

**T.C.  
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FARK ZAMANLI POPÜLASYON MODELLERİNİN GLOBAL KARARLILIK  
ANALİZİ**

**BEKİR SITKI BİLGİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**2016**

T.C.  
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**FARK ZAMANLI POPÜLASYON MODELLERİNİN GLOBAL  
KARARLILIK ANALİZİ**

**Bekir Sıtkı BİLGİ**  
**Yüksek Lisans Tezi**  
**Matematik Anabilim Dalı**

Bu tez 12/02/2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Manaf MANAFLI**  
**Prof. Dr.**  
**BAŞKAN**

**Özlem AK GÜMÜŞ**  
**Yrd. Doç. Dr. (DANIŞMAN)**  
**ÜYE**

**Figen KANGALGİL**  
**Yrd. Doç. Dr.**  
**ÜYE**

**Doç. Dr. Ramazan GÜRBÜZ**  
**Enstitü Müdürü**

Bu çalışma Adıyaman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

Proje No:

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### Yüksek Lisans Tezi

# FARK ZAMANLI POPÜLASYON MODELLERİNİN GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ

Bekir Sıtkı BİLGİ

Adıyaman Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ

Yıl: 2016, Sayfa sayısı: 58

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI

: Yrd. Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ

: Yrd. Doç. Dr. Figen KANGALGİL

Bu çalışma, fark zamanlı popülasyon modellerinin kararlılık analizi ile ilgilidir. Özellikle, host-parasitoid modellerinin dinamikliği çalışılmıştır. Öncelikle konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilerek, fark ve sürekli zaman modeller tanıtılacaktır. Modellerin kararlılık çalışmalarında önemli bir yere sahip olan Allee faktörü ve göç parametresinin kararlılık üzerine etkisi incelenecektir. Son olarak, belirli büyüme fonksiyonuna bağlı olan host-parasitoid modelin kararlılığı analiz edilecektir. Ayrıca, Allee faktörü ve göç parametresinin modelin kararlılığı üzerine etkisi incelendi. Elde edilen sonuçlar birbirleriyle karşılaştırıldı. Teorik sonuçlar nümerik simülasyonlarla desteklendi.

**Anahtar Kelimeler:** Kararlılık, Global Kararlılık, Denge Noktası, Popülasyon Dinamikleri, Allee etkisi, Fark-zamanlı modeller, Lokal asimtotik kararlılık, Lokal Çekicilik.

## ABSTRACT

### MSc THESIS

# GLOBAL STABILITY ANALYSIS OF THE DISCRETE TIME POPULATION MODELS

Bekir Sıtkı BİLGİ

Adiyaman University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ

Year: 2016, Number of Pages: 58

Jury: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

: Yrd. Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ

: Yrd. Doç. Dr. Figen KANGALGİL

This study is related to the stability analysis of the difference-time population models. In particular, the dynamic of host-parasitoid model has been studied. Firstly, the difference-time and continuous-time models were introduced by giving the basic definitions and theorems on the subject. The effect of Allee factor and immigration parameter on stability, which has an important place in stability studies of the models, are examined. Finally, the stability of host-parasitoid model depending on the particular growth function was analyzed. Also, the effect Allee factors and the migration parameters on the stability of the model are examined; and the results which are obtained were compared with each other. The theoretical results are supported by numerical simulations.

**Key Words:** Stability, Global stability, Fixed (Equilibrium) point, Population dynamics, Allee effect, Discrete-time models, Local asymptotic stability, Local attracting.

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Eğitimim boyunca göstermiş olduğu sabır ve hoşgörü ile, karşılaştığım soruların çözümünde ilminden ve deneyimlerinden yararlandığım, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, tez hazırlama süresi boyunca konunun belirlenmesinde, araştırma sağlanmasında ve bilgi paylaşımında desteğini esirgemeyen ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan kıymetli aileme desteklerinden ötürü teşekkür ederim.

Bekir Sıtkı BİLGİ

Adıyaman, 2016

## İÇİNDEKİLER

## SAYFA

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. İLGİLİ TANIM ve TEOREMLER.....	5
2.1. Fark ve Sürekli Zaman Modellerinin Tanıtımı.....	11
3. LİTERATÜRDEKİ HOST-PARASİTOİD MODELLERİNİN İNCELENMESİ.....	22
3.1. Host Parazitoid Modelinin Göç Parametresine Bağlı Kararlılık Analizi....	22
3.2. Genel Fark-Zamanlı Host-Parazitoid Modelinin Kararlılığı Üzerine Allee Etkisi.....	25
3.3. Bir Host-Parasite Modelinin Kararlılık Analizi.....	28
3.4. Fark Zamanlı Host-Parazitoid Modelinin Global Kararlılığı.....	30
4. OLUŞTURULAN BİR HOST-PARAZİTOİD MODELİNİN DİNAMİKLİĞİ.....	33
4.1. Model (4.1)'in Denge Noktaları.....	33
4.2. Model (4.1)'in Kararlılık Analizi.....	35
4.3. Model (4.1)'in Göç Parametresine Bağlı Denge Noktaları.....	39
4.4. Model (4.1)'in Göç Parametresine Bağlı Kararlılık Analizi.....	42
4.5. Model (4.1)'in Allee Etkisi Altında Kararlılık Analizi.....	44
5. SONUÇ.....	48
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	52

Şekil 4.1.(a) $(1 + ae^b)$ ve $F$ fonksiyonunun aynı koordinat düzleminde grafiği.....	35
Şekil 4.1.(b) $y=1$ doğrusu ve $F$ fonksiyonunun aynı koordinat düzleminde grafiği....	35
Şekil 4.2.(a) Model (4.1.)'in faz diyagramı.....	36
Şekil 4.2.(b) Model (4.1.)'in zaman serisi diyagramı.....	37
Şekil 4.3.(a) Model (4.1.) faz diyagramı.....	38
Şekil 4.3.(b) Model (4.1.)'in zaman serisi diyagramı.....	38
Şekil 4.4.(a) $g$ fonksiyonu ve $y = (1 + ae^b)$ doğrusunun aynı koordinat düzleminde grafiği.....	40
Şekil 4.4.(b) : $(1 + ae^b)$ ve $h(x)$ fonksiyonunun aynı koordinat düzleminde grafiği.....	42
Şekil 4.5.(a) : Model (4.1.)'in zaman serisi diyagramı.....	44
Şekil 4.5.(b) : Model (4.1.)'in zaman serisi diyagramı.....	44

