(A) \Rightarrow x \in \Theta_*(A)$ ve $\Psi_*(A) \Rightarrow [x]_{\Theta} \subseteq A$ ve $[x]_{\Psi} \subseteq A$ $\Rightarrow [x]_{\Theta} \cap [x]_{\Psi} \subseteq A$ dır.

Öte yandan $[x]_{\Theta\cap\Psi} = \{a \in S | a(\Theta \cap \Psi)x\}$

$=\{ a \in S | (a, x) \in (\Theta \cap \Psi)\}$

$=\{ a \in S | (a, x) \in \Theta$ ve $(a, x) \in \Psi\}$

$=\{ a \in S | a\Theta x$ ve $a\Psi x \}$

$= \{a \in S | a\Theta x\} \cap \{ a \in S | a\Psi x \}$

$= [x]_{\Theta} \cap [x]_{\Psi}$

olduğundan $[x]_{\Theta\cap\Psi} \subseteq A \Rightarrow x \in (\Theta \cap \Psi)_*(A)$ olur ve istenen elde edilir.

Tanım 3.6.11. Θ, S Γ $-$yarı grubunun üzerinde bir kongrüent bağıntısı ve A, S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda A nın Θ $-$üst (Θ $-$alt) yaklaşımı, S nin bir Γ $-$alt yarı grubu ise o zaman A ya S nin Θ $-$üst (Θ $-$alt) yaklaşık (rough) Γ $-$alt yarı grubu denir.

Tanım 3.6.12. Θ, S Γ $-$yarı grubunun üzerinde bir kongrüent bağıntısı ve A, S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. A nın Θ $-$üst (Θ $-$alt) yaklaşımı S nin sağ (sol) ideali ise o zaman A ya S nin Θ $-$üst (Θ $-$alt) yaklaşık Γ $-$sağ (sol) ideali denir.

Teorem 3.6.13. Θ, S Γ $-$yarı grubun üzerinde bir kongrüent bağıntısı olsun.

(i) S nin bir Γ $-$alt yarı grubu S nin Θ $-$üst yaklaşık Γ $-$alt yarı grubudur.

(ii) S nin her sağ (sol) ideali S nin Θ $-$üst yaklaşık Γ $-$sağ (sol) idealidir.

İspat: **(i)** A, S nin bir Γ $-$alt yarı grubu olsun. Bu durumda $A\Gamma A \subseteq A$ dır. *Önerme 3.6.10.(i)* den $\emptyset \neq A \subseteq \Theta^*(A)$ dır. *Önerme 3.6.10.(iv)* ve *Önerme 3.6.10.(viii)* den

$$\Theta^*(A)\Gamma\Theta^*(A) \subseteq \Theta^*(A\Gamma A) \subseteq \Theta^*(A) \Rightarrow \Theta^*(A)\Gamma\Theta^*(A) \subseteq \Theta^*(A)$$

elde edilir. Böylece $\Theta^*(A)$, S nin Γ $-$alt yarı grubudur. Yani A, S nin Θ $-$üst yaklaşık Γ $-$alt yarı grubudur.

(ii) A, S nin bir Γ $-$sağ (sol) ideali olsun. Bu durumda $A\Gamma S \subseteq A$ dır. *Önerme 3.6.10.(i), Önerme 3.6.10.(iv)* ve *Önerme 3.6.10.(viii)* den

$$\Theta^*(A)\Gamma S \subseteq \Theta^*(A)\Gamma\, \Theta^*(S) \subseteq \Theta^*(A\Gamma S) \subseteq \Theta^*(A) \Rightarrow \Theta^*(A)\Gamma S \subseteq \Theta^*(A)$$

dır. Böylece $\Theta^*(A)$, S nin bir Γ $-$sağ (sol) idealidir. Yani A, S nin bir Θ $-$üst yaklaşık Γ $-$sağ(sol) idealidir.

Teorem 3.6.14. A, S Γ $-$yarı grubun boş olmayan bir alt kümesi, Θ; S üzerinde tam kongrüent bağıntısı ve A nın Θ $-$alt yaklaşımı boş kümeden farklı olsun. Bu durumda

(i) A, S nin bir Γ $-$alt yarı grubu ise A, S nin Θ $-$alt yaklaşık Γ $-$alt yarı grubudur.

(ii) A, S nin bir Γ −sağ (sol) ideali ise A, S nin Θ −alt yaklaşık Γ −sağ (sol) idealidir.

İspat: (i) A, S nin bir Γ −alt yarı grubu olsun. Bu durumda $A\Gamma A \subseteq A$ dır. *Önerme 3.6.10.(iv)* ve *Önerme 3.6.10.(viii)* den

$$\Theta_*(A)\Gamma\Theta_*(A) \subseteq \Theta_*(A\Gamma A) \subseteq \Theta_*(A) \Rightarrow \Theta_*(A)\Gamma\Theta_*(A) \subseteq \Theta_*(A)$$

olur ve buradan $\Theta_*(A)$, S nin Γ −alt yarı grubudur. Yani A, S nin Θ −alt yaklaşık Γ −alt yarı grubudur.

(ii) A, S nin bir Γ −sağ ideali olsun. Bu durumda $A\Gamma S \subseteq A$ dır. $x \in \Theta_*(A)\Gamma S \Rightarrow x = a\gamma s; a \in \Theta_*(A),\ \gamma \in \Gamma,\ s \in S$ dır. Böylece Θ; S üzerinde tam olduğundan $[x]_\Theta = [a\gamma s]_\Theta = [a]_\Theta\gamma[s]_\Theta \subseteq A\Gamma S \Rightarrow [x]_\Theta \subseteq A\Gamma S \Rightarrow x \in \Theta_*(A\Gamma S)$ ve buradan $\Theta_*(A)\Gamma S \subseteq \Theta_*(A\Gamma S)$ olur. O halde *Önerme 3.6.10.(iv)* den

$$\Theta_*(A)\Gamma S \subseteq \Theta_*(A\Gamma S) \subseteq \Theta_*(A)$$

dır. $\Theta_*(A)$, S nin Γ −sağ idealidir. Yani A, S nin Θ −alt yaklaşık Γ −sağ idealidir.

Tanım 3.6.15. S bir Γ −yarı grup ve A da S nin bir Γ −alt yarı grubu olsun. $A\Gamma S\Gamma A \subseteq A$ ise o zaman A ya S nin Γ −bi-ideali denir.

Tanım 3.6.16. S Γ − yarı grup ve A da S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Θ, S üzerinde bir kongrüent bağıntısı olmak üzere; A nın Θ −üst (Θ −alt) yaklaşımı S nin bi-ideali ise o zaman A da S nin Θ −üst (Θ −alt) yaklaşık bi-ideali denir.

Teorem 3.6.17. Θ, S Γ −yarı grup üzerinde kongrüent bağıntısı ve A da S nin Γ −bi-ideali olsun. Bu durumda

(i) A, S nin bir Θ −üst yaklaşık Γ −bi-idealidir.

(ii) Θ tam ve A nın Θ −alt yaklaşımı boş kümeden farklı ise o zaman A, S nin Θ −alt yaklaşık Γ −bi-idealidir.

İspat: (i) *Önerme 3.6.10.(i), Önerme 3.6.10.(iv)* ve *Önerme 3.6.10.(viii)* den

$$\Theta^*(A)\Gamma S\Gamma\Theta^*(A) \subseteq \Theta^*(A)\Gamma\, \Theta^*(S)\Gamma\Theta^*(A) \subseteq \Theta^*(A\Gamma S\Gamma A) \subseteq \Theta^*(A)$$

ve buradan

$\Theta^*(A)\Gamma S\Gamma\Theta^*(A) \subseteq \Theta^*(A)$

elde edilir. Böylece *Teorem 3.6.13.(i)* den $\Theta^*(A)$, S nin Γ −bi-idealidir. Yani A nın Θ −üst yaklaşımı, S nin Γ −bi-idealidir.

(ii) Θ nın tam olduğunu ve A nın Θ −alt yaklaşımı boş kümeden farklı olsun. A, S nin Γ −bi-ideali olduğundan $A\Gamma A \subseteq A\Gamma S\Gamma A \subseteq A \Rightarrow A\Gamma A \subseteq A$ dır. Yani A, S nin Γ −alt yarı grubudur. Böylece $\emptyset \neq \Theta_*(A)$ olduğundan *Teorem 2.6.14.(i)* den A, S nin bir Θ −alt yaklaşık Γ −alt yarı grubudur. Ayrıca; $x \in \Theta_*(A)\Gamma S\Gamma\Theta_*(A)$ alınırsa $x = a\gamma s\beta b$; $a, b \in \Theta_*(A)$, γ, $\beta \in \Gamma$, $s \in S$ olur. Bu durumda; $[x]_\Theta = [a\gamma s\beta b]_\Theta = [a\gamma(s\beta b)]_\Theta = [a]_\Theta\gamma[s\beta b]_\Theta = [a]_\Theta\gamma[s]_\Theta\beta[a]_\Theta\gamma[b]_\Theta \subseteq A\Gamma S\Gamma A \quad \Rightarrow [x]_\Theta \subseteq A\Gamma S\Gamma A$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in \Theta_*(A\Gamma S\Gamma A)$ dır. Yani $\Theta_*(A)\Gamma S\Gamma\Theta_*(A) \subseteq \Theta_*(A\,\Gamma\,S\,\Gamma A) \subseteq \Theta_*(A) \;\Rightarrow\; \Theta_*(A)\Gamma S\Gamma\Theta_*(A) \subseteq \Theta_*(A)$ olduğundan A nın Θ −alt yaklaşımı Γ −bi-idealdir. Sonuç olarak A, S nin Θ −alt yaklaşık Γ − bi-idealidir.

