T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

POZİTİF ÇOKLU LİNEER DÖNÜŞÜMLER İÇİN EŞİTSİZLİKLER

MUSTAFA AKIÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2018

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF ÇOKLU LİNEER DÖNÜŞÜMLER İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Mustafa AKIÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 26/10/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. İ. Halil GÜMÜŞ
Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Murat CANDAN
Üye

Doç. Dr. Faik GÜRSOY
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POZİTİF ÇOKLU LİNEER DÖNÜŞÜMLER İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Mustafa AKIÇ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. İ. Halil GÜMÜŞ
Yıl : 2018, Sayfa sayısı: 37+vi

Jüri : Doç. Dr. İ. Halil GÜMÜŞ
Doç. Dr. Faik GÜRSOY
Dr. Öğr. Üyesi Murat CANDAN

Bu tezde matris eşitsizlikleri üzerine çalışılmıştır.

Tezin ilk kısmında Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Kantorovich eşitsizliği, Löwner-Heinz eşitsizliği gibi bazı önemli eşitsizlikler verilmiş ve pozitif tanımlı matris ve pozitif lineer dönüşüm kavramları tanıtılmıştır. Özellikle pozitif lineer dönüşüm ile ilgili eşitsizlikler incelenmiştir.

Tezin esas kısmında ise pozitif çoklu lineer dönüşümler üzerinde durulmuş ve bu dönüşümleri içeren eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris eşitsizlikleri; Pozitif tanımlı matrisler; Pozitif lineer dönüşümler; Pozitif çoklu lineer dönüşümler

ABSTRACT

MSc Thesis

INEQUALITIES FOR POSITIVE MULTILINEAR MAPPINGS

Mustafa AKIÇ

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. İ. Halil GÜMÜŞ
Year : 2018 , Number of pages: 37+ıv

Jury : Assoc. Prof. Dr. İ. Halil GÜMÜŞ
Assoc. Prof. Dr. Faik GÜRSOY
Asst. Prof. Dr. Murat CANDAN

In this thesis, matrix inequalities are studied.

In the first part of our thesis, some important inequalities such as Cauchy-Schwarz inequality, Kantorovich inequality, Lowner-Heinz inequality have been given and positive definite matrices and positive linear mappings are introduced. Particularly inequalities related to positive linear mappings are examined.

In the main part of thesis, positive multilinear mappings are emphasized and inequalities involving this mappings have been obtained

Key Words: Matrix inequalities; Positive definite matrices; Positive linear mappings; Positive multilinear mappings

BEYAN

“Pozitif çoklu lineer dönüşümler için eşitsizlikler” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mustafa AKIÇ

TEŞEKKÜR

Tez aşamasında konumu belirleyen, bilgi ve birikimini aktaran, çalışmalarımı yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ’ e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her konuda desteğini esirgemeyen eşim Gülsüm'e ve motivasyon kaynağım oğlum Ahmet Yasin'e desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Mustafa AKIÇ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A^*	: A matrisinin eşleniğinin transpozu
$\|A\|$	: A matrisinin mutlak değeri
$A\#B$	: A ile B matrisinin geometrik ortalaması
M_n	: $n.$ mertebeden kompleks matrisler kümesi

1. GİRİŞ

Tez olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin giriş kısmı bulunmaktadır. İkinci bölümde üzerinde çalıştığımız konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar incelenmiştir. Üçüncü bölümde temel kavramlar başlığı altında yedi kısım yer almaktadır. Birinci kısımda matrisin tanımı yapılarak, matrislerle yapılan temel işlemler ve matris çeşitleri tanıtılmıştır. İkinci kısımda iç çarpım ve norm tanımları yapıldıktan sonra Cauchy–Schwarz eşitsizliği teorem olarak belirtilmiştir. Ayrıca bazı özel normlar da tanımlanmıştır. Üçüncü kısımda pozitif yarı tanımlı matris tanımlanarak, bir matrisin pozitif yarı tanımlı olma koşulları belirtilmiştir. Dördüncü kısımda matrislerin ağırlıklı ortalamaları tanımlanmıştır. Beşinci kısımda tezimizin ileri bölümlerinde kullanılacak bazı önemli eşitsizliklere yer verilmiştir. Altıncı ve Yedinci kısımda ise pozitif lineer dönüşümler ve pozitif çoklu lineer dönüşümler tanımlanarak özellikleri belirtilmiştir. Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma başlığı altında araştırmalarımız sonucunda elde ettiğimiz sonuçlar ve bu sonuçları elde etmek için kullanılan teoremler sunulmuştur. Son bölüm olan sonuç bölümünde; yapılan çalışmamızın daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırılması yapılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde $\phi : M_n \to M_p$ birimsel pozitif lineer dönüşümü için

$$\phi(A)^{-1} \le \phi(A^{-1})$$
$$\phi(A)^2 \le \phi(A^2)$$

eşitsizlikleri sırasıyla Choi eşitsizliği ve Kadison eşitsizliği olarak bilinmektedir[1].

Marshall ve Olkin [2], Choi eşitsizliğinin tersini $0 < mI \le A \le MI$ olmak koşuluyla,

$$\phi(A^{-1}) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\phi(A)^{-1}$$

şeklinde oluşturmuşlardır. Benzer bir sonuç Kadison eşitsizliğinin tersi kabul edilerek

$$\phi(A^2) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\phi(A)^2$$

şeklinde elde edilmiştir[3].

Lin [4], $\phi : M_n \to M_p$ birimsel pozitif lineer dönüşümü için

$$\phi(A^{-1})^2 \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^2 \phi(A)^{-2}$$

olduğunu ispatlamıştır.

Fu ve He [5], $f(t) = t^s \ (0 \le s \le 1)$ fonksiyonunun operatör monotonluğunu kullanarak $0 \le r \le 2$ için,

$$\phi(A^{-1})^r \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^r \phi(A)^{-r}$$

eşitsizliğini ve $r \ge 2$ içinde

$$\phi(A^{-1})^r \le \left(\frac{(M+m)^2}{4^{2/r}Mm}\right)^r \phi(A)^{-r}$$

eşitsizliğini göstermişlerdir.

$A\# B\le \frac{A+B}{2}$ matris aritmetik-geometrik eşitsizliğinden faydalanarak ϕ birimsel pozitif lineer dönüşümü için $\phi\left(A\# B\right)\le \phi\left(\frac{A+B}{2}\right)$ eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. Fujii ve arkadaşları [6] nolu çalışmalarında bu eşitsizliğin tersini

$$\phi\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \sqrt{\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}}\phi\left(A\# B\right)\le \frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}\phi\left(\left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1}\right)$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Lin [7], bu eşitsizliğin karesini almaya çalışmış ve

$$\phi^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}\right)^2\phi^2\left(A\# B\right)$$

$$\phi^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}\right)^2\left(\phi\left(A\right)\#\phi\left(B\right)\right)^2$$

eşitsizliklerini elde etmiştir.

Fu ve He [5], Löwner-Heinz eşitsizliğini kullanarak $0\le r\le 2$ için,

$$\phi^r\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}\right)^r\phi^r\left(A\# B\right)$$

$$\phi^r\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}\right)^r\left(\phi\left(A\right)\#\phi\left(B\right)\right)^r$$

eşitsizliklerini ve $r\ge 2$ için de

$$\phi^r\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4^{2/r}Mm}\right)^r\phi^r\left(A\# B\right)$$

$$\phi^r\left(\frac{A+B}{2}\right)\le \left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4^{2/r}Mm}\right)^r\left(\phi\left(A\right)\#\phi\left(B\right)\right)^r$$

eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Dehghani ve arkadaşları [8] birimsel pozitif çoklu lineer dönüşümleri tanımlamış ve bu dönüşümler için Choi eşitsizliğinin bir genişlemesini, $A_i\ge 0$ olmak şartıyla,

$$\phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)^{-1} \leq \phi\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right)$$

şeklinde elde etmişlerdir. Ayrıca aynı çalışmalarında pozitif çoklu lineer dönüşümler için, Kantorovich eşitsizliğini

$$\phi\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \frac{\left(M^k + m^k\right)^2}{4M^k m^k} \phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)^{-1}$$

olarak elde etmişlerdir.