## SİMGELER VE KISALTMALAR

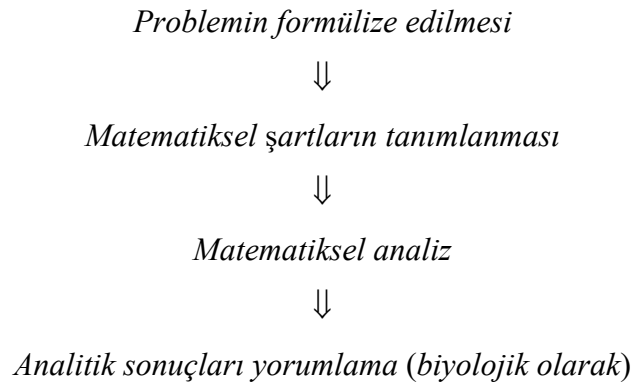
$N_t$	: t zamandaki popülasyon yoğunluğu
$f(N_t)$	: Popülasyon üyeleri arasındaki ilişki
$N^*$	: Popülasyonun denge noktası
$\alpha^*$	: Normalleştirilmiş büyüme oranı
$H_0$	: Host popülasyonunun başlangıç değeri
$P_0$	: Parazitoid popülasyonunun başlangıç değeri
$J$	: Jakobiyen matris
$\beta$	: Göç parametresi
$(a, b)$	: Açık aralık
$[a, b)$	: Yarı açık aralık
$f'(N_t) = \frac{\partial f(N_t)}{\partial N_t}$	: f fonksiyonunun türevi
$\alpha(N_t)$	: t zamanda Allee fonksiyonu
$\alpha'(N_t)$	: t zamanda Allee fonksiyonunun türevi
$ f(N^*) $	: $N^*$ noktasında $f$ fonksiyonunun mutlak değeri
$\det J =  J $	: J matrisinin determinanı
$\text{iz}J$	: J matrisinin izi
$\lim_{N \rightarrow a} f(N)$	: $f$ fonksiyonunun a noktasındaki limiti
$p(\mu)$	: $\mu$ değişkenine bağlı reel değerli polinom
$(H^*, P^*)$	: Sistemin denge noktası



## 1. GİRİŞ

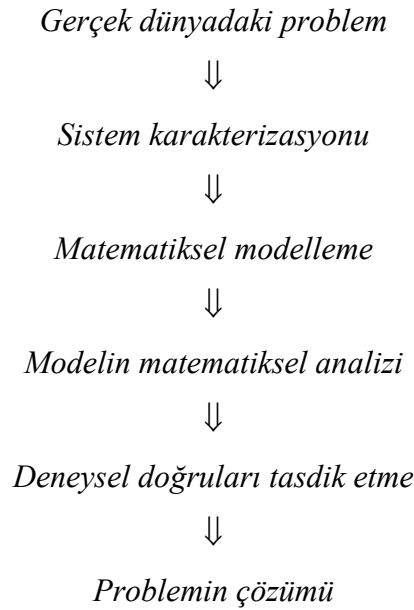
Doğa olayları ve popülasyonları inceleyebilmemiz için matematiksel modellemeye ihtiyaç duyarız. Açıktır ki gerçek dünyada her zaman kesin bilinmeyecek durumlar vardır. Fakat birçok durumda bu kesin bilinmezlik durumu önemli değildir ve sistem bir deterministik sistem olarak kabul edilebilir. Bazı durumlarda ise bilinmezlik durumunun model üzerinde yaptığı değişiklik önemli olabilir. Çünkü dünyadaki yaşam bir denge üzerine kuruludur. Bu nedenle herhangi bir canlı popülasyonundaki nicelik değişimi, diğer canlıları doğrudan ya da dolaylı olarak etkiler. Birbirini etkileyen popülasyonlarda neslin yok olmayacağı bir durum oluşturmak için, popülasyonun yaşamı üzerine etki eden unsurların bilinmesi gerekir. Canlı popülasyonu üzerine etki eden çok fazla etmen olduğu için kesin bir bilgi sahibi olmak çok zordur; fakat gerçeğe yakın yaklaşımlar oluşturulabilir. Yaklaşım oluşturmada işin içine matematiksel modelleme girer. Bir popülasyonun modellenmesi, o canlı türünün popülasyonu hakkında bilgi sahibi olmayı sağlar.

Matematiksel modelleme, süreci, gerçek dünyada olan bir problemi matematiksel formülasyonla tanımlamaktır. Bunun için önce, sürecin mümkün olan tüm detayları değerlendirilmeli ve buna bağlı olarak olabildiğince basit bir model kurulmalıdır. Matematiksel formülasyon genel gerçek dünya problemlerine uygun olmalıdır. Formülasyonu aşağıdaki gibi şematize edebiliriz.



Görüldüğü gibi modellemede önemli olan problem formülize edildikten sonra matematiksel şartların verilere uyumlu olup olmadığının gözden geçirilmesidir. Aslında, modellemede somut olan deneysel verilerin matematiksel formülasyonla uyumluluğunu yakalamak son derecede zor bir durumdur. Gerçeğe en yakın yaklaşım modeli, sonuçların

geçerliliği açısından önem arz eder. Modelleme sürecindeki farklı bir tahmin aşağıdaki sırayla yapılabilir.



DeneySEL doğruların tasdikinde problem yaşanırSA sistem yeniden karakterize edilip yeni matematik model kurulur ve adımlar yinelenir.