Teorem 3.6.18. Θ, S Γ −yarı grup üzerinde bir kongrüent bağıntısı olsun. A ve B sırasıyla S nin Γ −sağ ve sol ideali ise o zaman

$\Theta^*(A\Gamma B) \subseteq \Theta^*(A) \cap \Theta^*(B)$ ve $\Theta_*(A\Gamma B) \subseteq \Theta_*(A) \cap \Theta_*(B)$ dir.

İspat: A ve B sırasıyla S nin Γ −sağ ve sol ideali olsun. Bu durumda

$A\Gamma B \subseteq A\Gamma S \subseteq A$ ve $A\Gamma B \subseteq S\Gamma B \subseteq B$

dir. Dolayısıyla $A\Gamma B \subseteq A \cap B$ dir. *Önerme 3.6.10.(iii)*, *Önerme 3.6.10.(iv)* ve *Önerme 3.6.10.(vi)* den

$\Theta^*(A\Gamma B) \subseteq \Theta^*(A \cap B) \subseteq \Theta^*(A) \cap \Theta^*(B)$ ve

$\Theta_*(A\Gamma B) \subseteq \Theta_*(A \cap B) \subseteq \Theta_*(A) \cap \Theta_*(B)$

elde edilir ve ispat biter.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda Γ −yakınlık yarı grubu tanımlayıp, örnekler verilecektir. İkinci kısımda ise Γ −yakınlık yarı grubunun sağ ideali (sol ideali) ve bi-ideal kavramları verilerek bu kavramlar ile ilgili bazı özellikler incelenecektir.

4.1. $\Gamma -$ Yakınlık Yarı Grup ve Örnekler

Bu kısma, $\left(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), v_{N_r}\right)$ yapısında, yakın yaklaşım uzayı üzerinde cebirsel yapılar çalışırken ihtiyaç duyulmayan $V_{N_r}: \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \rightarrow [0,1]$ yakınlık fonksiyonu dikkate almaksızın aşağıdaki tanım ile başlayalım.

Tanım 4.1.1. $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r < |B|$ olmak üzere; "$\sim_{B_r}$" , $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \left\{\xi_{\mathcal{O},B_r} | B_r \subseteq B\right\}$ ayrışımların kümesi olsun. Bu durumda $\left(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B)\right)$ yapısına zayıf yakın yaklaşım uzayı denir.

Aşağıda, ispatı *Teorem 3.4.6* nın ispatı ile aynı olan Teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 4.1.2. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r)$ zayıf yakın yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $N_r(B)_* X \subseteq X \subseteq N_r(B)^* X$.

ii) $N_r(B)^*(X \cup Y) = N_r(B)^* X \cup N_r(B)^* Y$.

iii) $N_r(B)_*(X \cup Y) \supseteq N_r(B)_* X \cup N_r(B)_* Y$.

iv) $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^* X \cap N_r(B)^* Y$.

v) $N_r(B)_*(X \cap Y) = N_r(B)_* X \cap N_r(B)_* Y$.

vi) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)^* X \subseteq N_r(B)^* Y$.

vii) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)_* X \subseteq N_r(B)_* Y$.

Tanım 4.1.3. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayı, $S = \{x, y, z, \ldots\} \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \subseteq \mathcal{O}'$ nun alt kümeleri olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa o zaman S ye $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ zayıf yakın yaklaşım uzayları üzerinde bir Γ −yarı grup veya kısaca S ye bir $\Gamma-$ yakınlık yarı grup denir.

i) $\forall x, y \in S$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ $x \cdot \gamma \cdot y \in N_r(B)^* S$,

ii) $\forall x, y, z \in S$ ve $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ $(x \cdot \gamma \cdot y) \cdot \beta \cdot z = x \cdot \gamma \cdot (y \cdot \beta \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır.

Uyarı 4.1.4. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayı, $S \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma \subseteq \mathcal{O}'$ nun alt kümeleri ve S $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ zayıf yakın yaklaşım uzayları üzerinde bir Γ −yarı grup olsun. $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ ise o zaman S, $\mathcal{O}$ zayıf yakın yaklaşım uzayı üzerinde bir Γ −yarı gruptur.

Örnek 4.1.5 $U = \left\{ (a_{ij})_{2\times 2} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O} = \{a, \beta, \gamma, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesneler kümesi, $r = 1$, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonların kümesi ve $S = \{d, e\} \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma = \{\beta, \gamma\} \subseteq \mathcal{O}$ olsun. $\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi üzerinde "$.$" işlemi aşağıdaki gibi verilsin(Çizelge 4.1).

Çizelge 4.1 Algılanabilir nesneler kümesi üzerinde ". " işlemi

	a	β	γ	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
β	a	a	a	β	β	β	γ	γ	i	i	a	β
γ	a	β	γ	a	β	i	a	γ	γ	i	i	γ
b	a	a	a	b	b	b	e	e	g	g	a	b
c	a	a	a	c	c	c	f	f	h	h	a	c
d	a	β	γ	c	b	j	f	e	h	g	i	d
e	a	b	e	a	b	g	a	e	a	g	g	e
f	a	c	f	a	c	h	a	f	a	h	h	f
g	a	b	e	b	a	e	e	a	g	a	g	g
h	a	c	f	c	a	f	f	a	h	a	h	h
i	a	β	γ	β	a	γ	γ	a	i	a	i	i
j	a	β	γ	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Ayrıca; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$\varphi_1 : \mathcal{O} \rightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$,

$\varphi_2 : \mathcal{O} \rightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$,

$\varphi_3 : \mathcal{O} \rightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$

aşağıdaki gibi tanımlansın(Çizelge 4.2).

Çizelge 4.2 Çıkarım fonksiyonu

	a	β	γ	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_1	α_2	α_3	α_2	α_1	α_3	α_2	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1
φ_2	α_1	α_3	α_3	α_4	α_1	α_1	α_4	α_3	α_4	α_3	α_3	α_3
φ_3	α_3	α_3	α_1	α_1	α_4	α_4	α_5	α_1	α_3	α_3	α_4	α_3

Şimdi, $\mathcal{O}$ daki elemanların $\sim_{B_r}$ bağıntısına göre yakınlık sınıfların belirleyelim.

$[a]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} = \{a, c, f, g, h, i, j\}$

$= [c]_{\varphi_1} = [f]_{\varphi_1} = [g]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}$

$[\beta]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(\beta) = \alpha_2\} = \{\beta, b, e\}$

$= [b]_{\varphi_1} = [e]_{\varphi_1}$

$[\gamma]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(\gamma) = \alpha_3\} = \{\gamma, d\}$

$= [d]_{\varphi_1}$

O zaman $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [\beta]_{\varphi_1}, [\gamma]_{\varphi_1}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} = \{a, c, d\}$

$= [c]_{\varphi_2} = [d]_{\varphi_2}$

$[\beta]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(\beta) = \alpha_3\} = \{\beta, \gamma, f, h, i, j\}$

$= [\gamma]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2}$

$[b]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_4\} = \{b, e, g\}$

$= [e]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2}$

O zaman $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}, [\beta]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\} = \{a, \beta, g, h, j\}$

$= [\beta]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3} = [j]_{\varphi_3}$

$[\gamma]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(\gamma) = \alpha_1\} = \{\gamma, b, f\}$

$= [b]_{\varphi_3} = [f]_{\varphi_3}$

$[c]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(c) = \alpha_4\} = \{c, d, i\}$

$= [d]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3}$

$[e]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_5\} = \{e\}$

O zaman $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [\gamma]_{\varphi_3}, [c]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}\}$ elde edilir.

Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür.

$$N_1(B)^*S = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$

$$= [\beta]_{\varphi_1} \cup [\gamma]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [b]_{\varphi_2} \cup [c]_{\varphi_3} \cup [e]_{\varphi_3}$$

$$= \{\beta, b, e\} \cup \{\gamma, d\} \cup \{a, c, d\} \cup \{b, e, g\} \cup \{c, d, i\} \cup \{e\}$$

$$= \{a, \beta, \gamma, b, c, d, e, g, i\}$$

elde edilir.

(i) $\forall\, d, e \in S$ ve $\forall\, \beta \in \Gamma$ $\;d{\cdot}\beta{\cdot}e \in N_1(B)^*S$ dır. Çünkü;

$d{\cdot}\gamma{\cdot}d = i,\quad d{\cdot}\gamma{\cdot}e = a,\quad e{\cdot}\gamma{\cdot}d = g,\quad e{\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}d = \beta,\quad d{\cdot}\beta{\cdot}e = \gamma,\quad e{\cdot}\beta{\cdot}d = b,\quad e{\cdot}\beta{\cdot}e = e.$
dır.

(ii) $\forall\, d, e \in S$ ve $\forall\, \beta, \gamma \in \Gamma$ $\;d{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (d{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}e$ özelliği $N_1(B)^*S$ de sağlanır. Çünkü;

$d{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}d = i,$
$d{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$d{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}d = a,$
$d{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$d{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}d) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}d = \beta,$
$d{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}e) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}e = \gamma,$
$d{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}d) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}d = a,$
$d{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}e) = (d{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}e = a,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (b{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}d = a$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (d{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (d{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}d = i,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (d{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}d) = (d{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}d = a,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}e) = (d{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}e = a,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}d) = (d{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}d = \beta,$
$d{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}e) = (d{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}e = \gamma,$

$e{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}d = g,$
$e{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$e{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}d = a,$
$e{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$e{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}d) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}d = b,$
$e{\cdot}\gamma{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}e) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}e = e,$
$e{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}d) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}d = a,$
$e{\cdot}\gamma{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}e) = (e{\cdot}\gamma{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}e = a,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (e{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}d = a,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (e{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}d) = (e{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}d = g,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\gamma{\cdot}e) = (e{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\gamma{\cdot}e = a,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}d) = (e{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}d = a,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(d{\cdot}\beta{\cdot}e) = (e{\cdot}\beta{\cdot}d){\cdot}\beta{\cdot}e = a,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}d) = (e{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}d = b,$
$e{\cdot}\beta{\cdot}(e{\cdot}\beta{\cdot}e) = (e{\cdot}\beta{\cdot}e){\cdot}\beta{\cdot}e = e.$

dır. O halde; S, $\mathcal{O}$ zayıf yakın yaklaşım uzayı üzerinde bir Γ −yarı gruptur.