Kian ve Dehghani [9] bu eşitsizliğin karesini,

$$\phi^2\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \left(\frac{\left(M^k + m^k\right)^2}{4M^k m^k}\right)^2 \phi^{-2}\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)$$

eşitsizliği olarak elde etmişlerdir. Ayrıca $r \geq 2$ için,

$$\phi^r\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \left(\frac{\left(M^k + m^k\right)^2}{4^{2/r} M^k m^k}\right)^r \phi^{-r}\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)$$

eşitsizliğini ispatlamışlardır. Aynı çalışmalarında son olarak da

$$\phi^2\left(\frac{A_1 + B_1}{2}, \frac{A_2 + B_2}{2}, ..., \frac{A_k + B_k}{2}\right) \leq \left(\frac{\left(M^k + m^k\right)^2}{4M^k m^k}\right)^2 \phi^2\left(A_1 \# B_1, A_2 \# B_2, ..., A_k \# B_k\right)$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Ayrıca Dehghani ve arkadaşları [8] pozitif çoklu lineer dönüşümler için, Polya-Szego eşitsizliğinin bir versiyonunu

$$\phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right) \# \phi\left(B_1, B_2, ..., B_k\right) \leq \frac{M^k + m^k}{2M^{k/2} m^{k/2}} \phi\left(A_1 \# B_1, A_2 \# B_2, ..., A_k \# B_k\right)$$

olarak sunmuşlardır.

Bu tez çalışmasının son kısmında da bu tür eşitsizlikler üzerine çalışılmış, bazılarının genelleştirilmesi, bazıları için de daha iyi sınırlar elde edilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Matrisler ve Matris İşlemler

Tanım 3.1.1. [10] $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ skalarlarının oluşturduğu m satır ve n sütundan oluşan dikdörtgensel bir tabloya $m \times n$ tipinde bir reel (kompleks) matris denilir ve genellikle aşağıdaki biçimde gösterilir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Böyle bir matrisi genellikle $A = [a_{ij}]$ gösterimiyle kullanılır.

Bir matris sadece bir satıra sahipse satır matrisi veya satır vektörü, sadece bir sütuna (kolona) sahipse sütun (kolon) matrisi veya sütun (kolon) vektörü olarak adlandırılır. Eğer matrisin tüm elemanları sıfırsa, sıfır matrisi adı verilir ve genellikle 0 ile gösterilir. Ayrıca satır ve sütun sayısı eşit olan matrise kare matris denir. Örneğin $n \times n$ kare matrise n. mertebeden kare matris denir.

$m \times n$ tipinde reel (kompleks) matrisler kümesi $M_{m,n}(\mathbb{R})\ (M_{m,n}(\mathbb{C}))$ sembolü ile gösterilir. n. mertebeden karesel reel (kompleks) matrisler kümesi $M_n(\mathbb{R})$ $(M_n(\mathbb{C}))$ sembolü ile gösterilir. Tezin geri kalan kısmında n. mertebeden kompleks karesel matrisler M_n ile gösterilmiştir.

Tanım 3.1.2. [10] $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde iki matris olsun. A ve B matrislerinin toplamı $A + B$ şeklinde yazılır ve A ve B nin karşılıklı elemanlarını toplayarak elde edilir. Yani,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

olmak üzere $C = [c_{ij}]$ matrisine A ve B matrislerinin toplamı denir.

A matrisinin bir k skalarıyla çarpımı $k.A$ veya kA şeklinde yazılır ve A nın her bir elemanının k ile çarpılmasıyla elde edilir. Yani,

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

dir. Tanımdan faydalanarak

$$-A = (-1)A \text{ ve } A - B = A + (-B)$$

yazılabilir. $-A$ matrisine A matrisinin negatifi, $A-B$ matrisine A ile B nin farkı adı verilir.

Teorem 3.1.3. [10] A, B, C aynı boyutlu herhangi üç matris ve k ile k' de skalarlar olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &(i)(A+B)+C = A+(B+C), && (v)k(A+B) = kA+kB \\ &(ii)A+0 = 0+A = A, && (vi)(k+k')A = kA+k'B \\ &(iii)A+(-A) = (-A)+A = 0, && (vii)(kk')A = k(k'A) \\ &(iv)A+B = B+A, && (viii)1.A = A \end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.1.4. [10] $A = [a_{ik}]$ ve $B = [b_{kj}]$ matrisleri, A nın sütun sayısı B nin satır sayısına eşit olacak şekilde iki matris, yani A matrisi $m \times p$ tipinde bir matris, B matrisi $p \times n$ tipinde bir matris olsun. AB çarpımı $m \times n$ tipinde bir matris olup, $ij-$elemanı A nın $i.$ satırı ile B nin $j.$ sütunu çarpılarak elde edilir. Yani,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ . & \cdots & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ . & \cdots & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \cdots & . \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

burada

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

dir.

$p \neq q$ olmak üzere A bir $m \times p$ ve B bir $q \times n$ matris ise AB çarpımı tanımlı değildir. Ayrıca 0, sıfır matrisi olmak üzere $0.A = 0$ ve $B.0 = 0$ dır.

Teorem 3.1.5. [10] A, B, C herhangi üç matris ve k bir skaler olsun. Aşağıda belirtilen toplam ve çarpımlar tanımlı olduğunda

$$
\begin{aligned}
&(i)(AB)C = A(BC),\\
&(ii)A(B+C) = AB + AC,\\
&(iii)(B+C)A = BA + CA\\
&(iv)k(AB) = (kA)B = A(kB)
\end{aligned}
$$

dir.

Tanım 3.1.6. [10] $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisinin satırlarının sütun olarak yazılmasıyla elde edilen $\left[a_{ji}\right]$ matrisine A matrisinin transpozu denir ve A^T ile gösterilir.

Ayrıca $A^* = \left[\overline{a}_{ji}\right]$ matrisine, A matrisinin eşlenik transpozu denir.

Teorem 3.1.7. [10] A, B herhangi iki matris ve k bir skalar olsun. Aşağıda belirtilen toplam ve çarpımlar tanımlı olduğunda

$$
\begin{aligned}
&(i)(A+B)^T = A^T + B^T, &\qquad &(iii)(kA)^T = kA^T,\\
&(ii)\left(A^T\right)^T = A, &\qquad &(iv)(AB)^T = B^T A^T
\end{aligned}
$$

dır.

Tanım 3.1.8. [10] $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisi $n.$ mertebeden bir kare matris olsun. A matrisinin köşegeni veya esas köşegeni aynı indisli elemanlardan oluşur. Yani

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$$

elemanları matrisin köşegen elemanlarıdır.

A matrisinin izi ise bu köşegen elemanlarının toplamıdır ve $tr(A)$ ile gösterilir. Yani,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

dir.

Teorem 3.1.9. [10] A ve $B,$ $n.$ mertebeden kare matrisler ve k bir skalar olsun. Bu durumda

$$(i)\, tr(A+B) = trA + trB, \qquad (iii)\, tr(A^T) = trA,$$
$$(ii)\, tr(kA) = k.tr(A), \qquad (iv)\, tr(AB) = tr(BA)$$

dır.

Tanım 3.1.10. [10] Köşegen elemanları 1, diğer bütün elemanları 0 olan $n.$ mertebeden kare matrise, $n.$ mertebeden birim matris denir ve I_n veya I ile gösterilir. $A,$ $n.$ mertebeden kare matris olmak üzere,

$$AI = IA = A$$

dır.

Herhangi bir k skaları için köşegen elemanları $k,$ diğer bütün elemanları 0 olan kI matrisine skalar matris adı verilir.

Tanım 3.1.11. [10] I birim matris olmak üzere**,**

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde bir B matrisi varsa, A kare matrisine terslenebilen matris denir. Böyle bir B matrisi tektir ve A nın tersi olarak adlandırılır, A^{-1} ile gösterilir.

Tanım 3.1.12. [10] A herhangi bir kare matris olsun. Eğer

$$Av = \lambda v$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir λ (kolon) varsa λ ya A nın bir özdeğeri adı verilir.

Bu bağıntıyı sağlayan herhangi bir v vektörüne de A nın λ özdeğerine ait bir özvektörü adı verilir.

Tanım 3.1.13. [11] A karesel kompleks matris olmak üzere, $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisi

$a_{ij} = 0, \quad i \neq j$ ise köşegen matris,

$a_{ij} = 0, \; i > j$ ise üst üçgensel matris,

$A^T = A$ ise simetrik matris ,
$A^* = A$ ise hermityen matris,
$A^* A = AA^*$ ise normal matris,
$A^* A = AA^* = I$ ise üniter matris,
$A^T A = AA^T = I$ ise ortogonal matris

olarak isimlendirilir.

Tanım 3.1.14. A herhangi bir matris olmak üzere, A matrisinin mutlak değeri

$$|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$$

dir.