Biyomatematik, bazı tahminler altında yatan mekanizmaları inceler. Kullanılan yöntemler biyolojik sistemlerin mekanizmalarına sıkıca bağlıdır. Biyomatematik çalışmaları, kantitatif teori ve kalitatif teori olmak üzere iki duruma dayalıdır. Kantitatif teori'de biyolojik sistem çok detaylıdır ve parametreler deneylerden elde edilmiştir. Sistem analizi somut durumların simülasyonundan daha az önemlidir. Sonuçların nitel ve nicel olarak tahmini mümkün olmalıdır. Biyolojik sistem hakkında çok detayı bilmek oldukça önemlidir. Kalitatif teori ise basit mekanizmaları basit bir şekilde modellemek için kullanılan yöntemdir. Parametre oluşturma ve somut veri analizi çok önemli değildir. Modelin titiz bir analizi mevcuttur ve nitel sonuçlar deneySEL sonuçlarla mukayese edilebilir. Bu mukayese, kalitatif teorinin kantitatif teoriye olan ana üstünlüğüdür [31].

Modelleme; matematiksel anlamda, fark ve diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Bilinir ki, tüm parametreler dikkate alınarak matematiksel model oluşturmak kolay değildir. Bunun yerine daha az parametre gözönüne alarak, gerçeğe yakın yaklaşımlar oluşturmak ve sonrasında farklı parametrelerin model üzerindeki etkisini incelemek daha uygun olacaktır. Böylece biyolojik faktörlerin popülasyon dinamiğine etkisi, matematiksel yolla incelenebilir. Popülasyona etki eden bu faktörlerin bazıları ise "Allee Etkisi" olarak isimlendirilir ve bu etki ilk olarak, Warder Clyde Allee tarafından 1931

yılında tanıtılmıştır. Düşük yoğunlukta popülasyonun büyüme oranı çok küçük olduğunda ortaya çıkan durum Allee etkisi olarak isimlendirilir. Allee etkisi düşük nüfus yoğunluğunda popülasyonu daha çok etkilerken, türlerin çoğalma potansiyelinin artmasıyla giderek azalır. Allee etkisine örnek olarak, eş bulmadaki zorluk, yiyecek bulma problemi, avcıdan kaçış ya da bireysel uygunluk gibi durumlar verilebilir. Allee etkisi nüfus yoğunluğu ile birim kare başına düşen büyüme oranı arasındaki bağlantıdır. Matematiksel olarak bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

- $N_t = 0$  ise  $\alpha(N_t) = 0$
- $N_t \in (0, \infty)$  için  $\alpha'(N_t) > 0$
- $\lim_{N_t \rightarrow \infty} \alpha(N_t) = 1$

Biyolojik varsayımlara dayalı olan bu faktör, çevresel şartların (besin, yaşam alanı gibi) sınırlarına kadar artarak popülasyonu etkilemeye devam eder. Allee fonksiyonu hakkındaki yukarıdaki varsayımlar biyolojik gerçeklerden türetilmiştir. Matematiksel olarak ilk şart; eğer eş yoksa, üreme de yoktur. Yani, popülasyon yoğunluğu sıfır iken Allee fonksiyonu da sıfır olur. Son iki şart, tüm pozitif başlangıç şartları için Allee fonksiyonunun etkisinin zamanla azalarak, yüksek popülasyon yoğunluğunda kaybolduğunu ifade eder. Yani, popülasyonun sayısı artarken Allee fonksiyonunun limiti 1'e yakınsar. Ekolojik modeller genel anlamda; popülasyonun çevreye bağlı olarak, kendi türü ile diğer türler arasındaki etkileşimini gösterir. Çevresel faktörler farklı canlı türlerinde farklı etkiye sahiptir. Aynı zamanda canlının çevre üzerine etkisi de söz konusudur. Allee'nin ilk hipotezi, suda yaşayan bazı canlıların suyun kimyasını etkilediğine dayanmaktadır. Belirli su türleri, suya kalsiyum tuzları gibi birçok koruyucu madde bırakmakta ve bu onların yaşama şansını yükseltmektedir. Allee'nin ilk çalışmalarından birisi "gold fish" (altın balık) üzerinedir. Allee, suda hiç balık yokken suya balık bırakılması durumundaki büyüme oranı ile, suda önceden balık varken balık bırakılması durumundaki büyüme oranlarını karşılaştırmış ve ilk durumda büyüme oranının daha az olduğunu gözlemlemiştir. Yeterli sayıda altın balığın, suyun optimal kimyasal özelliklerine uyum sağlayabildiklerini göstermiştir. Deniz kestanesi, rotifer gibi bazı türlerin yaşama şanslarını artırmak amacıyla grupça yaşadığı analiz edilmiştir. Bu türleri dışarıdan gelecek tehlikelere, kötü hava koşullarına, avcılara, kimyasal veya fiziksel olaylara karşı daha güçlü kılmaktadır. Benzer şekilde kümeleşme, toplam yüzeyi azaltmaktadır. Soğuk havalarda bildircin ve kral penguen gibi bazı türlerin büyük gruplar halinde birbirine yanaşarak soğuk havayla temas eden yüzeyin gruba oranını küçültmek