Örnek 4.1.6 $U = \left\{ (a_{ij})_{1\times 3} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$a = [0 \quad 0 \quad 0]$, $b = [0 \quad 0 \quad 1]$, $c = [0 \quad 1 \quad 0]$, $d = [0 \quad 1 \quad 1]$, $e = [1 \quad 0 \quad 0]$,

$f = [1 \quad 0 \quad 1]$, $g = [1 \quad 1 \quad 0]$, $h = [1 \quad 1 \quad 1]$ olmak üzere;

$\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ve

$U' = \left\{ (a_{ij})_{3\times 1} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$$\alpha = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O}' = \{\alpha, \beta, \gamma, \theta, \lambda, \mu, \delta, \sigma\}$ iki algılanabilen nesneler kümeleri, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonların kümesi, $r = 1$, $S = \{b, c\} \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathcal{O}'$ kümeler olsun. Bu durumda; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \{\alpha_1, \alpha_3\}$

$\varphi_3 : \mathcal{O} \to V_3 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$

aşağıdaki gibi tanımlansın(Çizelge 4.3).

Çizelge 4.3 Çıkarım fonksiyonu

	a	b	c	d	e	f	g	h
φ_1	α_1	α_1	α_1	α_2	α_3	α_3	α_3	α_2
φ_2	α_1	α_1	α_1	α_3	α_3	α_3	α_3	α_3
φ_3	α_2	α_2	α_2	α_2	α_3	α_3	α_3	α_3

Bu durumda

$[a]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} = \{a, b, c\}$

$= [b]_{\varphi_1} = [c]_{\varphi_1}$

$[d]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(d) = \alpha_2\} = \{d, h\}$

$= [h]_{\varphi_1}$

$[e]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(e) = \alpha_3\} = \{e, f, g\}$

$= [f]_{\varphi_1} = [g]_{\varphi_1}$

O zaman $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [d]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} = \{a, b, c\}$

$= [b]_{\varphi_2} = [c]_{\varphi_2}$

$[d]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(d) = \alpha_3\} = \{d, e, f, g, h\}$

$= [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2}$

Böylece $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}, [d]_{\varphi_2}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_2\} = \{a, b, c, d\}$

$= [b]_{\varphi_3} = [c]_{\varphi_3} = [d]_{\varphi_3}$

$[e]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_3\} = \{e, f, g, h\}$

$= [f]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3}$

ve buradan $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}\}$ elde edilir.

Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür. Bu durumda

$$N_1(B)^*S = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$

$$= [a]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3}$$

$$= \{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} \cup \{a, b, c, d\}$$

$$= \{a, b, c, d\}$$

olur. Bu arada "α" ve "β" işlemi sırasıyla aşağıdaki gibi verilsin(Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5).

Çizelge 4.4 "α" işlemi

α	b	c
b	a	a
c	a	a

Çizelge 4.5 "β" işlemi

β	b	c
b	a	a
c	b	c

işlemi tabloları dikkate alınırsa $b, c \in S$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere;

$$b{\cdot}\alpha{\cdot}c = a,\quad c{\cdot}\alpha{\cdot}b = a,\quad b{\cdot}\beta{\cdot}c = a,\quad c{\cdot}\beta{\cdot}b = b,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}b = a,\quad c{\cdot}\beta{\cdot}c = c,\quad b{\cdot}\alpha{\cdot}b = a,\quad c{\cdot}\alpha{\cdot}c = a.$$

olduğundan ***(i)*** özelliğini sağlar. Ayrıca, $b, c \in S$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere;

$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,$$
$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,$$
$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,$$
$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,$$
$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}b) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}b) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}b = a,$$
$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}c) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}c) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}c = a,$$
$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}b) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}b) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}b = a,$$
$$b{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}c) = (b{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\alpha{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}c) = (c{\cdot}\alpha{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}c = a,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (b{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (c{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (b{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (c{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (b{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}b) = (c{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}b = a,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (b{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\alpha{\cdot}c) = (c{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\alpha{\cdot}c = a,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}b) = (b{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}b) = (c{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}b = a,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}c) = (b{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(b{\cdot}\beta{\cdot}c) = (c{\cdot}\beta{\cdot}b){\cdot}\beta{\cdot}c = a,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}b) = (b{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}b = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}b) = (c{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}b = b,$$
$$b{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}c) = (b{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}c = a,\qquad c{\cdot}\beta{\cdot}(c{\cdot}\beta{\cdot}c) = (c{\cdot}\beta{\cdot}c){\cdot}\beta{\cdot}c = c.$$

olur ve böylece ***(ii)*** özelliği de sağlanır. O halde S, $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir $\Gamma-$yarı grup (S, bir Γ $-$yakınlık yarı grup) tur.

4.2. $\Gamma-$ Yakınlık Alt Yarı Grubun Özellikleri ve İdealler

Tanım 4.2.1. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları, $S \subseteq \mathcal{O}, \Gamma \subseteq \mathcal{O}'$, $B \subseteq \mathcal{F}, r \leq |B|, B_r \subseteq \mathcal{F}$ ve $\sim_{B_r}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Bu durumda; $S, \mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı grubu olmak üzere;

$\forall\, x, y, a \in S,\ \forall\, \gamma \in \Gamma \quad x \sim_{B_r} y \Rightarrow\ x\gamma a \sim_{B_r} y\gamma a$ ve $a\gamma x \sim_{B_r} a\gamma y$

ise o zaman $\sim_{B_r}$ bağıntısına kongrüans ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Teorem 4.2.2. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları, $S \subseteq \mathcal{O}, \Gamma \subseteq \mathcal{O}'$, $B \subseteq \mathcal{F}, r \leq |B|$, $B_r \subseteq \mathcal{F}$ ve $S, \mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı grup olsun. Bu durumda $\sim_{B_r}$, S üzerinde bir kongrüans ayırt edilemezlik bağıntısı ise o zaman

$\forall\, x, y \in S,\ \forall\, \gamma \in \Gamma \quad [x]_{B_r}\gamma[y]_{B_r} \subseteq [x\gamma y]_{B_r}$ dır.

İspat: $z \in [x]_{B_r}\, \gamma\ [y]_{B_r}$ alalım. $z = a\gamma b; a \in [x]_{B_r},\ \gamma \in \Gamma, b \in [y]_{B_r}$ dır. Buradan $\Gamma \quad x \sim_{B_r} a$ ve $y \sim_{B_r} b \Rightarrow\ x\gamma y \sim_{B_r} a\gamma y$ ve $a\gamma y \sim_{B_r} a\gamma b \Rightarrow\ x\gamma y \sim_{B_r} a\gamma b$ olur ve dolayısıyla $z = a\gamma b \in [x\gamma y]_{B_r}$ elde edilir.

Tanım 4.2.3. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları, $S \subseteq \mathcal{O}, \Gamma \subseteq \mathcal{O}'$, $B \subseteq \mathcal{F}, r \leq |B|, B_r \subseteq \mathcal{F}$ ve $\sim_{B_r}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir kongrüans ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Bu durumda $S, \mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı grubu olmak üzere;

$\forall\, x, y \in S,\ \forall\, \gamma \in \Gamma \quad [x]_{B_r}\gamma[y]_{B_r} = [x\gamma y]_{B_r}$

ise o zaman $\sim_{B_r}$ ye S üzerinde tam kongrüans ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Önerme 4.2.4. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları, $S \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma \subseteq \mathcal{O}'$ olsun. Bu durumda $S, \mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı grubu olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $X, Y \subseteq S$ ise $(N_r(B)^*X)\Gamma(N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(X\Gamma Y)$.

ii) $X, Y \subseteq S$ ve $\sim_{B_r}$ tam ise $(N_r(B)_*X)\Gamma(N_r(B)_*Y) \subseteq N_r(B)_*(X\Gamma Y)$.

İspat: (i) $x \in (N_r(B)^*X)\Gamma(N_r(B)^*Y)$ olsun.

$x = a\gamma b; a \in N_r(B)^*X, \gamma \in \Gamma, b \in N_r(B)^*Y$

$a \in N_r(B)^*X \Rightarrow [a]_{B_r} \cap X \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in [a]_{B_r} \cap X \Rightarrow y \in [a]_{B_r}$ ve $y \in X$

$b \in N_r(B)^*Y \Rightarrow [b]_{B_r} \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in [b]_{B_r} \cap Y \Rightarrow z \in [b]_{B_r}$ ve $z \in Y$

$w = y\gamma z \in [a]_{B_r}\, \gamma\, [b]_{B_r} \subseteq [a\gamma b]_{B_r} \Rightarrow w \in [a\gamma b]_{B_r}$ dır.

Ayrıca, $w \in X\Gamma Y$ dır. Böylece $\Rightarrow w \in [a\gamma b]_{B_r} \cap X\Gamma Y \Rightarrow [a\gamma b]_{B_r} \cap X\Gamma Y \neq \emptyset \Rightarrow a\gamma b = x \in N_r(B)^*(X\Gamma Y)$ olur.

Buradan $(N_r(B)^*X)\Gamma(N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(X\Gamma Y)$ elde edilir.

(ii) $x \in (N_r(B)_*X)\Gamma(N_r(B)_*Y)$ olsun. $x = a\gamma b$; $a \in N_r(B)_*X$, $\gamma \in \Gamma$, $b \in N_r(B)_*Y \Rightarrow a \in N_r(B)_*X \Rightarrow [a]_{B_r} \subseteq X$ ve $b \in N_r(B)_*Y \Rightarrow [b]_{B_r} \subseteq Y \Rightarrow [a]_{B_r}\gamma[b]_{B_r} \subseteq X\Gamma Y$ dir. Öte yandan $[a\gamma b]_{B_r} = [a]_\Theta\gamma[b]_{B_r} \subseteq X\Gamma Y$ olduğundan $[a\gamma b]_{B_r} \subseteq X\Gamma Y \Rightarrow x = a\gamma b \in N_r(B)_*(X\Gamma Y)$ olur. O halde, $(N_r(B)_*X)\Gamma(N_r(B)_*Y) \subseteq N_r(B)_*(X\Gamma Y)$ elde edilir.