3.2. İç Çarpım ve Norm

Tanım 3.2.1. [11] V; kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, her $u, v, w \in V$ ve c skaları için aşağıdaki özellikler sağlanırsa $\langle , \rangle$ 'a bir iç çarpım denir.

i) $\langle u,u \rangle \geq 0$ ve $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

iii) $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$

iv) $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$

Bir iç çarpımla birlikte bu V vektör uzayına iç çarpım uzayı denir. Örneğin $\mathbb{C}^n$ kompleks sayılar cismi üzerinde,

$$\langle x, y \rangle = y^* x = \overline{y_1} x_1 + \overline{y_2} x_2 + ... + \overline{y_n} x_n$$

iç çarpımı ile bir iç çarpım uzayıdır.

Teorem 3.2.2. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) [11] V bir iç çarpım uzayı olmak üzere, her $x, y \in V$ için,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

dir.

İç çarpım uzayındaki bir x vektörü için $\langle x, x\rangle$ in karekökü x vektörünün uzunluğu veya normu olarak adlandırılır ve $\|.\|$ ile gösterilir. Bu tanıma göre Cauchy–Schwarz Eşitsizliği

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Teorem 3.2.3. [11] V bir iç çarpım uzayı olmak üzere, her $x, y \in V$ için,

$$i)\|x\| \geq 0 \qquad ii)\|cx\| = |c|\|x\|, c \in \mathbb{C} \qquad iii)\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir.

Tanım 3.2.4. [11] V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer V, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ iç çarpım normuna göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Tanım 3.2.5. [11] $A, B \in M_n$ **o**lmak üzere, $\|\,.\,\| : M_n \to \mathbb{R}$ ye fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa matris normu olarak adlandırılır.

$i)\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ dır.

$ii)\|cA\| \leq |c|\|A\|,\ c \in \mathbb{C}$

$iii)\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$iv)\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Tanım 3.2.6. [11] Eğer bir A matrisi V iç çarpım uzayı üzerinde bir lineer operatör olarak düşünülürse, bu matrisin operatör normu,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x=1} \|Ax\|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.7. [11] $A, B \in M_n$ olmak üzere, bu matrislerin iç çarpımı $\langle A, B\rangle = tr\left(B^* A\right)$ şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpımdan elde edilen norm

$$\|A\|_F = \left(tr\left(A^* A\right)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan Frobenius normdur.

3.3. Pozitif Yarı Tanımlı Matris

Tanım 3.3.1. [1] Bir $A \in M_n$ matrisi her $x \in \mathbb{C}^n$ için,

$$x^* Ax \geq 0$$

şartını sağlıyorsa pozitif yarı tanımlı matris,

$$x^* Ax > 0$$

şartını sağlıyorsa pozitif tanımlı matris olarak adlandırılır.

Pozitif yarı tanımlı matrisler $A \geq 0$, pozitif tanımlı matris $A > 0$ ile gösterilir.

Genel olarak bir H Hilbert uzayında her $x \in H$ için,

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0$$

şartını sağlayan A operatörüne pozitif operatör,

$$\langle Ax, x \rangle > 0$$

şartını sağlayan A operatörüne kesin pozitif operatör denir.

Teorem 3.3.2. [1] Bir A pozitif yarı tanımlı matrisin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A matrisinin ters çevrilebilir olmasıdır.

Şimdi de bir A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için bazı şartları içeren bir teorem verelim.

Teorem 3.3.3. [1]

$i)$ A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart A matrisinin Hermityen ve özdeğerlerinin negatif olmayan reel sayılar olmasıdır. A matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A matrisinin özdeğerlerinin pozitif reel sayılar olmasıdır.

ii) A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart A matrisinin Hermityen ve bütün esas minörlerinin negatif olmayan reel sayılar olmasıdır. A matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A matrisinin bütün esas minörlerinin pozitif reel sayılar olmasıdır

iii) A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bir B matrisi için $A = B^{*}B$ olmasıdır. A matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart B matrisinin ters çevrilebilir matris olmasıdır.

iv) A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bir T üst üçgensel matrisi için $A = T^{*}T$ olmasıdır. Ayrıca T matrisinin köşegen elemanları negatif olmayan sayılar olacak şekilde seçilebilir. Eğer A matrisi pozitif tanımlı ise bu T matrisi tektir. Buna A matrisinin Cholesky Ayrışımı denir. A matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart T matrisinin ters çevrilebilir olmasıdır.

v) A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart $A = B^{2}$ olacak şekilde bir B pozitif yarı tanımlı matrisi olmasıdır. Bu şartı sağlayan B matrisi yalnız bir tanedir ve B matrisine A matrisinin pozitif karekökü denir, $B = A^{1/2}$ şeklinde gösterilir. A matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart B matrisinin pozitif olmasıdır.

Teorem 3.3.4. [1] A ve B aynı boyutlu iki hermityen matris olsun. Eğer $A - B$ pozitif yarı tanımlı matris ise bu durumda $A \geq B$ şeklinde gösterilir. Matrisler arasındaki bu sıralama her A, B, C hermityen matrisleri için,

i) $A \geq A$ (Yansıma)
ii) $A \geq B$ ve $B \geq A$ ise $A = B$ (Ters simetri)
iii) $A \geq B$ ve $B \geq C$ ise $A \geq C$ (Geçişme)
şartlarını sağlayan bir kısmi sıralamadır. Bu kısmi sıralama Löwner kısmi sıralaması olarak bilinmektedir.

Ayrıca uygun boyutlu her X kompleks matrisi için,

$$A \geq B \Leftrightarrow X^{*}AX \geq X^{*}BX$$

karekterizasyonu bu teoride önemli bir yere sahiptir.

3.4. Matrislerin Ağırlıklı Ortalamaları

Tanım 3.4.1. [1] a ve b pozitif sayılar olsun. Bu iki sayının aritmetik, geometrik, harmonik ve logaritmik ortalamaları sırasıyla,

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2},\ G(a,b)=\sqrt{ab},\ H(a,b)=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}$$

$$L(a,b)=\frac{a-b}{\log a-\log b}=\int_0^1 a^t b^{1-t}dt$$

şeklinde tanımlıdır.

Matematiksel bir ifade olan $M(a,b)$' nin ortalama olması için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

$i)$ $M(a,b)>0$

$ii)$ $a\le b$ ise $a\le M(a,b)\le b$

$iii)$ $M(a,b)=M(b,a)$ (Simetri)

$iv)$ $M(a,b)$ monoton artan bir fonksiyon (a ve b ye göre)

$v)$ Her α pozitif sayısı için $M(\alpha a,\alpha b)=\alpha M(a,b)$

$vi)$ $M(a,b)$ sürekli bir fonksiyon (a ve b ye göre))

Yukarıda belirtilen ortalama türleri bu özellikleri sağlar. a ve b pozitif sayıları yerine A ve B pozitif yarı tanımlı matrislerini alınırsa $M(A,B)$ yukarıdaki şartları sağlamak zorundadır. Şartlarda geçen sıralama, matrisler arasında Löwner sıralaması olarak alınır. Ayrıca (v) maddesi matrisler için

$$v')\,M\left(X^*AX,X^*BX\right)=X^*M(A,B)X$$

şeklinde uyarlamak gerekir. Dolayısıyla bir matris ortalaması pozitif tanımlı bir matrisler kümesi üzerinde tanımlı $(i)-(vi)$ koşullarını sağlayan $(A,B)\to M(A,B)$ şeklinde bir ikili işlemdir.

Pozitif tanımlı bir matrisler için aritmetik ortalama $M(A,B)=\frac{A+B}{2}$ şeklinde tanımlanırsa yukarıdaki koşulları sağladığı görülür.

Matrisler için geometrik ortalama biraz farklıdır. A ve B matrisleri değişme özelliğine sahip ise $A^{1/2}B^{1/2}$ geometrik ortalama olarak alınabilir, ancak bu çok özel bir durumdur. Geometrik ortalama olarak $\frac{1}{2}\left(A^{1/2}B^{1/2}+B^{1/2}A^{1/2}\right)$ alınırsa bu matris Hermityen bir matristir ama pozitif tanımlı değildir.

$\frac{1}{2}\left(B^{1/4}A^{1/2}B^{1/4}+A^{1/4}B^{1/2}A^{1/4}\right)$ geometrik ortalama olarak alınırsa pozitif tanımlılık elde edilmiş olur ama bu seçim monotonluk özelliğini sağlamamaktadır.