suretiyle ölüm oranını azalttığı gözlenmiştir. Düşük yoğunluklu popülasyonlardaki klasik görüş, bir süre sonra popülasyonun denge yoğunluğuna ulaşmasıdır. Yemek, barınma koşulları, iklim gibi tüm kaynaklar uygun olduğu sürece popülasyon çoğalmaya başlar ve denge noktasına ulaşır. Ancak Allee, bunun her zaman böyle olmayacağını savunmuştur. Popülasyonda, birey sayısı azaldıkça doğum oranının azalacağını ve daha az genç birey üreyeceğini, daha az genç bireyden daha az popülasyon ortaya çıkacağını ve bu durumun popülasyon yok olana kadar devam edeceğini söylemiştir. Yine Allee etkisi üzerine bir çalışma "tsetse sineğinin" belirli bir yoğunluğun altına düştüğünde kendiliğinden ortadan kaybolduğu gözlemlenmiştir. Bu bir Allee etkisi örneğidir. Bilindiği üzere eş bulamama durumu bir Allee parametresidir ve popülasyonu azaltıcı bir etkiye sahip olduğu durumlar söz konusu olabilir. Eğer bireysel uyumda azalma ile birlikte Allee etkisi, tüm popülasyonu etkilemeye başlıyorsa, burada demografik Allee etkisinden bahsedilir. "Demografik Allee etkisi"; bireysel uyumda düşüşe yol açan faktörlerin toplamıdır. Farklı bir durum bireysel uyum bileşeninin yoğunlukla olan pozitif ilişkisine dayanan "component Allee etkisi"dir. Burada ayrıca popülasyonun yer aldığı alan da önem arz etmektedir. Alandaki birey sayısı azaldıkça, ya da popülasyonun yayıldığı alan genişledikçe yeterli derecede eşleşme olamamaktadır. Yoğunluk arttıkça üreme oranının da arttığı gözlemlenir. Mesela, 1996'da yapılan bir çalışmada doğada ayrı halde yaşama durumuna maruz kalan Madagaskar maymunu ve firavun faresi kendi türleriyle birlikte tutsak edilmiş ve bu sonuç doğrulanmıştır. Yoğunluk azaldıkça, çiftleşme azalmaktadır. Bireysel uyumdaki düşüş, sosyal ve çevresel faktörlerin pozitif etkisiyle popülasyonu artırabilir. O halde, canlının yaşadığı doğal ortam, biyolojik ve çevresel değişimler ve bu ortamdaki organizmanın davranışı önemlidir [20,21,31]. Bu davranış hakkında bilgi sahibi olmak kararlılık çalışması gerektirir.

## 2. İLGİLİ TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

**Tanım 2.1.** Popülasyon modellerinde bir kuşak, kendinden bir önceki kuşak cinsinden yazılabiliyorsa bu popülasyonun modeli fark denklemi ile ifade edilebilir. Buna göre

$$x_{t+1} = f(t, x(t)) \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

denklemi birinci mertebeden fark denklemdir. Herhangi bir  $x_0$  başlangıç noktasından başlanırsa  $x(0), f(x(0)), f(f(x(0))), \dots$  yinelemesi ile

$$x(t) = f^t(x_0) \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

çözümüne ulaşılır [21].

**Tanım 2.2.**  $f$ , reel değişkenli reel değerli bir fonksiyon olmak üzere  $k$ . mertebeden en genel fark denklemi

$$f(x_{t+k}, x_{t+k-1}, \dots, x_{t+1}, x_t, t) = 0 \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

formundadır.  $f$ ,  $t$ 'ye bağlı ise *otonom olmayan fark denklemi*;  $t$ 'ye bağlı değilse *otonom fark denklemi*dir [6].

**Tanım 2.3.**  $a_i; i=1, 2, \dots, n$ ,  $g(t)$ ; sabit ya da  $t$ 'nin bir fonksiyonu ve  $x = x(t)$  olmak üzere;

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = g(t)$$

denklemine  $n$ . mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. Eğer  $a_i$  veya  $g(t)$ ,  $x$ 'in bir fonksiyonu ya da  $x$ 'in herhangi bir türevine bağlıysa denklem lineer olmayan diferansiyel denklem olarak isimlendirilir. Eğer lineer diferansiyel denklemde  $g(t)=0$  ise denklem homojen diferansiyel denklem adını alır [6].

**Tanım 2.4.**  $a_k \neq 0$  olmak üzere  $a_j, j=1, 2, \dots, k$ , sabit ya da  $t$ 'nin bir fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \dots + a_{k-1} x_{t+1} + a_k x_t = b_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (*)$$

denklemine  $k$ . mertebeden lineer fark denklemi denir. Eğer tüm  $t$  değerleri için  $b_t = 0$  oluyorsa denklem homojen lineer fark denklemi olarak isimlendirilir. Aksi takdirde homojen olmayan fark denklemi adını alır [6].

**Tanım 2.5.**  $a_j \in R, j=1,2,\dots,k$ , olmak üzere;

$$p(\mu) = \mu^k + a_1\mu^{k-1} + \dots + a_k \quad (**)$$

denklemine (\*) denkleminin karakteristik denklemi denir. Burada,  $\mu$  ifadesi ise denklemin kökleri ya da sıfırlarıdır [7].

**Teorem 2.1.** (\*)'ın sıfır çözümünün lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart koşul (\*\*)’in her karakteristik kökü için  $|\mu| < 1$  olmasıdır. Ayrıca (\*)’ın sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul,  $|\mu|=1$  eşitliğini sağlayan  $\mu$  çözümleri basit olmak üzere  $|\mu| \leq 1$ ’dir. Öte yandan  $|\mu|=1$  olacak biçimde katlı karakteristik kökler varsa (\*)’ın sıfır çözümü kararsızdır [37].

**Tanım 2.6.** Birinci mertebeden  $x_{t+1} = f(x_t)$  fark denkleminde  $\bar{x} = f(\bar{x})$  eşitliğini sağlayan  $\bar{x}$  çözümüne denge noktası denir [6].

Bir fark modelinin davranışı hakkında bilgi sahibi olmanın en önemli yollarından biri de, bu modelin denge noktasındaki kararlılığını analiz etmektir.