Tanım 4.2.5. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları, S; $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir $\Gamma -$yarı grubu ve A, S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

i) $A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ ise A ya S $\Gamma -$yakınlık yarı grubunun alt $\Gamma -$ yarı grubu denir.

ii) $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ ise A ya S $\Gamma -$yakınlık yarı grubunun üst-yakın alt $\Gamma -$yarı grubu denir.

Simdi, alt $\Gamma -$ yarı grup ve üst-yakın alt $\Gamma -$ yarı gruplara birer örnek verelim.

Örnek 4.2.6 $U = \left\{ \left(a_{ij}\right)_{1\times 3} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$a = [0 \quad 1 \quad 1]$, $b = [1 \quad 0 \quad 0]$, $c = [1 \quad 1 \quad 0]$, $d = [0 \quad 1 \quad 0]$, $e = [1 \quad 0 \quad 1]$,

$f = [0 \quad 0 \quad 0]$, $g = [0 \quad 0 \quad 1]$, $h = [1 \quad 1 \quad 1]$ olmak üzere;

$\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ve

$U' = \left\{ (a_{ij})_{3\times 1} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O}' = \{\alpha, \beta, \gamma, \theta, \lambda, \mu, \delta, \sigma\}$ iki algılanabilen nesneler kümeleri, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi, $r = 1, S = \{a, g\} \subseteq \mathcal{O},\ A = \{g\} \subseteq S \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathcal{O}'$ kümeler olsun. Bu durumda; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \to V_3 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

aşağıdaki gibi tanımlansın(Çizelge 4.6).

Çizelge 4.6 Çıkarım fonksiyonu

	a	b	c	d	e	f	g	h
φ_1	α_1	α_1	α_1	α_2	α_3	α_3	α_3	α_2
φ_2	α_4	α_1	α_1	α_3	α_3	α_3	α_4	α_3
φ_3	α_4	α_2	α_4	α_2	α_3	α_3	α_4	α_3

Bu durumda

$$[a]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} = \{a, b, c\}$$

$$= [b]_{\varphi_1} = [c]_{\varphi_1}$$

$$[d]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(d) = \alpha_2\} = \{d, h\}$$

$$= [h]_{\varphi_1}$$

$$[e]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(e) = \alpha_3\} = \{e, f, g\}$$

$$= [f]_{\varphi_1} = [g]_{\varphi_1}$$

O zaman $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [d]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_4\} = \{a, g\}$

$= [g]_{\varphi_2}$

$[b]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_1\} = \{b, c\}$

$= [c]_{\varphi_2}$

$[d]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(d) = \alpha_3\} = \{d, e, f, h\}$

$= [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2}$

olur ve dolayısıyla $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}, [d]_{\varphi_2}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_4\} = \{a, c, g\}$

$= [c]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3}$

$[b]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_1\} = \{b, d\}$

$= [d]_{\varphi_3}$

$[e]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_3\} = \{e, f, h\}$

$= [f]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3}$

Buradan $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}\}$ elde edilir.

Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi

$N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür. Bu durumda

$$N_1(B)^* S = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$

$$= [a]_{\varphi_1} \cup [e]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3}$$

$$= \{a, b, c\} \cup \{e, f, g\} \cup \{a, g\} \cup \{a, c, g\}$$

$$= \{a, b, c, e, f, g\}$$

olur. "α" ve "β" işlemleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilsin(Çizelge 4.7 ve 4.8).

Çizelge 4.7 "α" işlemi

α	a	g
a	f	f
g	a	g

Çizelge 4.8 "β" işlemi

β	a	g
a	a	g
g	f	f

işlemi tabloları dikkate alınırsa $a, g \in S$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere;

$$\begin{array}{llll} a\cdot\alpha\cdot a = f, & a\cdot\alpha\cdot g = f, & g\cdot\alpha\cdot a = a, & g\cdot\alpha\cdot g = g, \\ a\cdot\beta\cdot a = a, & a\cdot\beta\cdot g = g, & g\cdot\beta\cdot a = f, & g\cdot\beta\cdot g = f. \end{array}$$

olduğundan ***(i)*** özelliğini sağlar. Ayrıca $a, g \in S$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere;

$$\begin{array}{ll}
a\cdot\alpha\cdot(a\cdot\alpha\cdot a) = (a\cdot\alpha\cdot a)\cdot\alpha\cdot a = f, & g\cdot\alpha\cdot(a\cdot\alpha\cdot a) = (g\cdot\alpha\cdot a)\cdot\alpha\cdot a = f, \\
a\cdot\alpha\cdot(a\cdot\alpha\cdot g) = (a\cdot\alpha\cdot a)\cdot\alpha\cdot g = f, & g\cdot\alpha\cdot(a\cdot\alpha\cdot g) = (g\cdot\alpha\cdot a)\cdot\alpha\cdot g = f, \\
a\cdot\alpha\cdot(g\cdot\alpha\cdot a) = (a\cdot\alpha\cdot g)\cdot\alpha\cdot a = f, & g\cdot\alpha\cdot(g\cdot\alpha\cdot a) = (g\cdot\alpha\cdot g)\cdot\alpha\cdot a = a, \\
a\cdot\alpha\cdot(g\cdot\alpha\cdot g) = (a\cdot\alpha\cdot g)\cdot\alpha\cdot g = f, & g\cdot\alpha\cdot(g\cdot\alpha\cdot g) = (g\cdot\alpha\cdot g)\cdot\alpha\cdot g = g, \\
a\cdot\alpha\cdot(a\cdot\beta\cdot a) = (a\cdot\alpha\cdot a)\cdot\beta\cdot a = f, & g\cdot\alpha\cdot(a\cdot\beta\cdot a) = (g\cdot\alpha\cdot a)\cdot\beta\cdot a = a, \\
a\cdot\alpha\cdot(a\cdot\beta\cdot g) = (a\cdot\alpha\cdot a)\cdot\beta\cdot g = f, & g\cdot\alpha\cdot(a\cdot\beta\cdot g) = (g\cdot\alpha\cdot a)\cdot\beta\cdot g = g, \\
a\cdot\alpha\cdot(g\cdot\beta\cdot a) = (a\cdot\alpha\cdot g)\cdot\beta\cdot a = f, & g\cdot\alpha\cdot(g\cdot\beta\cdot a) = (g\cdot\alpha\cdot g)\cdot\beta\cdot a = f, \\
a\cdot\alpha\cdot(g\cdot\beta\cdot g) = (a\cdot\alpha\cdot g)\cdot\beta\cdot g = f, & g\cdot\alpha\cdot(g\cdot\beta\cdot g) = (g\cdot\alpha\cdot g)\cdot\beta\cdot g = f, \\
a\cdot\beta\cdot(a\cdot\alpha\cdot a) = (a\cdot\beta\cdot a)\cdot\alpha\cdot a = f, & g\cdot\beta\cdot(a\cdot\alpha\cdot a) = (g\cdot\beta\cdot a)\cdot\alpha\cdot a = f, \\
a\cdot\beta\cdot(a\cdot\alpha\cdot g) = (a\cdot\beta\cdot a)\cdot\alpha\cdot g = f, & g\cdot\beta\cdot(a\cdot\alpha\cdot g) = (g\cdot\beta\cdot a)\cdot\alpha\cdot g = f, \\
a\cdot\beta\cdot(g\cdot\alpha\cdot a) = (a\cdot\beta\cdot g)\cdot\alpha\cdot a = a, & g\cdot\beta\cdot(g\cdot\alpha\cdot a) = (g\cdot\beta\cdot g)\cdot\alpha\cdot a = f, \\
a\cdot\beta\cdot(g\cdot\alpha\cdot g) = (a\cdot\beta\cdot g)\cdot\alpha\cdot g = g, & g\cdot\beta\cdot(g\cdot\alpha\cdot g) = (g\cdot\beta\cdot g)\cdot\alpha\cdot g = f, \\
a\cdot\beta\cdot(a\cdot\beta\cdot a) = (a\cdot\beta\cdot a)\cdot\beta\cdot a = a, & g\cdot\beta\cdot(a\cdot\beta\cdot a) = (g\cdot\beta\cdot a)\cdot\beta\cdot a = f, \\
a\cdot\beta\cdot(a\cdot\beta\cdot g) = (a\cdot\beta\cdot a)\cdot\beta\cdot g = g, & g\cdot\beta\cdot(a\cdot\beta\cdot g) = (g\cdot\beta\cdot a)\cdot\beta\cdot g = f, \\
a\cdot\beta\cdot(g\cdot\beta\cdot a) = (a\cdot\beta\cdot g)\cdot\beta\cdot a = f, & g\cdot\beta\cdot(g\cdot\beta\cdot a) = (g\cdot\beta\cdot g)\cdot\beta\cdot a = f, \\
a\cdot\beta\cdot(g\cdot\beta\cdot g) = (a\cdot\beta\cdot g)\cdot\beta\cdot g = f, & g\cdot\beta\cdot(g\cdot\beta\cdot g) = (g\cdot\beta\cdot g)\cdot\beta\cdot g = f.
\end{array}$$

olur ve böylece ***(ii)*** özelliği de sağlanır. O halde S, $O-O'$ üzerinde bir Γ −yarı gruptur.

$$\begin{aligned} N_1(B)^*A &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap A \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i} \\ &= [e]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \\ &= \{e, f, g\} \cup \{a, g\} \cup \{a, c, g\} \\ &= \{a, c, e, f, g\} \end{aligned}$$

$\forall\, g \in A$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ $A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$g{\cdot}\alpha{\cdot}g = g,\ g{\cdot}\beta{\cdot}g = f.$

O halde; A, S Γ $-$yakınlık yarı grubunun bir alt Γ $-$yarı grubudur.