Matrislerin geometrik ortalaması

$$A\#B=A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{1/2}A^{1/2}$$

olarak alınacaktır. Bu seçimin $(i)-(vi)$ koşullarını sağladığı gösterilebilir. A ve B matrisleri değişme özelliğine sahip ise

$$A\#B=A^{1/2}B^{1/2}$$

eşitliği sağlanır. $A\#B$ matrisi $XA^{-1}X=B$ denkleminin tek pozitif çözümüdür. Bu denklemin her iki tarafının tersi alınıp yeniden düzenlenirse $XB^{-1}X=A$ denklemi elde edilir. $B\#A$ matrisi de bu denklemin kökü olduğundan

$$A\#B=B\#A$$

eşitliği ortaya çıkar. Ayrıca $A\#B$ geometrik ortalaması

$$A^{-1}\#B^{-1}=\left(A\#B\right)^{-1}$$

eşitliğini de sağlar.

Tanım 3.4.2. [1] a ve b pozitif sayılar ve $v\in[0,1]$ olmak üzere, $v-$ağırlıklı aritmetik ortalama, $v-$ağırlıklı geometrik ortalama sırasıyla,

$$a\nabla_v b=(1-v)a+vb,\ a\#_v b=a^{1-v}b^v$$

şeklinde tanımlanmaktadır. A ve B pozitif tanımlı matrisler olmak üzere, bu ortalamaların matris versiyonları sırasıyla,

$$A\nabla_v B=(1-v)A+vB$$

$$A\#_v B=A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^v A^{1/2}$$

şeklinde alınmaktadır.

3.5. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 3.5.1. (Young Eşitsizliği) [12] A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde pozitif ters çevrilebilir operatörler olduğunda $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda)A+\lambda B \geq A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{\lambda}A^{1/2} \geq \left[(1-\lambda)A^{-1}+\lambda B^{-1}\right]^{-1} \qquad (3.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: x pozitif bir sayı ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere,

$$f(x) = \lambda x + 1 - \lambda - x^{\lambda}$$

fonksiyonunu ele alalım. $f(x)$ fonksiyonunun pozitif bir fonksiyon olduğu aşikardır. T pozitif operatörü ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda T + 1 - \lambda \geq T^{\lambda} \geq \left(\lambda T^{-1} + 1 - \lambda\right)^{-1} \qquad (3.2)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2) nolu eşitsizliğin sağ tarafı bu eşitsizlikte T yerine T^{-1} yazılıp, her iki tarafın tersi olarak bulunur. Son olarak (3.2) nolu eşitsizlikte $T = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ alınıp, eşitsizliğin her iki tarafı $A^{1/2}$ ile çarpılarak (3.1) eşitsizliği elde edilir.

(3.1) eşitsizliği dikkatlice incelendiğinde ağırlıklı aritmetik ortalama, ağırlıklı geometrik ortalama ve ağırlıklı harmonik ortalama operatör versiyonu olduğu görülmektedir.

Teorem 3.5.2. [12] T, H Hilbert uzayı üzerinde pozitif ters çevrilebilir operatör olduğunda,

$i)$ $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda T + (1-\lambda) \geq T^{\lambda}$

$ii)$ $\lambda > 1$ için $\lambda T + (1-\lambda) \leq T^{\lambda}$

$iii)$ $\lambda < 0$ için $\lambda T + (1-\lambda) \leq T^{\lambda}$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu duruma ilaveten $(i),(ii),(iii)$ ifadeleri birbirine denktir.

Teorem 3.5.3. [12] A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde pozitif ters çevrilebilir operatörler olduğunda, *i*) $0 \le \lambda \le 1$ için $(1-\lambda)A + \lambda B \ge A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{\lambda} A^{1/2}$

ii) $\lambda > 1$ için $(1-\lambda)A + \lambda B \le A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{\lambda} A^{1/2}$

iii) $\lambda < 0$ için $(1-\lambda)A + \lambda B \le A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{\lambda} A^{1/2}$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: Teorem 3.5.2 de $T = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ alınıp, her iki taraf $A^{1/2}$ ile çarpılarak sırasıyla bütün eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 3.5.4. (Hölder-Mc Carthy Eşitsizliği) [12] *A*, H Hilbert uzayı üzerinde pozitif lineer operatör olduğunda,

i) $\lambda > 1$ ve $\|x\| = 1$ için $\langle A^{\lambda}x, x\rangle \ge \langle Ax, x\rangle^{\lambda}$

ii) $0 \le \lambda \le 1$ ve $\|x\| = 1$ için $\langle A^{\lambda}x, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle^{\lambda}$

iii) $\lambda < 0$, $\|x\| = 1$ ve A ters çevrilebilir operatörler olduğunda $\langle A^{\lambda}x, x\rangle \ge \langle Ax, x\rangle^{\lambda}$ dir.

Not: *A*, H Hilbert uzayı üzerinde pozitif lineer operatör ve $\lambda \in [0,1]$ olduğunda,

$$\|x\| = 1 \text{ için } \langle A^{\lambda}x, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle^{\lambda}$$

Hölder-Mc Carthy eşitsizliği ile

$$\lambda A + I - \lambda \ge A^{\lambda}$$

Young eşitsizliği birbirine denktir.

Teorem 3.5.5. (Löwner-Heinz Eşitsizliği) [12] $\alpha \in [0,1]$ için $A \ge B \ge 0$ eşitsizliği sağlandığında $A^{\alpha} \ge B^{\alpha}$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: $A \ge B \ge 0$ olsun. $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $A^{\alpha} \ge B^{\alpha}$ ve $A^{\beta} \ge B^{\beta}$ olduğunu farzedelim. Eğer $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \ge B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olacaktır.

$$\left\| A^{-\frac{(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{-\frac{(\alpha+\beta)}{4}} \right\| = r\left(A^{-\frac{(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{-\frac{(\alpha+\beta)}{4}} \right)$$

$$= r\left(A^{\frac{(\alpha-\beta)}{4}} A^{-\frac{(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{-\frac{(\alpha+\beta)}{4}} A^{\frac{(\beta-\alpha)}{4}} \right)$$

$$= r\left(A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}} \right)$$

$$\leq \left\| A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}} \right\|$$

$$\leq \left\| A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\beta}{2}} \right\| \left\| B^{\frac{\alpha}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}} \right\|$$

$$\leq 1$$

dir.

Böylece $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ eşitsizliği ispatlanmış olur.

Ayrıca $\alpha > 1$ için $A \geq B \geq 0$ eşitsizliği sağlansa bile $A^{\alpha} \geq B^{\alpha}$ eşitsizliği genellikle sağlanmaz. Örneğin,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri alındığında $A \geq B \geq 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Fakat

$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq 0$ ve $A^2 \geq B^2$ değildir.

Şimdi vereceğimiz teorem hangi durumlarda kuvvet almanın eşitsizliği koruduğu ile ilgili bir teoremdir.

Teorem 3.5.6. (Furuta Eşitsizliği) [12] $r \geq 0$ için $A \geq B \geq 0$ olduğunda,

$$\left(B^{r/2} A^{p} B^{r/2} \right)^{1/q} \geq \left(B^{r/2} B^{p} B^{r/2} \right)^{1/q}$$

ve

$$\left(A^{r/2} A^{p} A^{r/2} \right)^{1/q} \geq \left(A^{r/2} B^{p} A^{r/2} \right)^{1/q}$$

eşitsizlikleri $p \geq 0$, $q \geq 1$ ve $(1+r)q \geq p+r$ şartları altında sağlanır.

Teorem 3.5.7. (Kantorovich Eşitsizliği) [12] $A,\ mI \leq A \leq MI$ eşitsizliğini sağlayan H Hilbert uzayında bir pozitif operatör olduğunda, H Hilbert uzayındaki birim x vektörü $(\|x\| = 1)$ için

$$\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \tag{3.3}$$

ve

$$\langle A^2 x, x\rangle \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \langle Ax, x\rangle^2 \tag{3.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

i) Pozitif operatörlerin çarpımı, çarpılan operatörler değişme özelliğine sahip olduğunda, pozitiftir. $0 < mI \leq A \leq MI$ olduğundan, $(MI - A) \geq 0,\ A^{-1} > 0$ ve $(A - mI) \geq 0$ dır. Bu operatörler çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahip olduğundan,

$$(MI - A)A^{-1}(A - mI) \geq 0$$

eşitsizliği, buradan da

$$A + MmA^{-1} \leq M + m$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece sırasıyla

$$\langle (A + MmA^{-1})x, x\rangle \leq \langle (M+m)x, x\rangle$$

ve

$$\langle Ax, x\rangle + Mm\langle A^{-1}x, x\rangle \leq M + m$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$2\sqrt{Mm\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle} \leq \langle Ax, x\rangle + Mm\langle A^{-1}x, x\rangle \leq M + m$$

bulunur. Bu eşitsizlik düzenlenirse (3.3) ifadesi

$$\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

elde edilmiş olur.