**Tanım 2.7.**  $\bar{x}$  noktası denge noktası olsun,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $|x_0 - \bar{x}| < \delta$  iken  $\forall t \geq 0$  için

$$|x_t - \bar{x}| = |f^t(x_0) - \bar{x}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  bulunabiliyorsa  $\bar{x}$  lokal kararlıdır.  $\bar{x}$  noktası lokal kararlı değilse kararsızdır. Ayrıca, öyle bir  $\gamma > 0$  vardır ki  $\forall |x_0 - \bar{x}| < \gamma$  için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0) = \bar{x}$$

koşulu sağlanırsa  $\bar{x}$  noktası lokal çekicidir. Eğer  $\bar{x}$  noktası hem lokal çekici hem de lokal kararlı ise bu nokta lokal asimptotik kararlıdır [6].

**Tanım 2.8.**  $x_{t+1} = f(x_t)$  denkleminin denge noktası  $\bar{x}$  olsun.  $f: [0, a) \rightarrow [0, a)$ ,  $0 < a \leq \infty$  aralığına tanımlı olsun.

$$\forall x_0 \in (0, a) \text{ için } \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}$$

oluyorsa,  $\bar{x}$  noktası global çekimlidir.  $\bar{x}$  noktası hem global çekimli hem de lokal kararlı ise global asimptotik kararlıdır [6].

**Teorem 2.2.** (Ortalama Değer Teoremi)  $f: (a, b)$  açık aralığında türevlenebilir ve  $[a, b]$  aralığında sürekli olsun. O halde en az bir  $c \in (a, b)$  vardır ki

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

şartını sağlar [24].

**Tanım 2.9.**  $[a, b]$  aralığında tüm  $x_1, x_2$  değerleri için eğer  $x_1 > x_2$  iken  $f(x_1) > f(x_2)$  oluyorsa  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında artan fonksiyondur denir.  $a \leq x_2 < x_1 \leq b$  için  $f(x_1) < f(x_2)$  ise  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında azalan fonksiyondur denir.

**Teorem 2.3.**  $x_{t+1} = f(x_t)$  denkleminin bir denge noktası  $\bar{x}$  ve  $\bar{x}$  noktasını içeren bir açık aralıkta  $f'(\bar{x})$  sürekli olsun.  $|f'(\bar{x})| < 1$  şartını sağlayan  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer  $|f'(\bar{x})| > 1$  ise  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır [6].

**İspat** Farzedelim ki  $|f'(\bar{x})| < 1$  olsun.  $f'$  türev fonksiyonu bir  $I$  aralığında sürekli olduğu için,

$x_0 \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$  ve  $|f'(\bar{x})| < c < 1$  olacak şekilde  $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$  bir alt aralık vardır ve

$$\begin{aligned} |\bar{x} - f(x_0)| &= |f(\bar{x}) - f(x_0)| \\ &= |f'(\xi_1)| |\bar{x} - x_0| \\ &\leq c |\bar{x} - x_0| \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada  $\xi_1, \bar{x}$  ve  $x_0$  arasındadır. Böylece  $f(x_0) \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$  olur.

Ortalama değer teoremi ve gerekli eşitsizlik uygulamaları neticesinde  $x_0$  yerine  $f(x_0)$  yazılarak,

$$\begin{aligned} |\bar{x} - f^2(x_0)| &= |f^2(\bar{x}) - f^2(x_0)| \\ &= |f'(f(\xi_2))f'(\xi_2)| |\bar{x} - f(x_0)| \\ &\leq c |\bar{x} - f(x_0)| \\ &\leq c^2 |\bar{x} - f(x_0)| \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada  $\xi_2, \bar{x}$  ve  $f(x_0)$  arasındadır ve  $|\bar{x} - f(\xi_2)| \leq c |\bar{x} - \xi_2|$ .

Tümevarımla  $t = 1, 2, \dots$  için  $|\bar{x} - f^t(x_0)| \leq c^t |\bar{x} - x_0|$  elde edilir. Bundan dolayı  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}$

olup;  $\bar{x}$  lokal asimptotik kararlıdır. Farzedelim ki  $|f'(\bar{x})| > 1$  olsun. Burada,  $x \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \subset I$  ve  $|f'(\bar{x})| > c > 1$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  bulunabilir.

$$|\bar{x} - f(x_0)| = |f'(\xi_1)| |\bar{x} - x_0|$$

$$\geq c|\bar{x} - x_0|$$

Burada  $x_1, \bar{x}$  ve  $x_0$  arasındadır. Eğer  $|\bar{x} - f(x_0)| < \varepsilon$  alınırsa

$$|\bar{x} - f^2(x_0)| \geq c^2 |\bar{x} - x_0|$$

elde edilir. Bu argüman sonsuza kadar sürdürülemez. Çünkü burada  $c'|\bar{x} - x_0| > 0$  olacak şekilde bir  $t$  bulunabilir. Bu sebeple  $c'|\bar{x} - x_0| > \varepsilon$  olacak bir  $t$  varsa  $\bar{x}$  kararlı değildir [6].

**Teorem 2.4.**  $\frac{dx_t}{dt} = f(x_t)$  denkleminin bir denge noktası  $\bar{x}$  ve  $\bar{x}$  noktasını içeren bir açık aralıkta  $f'(x_t)$  sürekli olsun. Eğer,  $f'(\bar{x}) < 0$  oluyorsa  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer,  $f'(\bar{x}) > 0$  ise  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır [6].

**Tanım 2.10.**  $T$ , bir gecikme parametresi olmak üzere  $t-T$  generasyonu şimdiki  $t+1$  generasyonunu etkiliyorsa,  $x_{t+1} = f(x_t, x_{t-T})$  denklemini gecikmeli fark denklemi olarak adlandırılır [6].

**Teorem 2.5.** (Lineerleştirilmiş kararlılık)  $I$ , reel sayıların bir aralığı  $\bar{x} \in I$  ve  $f : I \times I \rightarrow I$  olmak üzere,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n=0,1,\dots$$

fark denkleminde bakılsın.  $\bar{x}$  denge noktasında  $f(u,v)$ 'nin kısmi türevleri

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{x}) \quad \text{ve} \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{x})$$

olarak tanımlansın.

$$y_{n+1} = py_n + qy_{n-1} \quad n=0,1,\dots$$

denklemini  $\bar{x}$  denge noktası civarında lineerleştirilmiş fark denklemi olarak adlandırılır [23].