$\forall\, a, c, e, f, g \in N_r(B)^*A$ ve $\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma$ $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$a{\cdot}\alpha{\cdot}a = f,$	$c{\cdot}\alpha{\cdot}a = a,$	$e{\cdot}\alpha{\cdot}a = a,$	$f{\cdot}\alpha{\cdot}a = f,$	$g{\cdot}\alpha{\cdot}a = a,$
$a{\cdot}\alpha{\cdot}c = f,$	$c{\cdot}\alpha{\cdot}c = c,$	$e{\cdot}\alpha{\cdot}c = c,$	$f{\cdot}\alpha{\cdot}c = f,$	$g{\cdot}\alpha{\cdot}c = c,$
$a{\cdot}\alpha{\cdot}e = f,$	$c{\cdot}\alpha{\cdot}e = e,$	$e{\cdot}\alpha{\cdot}e = e,$	$f{\cdot}\alpha{\cdot}e = f,$	$g{\cdot}\alpha{\cdot}e = e,$
$a{\cdot}\alpha{\cdot}f = f,$	$c{\cdot}\alpha{\cdot}f = f,$	$e{\cdot}\alpha{\cdot}f = f,$	$f{\cdot}\alpha{\cdot}f = f,$	$g{\cdot}\alpha{\cdot}f = f,$
$a{\cdot}\alpha{\cdot}g = f,$	$c{\cdot}\alpha{\cdot}g = g,$	$e{\cdot}\alpha{\cdot}g = g,$	$f{\cdot}\alpha{\cdot}g = f,$	$g{\cdot}\alpha{\cdot}g = g,$
$a{\cdot}\beta{\cdot}a = a,$	$c{\cdot}\beta{\cdot}a = a,$	$e{\cdot}\beta{\cdot}a = f,$	$f{\cdot}\beta{\cdot}a = f,$	$g{\cdot}\beta{\cdot}a = f,$
$a{\cdot}\beta{\cdot}c = c,$	$c{\cdot}\beta{\cdot}c = c,$	$e{\cdot}\beta{\cdot}c = f,$	$f{\cdot}\beta{\cdot}c = f,$	$g{\cdot}\beta{\cdot}c = f,$
$a{\cdot}\beta{\cdot}e = e,$	$c{\cdot}\beta{\cdot}e = e,$	$e{\cdot}\beta{\cdot}e = f,$	$f{\cdot}\beta{\cdot}e = f,$	$g{\cdot}\beta{\cdot}e = f,$
$a{\cdot}\beta{\cdot}f = f,$	$c{\cdot}\beta{\cdot}f = f,$	$e{\cdot}\beta{\cdot}f = f,$	$f{\cdot}\beta{\cdot}f = f,$	$g{\cdot}\beta{\cdot}f = f,$
$a{\cdot}\beta{\cdot}g = g,$	$c{\cdot}\beta{\cdot}g = g,$	$e{\cdot}\beta{\cdot}g = f,$	$f{\cdot}\beta{\cdot}g = f,$	$g{\cdot}\beta{\cdot}g = f.$

O halde; A, S Γ $-$yakınlık yarı grubunun bir üst-yakın alt Γ $-$yarı grubudur.

Örnek 4.2.7. $\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r = 2$ olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ çıkarım fonksiyonları

$\varphi_{1:}\mathcal{O} \rightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\},$

$\varphi_{2:}\mathcal{O} \rightarrow V_2 = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\},$

$\varphi_{3:}\mathcal{O} \rightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\},$

$\varphi_{4:}\mathcal{O} \rightarrow V_4 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$

aşağıdaki gibi tanımlansın(Çizelge 4.9).

Çizelge 4.9 Çıkarım fonksiyonu

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_3	α_1	α_2	α_2	α_5	α_3	α_4	α_4	α_4	α_3
φ_2	α_3	α_3	α_4	α_3	α_5	α_4	α_5	α_3	α_5	α_5
φ_3	α_2	α_1	α_3	α_5	α_1	α_2	α_3	α_5	α_1	α_1
φ_4	α_2	α_1	α_4	α_5	α_5	α_2	α_4	α_4	α_4	α_4

Bu durumda

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_2(x') = \varphi_1(a) = \varphi_2(a) = \alpha_3\} = \{a\}$

$[e]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_2(x') = \varphi_1(e) = \varphi_2(e) = \alpha_5\} = \{e\}$

dir ve buradan $\xi_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [e]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}\}$ olur.

$[b]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_3(x') = \varphi_1(b) = \varphi_3(b) = \alpha_1\} = \{b\}$

dir. O zaman $\xi_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{[b]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}\}$ olur.

$[b]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_4(x') = \varphi_1(b) = \varphi_4(b) = \alpha_1\} = \{b\}$

$[e]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_4(x') = \varphi_1(e) = \varphi_4(e) = \alpha_5\} = \{e\}$

$[g]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_4(x') = \varphi_1(g) = \varphi_4(g) = \alpha_4\} = \{g, h, i\}$

$= [h]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} = [i]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}}$

dir. Böylece $\xi_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} = \{[b]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}}, [e]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}}, [g]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}}\}$ olur.

$[c]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_4(x') = \varphi_2(c) = \varphi_4(c) = \alpha_4\} = \{c\}$

$[e]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_4(x') = \varphi_2(e) = \varphi_4(e) = \alpha_5\} = \{e\}$

dir. Dolayısıyla $\xi_{\{\varphi_2,\varphi_4\}} = \{[c]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}}, [e]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}}\}$ olur.

$[a]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_4(x') = \varphi_3(a) = \varphi_4(a) = \alpha_2\} = \{a, f\}$
$= [f]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}$

$[b]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_4(x') = \varphi_3(b) = \varphi_4(b) = \alpha_1\} = \{b\}$

$[d]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_4(x') = \varphi_3(d) = \varphi_4(d) = \alpha_5\} = \{d\}$

dir. O zaman $\xi_{\{\varphi_3,\varphi_4\}} = \left\{[a]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}, [b]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}, [d]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}\right\}$ olur. Böylece $r = 2$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_2(B) = \left\{\xi_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, \xi_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, \xi_{\{\varphi_1,\varphi_4\}}, \xi_{\{\varphi_2,\varphi_4\}}, \xi_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}\right\}$ tür. Bu durumda $S = \{e, f, g\} \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin üst yaklaşımı,

$$N_2(B)^*S = \bigcup_{[x]_{\{\varphi_i,\varphi_j\}} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i,\varphi_j\}}$$

$$= [e]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} \cup [e]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} \cup [g]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} \cup [e]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}} \cup [a]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}$$

$$= \{e\} \cup \{e\} \cup \{g, h, i\} \cup \{e\} \cup \{a, f\}$$

$$= \{a, e, f, g, h, i\}$$

olur. Ayrıca;

$$N_2(B)^*(N_2(B)^*S) = \bigcup_{[x]_{\{\varphi_i,\varphi_j\}} \cap N_2(B)^*S \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i,\varphi_j\}}$$

$$= [a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} \cup [e]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} \cup [e]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} \cup [g]_{\{\varphi_1,\varphi_4\}} \cup [e]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}} \cup [a]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}$$

$$= \{a\} \cup \{e\} \cup \{e\} \cup \{g, h, i\} \cup \{e\} \cup \{a, f\}$$

$$= \{a, e, f, g, h, i\}$$

dır ve buradan $N_2(B)^*(N_2(B)^*S) = N_2(B)^*S$ elde edilir.

Teorem 4.2.8. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları olmak üzere, S; $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir $\Gamma-$yarı grup olsun. Bu durumda

i) $\emptyset \neq A \subseteq S$ ve $A\Gamma A \subseteq A$ ise o zaman A, S nin bir üst-yakın alt $\Gamma-$yarı grubudur.

ii) A, S nin bir alt $\Gamma-$yakınlık yarı grubu ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ ise o zaman A, S nin bir üst-yakın alt $\Gamma-$yarı grubudur.

İspat: **(i)** $\emptyset \neq A \subseteq S$ ve $A\Gamma A \subseteq A$ olsun. *Önerme 4.2.4.(i)* den $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma A)$ dır. Öte yandan, *Teorem 4.1.2.(vi)* den $N_r(B)^*(A\Gamma A) \subseteq N_r(B)^*A$ bulunur. O halde; $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ elde edilir. Böylece A, S nin üst-yakın alt Γ −yarı grubudur.

(ii) A, S nin bir alt Γ −yarı grubu olsun. Bu durumda $A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Böylece; *Teorem 4.1.2.(vi)* den $N_r(B)^*(A\Gamma A) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ dır. Öte yandan *Önerme 4.2.4.(i)* den $(N_r(B)^*A)\Gamma(\, N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma A)$ dır. O halde; $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ elde edilir ve dolayısıyla A, S nin bir üst-yakın alt Γ −yarı grubudur.

Tanım 4.2.9. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları, S; $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı grup ve A, S nin alt Γ −yarı grubu olsun.

i) $A\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ $(S\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A)$ ise A ya S Γ −yakınlık yarı grubunun Γ −sağ (sol) ideali denir.

ii) $(N_r(B)^*A)\Gamma\, S \subseteq N_r(B)^*A$ $\quad (S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A)$ ise A ya S Γ −yakınlık yarı grubunun üst-yakın Γ-sağ(sol) ideali denir.