$ii)$ (3.3) eşitsizliğinde x vektörü yerine $\dfrac{A^{1/2}x}{\left\|A^{1/2}x\right\|}$ yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa, (3.4) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Not:

$i)$ $\dfrac{(M+m)^2}{4Mm}$ sabiti Kantorovich sabiti olarak adlandırılır.

$\dfrac{(M+m)^2}{4Mm}=\left(\dfrac{\frac{M+m}{2}}{\sqrt{Mm}}\right)^2$ eşitliğinden Kantorovich sabitinin Aritmetik ortalamanın Geometrik ortalamaya oranı olduğu görülür.

$ii)$ Hölder-Mc Carthy Eşitsizliğinden $\|x\|=1$ için

$$\langle Ax,x\rangle^2 \le \langle A^2x,x\rangle$$

eşitsizliğini biliyoruz. (3.4) eşitsizliği bu eşitsizliğin tersi düşünülebilir. Bu alanda yapılan çalışmalarda $\dfrac{(M+m)^2}{4Mm}$ sabitinden daha küçük olan ve bu eşitsizlikleri koruyan sabitlerin var olup-olmadığı araştırılmaktadır.

Ayrıca göreceğimiz gibi bu eşitsizliklerin genelleştirilmeleri üzerine araştırmalar yapılmaktadır.

Teorem 3.5.8. [12] A, $mI \le A \le MI$ eşitsizliğini sağlayan H Hilbert uzayında bir pozitif operatör olduğunda,

$i)$ $p>1$ ve $K_+(m,M,p)=\dfrac{(p-1)^{p-1}}{p^p}.\dfrac{\left(M^p-m^p\right)^p}{(M-m)\left(mM^p-Mm^p\right)^{p-1}}$

için

$$\langle Ax,x\rangle^p \le \langle A^px,x\rangle \le K_+(m,M,p)\langle Ax,x\rangle^p$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

$ii)$ $p<0$ ve $K_-(m,M,p)=\dfrac{\left(mM^p-Mm^p\right)}{(p-1)(M-m)}.\left(\dfrac{(p-1)\left(M^p-m^p\right)}{p\left(mM^p-Mm^p\right)}\right)^p$

için

$$\langle Ax,x\rangle^p \le \langle A^p x,x\rangle \le K_-(m,M,p)\langle Ax,x\rangle^p$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

Teorem 3.5.9. [12] A ve B, H Hilbert uzayında pozitif operatörler ve $M_1 I \ge A \ge m_1 I > 0$, $M_2 I \ge B \ge m_2 I > 0$ ve $A \ge B > 0$ şartları sağlansın. Bu durumda $p \ge 1$ ve

$$K_{1,p}=\frac{(p-1)^{p-1}\left(M_1^p-m_1^p\right)^p}{p^p\left(M_1-m_1\right)\left(m_1M_1^p-M_1m_1^p\right)^{p-1}} \text{ ve } K_{2,p}=\frac{(p-1)^{p-1}\left(M_2^p-m_2^p\right)^p}{p^p\left(M_2-m_2\right)\left(m_2M_2^p-M_2m_2^p\right)^{p-1}}$$

için

$$B^p \le K_{2,p}A^p \le \left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{p-1}A^p \text{ ve } B^p \le K_{1,p}A^p \le \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1}A^p$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5.10. [12] $A \ge B > 0$ ve $MI \ge B \ge mI > 0$ için $p \ge 1$ olduğunda,

$$B^p \le \left(\frac{M}{m}\right)^p A^p$$

eşitsizliği sağlanır.

3.6. Pozitif Lineer Dönüşümler

Tanım 3.6.1. [1] $\phi: \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_k$ lineer dönüşümü $A \ge 0$ $(A>0)$ iken $\phi(A) \ge 0$ $(\phi(A)>0)$ şartını sağlıyorsa bu dönüşüme (kesin) pozitif lineer dönüşüm denir.

Ayrıca bu dönüşüm $\phi(I)=I$ şartını da sağlıyorsa birimsel pozitif lineer dönüşüm olarak adlandırılır.

Örnek 3.6.2. [1]

$i)$ $\phi(A)=trA$ dönüşümü pozitif lineer dönüşümdür.

$ii)$ $\phi(A)=\dfrac{trA}{n}$ dönüşümü ise hem pozitif hem de birimsel bir lineer dönüşümdür.

$iii)$ A^T, A matrisinin transpozu olmak üzere $\phi(A)=A^T$ dönüşümü birimsel pozitif lineer dönüşümdür.

$iv)$ X, $n\times k$ tipinde bir matris olmak üzere, $\phi(A)=X^*AX$ dönüşümü M_n den M_k ya pozitif bir lineer dönüşümdür. Lakin bu dönüşüm birimsel değildir.

Önerme 3.6.3.

$i)$ Pozitif lineer dönüşümler her T matrisi için $\phi(T^*)=\phi(T)^*$ eşitsizliğini sağlar [1].

$ii)$ (Kadison eşitsizliği) ϕ pozitif ve birimsel bir dönüşüm olmak üzere, her A Hermityen matrisi için

$$\phi(A)^2\leq\phi(A^2)$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

Sıradaki özellik Kadison eşitsizliğinin normal matrislere genelleştirilmesidir.

$iii)$ ϕ pozitif ve birimsel bir dönüşüm ve A normal bir matris olmak üzere,

$$\phi(A)\phi(A^*)\leq\phi(AA^*)$$
$$\phi(A^*)\phi(A)\leq\phi(A^*A)$$

eşitsizlikleri doğrudur [1].

$iv)$ (Choi eşitsizliği) ϕ kesin pozitif ve birimsel bir dönüşüm olmak üzere, her pozitif tanımlı A matrisi için,

$$\phi(A)^{-1}\leq\phi(A^{-1})$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

v) ϕ birimsel pozitif bir lineer dönüşüm ve A pozitif yarı tanımlı matrisi olduğunda,

$$\phi(A)^r \geq \phi(A^r) \qquad 0 \leq r \leq 1$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

vi) ϕ birimsel pozitif bir lineer dönüşüm ve A pozitif yarı tanımlı matris olduğunda,

$$\phi(A)^r \leq \phi(A^r) \qquad 1 \leq r \leq 2$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca A matrisi pozitif tanımlı matris olduğunda bu eşitsizlik $-1 \leq r \leq 0$ durumunda da doğrudur. Bu eşitsizlik Kadison ve Choi eşitsizliklerinin genelleştirilmiş bir durumu olarak da düşünülebilir [1].

vii) ϕ kesin pozitif lineer dönüşüm olsun. H hermityen matris ve $A > 0$ olduğunda,

$$\phi(HA^{-1}H) \geq \phi(H)\phi(A)^{-1}\phi(H)$$

eşitsizliği geçerlidir.
Bu özellikte H hermityen matrisi keyfi bir X matrisi ile değiştirilemez. Yani,

$$\phi(X^*A^{-1}X) \geq \phi(X^*)\phi(A)^{-1}\phi(X)$$

eşitsizliği her zaman doğru değildir [1].

viii) ϕ kesin pozitif lineer dönüşüm ve $A > 0$ olduğunda,

$$A \geq X^*A^{-1}X \Rightarrow \phi(A) \geq \phi(X^*)\phi(A)^{-1}\phi(X)$$

önermesi doğrudur.
Sıradaki eşitsizlik Choi eşitsizliğinin tersi olarak kabul edilir.

ix) ϕ kesin pozitif ve birimsel bir dönüşüm ve $0 < m < M$ pozitif reel sayılarını alalım. $mI \leq A \leq MI$ eşitsizliğini sağlayan her pozitif tanımlı A matrisi için,

$$\phi(A^{-1}) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}\phi(A)^{-1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Kantrowich eşitsizliği bu eşitsizliğin özel bir durumudur [1].

Not: Tezin ana konusu olmamakla birlikte f matris-konveks fonksiyon olduğunda

$$f\left(\phi(A)\right)\leq\phi\left(f\left(A\right)\right)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

$x)$ ϕ pozitif bir lineer dönüşüm ve A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere,

$$\phi\left(A\#B\right)\leq\phi\left(A\right)\#\phi\left(B\right)$$

dir [1].