Ayrıca,

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0$$

karakteristik polinomu için aşağıdaki ifadeler denktir.

- $|\lambda| < 1$  oluyorsa  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- $|p| < 1 - q < 2$  oluyorsa  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.



Dikkat edelim ki karakteristik polinom,  $A = (a_{ij})$   $k$  boyutlu matris olmak üzere

$$|A - \lambda I| = 0$$

denkleminde elde edilebilir [23].

**Teorem 2.6.** (Schur-Cohn Kriteri):  $k$ . mertebeden verilen bir fark denkleminin karakteristik polinomu

$$p(\mu) = \mu^k + a_1\mu^{k-1} + \dots + a_k$$

olmak üzere, polinomunun sıfırlarının birim çember içine düşmesi için gerek ve yeter şart

- $p(1) > 0$
- $(-1)^k p(-1) > 0$
- $(k-1) * (k-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_k \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k-1} & \dots & a_2 \end{pmatrix}$$

matrisinin pozitif iç matrislere sahip olması gerekir [7].

Örneğin 4. mertebeden lineer bir fark denklemini gözönüne alalım.  $B = (b_{ij})$  matrisinin iç matrisleri, matrisin kendi ile birlikte, birinci ile son satırının ve birinci ile son sütununun ard arda çıkarılmasıyla elde edilen bütün matrislerdir. Eğer  $B$  matrisinin iç matrislerinin tümünün determinantı pozitif ise  $B$  matrisi pozitif iç matrislere sahiptir denir. Yani,

$$B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

matrisinde;  $|B_{3 \times 3}| > 0$  ve  $b_{22} > 0$  ise  $B_{3 \times 3}$  pozitif iç matrislere sahiptir denir. 3. mertebeden bir fark denkleminin kararlı olabilme durumunu araştırmak için Schur-Cohn kriteri şartlarını elde edersek;  $p(\mu) = \mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu + a_3$  polinomunun köklerinin birim çember içine düşmesi için için gerek ve yeter şart  $|a_1 + a_3| < 1 + a_2$  ve  $|a_2 - a_1a_3| < 1 + a_3^2$  olmasıdır [20].

Yüksek mertebeden lineer olmayan bir fark sistemi dönüşüm yoluyla lineer fark denkleminde indirgenebilir. Aynı durum sistemler için de geçerlidir.

**Tanım 2.11.**  $i=1,2,\dots,k$  olmak üzere  $x_i(t+1) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), t)$  sistemine birinci mertebeden  $k$  boyutlu fark sistemi denir [6].

**Tanım 2.12.**  $f$  ve  $g$ ;  $x$  ve  $y$  'de kısmi türevlere sahip sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t)$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t)$$

sistemine iki boyutlu birinci mertebeden fark sistemi denir. Bu sistemin lineerleştirilmiş hali  $x_{t+1} = Jx_t$  olmak üzere

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

matrisine Jakobiyan matrisi adı verilir. Buradan  $\det(J - \lambda I) = 0$  denklemi Jakobiyan matrisinin karakteristik denklemi olarak ifade edilir. Farklı bir formda

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Buna göre karakteristik denklem

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

veya

$$\lambda^2 - izJ\lambda + \det J = 0$$

olarak yazılabilir. Bu denklemlerin çözümleri o matrise ait özdeğerleri verir [6].

**Tanım 2.13.**  $f$  fonksiyonu  $x=a$  noktasında her mertebeden türeve sahip olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

şeklindeki açılıma  $f$  fonksiyonunun taylor seri açılımı;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} (x-0)^k = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!} (x-0)^2 + \dots$$

açılımına da Maclaurin seri açılımı denir [20].

## 2.1. Fark ve Sürekli Zaman Modellerinin Tanıtımı

Bu bölümde fark ve sürekli zaman denklemlerine dair bazı örnekler verilecek ve genel bir tanıtım yapılacaktır. Bu denklemlerin davranışlarının incelenmesi matematiksel açıdan büyük bir öneme sahiptir.

Şimdi bir bilimsel hesap makinesi alıp rastgele bir sayı tuşlayalım. Sonra bir fonksiyon tuşuna basalım ve bu işlemi tekrarlayalım. Bu iteratif süreç bir fark dinamik sistem örneğidir. Örneğin bastığımız fonksiyon tuşu üstel fonksiyonsa  $x, e^x, e^{e^x}, \dots$  dizisini elde ederiz. Bu üstel fonksiyonun tekrarlanmasıdır. Eğer bu deneyi tekrar tekrar yaparsak, bu exponensiyel fonksiyonu sonsuza götüren bir iterasyon elde edilir. Bir  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  başlangıç değeriyle verilen dizi yaklaşımı  $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$  şeklindedir. İkinci dereceden en basit fonksiyonlarda bile iterasyonun sonuçları tahmin edilemez ve tuhaf olabilir.  $f(x) = 4x(1-x)$  fonksiyonunu ele alalım. 0 ile 1 arasında rastgele bir sayı seçip iterasyonun sonuçlarını gözleyelim. Farklı  $x$  girişleri için dramatik derecede farklı değerler çıkar. Bazen değerler tekrar ederken, bazen etmez. En sık da bağlı bulunduğu aralıkta amaçsızca dolaşır. Şimdi de  $f(x)=3.839x(1-x)$  için, 0 ile 1 arasından rastgele seçimlerle, değerler 0.149888..., 0.489172... , 0.959299... gibi üç değerden oluşan bir döngü içine yerleşir, bu değerler sürekli tekrarlanır.