Örnek 4.2.10. $U = \left\{ (a_{ij})_{1\times 3} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$a = [0 \quad 1 \quad 1]$, $b = [1 \quad 0 \quad 0]$, $c = [1 \quad 1 \quad 0]$, $d = [0 \quad 1 \quad 0]$, $e = [1 \quad 0 \quad 1]$,

$f = [0 \quad 0 \quad 0]$, $g = [0 \quad 0 \quad 1]$, $h = [1 \quad 1 \quad 1]$

olmak üzere; $\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ve
$U' = \left\{ (a_{ij})_{3\times 1} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O}' = \{\alpha, \beta, \gamma, \theta, \lambda, \mu, \delta, \sigma\}$ iki algılanabilen nesneler kümeleri, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonların kümesi, $r = 1, S = \{b, h\} \subseteq \mathcal{O}$, $A = \{b\} \subseteq S \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma = \{\gamma, \delta\} \subseteq \mathcal{O}'$ kümeler olsun. Bu durumda; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$,

$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$,

$\varphi_3 : \mathcal{O} \to V_3 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

Aşağıdaki gibi tanımlansın(Çizelge 4.10).

Çizelge 4.10 Çıkarım fonksiyonu

	a	b	c	d	e	f	g	h
φ_1	α_1	α_4	α_1	α_2	α_3	α_4	α_3	α_4
φ_2	α_4	α_4	α_1	α_1	α_3	α_4	α_3	α_1
φ_3	α_4	α_4	α_2	α_2	α_3	α_3	α_2	α_3

Bu durumda

$[a]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} = \{a, c\}$

$= [c]_{\varphi_1}$

$[b]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_4\} = \{b, f, h\}$

$= [f]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1}$

$[d]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(d) = \alpha_2\} = \{d\}$

$[e]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_1(x') = \varphi_1(e) = \alpha_3\} = \{e, g\}$

$= [g]_{\varphi_1}$

Böylece; $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [d]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_4\} = \{a, b, f\}$

$= [b]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2}$

$[c]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(c) = \alpha_1\} = \{c, d, h\}$

$= [d]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2}$

$$[e]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(e) = \alpha_3\} = \{e, g\}$$
$$= [g]_{\varphi_2}$$

ve buradan $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}, [c]_{\varphi_2}, [e]_{\varphi_2}\}$ olur.

$[a]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_4\} = \{a, b\}$

$= [b]_{\varphi_3}$

$[c]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(c) = \alpha_2\} = \{c, d, g\}$

$= [d]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3}$

$[e]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_3\} = \{e, f, h\}$

$= [f]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3}$

Dolayısıyla; $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [c]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}\}$ elde edilir. Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür. Bu durumda

$$N_1(B)^*S = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$

$$= [b]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [c]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \cup [e]_{\varphi_3}$$

$$= \{b, f, h\} \cup \{a, b, f\} \cup \{c, d, h\} \cup \{a, b\} \cup \{e, f, h\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f, h\}$$

olur. "γ" ve "δ" işlemi sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir(Çizelge 4.11 ve 4.12).

Çizelge 4.11 "γ" işlemi

γ	b	h
b	f	f
h	b	h

Çizelge 4.12 "δ" işlemi

δ	b	h
b	b	h
h	b	h

işlemi tabloları dikkate alınırsa $b, h \in S$ ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ olmak üzere;

$$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\quad b{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,\quad h{\cdot}\gamma{\cdot}b = b,\quad h{\cdot}\gamma{\cdot}h = h,$$
$$b{\cdot}\delta{\cdot}b = b,\quad b{\cdot}\delta{\cdot}h = h,\quad h{\cdot}\delta{\cdot}b = b,\quad h{\cdot}\delta{\cdot}h = h.$$

olduğundan ***(i)*** özelliğini sağlar. Ayrıca, $b, h \in S$ ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ olmak üzere;

$$\begin{array}{ll}
b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\\
b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f,\\
b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = b,\\
b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = h,\\
b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = h,\\
b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = f, & h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = h,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f, & h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f, & h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = b, & h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = b,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = h, & h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = h,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = b, & h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = h, & h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = h,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = b, & h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = h, & h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = h.
\end{array}$$

olur ve böylece ***(ii)*** özelliği de sağlanır. O halde; S, $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı gruptur.

$$N_1(B)^*A = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap A \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$

$$= [b]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3}$$

$$= \{b, f, h\} \cup \{a, b, f\} \cup \{a, b\}$$

$$= \{a, b, f, h\}$$

$\forall\, b \in A$ ve $\forall\, \gamma, \delta \in \Gamma$ $\ A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\ b\delta b = b.$

O halde; A, S Γ −yakınlık yarı grubunun bir alt Γ −yarı grubudur.

$\forall b \in A, \forall\, b, h \in S$ ve $\forall\, \gamma, \delta \in \Gamma$ $\ A\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\quad b{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,\quad b{\cdot}\delta{\cdot}b = b,\quad b{\cdot}\delta{\cdot}h = h.$

O halde; A, S Γ −yakınlık yarı grubunun bir Γ −sağ idealidir.

$\forall\, b\ \in A, \forall\, b, h\ \in S$ ve $\forall\, \gamma, \delta \in \Gamma \quad S\Gamma A \subseteq\ N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f, \quad h{\cdot}\gamma{\cdot}b = b, \quad b{\cdot}\delta{\cdot}b = b, \quad h{\cdot}\delta{\cdot}b = b.$

O halde; $A, S\ \Gamma$ −yakınlık yarı grubunun bir Γ −sol idealidir.

$\forall a, b, f, h \in N_r(B)^*A$ ve $\forall \gamma, \delta \in \Gamma \quad (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ dır.Çünkü;

$a{\cdot}\gamma{\cdot}a = a,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}a = f,$	$f{\cdot}\gamma{\cdot}a = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}a = a,$
$a{\cdot}\gamma{\cdot}b = b,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,$	$f{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}b = b,$
$a{\cdot}\gamma{\cdot}f = f,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}f = f,$	$f{\cdot}\gamma{\cdot}f = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}f = f,$
$a{\cdot}\gamma{\cdot}h = h,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,$	$f{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}h = h,$
$a{\cdot}\delta{\cdot}a = f,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}a = a,$	$f{\cdot}\delta{\cdot}a = f,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}a = a,$
$a{\cdot}\delta{\cdot}b = f,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}b = b,$	$f{\cdot}\delta{\cdot}b = f,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}b = b,$
$a{\cdot}\delta{\cdot}f = f,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}f = f,$	$f{\cdot}\delta{\cdot}f = f,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}f = f,$
$a{\cdot}\delta{\cdot}h = f,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}h = h,$	$f{\cdot}\delta{\cdot}h = f,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}h = h.$

O halde; $A, S\ \Gamma$ −yakınlık yarı grubunun üst-yakın alt Γ −yarı grubudur.

$\forall\, a, b, f, h\ \in N_r(B)^*A, \forall\, b, h\ \in S$ ve $\forall\, \gamma, \delta \in \Gamma \quad (N_r(B)^*A)\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$a{\cdot}\gamma{\cdot}b = b,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,$	$f{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}b = b,$
$a{\cdot}\gamma{\cdot}h = h,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,$	$f{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}h = h,$
$a{\cdot}\delta{\cdot}b = f,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}b = b,$	$f{\cdot}\delta{\cdot}b = f,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}b = b,$
$a{\cdot}\delta{\cdot}h = f,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}h = h,$	$f{\cdot}\delta{\cdot}h = f,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}h$ =h.

O halde; $A, S\ \Gamma$ −yakınlık yarı grubunun üst-yakın Γ −sağ idealidir.

$\forall\, a, b, f, h\ \in N_r(B)^*A,\ \forall\, b, h\ \in S$ ve $\forall\, \gamma, \delta \in \Gamma \quad S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq\ N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$b{\cdot}\gamma{\cdot}a = f,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}f = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}a = a,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}f = f,$
$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,$	$b{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}b = b,$	$h{\cdot}\gamma{\cdot}h = h,$
$b{\cdot}\delta{\cdot}a = a,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}f = f,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}a = a,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}f = f,$
$b{\cdot}\delta{\cdot}b = b,$	$b{\cdot}\delta{\cdot}h = h,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}b = b,$	$h{\cdot}\delta{\cdot}h$ =h.

O halde; $A, S\ \Gamma$ −yakınlık yarı grubunun üst-yakın Γ −sol idealidir.

Teorem 4.2.11. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları olmak üzere, S; $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı grup olsun. Bu durumda

i) $\emptyset \neq A \subseteq S$ ve $A\Gamma S \subseteq A (S\Gamma A \subseteq A)$ ise o zaman A, S nin bir üst-yakın Γ −sağ(sol) idealidir.

ii) A, S nin bir Γ −sağ(sol) ideali ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ ise o zaman A, S nin bir üst-yakın Γ −sağ(sol) idealidir.

İspat: (i) $\emptyset \neq A \subseteq S$ ve $A\Gamma S \subseteq A$ olsun. *Önerme 4.2.4.(i)* $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma S)$ dir. Öte yandan, *Teorem 4.1.2.(vi)* den $N_r(B)^*(A\Gamma S) \subseteq N_r(B)^*A$ ve *Teorem 4.1.2.(i)* den $(N_r(B)^*A)\Gamma S) \subseteq (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S)$ elde edilir. Böylece $(N_r(B)^*A)\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ elde edilir. O halde; A, S nin üst-yakın Γ −sağ idealidir.

(ii) A, S nin bir Γ −sağ ideali olsun. Bu durumda $A\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Böylece; *Teorem 4.1.2.(vi)* den $N_r(B)^*(A\Gamma S) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ dır. Öte yandan *Önerme 4.2.4.(i)* den $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma S)$ ve *Teorem 4.1.2.(i)* den $(N_r(B)^*A)\Gamma S) \subseteq (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S)$ dır. O halde $(N_r(B)^*A)\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ elde edilir ve dolayısıyla A, S nin bir üst-yakın $\Gamma -$ sağ idealidir.

Tanım 4.2.12. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları, S; $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı grup ve A, S nin bir alt Γ −yarı grubu olsun.

i) $A\Gamma S\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ ise A ya S Γ −yakınlık yarı grubunun bi-Γ −ideali denir.

ii) $(N_r(B)^*A)\Gamma S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ ise A ya S Γ −yakınlık yarı grubunun üst-yakın bi-Γ −ideali denir.