$xi)$ $\phi:\mathrm{M}_n\rightarrow\mathrm{M}_p$ birimsel pozitif lineer dönüşüm olduğunda

$$\phi\left(A^{-1}\right)^2\leq\left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}\right)^2\phi\left(A\right)^{-2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Dikkat edilirse bu (ix) maddesinde verilen eşitsizliğin karesidir. Bu eşitsizliğin ilginç yanı matris eşitsizlikleri genellikle kare alma işlemleri altında korunmazlar. Bu istisnai bir örnektir. Lakin $0\leq p\leq 1$ için $f\left(t\right)=t^p$ fonksiyonu monotonluğu korur. Bu bilgi sayesinde $0\leq p\leq 2$ için,

$$\phi\left(A^{-1}\right)^p\leq\left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}\right)^p\phi\left(A\right)^{-p}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu ortaya çıkacaktır.

Fu ve He makalelerinde [5] $p\geq 2$ için

$$\phi\left(A^{-1}\right)^p\leq\left(\frac{\left(M+m\right)^2}{4^{\frac{2}{p}}Mm}\right)^p\phi\left(A\right)^{-p}$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir. Dikkat edilirse $\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}$ 'in p. kuvveti değildir ama yakın bir sonuçtur.

$xii)$ Matrisler için aritmetik-geometrik eşitsizliği

$$A\#B \le \frac{A+B}{2}$$

şeklindedir. ϕ birimsel pozitif lineer dönüşüm olduğunda

$$\phi(A\#B) \le \phi\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

yazılacağı aşikardır. Bu eşitsizliğin tersi,

$$\phi\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^{1/2} \phi(A\#B)$$

biçiminde elde edilmiştir. Lin yaptığı çalışmasında [7]

$$\phi^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^2 \phi^2(A\#B)$$

ve

$$\phi^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^2 \left(\phi(A)\#\phi(B)\right)^2$$

olarak elde etmiştir.

(xi) özelliğine benzer şekilde Fu ve He çalışmalarında [5] $0 \le p \le 2$ için

$$\phi^p\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^p \phi^p(A\#B)$$

ve

$$\phi^p\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^p \left(\phi(A)\#\phi(B)\right)^p$$

eşitsizliklerini elde etmişlerdir. Ayrıca $p \ge 2$ için de

$$\phi^p\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4^{\frac{2}{p}}Mm}\right)^p \phi^p(A\#B)$$

ve

$$\phi^{p}\left(\frac{A+B}{2}\right)\leq\left(\frac{(M+m)^{2}}{4^{\frac{2}{p}}Mm}\right)^{p}\left(\phi(A)\#\phi(B)\right)^{p}$$

eşitsizliklerini ispat etmişlerdir .

3.7. Pozitif Çoklu Lineer Dönüşümler

Tanım 3.7.1. [8] $\phi:\mathrm{M}_q^k\to\mathrm{M}_p$ dönüşümü her bir matris bileşenine göre lineerlik özelliğini sağlıyorsa bu dönüşüme çoklu-lineer dönüşüm denir. Ayrıca her $A_i\ (i=1,2,...,k)$ pozitif yarı tanımlı matrisi $(A_i\geq 0)$ için $\phi(A_1,A_2,...,A_k)\geq 0$ sağlanıyorsa bu dönüşüme pozitif çoklu-lineer dönüşüm denir. Kesin pozitif çoklu-lineer dönüşüm de benzer şekilde tanımlanabilir. Eğer $\phi(I,I,...,I)=I$ ise ϕ birimsel çoklu-lineer dönüşüm olarak adlandırılır.

Örnek 3.7.2. [8] $\phi:\mathrm{M}_q^k\to\mathrm{M}_p$ dönüşümü, $\phi(A_1,A_2,...,A_k)=tr(A_1)tr(A_2)...tr(A_k)I$ şeklinde tanımlanırsa bu dönüşüm pozitif ve çoklu-lineer bir dönüşümdür.

Örnek 3.7.3. [8] $X_i\in M_q\ \ (i=1,2,...,k)$ matrisleri $\sum_{i=1}^{k}X_i^*X_i=I$ şartını sağlayan matrisler olması durumunda

$$\phi(A_1,A_2,...,A_k)=\sum_{i=1}^{k}X_i^*A_iX_i$$

dönüşümü pozitif ve birimseldir. Bununla beraber bu dönüşüm çoklu-lineer bir dönüşüm değildir.

Önerme 3.7.4. [8]

i) Her $\phi:\mathrm{M}_q^k\to\mathrm{M}_p$ pozitif çoklu-lineer dönüşümü

$$\phi(T_1,T_2,...,T_k)^*=\phi(T_1^*,T_2^*,...,T_k^*)$$

eşitliğini sağlar.

$ii)$ Her $\phi : \mathrm{M}_q^k \to \mathrm{M}_p$ pozitif çoklu-lineer dönüşümü monotondur. Yani $i = 1, 2, ..., k$ için

$$0 \le A_i \le B_i \Rightarrow \phi(A_1, A_2, ..., A_k) \le \phi(B_1, B_2, ..., B_k)$$

önermesi geçerlidir.

$iii)$ $\phi : \mathrm{M}_q^k \to \mathrm{M}_p$ pozitif çoklu-lineer dönüşüm olsun.

$a)$ Eğer $0 \le r \le 1$ ise

$$\phi(A_1^r, A_2^r, ..., A_k^r) \le \phi(A_1, A_2, ..., A_k)^r \qquad (A_i \ge 0)$$

$b)$ Eğer $-1 \le r \le 0$ veya $1 \le r \le 2$ ise

$$\phi(A_1, A_2, ..., A_k)^r \le \phi(A_1^r, A_2^r, ..., A_k^r) \qquad (A_i \ge 0)$$

$iv)$ $\phi : \mathrm{M}_q^k \to \mathrm{M}_p$ pozitif çoklu-lineer dönüşüm olduğunda

$$\phi(A_1^* A_1, A_2^* A_2, ..., A_k^* A_k) \ge \phi(A_1, A_2, ..., A_k)\phi(A_1^*, A_2^*, ..., A_k^*)$$

ve

$$\phi(A_1^* A_1, A_2^* A_2, ..., A_k^* A_k) \ge \phi(A_1^*, A_2^*, ..., A_k^*)\phi(A_1, A_2, ..., A_k)$$

eşitsizlikleri $A_1, A_2, ..., A_k$ normal matrisleri için geçerlidir.

Dikkat edilirde bu özellik, Pozitif Lineer Dönüşümler bölümündeki Önerme 3.6.3 ün (iii) maddesinin benzeridir. Şimdi de sırayla aynı bölümdeki $(vii), (viii)$ maddelerinin çoklu lineer dönüşümlerdeki benzerlerini verelim.

$v)$ ϕ kesin pozitif çoklu-lineer dönüşüm olduğunda, H_i hermityen A_i pozitif tanımlı matrisleri $i = 1, 2, ..., k$ için,

$$\phi(H_1, H_2, ..., H_k)\phi(A_1, A_2, ..., A_k)^{-1}\phi(H_1, H_2, ..., H_k) \le \phi(H_1 A_1^{-1} H_1, H_2 A_2^{-1} H_2, ..., H_k A_k^{-1} H_k)$$

eşitsizliği doğrudur.

$vi)$ ϕ kesin pozitif çoklu-lineer dönüşüm olsun. Eğer A_i pozitif tanımlı matrisler ve $X_i \in M_q$ keyfi matrisler olarak alındığında $i = 1, 2, ..., k$ için,

$$A_i \geq X_i^* A^{-1} X_i \Rightarrow \phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right) \geq$$
$$\phi\left(X_1, X_2, ..., X_k\right)^* \phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)^{-1} \phi\left(X_1, X_2, ..., X_k\right)$$

önermesi doğrudur.

$vii)$ A_i pozitif tanımlı matrisleri $\left(i = 1, 2, ..., k\right)$ $0 < m < M$ pozitif reel sayıları için $mI \leq A_i \leq MI$ eşitsizliğini sağlayan matrisler olsun. ϕ birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm için,

$$\phi\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \frac{\left(M^k + m^k\right)^2}{4M^k m^k} \phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)^{-1}$$

eşitsizliği doğrudur.

Bu eşitsizliğin karesinin alınıp alınamayacağının cevabı bir sonraki özellikte verilmektedir.