Bu fark denklemlerinin temel davranış değişimlerinde olduğu gibi, popülasyon biyologları, belli bir türün popülasyon dinamiklerini uzun vadede gözlemleyerek popülasyonun nüfus davranışıyla ilgilenirler. Gözlemlenen verilerle birlikte deneysel olarak model için parametreleri belirlerler (avcıdan kaçma, gıdaya erişim v.b.). Biyologlar matematiksel modellemeyi popülasyondaki dalgalanmaları tanımlamak için oluştururlar. Bunun için  $P_0$  üyelerinin belli başlangıç nüfuslarına bağlı olarak popülasyonun durumunun ne olduğu ile de ilgilenirler. Burada popülasyon 0'a gitme eğiliminde midir? Yani türler yok mu olacaktır? Yoksa nüfus nihai olarak aşırı kalabalık bir hale mi gelecektir? Ya da popülasyon dalgalanma olmadan periyodik mi yoksa rastgele mi olacaktır? Böylece nüfus biyologlarına tipik dinamik sistem sorusu olarak  $p_0$  bir başlangıç değeri alındığında, popülasyonun uzun vadeli bir davranışını tahmin edebilir miyiz?

Çoğu basit biyolojik fark ve diferansiyel modeller temel kalkülüs derslerinde karşılaşılanlardandır. Mesela exponensiyel büyümedeki diferansiyel denklem sıklıkla karşılaşılan bir modeldir. Bu model tek bir türün büyüme oranına bağlı değişimini verir.

Bu elbette son derece basit bir modeldir. Bu model çevresel faktörler, ölüm oranı v.b. faktörleri dikkate almadığı için kolayca çözülebilen basit bir diferansiyel denklem üretir. O zaman bu diferansiyel denklem  $t$  anındaki popülasyon  $p(t)$  olmak üzere

$$\frac{dp}{dt} = kP$$

şeklinde verilebilir. Bu denklemin  $P_0 = P(0)$  başlangıç şartına bağlı çözümü  $P(t) = P_0 e^{kt}$  olur. Buradan orantı sabiti  $k > 0$  alınırsa  $t \rightarrow \infty$  iken  $P(t) \rightarrow \infty$  olur bu da nüfus patlamasına neden olur. Eğer  $k < 0$  alınırsa  $t \rightarrow \infty$  iken  $P(t) \rightarrow 0$  olur ve nesil yok olur.

Bu prosedür fen bilimlerinde dinamik sistemlerin davranışının belirlenmesinin bir uygulamasını gösterir. Bir popülasyon biyoloğunun çalışma verileri ile matematikçi bir matematiksel model kurar ve bu model üzerinde çözümlerin uzun süreli davranışını analiz eder.

Şimdi  $P_n$ ,  $n$  kuşaktaki popülasyon yoğunluğunu temsil etsin. Basit bir büyüme kuralı olarak bir sonraki kuşağı kendinden önceki kuşak cinsinden ifade etmeye çalışırsak,  $k$  sabit olmak üzere;

$$P_{n+1} = k.P_n$$

şeklinde gösterebiliriz. Buradan

$$P_1 = k.P_0$$

$$P_2 = k.P_1 = k^2 P_0$$

$$P_3 = k.P_2 = k^3 P_0$$

⋮

$$P_n = k.P_{n-1} = k^n P_0$$

elde edilir [29].

$P_n$  çözümüne bağlı olarak popülasyonun nihai kaderi hakkında aşağıdaki durumlara göre karar almak mümkündür [37].

1.  $k > 1$  için  $P_n \rightarrow \infty$  ( $P_n$  dizisi iraksaktır.)
2.  $0 < k < 1$  ise  $P_n \rightarrow 0$  ( $P_n$  dizisi monoton şekilde 0'a yakınsar.)
3.  $k = 1$  ve  $\forall n$  için  $P_n = P_0$  oluyorsa  $P_n$  sabit dizidir.
4.  $-1 < k < 0$  ise  $P_n \rightarrow 0$  ( $P_n$  salınımlı olarak 0'a yakınsar.)
5.  $k = -1$  ise  $P_n$  dizisi belirli iki sabit arasında salınımlıdır.

6.  $k < -1$  ise  $P_n \rightarrow \pm\infty$  ( $P_n$  dizisi salınımlıdır ama genlik giderek büyür.)

Birinci mertebeden verilen fark denklemini  $P_0 = x$  ve  $f(x) = kx$  olmak üzere bir fonksiyon gibi yazacak olursak

$$f(x) = P_1$$

$$f(f(x)) = P_2$$

$$f(f(f(x))) = P_3$$

⋮

eşitlikleri çıkar. Burada popülasyonun nihai davranışı ile iteratif  $f$  fonksiyonunun asimptotik davranışı yakından ilgilidir. Görülür ki kontrolsüz büyüme ve yok olma olmak üzere iki olasılık vardır. Popülasyon biyologları deneyimlerine göre doğadaki durumların bunlardan daha komplike olduğunu söylerler. Gerçek hayatın daha iyi temsil edilmesi amacıyla biyologlar modellere kısıtlamalar yaparlar ya da parametreler eklerler. Farklı bir fark modelinin davranış durumu da benzer bir yaklaşımla açıklayalım. Popülasyonun limiti  $L$  olsun. Çevrenin taşıma kapasitesi de gözönüne alınırsa,  $P(t)$  değeri  $L$  limitini aşar ve popülasyon azalma eğilimine girer. İkinci olarak da  $P(t)$  değeri  $L$  limitine ulaşamazsa bu sefer de limite ulaşana kadar yeterli koşul olduğundan artma eğilimindedir. Bu davranışın basit biyolojik modeli

$$\frac{dP}{dt} = kP(L - P)$$

şeklinde verilebilir. Burada bir önceki modele sadece  $(L-P)$  eklenmiştir. Farzedelim ki  $k > 0$  olsun. Önceki durum popülasyonun sınırsız büyümesine neden olurken şimdi ise

$$P = L, \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

$$P > L, \quad \frac{dP}{dt} < 0$$

$$P < L, \quad \frac{dP}{dt} > 0.$$

durumlarından bahsetmek mümkündür. Burada, popülasyon  $P = L$ ,  $P > L$ ,  $P < L$  durumlarında sırasıyla ya sabit kalır ya azalır ya da artar.