Örnek 4.2.13. $U = \left\{ (a_{ij})_{1\times 3} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$a = [0 \quad 1 \quad 1]$, $b = [1 \quad 0 \quad 0]$, $c = [1 \quad 1 \quad 0]$, $d = [0 \quad 1 \quad 0]$, $e = [1 \quad 0 \quad 1]$,

$f = [0 \quad 0 \quad 0]$, $g = [0 \quad 0 \quad 1]$, $h = [1 \quad 1 \quad 1]$ olmak üzere;

$\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ve

$U' = \left\{ (a_{ij})_{3\times 1} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$$\alpha=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\theta=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\lambda=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\mu=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\delta=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\sigma=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O}'=\{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\lambda,\mu,\delta,\sigma\}$ iki algılanabilen nesneler kümeleri, $B=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}\subseteq\mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonların kümesi, $r=1, S=\{b,h\}\subseteq\mathcal{O},\ A=\{b\}\subseteq S\subseteq\mathcal{O}$ ve $\Gamma=\{\gamma,\delta\}\subseteq\mathcal{O}'$ kümeler olsun. Bu durumda; $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$\varphi_1:\mathcal{O}\to V_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$,

$\varphi_2:\mathcal{O}\to V_2=\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$,

$\varphi_3:\mathcal{O}\to V_3=\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$

aşağıdaki gibi tanımlansın(Çizelge 4.13).

Çizelge 4.13 Çıkarım fonksiyonu

	a	b	c	d	e	f	g	h
φ_1	α_1	α_4	α_1	α_2	α_3	α_4	α_3	α_4
φ_2	α_5	α_4	α_1	α_1	α_3	α_4	α_5	α_1
φ_3	α_4	α_5	α_2	α_2	α_3	α_3	α_2	α_3

Bu durumda

$[a]_{\varphi_1}=\{x'\in\mathcal{O}|\varphi_1(x')=\varphi_1(a)=\alpha_1\}=\{a,c\}$

$=[c]_{\varphi_1}$

$[b]_{\varphi_1}=\{x'\in\mathcal{O}|\varphi_1(x')=\varphi_1(b)=\alpha_4\}=\{b,f,h\}$

$=[f]_{\varphi_1}=[h]_{\varphi_1}$

$[d]_{\varphi_1}=\{x'\in\mathcal{O}|\varphi_1(x')=\varphi_1(d)=\alpha_2\}=\{d\}$

$[e]_{\varphi_1}=\{x'\in\mathcal{O}|\varphi_1(x')=\varphi_1(e)=\alpha_3\}=\{e,g\}$

$=[g]_{\varphi_1}$

O zaman $\xi_{\varphi_1} = \{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [d]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1}\}$ dir.
$[a]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_5\} = \{a, g\}$

$= [g]_{\varphi_2}$

$[b]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_4\} = \{b, f\}$

$= [f]_{\varphi_2}$

$[c]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(c) = \alpha_1\} = \{c, d, h\}$

$= [d]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2}$

$[e]_{\varphi_2} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_2(x') = \varphi_2(e) = \alpha_3\} = \{e\}$

Böylece; $\xi_{\varphi_2} = \{[a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}, [c]_{\varphi_2}, [e]_{\varphi_2}\}$ dir.

$[a]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_4\} = \{a\}$

$[b]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_5\} = \{b\}$

$[c]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(c) = \alpha_2\} = \{c, d, g\}$

$= [d]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3}$

$[e]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} | \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_3\} = \{e, f, h\}$

$= [f]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3}$

olur ve dolayısıyla $\xi_{\varphi_3} = \{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [c]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}\}$ elde edilir.

Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi

$N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ tür. Bu durumda

$$N_1(B)^* S = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$

$$= [b]_{\varphi_1} \cup [b]_{\varphi_2} \cup [c]_{\varphi_2} \cup [b]_{\varphi_3} \cup [e]_{\varphi_3}$$

$$= \{b, f, h\} \cup \{b, f\} \cup \{c, d, h\} \cup \{b\} \cup \{e, f, h\}$$

$$= \{b, c, d, e, f, h\}$$

olur. "γ" ve "δ" işlemi sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir(Çizelge 4.14 ve 4.15).

Çizelge 4.14 "γ" işlemi

γ	b	h
b	f	f
h	b	h

Çizelge 4.15 "δ" işlemi

δ	b	h
b	b	h
h	b	h

işlemi tabloları dikkate alınırsa $b, h \in S$ ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ olmak üzere;

$b{\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\qquad b{\cdot}\gamma{\cdot}h = f,\qquad h{\cdot}\gamma{\cdot}b = b,\qquad h{\cdot}\gamma{\cdot}h = h,$

$b{\cdot}\delta{\cdot}b = b,\qquad b{\cdot}\delta{\cdot}h = h,\qquad h{\cdot}\delta{\cdot}b = b,\qquad h{\cdot}\delta{\cdot}h = h.$

olduğundan ***(i)*** özelliğini sağlar. Ayrıca, $b, h \in S$ ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\\
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f,\\
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = b,\\
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = h,\\
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = h,\\
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
&b{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = f, && h{\cdot}\gamma{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\gamma{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = h,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f, && h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}b = f,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f, && h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\gamma{\cdot}h = f,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = b, && h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}b = b,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = h, && h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\gamma{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\gamma{\cdot}h = h,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = b, && h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = h, && h{\cdot}\delta{\cdot}(b{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}b){\cdot}\delta{\cdot}h = h,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = b, && h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}b) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}b = b,\\
&b{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (b{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = h, && h{\cdot}\delta{\cdot}(h{\cdot}\delta{\cdot}h) = (h{\cdot}\delta{\cdot}h){\cdot}\delta{\cdot}h = h.
\end{aligned}
$$

olur ve böylece ***(ii)*** özelliği de sağlanır. O halde; S, $O{-}O'$ üzerinde bir Γ −yarı gruptur.

$$
\begin{aligned}
N_1(B)^*A &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap A \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}\\
&= [b]_{\varphi_1} \cup [b]_{\varphi_2} \cup [b]_{\varphi_3}
\end{aligned}
$$

$= \{b,f,h\} \cup \{b,f\} \cup \{b\}$

$= \{b,f,h\}$

$\forall b \in A$ ve $\forall \gamma,\delta \in \Gamma$ $\quad A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$b\cdot\gamma\cdot b = f,\ \ b\cdot\delta\cdot b = b.$

O halde A, S Γ −yakınlık yarı grubunun alt Γ −yarı grubudur.

$\forall\ b\ \in A, \forall\ b,h\ \in S$ ve $\forall\ \gamma,\delta \in \Gamma$ $\quad A\Gamma S\Gamma A \subseteq\ N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$b\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot b = f,\quad b\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot b = f,\quad b\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot b = f,\quad b\cdot\gamma\cdot h\cdot\delta\cdot b = f,$

$b\cdot\delta\cdot b\cdot\gamma\cdot b = f,\quad b\cdot\delta\cdot h\cdot\gamma\cdot b = b,\quad b\cdot\delta\cdot b\cdot\delta\cdot b = b,\quad b\cdot\delta\cdot h\cdot\delta\cdot b = b.$

O halde; A, S Γ −yakınlık yarı grubunun bir bi-Γ − idealidir.

$\forall\ b,f,h\ \in N_r(B)^*A$ ve $\forall\ \gamma,\delta \in \Gamma$ $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Çünkü;

$b\cdot\gamma\cdot a = f,$	$f\cdot\gamma\cdot a = f,$	$h\cdot\gamma\cdot a = a,$
$b\cdot\gamma\cdot b = f,$	$f\cdot\gamma\cdot b = f,$	$h\cdot\gamma\cdot b = b,$
$b\cdot\gamma\cdot f = f,$	$f\cdot\gamma\cdot f = f,$	$h\cdot\gamma\cdot f = f,$
$b\cdot\gamma\cdot h = f,$	$f\cdot\gamma\cdot h = f,$	$h\cdot\gamma\cdot h = h,$
$b\cdot\delta\cdot a = a,$	$f\cdot\delta\cdot a = f,$	$h\cdot\delta\cdot a = a,$
$b\cdot\delta\cdot b = b,$	$f\cdot\delta\cdot b = f,$	$h\cdot\delta\cdot b = b,$
$b\cdot\delta\cdot f = f,$	$f\cdot\delta\cdot f = f,$	$h\cdot\delta\cdot f = f,$
$b\cdot\delta\cdot h = h,$	$f\cdot\delta\cdot h = f,$	$h\cdot\delta\cdot h = h.$

O halde A, S Γ −yakınlık yarı grubunun üst yakın alt Γ −yarı grubudur.