$viii)$ $A_i \in M_n$ matrisleri $m < M$ şartını sağlayan pozitif reel m, M sayıları için $0 < mI \leq A_i \leq MI$ eşitsizlikleri sağlansın. $\phi : \mathrm{M}_n^k \rightarrow \mathrm{M}_p$ birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm ise

$$\phi^2\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \left(\frac{\left(M^k + m^k\right)^2}{4M^k m^k}\right)^2 \phi^{-2}\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)$$

eşitsizliği doğrudur. $p > 2$ için ise aynı şartlar altında,

$$\phi^p\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \left(\frac{\left(M^k + m^k\right)^2}{4^{2/p} M^k m^k}\right)^p \phi^{-p}\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir.

Bu bölümün sonu olarak aritmetik-geometrik eşitsizliğin çoklu-lineer dönüşüm versiyonunu verelim.

$ix)$ $A_i \in M_n$ matrisleri $m < M$ şartını sağlayan pozitif reel m, M sayıları için $0 < mI \leq A_i \leq MI$ eşitsizliklerini sağlasın. $\phi : \mathrm{M}_n^k \rightarrow \mathrm{M}_p$ birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm ise

$$\phi^2\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},...,\frac{A_k+B_k}{2}\right)\leq$$

$$\left(\frac{\left(M^k+m^k\right)^2}{4M^km^k}\right)^2\phi^2\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,...,A_k\#B_k\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

x) $A_i,B_i\in M_n$ matrisleri $m<M$ şartını sağlayan pozitif reel m,M sayıları için $0<mI\leq A_i,B_i\leq MI$ eşitsizliklerini sağlasın. $\phi:\mathrm{M}_n^k\to\mathrm{M}_p$ birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm ise

$$\phi\left(A_1,A_2,...,A_k\right)\#\phi\left(B_1,B_2,...,B_k\right)\leq\frac{M^k+m^k}{2M^{k/2}m^{k/2}}\phi\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,...,A_k\#B_k\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Tezin bu son bölümünde araştırmalarımız sonucunda elde ettiğimiz sonuçları sunacağız. Bu sonuçları elde etmek için sık kullandığımız bazı teoremleri yazarak bu bölüme başlayalım.

Lemma 4.1. [13] A ve B pozitif tanımlı matrisler olduğunda

$$\|AB\| \leq \frac{1}{4}\|A+B\|^2$$

dir.

Lemma 4.2. [1] A ve B pozitif tanımlı matrisler olduğunda $1 \leq r \leq \infty$ için

$$\left\|A^r + B^r\right\| \leq \left\|\left(A+B\right)^r\right\|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 4.3. [9] $A_i \in M_n$ matrisleri $m < M$ şartını sağlayan pozitif reel m, M sayıları için $0 < m\mathrm{I} \leq A_i \leq M\mathrm{I}$ eşitsizliklerini sağlasın. $\phi : \mathrm{M}_n^k \to \mathrm{M}_s$ birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm ise

$$\phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right) + M^k m^k \phi\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \left(M^k + m^k\right) I$$

eşitsizliği geçerlidir.

Ayrıca,

$$\phi^2\left(A_1, A_2, ..., A_k\right) + M^{2k} m^{2k} \phi^2\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1}\right) \leq \left(M^{2k} + m^{2k}\right) I$$

eşitsizliği de yukarıdaki eşitsizlikten kolayca elde edilir.

Lemma 4.4. [14] X sınırlı operatörü için $|X| \leq t\mathrm{I} \Leftrightarrow \|X\| \leq t$ dir.

Şimdi ilk temel sonucumuzu verelim. Bu sonuç bir önceki bölümde verilen Önerme 3.7.4 ün $(viii)$ maddesi ikinci eşitsizliğinin $p \geq 4$ için daha iyi bir versiyonudur.

Teorem 4.5. $A_i \in M_n$ matrisleri $m < M$ şartını sağlayan pozitif reel m, M sayıları için $0 < m\mathrm{I} \leq A_i \leq M\mathrm{I}$ eşitsizliklerini sağlasın. $\phi : \mathrm{M}_n^k \to \mathrm{M}_s$ birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm ve $p \geq 4$ ise

$$\phi^{p}\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)\leq\left(\frac{M^{2k}+m^{2k}}{4^{2/p}M^{k}m^{k}}\right)^{p}\phi^{-p}\left(A_1,A_2,...,A_k\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Bu eşitsizliğin

$$\left\|\phi^{p/2}\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)\phi^{p/2}\left(A_1,A_2,...,A_k\right)\right\|\leq\frac{1}{4}\frac{\left(M^{2k}+m^{2k}\right)^{p/2}}{M^{kp/2}m^{kp/2}}$$

eşitsizliğine denk olduğu Lemma 4.4. den bilinmektedir. Dolayısıyla bu eşitsizliğin ispatını yapalım.

$$\left\|\phi^{p/2}\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)M^{kp/2}m^{kp/2}\phi^{p/2}\left(A_1,A_2,...,A_k\right)\right\|$$

$$\leq\frac{1}{4}\left\|\phi^{p/2}\left(A_1,A_2,...,A_k\right)+M^{kp/2}m^{kp/2}\phi^{p/2}\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)\right\|^{2} \quad \text{(Lemma 4.1. den)}$$

$$\leq\frac{1}{4}\left\|\left(\phi^{2}\left(A_1,A_2,...,A_k\right)+M^{2k}m^{2k}\phi^{2}\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)\right)^{p/4}\right\|^{2} \quad \text{(Lemma 4.2. den)}$$

$$=\frac{1}{4}\left\|\phi^{2}\left(A_1,A_2,...,A_k\right)+M^{2k}m^{2k}\phi^{2}\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)\right\|^{p/2}$$

$$\leq\frac{1}{4}\left\|\left(M^{2k}+m^{2k}\right)I\right\|^{p/2} \quad \text{(Lemma 4.3. den)}$$

Böylece

$$\left\|\phi^{p/2}\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)\phi^{p/2}\left(A_1,A_2,...,A_k\right)\right\|\leq\frac{1}{4}\frac{\left(M^{2k}+m^{2k}\right)^{p/2}}{M^{kp/2}m^{kp/2}}$$

eşitsizliğine ulaşmış oluruz ki ispat tamamlanmış olur.

Şimdi bir önceki bölümde yer alan Önerme 3.7.4 ün (ix) maddesinde verilen eşitsizliğin genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.6. $A_i,B_i\in M_n$ matrisleri $m<M$ şartını sağlayan pozitif reel m,M sayıları için $0<mI\leq A_i,B_i\leq MI$ eşitsizliklerini sağlasın. $\phi:\mathrm{M}_n^k\to\mathrm{M}_s$ birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm ise

$$\phi^{p}\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},...,\frac{A_k+B_k}{2}\right)\leq\left(\frac{\left(M^{k}+m^{k}\right)^{2}}{4^{2/p}M^{k}m^{k}}\right)^{p}\phi^{p}\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,...,A_k\#B_k\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Bu eşitsizlik

$$\left\|\phi^{p/2}\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},\ldots,\frac{A_k+B_k}{2}\right)M^{kp/2}m^{kp/2}\phi^{-p/2}\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,\ldots,A_k\#B_k\right)\right\| \le \frac{1}{4}\left(M^k+m^k\right)^p$$

norm eşitsizliğine denktir. Sırasıyla hesaplamalar yapılırsa

$$\left\|\phi^{p/2}\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},\ldots,\frac{A_k+B_k}{2}\right)M^{kp/2}m^{kp/2}\phi^{-p/2}\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,\ldots,A_k\#B_k\right)\right\|$$

$$\le \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}\phi^{p/2}\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},\ldots,\frac{A_k+B_k}{2}\right)+ \\ M^{kp/2}m^{kp/2}\phi^{-p/2}\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,\ldots,A_k\#B_k\right)\end{matrix}\right\|^2 \quad \text{(Lemma 4.1. den)}$$

$$\le \frac{1}{4}\left\|\left(\begin{matrix}\phi\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},\ldots,\frac{A_k+B_k}{2}\right)+ \\ M^{k}m^{k}\phi^{-1}\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,\ldots,A_k\#B_k\right)\end{matrix}\right)^{p/2}\right\|^2 \quad \text{(Lemma 4.2. den)}$$

$$\le \frac{1}{4}\left\|\left(\begin{matrix}\phi\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},\ldots,\frac{A_k+B_k}{2}\right)+ \\ M^{k}m^{k}\phi\left(\left(A_1\#B_1\right)^{-1},\left(A_2\#B_2\right)^{-1},\ldots,\left(A_k\#B_k\right)^{-1}\right)\end{matrix}\right)^{p/2}\right\|^2 \quad \text{Önerme 3.7.4.}(iii)$$

$$= \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}\phi\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},\ldots,\frac{A_k+B_k}{2}\right)+ \\ M^{k}m^{k}\phi\left(\left(A_1\#B_1\right)^{-1},\left(A_2\#B_2\right)^{-1},\ldots,\left(A_k\#B_k\right)^{-1}\right)\end{matrix}\right\|^p$$

$$\le \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}\phi\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},\ldots,\frac{A_k+B_k}{2}\right)+ \\ M^{k}m^{k}\phi\left(\frac{A_1^{-1}+B_1^{-1}}{2},\frac{A_2^{-1}+B_2^{-1}}{2},\ldots,\frac{A_k^{-1}+B_k^{-1}}{2}\right)\end{matrix}\right\|^p$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{2^{pk}}\left\|\phi\left(A_1+B_1,A_2+B_2,...,A_k+B_k\right)+M^k m^k\phi\left(A_1^{-1}+B_1^{-1},A_2^{-1}+B_2^{-1},...,A_k^{-1}+B_k^{-1}\right)\right\|^p$$

$$\leq\frac{1}{4}\frac{1}{2^{pk}}\left\|\begin{array}{l}\phi\left(A_1,A_2,...,A_k\right)+M^k m^k\phi\left(A_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)+\phi\left(B_1,A_2,...,A_k\right)+\\ M^k m^k\phi\left(B_1^{-1},A_2^{-1},...,A_k^{-1}\right)+...+\phi\left(B_1,B_2,...,B_k\right)+M^k m^k\phi\left(B_1^{-1},B_2^{-1},...,B_k^{-1}\right)\end{array}\right\|^p$$

$$\leq\frac{1}{4}\frac{1}{2^{pk}}2^{pk}\left(M^k+m^k\right)^p$$

$$\leq\frac{1}{4}\left(M^k+m^k\right)^p$$

bulunmuş olur ki

$$\left\|\phi^{p/2}\left(\frac{A_1+B_1}{2},\frac{A_2+B_2}{2},...,\frac{A_k+B_k}{2}\right)\phi^{-p/2}\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,...,A_k\#B_k\right)\right\|\leq\frac{1}{4}\frac{\left(M^k+m^k\right)^p}{M^{kp/2}m^{kp/2}}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur.

Son olarak bir önceki bölümde verilen Önerme 3.7.4. ün (x) maddesindeki eşitsizliğin karesini alalım. Söz konusu eşitsizliğin karesini alabilmek için aşağıdaki Lemmaya ihtiyaç duyulmaktadır.

Lemma 4.7. [12] $A,B\in M_n$ matrisleri $0<A\leq B$ ve $0<mI\leq A\leq MI$ eşitsizliklerini sağlasın. Öyleyse

$$A^2\leq\frac{\left(M+m\right)^2}{4Mm}B^2$$

eşitsizliği doğrudur.

Teorem 4.8. $A_i,B_i\in M_n$ matrisleri $m<M$ şartını sağlayan pozitif reel m,M sayıları için $0<mI\leq A_i,B_i\leq MI$ eşitsizliklerini sağlasın. ϕ kesin birimsel pozitif çoklu-lineer dönüşüm ise

$$\left(\phi\left(A_1,A_2,...,A_k\right)\#\phi\left(B_1,B_2,...,B_k\right)\right)^2\leq\left(\frac{\left(M^k+m^k\right)^2}{4M^k m^k}\right)^2\phi^2\left(A_1\#B_1,A_2\#B_2,...,A_k\#B_k\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Bir önceki bölümdeki Önerme 3.7.4 ün (x) dan

$$\phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right) \# \phi\left(B_1, B_2, ..., B_k\right) \leq \frac{M^k + m^k}{2M^{k/2} m^{k/2}} \phi\left(A_1 \# B_1, A_2 \# B_2, ..., A_k \# B_k\right)$$

eşitsizliğine sahibiz. Ayrıca

$$m^k \leq \phi\left(A_1, A_2, ..., A_k\right) \# \phi\left(B_1, B_2, ..., B_k\right) \leq M^k$$

bilgisinden ve Lemma 4.7. den faydalanarak eşitsizliği ispatlamış oluruz.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tezde, pozitif çoklu lineer dönüşümlerin temel özellikleri belirtildikten sonra bazı önemli eşitsizliklerden faydalanılarak pozitif çoklu lineer dönüşümler için yeni eşitsizlikler elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmalarda elde edilenlerin genelleştirilmiş veya geliştirilmiş versiyonudur.

Bu tezde özgün sonuçlar bulunmakta olup, tezde elde edilen sonuçlar bundan sonra bu alanda yapılabilecek olan diğer araştırmalara kaynak olabilecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] R. Bhatia, *Positive definite matrices*. Princeton: Princeton Universtiy Press, 2007.

[2] A.W. Marshall ve I. Olkin, "Matrix versions of Cauchy and Kantorovichinequalities", *Aequationes Math.*, vol. 40, pp. 89-93, 1990.

[3] I. Miac, J. Pecaric ve Y. Seo, "Complementary inequalities to inequalities of Jensen and Ando based on the Mond-Pecaric method", *Linear Algebra and its Applications*, vol. 318, pp. 87-107, 2003.

[4] M. Lin, "On an operator Kantorovich inequality for positive linear maps", *J. Math. Anal.Appl.*, vol. 402, pp. 127-132, 2013.

[5] X. Fu ve C. He, "Some operator inequalities for positive linear maps", *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 63, pp. 571-577, 2015.

[6] M. Fujii, S. Izumino, R. Nakamoto ve Y. Seo, "Operator inequalities related to Cauchy-Schwarz and Hölder-McCarthy inequalities", *Nihonkai Math. J.*, vol. 8, pp. 117-122, 1997.

[7] M. Lin, "Squaring a reverse AM-GM inequality", *Studia Math*., vol. 215, pp. 187-194, 2013.

[8] M. Dehghani, M. Kian ve Y. Seo, "Developed matrix inequalities via positive multilinear mappings", *Linear Algebra Appl*., vol. 484, pp. 63-85, 2015.

[9] M. Kian ve M. Dehghani, "Extension of the Kantorovich inequality for positive multilinear mappings", *Filomat*, vol. 31:20, pp. 6473-6481, 2017.

[10] S. Lipschutz ve M. Lipson, *Linear Algebra*. Ankara: Nobel, 2013.

[11] F. Zhang, *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*. New York: Springer, 2011.

[12] T. Furuta, *Invitation to Linear Operators*. New York*:* Taylor & Francis, 2001.

[13] R. Bhatia ve F. Kittaneh, "Notes on matrix arithmetic geometric mean inequalities", *Linear Algebra Appl*., vol. 308, pp. 203-211, 2000.

[14] R.A. Horn ve C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analyis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[15] P. Zhang, "More operator inequalities for positive linear maps", *Banach J. Math. Anal*., vol. 9, pp. 166-172, 2015.

[16] R. Bhatia ve R. Sharma, "Some inequalities for positive linear maps", *Linear Algebra Appl.*, vol. 436, pp. 1562-1571, 2012.

[17] M. D. Choi, "A Schwarz inequality for positive linear maps on $C*$-algebras", *Illinois J. Math*., vol. 18, pp. 565-574, 1974.

[18] T. Furuta, "Around Choi inequalities for positive linear maps", *Linear Algebra Appl*., vol. 434, pp. 14-17, 2011.

[19] F. Kubo ve T. Ando, "Means of positive linear operators", *Math. Ann*., vol. 246, pp. 205-224, 1980.

[20] T. Ando, C.K. Li ve R. Mathias, "Geometric means", *Linear Algebra and its Applications*, vol. 385, pp. 305-334, 2004.

[21] T. Ando ve X. Zhan, "Norm inequalities related to operator monotone functions", *Math. Ann*., vol. 315, pp. 771-780, 1999.

[22] B. Mond ve J.E. Pecaric, "Converses of Jensen's inequality for linear maps of operators", *An. Univ. Vest Timis. Ser. Mat. Inform.*, vol. 31(2), pp. 223-228, 1993.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Mustafa AKIÇ

Doğum Yeri : Elazığ

Doğum Tarihi : 06/09/1983

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mustafa.akic@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Tezsiz Yüksek Lisans	Matematik Öğretmenliği	Elazığ Fırat Üniversitesi	2009
Lisans	Matematik	Elazığ Fırat Üniversitesi	2004
Lise	Sayısal	Elazığ Balakgazi Lisesi	2000

Yayınlar

1- İ. H. Gümüş, M. Akıç, "Some inequalities for positive multilinear mappings", *Communications Faculty of Science University of Ankara Series A1*, Kabul edildi.