$\forall\ b,f,h\ \in N_r(B)^*A,\quad \forall\ b,h \in S$ ve $\forall\ \gamma,\delta \in \Gamma$ $\quad (N_r(B)^*A)\Gamma S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$

dır. Çünkü;

$b\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot b = f,$	$f\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot b = f,$	$h\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot b = f,$
$b\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot f = f,$	$f\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot f = f,$	$h\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot f = f,$
$b\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot h = f,$	$f\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot h = f,$	$h\cdot\gamma\cdot b\cdot\gamma\cdot h = f,$
$b\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot b = f,$	$f\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot b = f,$	$h\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot b = b,$
$b\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot f = f,$	$f\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot f = f,$	$h\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot f = f,$
$b\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot h = f,$	$f\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot h = f,$	$h\cdot\gamma\cdot h\cdot\gamma\cdot h = h,$
$b\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot b = f,$	$f\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot b = f$	$h\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot b = b,$
$b\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot f = f,$	$f\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot f = f,$	$h\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot f = f,$
$b\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot h = f,$	$f\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot h = f,$	$h\cdot\gamma\cdot b\cdot\delta\cdot h = h,$

$b\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot b = f,$	$f\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot b = f,$	$h\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot b = b,$
$b\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot f = f,$	$f\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot f = f,$	$h\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot f = f,$
$b\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot h = f,$	$f\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot h = f,$	$h\gamma \cdot h \cdot \delta \cdot h = h,$
$b \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot b = f,$	$f \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot b = f,$	$h \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot b = f,$
$b \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot f = f,$	$f \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot f = f,$	$h \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot f = f,$
$b \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot h = f,$	$f \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot h = f,$	$h \cdot \delta \cdot b\gamma \cdot h = f,$
$b \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot b = b,$	$f \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot b = f,$	$h \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot b = b,$
$b \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot f = f,$	$f \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot f = f,$	$h \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot f = f,$
$b \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot h = h,$	$f \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot h = f,$	$h \cdot \delta \cdot h\gamma \cdot h = h,$
$b \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot b = b,$	$f \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot b = f,$	$h \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot b = b,$
$b \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot f = f,$	$f \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot f = f,$	$h \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot f = f,$
$b \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot h = h,$	$f \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot h = f,$	$h \cdot \delta \cdot b \cdot \delta \cdot h = h,$
$b \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot b = b,$	$f \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot b = f,$	$h \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot b = b,$
$b \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot f = f,$	$f \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot f = f,$	$h \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot f = f,$
$b \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot h = h,$	$f \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot h = f,$	$h \cdot \delta \cdot h \cdot \delta \cdot h = h,$

O halde A, S Γ $-$yakınlık yarı grubunun bir üst-yakın bi-Γ $-$idealidir.

Teorem 4.2.14. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ iki farklı zayıf yakın yaklaşım uzayları olmak üzere, S; $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ $-$yarı grup olsun. Bu durumda

i) $\emptyset \neq A \subseteq S$ ve $A\Gamma S\Gamma A \subseteq A$ ise o zaman A, S nin bir üst-yakın bi-Γ $-$idealidir.

ii) A, S nin bir Γ $-$bi-ideali ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ ise o zaman A, S nin bir üst-yakın bi-Γ $-$idealidir.

İspat: (i) $\emptyset \neq A \subseteq S$ ve $A\Gamma S\Gamma A \subseteq A$ olsun. *Teorem 4.1.2.(i)* den
$$(N_r(B)^*A)\Gamma S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S)\Gamma(N_r(B)^*A)$$
dır. Öte yandan; *Önerme 4.2.4.(i)* den

$$(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma S\Gamma A)$$

dır. Böylece, $A\Gamma S\Gamma A \subseteq A$ olduğundan dolayı *Teorem 4.1.2.(vi)* den $N_r(B)^*(A\Gamma S\Gamma A) \subseteq N_r(B)^*A$ olur ve dolayısıyla $(N_r(B)^*A)\Gamma S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ elde edilir. O halde A, S nin üst-yakın bi-Γ $-$ idealidir.

(ii) A, S nin bir Γ $-$ bi-ideali olsun. Bu durumda $A\Gamma S\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Böylece; *Teorem 4.1.2.(vi)* den $N_r(B)^*(A\Gamma S\Gamma A) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ dır. Öte yandan *Teorem 4.1.2.(i)* den $(N_r(B)^*A)\Gamma S\Gamma N_r(B)^*A) \subseteq (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^* S)\Gamma(N_r(B)^*A)$ dır. Ayrıca *Önerme 4.2.4.(i) den* $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma S\Gamma A)$. O halde

$(N_r(B)^*A)\Gamma S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$ elde edilir ve dolayısıyla A, S nin bir üst-yakın bi-Γ $-$idealidir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tezde, küme teorisi alanında yeni bir yöntem olarak araştırmalara konu olan yakın yaklaşım uzayları üzerinde, bir kümenin üst yaklaşımı kullanılarak yeni bir cebirsel yapı ortaya koyma fikri esas alınmıştır. Bu noktadan hareketle yakın yaklaşım uzayları üzerinde yakın gamma yarı grupların tanımlanması ve teorik özelliklerinin incelenmesi yapılmıştır.

Bu tezde özgün sonuçlar olup, tezde elde edilen sonuçlar teorik altyapıyı güçlendirici ve bundan sonra bu alanda yapılabilecek olan diğer araştırmalara kaynak olabilecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] R. Biswas and S. Nanda, "Rough Groups and Rough Subgroups", *Bull. Pol. AC. Math.* , 42 (1994), pp. 251-254.

[2] R. Chinram and C. Jirojkul, "On bi-Γ-ideals in Γ-semigroups", *Songklanakarin J. Sci. Technol.* , 29(1)(2007), pp. 231-234.

[3] B. Davvaz, "Rough sets in a fundamental ring", *Bull. Iranian Math. Soc.* , 24 (2) (1998), pp. 49-61.

[4] B. Davvaz, "Roughness in rings", *Inform. Sci.* , 164(1-4)(2004), pp. 147-163.

[5] B. Davvaz and M. Mahdavipour, "Roughness in modules", *Inform. Sci.* 176(24)(2006), pp. 3658-3674.

[6] E. İnan and M.A. Öztürk, "Near groups on nearness approximation spaces", *Hacet. J. Math. Stat.* 41 (4) (2012), pp. 545-558.

[7] E. İnan and M.A. Öztürk, "Erratum and notes for near groups on nearness approximation spaces", *Hacet. J. Math. Stat*. 43 (2) (2014), pp. 279-281.

[8] E. İnan and M.A. Öztürk, "Nearness Semigroups on naerness approximation spaces", *Ann. Fuzzy Math. İnform.* 10(2) (2015), pp. 287-297.

[9] E. İnan, "Algebraic Structures on Nearness Approximation Space", phD Thesis, İnönü University, *Graduate School of Natural and Applied Sciences*, 2015.

[10] T.B. Iwinski, "Algebraic approach to rough sets", *Bull. Pol. AC. Math.* , 35, 1987, pp. 673-683.

[11] Y.B. Jun, "Roughhness of Gamma-Subsemigroups / Ideals in Gamma-Semigroups", *Bull. Korean Math. Soc.* , 40(3) (2003), pp. 531-536.

[12] N. Kuroki, " Rough ideals in semigroups", *Inform. Sci.* 100(1-4)(1997), pp. 139-163.

[13] N. Kuroki, J.N. Monderson, "Structure of rough sets and rough groups", *J.Fuzzy Math.* ,5(1)(1997), pp. 183-191.

[14] D. Miao, S. Han, D. Li and L. Sun, "Rough Group, Rough Subgroup and Their Properties", *International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular-soft Computing, Springer-Verlag,* Heidelberg, (2005), pp. 104-113.

[15] M.A. Öztürk and E. İnan, " Soft Nearness Approximation Space", *Fund. Inform.* , 124(1)(2013), pp. 231-250.

[16] M.A. Öztürk, Mustafa Uçkun and E. İnan; "Near group of weak cosets on nearness approximation spaces", *Fund. Inform.* , 133, (2014), pp. 433-448.

[17] M.A. Öztürk, İ. Çelik Siner and Y.B. Jun, "Nearness BCK-Algebras", *Int. J. Open Probl. in Comput. Sci. and Math.* , 8(4), (2015), pp. 37-57.

[18] M.A. Öztürk and E. İnan, "Nearness Rings on Nearness Aproximation Spaces", *Fund. Inform.* , 2016(Submitted).

[19] Z. Pawlak, "Clasification of objects by means of attributes", *Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, Report*, 429, 1981.

[20] Z. Pawlak, " Rough sets", *Int. J. Comput. Inform. Sci.*, 11:5, (1982), pp.341-356.

[21] J.F. Peters, " Near sets: General Theory about nearness of objects", *Appl. Math. Sci.*, 1(53-56), (2007), pp. 2609-2629.

[22] J.F. Peters, "Near sets: Special Theory about nearness of objects", *Fund. Inform.*,75(1-4), (2007), pp. 407-433.
[23] J.F. Peters, "Clasification of Perceptual Objects by Means of Features", *Int. J. Info. Technol. Intell. Comput.* , 3(2) (2008), pp. 1-35.
[24] J.F. Peters and S. A. Naimpally, "Approach spaces for near filters", *Gen. Math. Notes*. , 2(1), (2011), pp. 159-164.
[25] J.F. Peters and S. Tiwari, "Approach merotopies and near filters", Gen. *Math*. Notes. , 3(1), (2011), pp. 1-15.
[26] J.F. Peters and S. A. Naimpally, "Applications of near sets", *Notices Amer. Math. Soc*. , 59(4), (2012), pp. 536-542 .
[27] J.F. Peters , "Near sets, An introduction", *Math. comput. Sci.* , 7(1), (2013), pp. 3-9 .
[28] L. Polkowski, "Rough Sets", *Mathematical Foundations*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.
[29] N.K. Saha, " On $\Gamma-$Semigroup-II", *Bull. Calcutta. Math. Soc.* , 79 (1987), pp. 331-335 .
[30] N.K. Saha, "On $\Gamma-$Semigroup-III", *Bull. Calcutta. Math. Soc.* ,80, (1988), pp. 1-12.
[31] M.K. Sen and N.K. Saha, "On $\Gamma-$Semigroup-I", *Calcutta. Math. Soc.* , 78, (1986), pp. 180-186.
[32] N. Thillagovindan, "Rough prime bi-ideals in gamma semigroups", *J. Fuzzy Math.*, 23(1), (2015), pp. 189-197.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Abdurrahman İZ

Doğum Yeri : Antalya

Doğum Tarihi : 04/03/1985

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : matematiks.07@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Tezsiz Yüksek Lisans	Matematik Öğretmenliği	Başkent Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2008
Lise	Sayısal	Antalya Aldemir Atilla Konuk Anadolu Lisesi	2003

Yayınlar