Benzer form, fark modeli olarak

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n)$$

şeklinde verilir. Burada  $k > 0$  'dır.  $P_n = x$  yazılarak da  $f(x) = kx(1-x)$  elde edilir. Böylece yukarıda belirtilen ikinci dereceden fonksiyon için;

$$P_1 = f(x)$$

$$P_2 = f(f(x))$$

$$P_3 = f(f(f(x))) \dots$$

yazılabilir. Böylece popülasyonun kaderini belirlemek için verilen  $k$  sabitinden,  $kx(1-x)$  fonksiyonunun asimptotik davranışını belirlenemez. Bu fonksiyon lojistik fonksiyon olarak bilinir ve onun dinamiği modern matematik araştırmalarının konusudur.

$$P(t) = \frac{LP_0 e^{Lkt}}{L - P_0 + P_0 e^{Lkt}}$$

modeli eksponensiyel büyüme modelinden daha gerçekçidir. Döngüsel davranış ya da başka şekilde dalgalanmalar görülmez. Bununla birlikte benzerleri arasındaki en karmaşık fark denklem modellerinden birini oluşturur. Limit olarak  $L = 1$  alınarak modeli sadeleştirmek mümkündür [29].

$F$ , negatif olmayan değerlerle sürekli bir fonksiyon ve  $k$  pozitif bir sayı olmak üzere

$$x(n+1) = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (2.1)$$

$k$ . mertebeden genel bir fark denklemdir. Bu değişkenlere bağlı bazı fark denklem örnekleri

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{A + x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

$$x_{n+1} = \frac{a + \sum_{i=0}^{k-1} b_i x_{n-i}}{x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

$$x_{n+1} = x_n e^{\frac{a - x_{n-k}}{1 + x_{n-k}}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$x_{n+1} = x_n e^{r(1 - \sum_{i=0}^k a_i x_{n-i})}, \quad n = 0, 1, \dots$$

şeklinde verilebilir [1,2,14,23,28]. Yukarıdaki (2.2) denkleminde  $k = 0$  alındığında optik ve matematiksel biyoloji alanında uygulamalara sahiptir ve literatürde Riccati denklemi adıyla bilinir.  $k=0$  durumundaki davranışı ve periyodik çözümü Brand [33] tarafından incelenmiştir.  $\alpha = 0$  ve  $b > A$  durumu da Pielou [34,35] tarafından incelenmiştir. Burada değinmeden geçmemek gerekir ki birçok çalışmada kullanılan (2.1) genel gecikmeli fark

denkleminde  $k$  pozitif tamsayı olup  $F$  negatif değerler almayan sürekli bir fonksiyondur. Literatür incelendiğinde (2.10) denklemi tek  $\bar{x}$  denge noktasına sahip olması varsayımıyla bu fark denkleminin denge noktasının global kararlılığı ile ilgili çalışmalar mevcuttur [3,8,9,12,16,17,32,38,39,40,41,42].

Denklem (2.3)'ün özel durumları olan aşağıdaki denklemler

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{1}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \\x_{n+1} &= \frac{1+x_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \\x_{n+1} &= \frac{1+x_n+x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{2.4}$$

sırasıyla 2, 5 ve 8 periyotlu pozitif çözümlere sahiptir. (2.4) numaralı denklemleri, Lyness [36] sayılar teorisinde bir problem üzerinde çalışırken keşfetmiştir.  $k \geq 4$  ve  $a = b_1 = b_2 = \dots = b_{k-1} = 1$  iken denklem (2.3)'ün pozitif çözümleri aynı periyotla periyodik olmazlar. (2.2) modeli genetikte genotip seçiminde karşılaştığımız bir denklemdir. Son olarak  $k=0$  için (2.3) modeli değişik uygulamalarda ve fark gecikmeli lojistik modellerde kullanılır.

Dinamik sistem çalışmalarında, verilen fark denkleminin köklerini bulmak kararlılık analizi için önemlidir. Karakteristik polinomun köklerini bulmak o kadar kolay olmayabilir. Fark denklemini çözmeden katsayılarla bağlı olarak çeşitli kararlılık test metotları türetilmiştir [27].

Farklı bir çözüm yolu da uygun nümerik metotlarla yaklaşık çözüm bulmaktır. Pratik uygulamaları olan nümerik metotlardan Newton metodu ile polinomların köklerini bulmak mümkündür.

Şimdi

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

polinomu ele alınırsa, genellikle  $Q'$ 'nin derecesi yüksekse  $Q$ 'nin köklerini bulmak mümkün olmayabilir. Çözüm için yaklaşık kök hesabına dayanan Newton-Raphsen metodu ele alınırsa

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{Q(x_0)}{Q'(x_0)} \\x_2 &= x_1 - \frac{Q(x_1)}{Q'(x_1)}\end{aligned}$$

⋮

$$x_n = x_{n-1} - \frac{Q(x_{n-1})}{Q'(x_{n-1})}$$

yaklaşım seçimi ile,  $x_0$  yakınsamayı sağlayan başlangıç değeri seçimine bağlı olarak,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kökleri elde edilir ve bu iterasyon

$$N(x) = x - \frac{Q(x)}{Q'(x)}, \quad Q'(x) \neq 0$$

genel formuyla yazılabilir [29].

Eğer denklem lineer olmayan bir fark denklemi ise  $\bar{x}$  noktası civarında

$$z_n = x_n - \bar{x} \tag{2.5}$$

$z_n$  dönüşümü yardımıyla, denklemi, lineer bir fark denklemine indirgemek mümkündür. O halde

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= x_{n+1} - \bar{x} \\ &= f(x_n) - \bar{x} \\ &= f(\bar{x} + z_n) - \bar{x} \end{aligned}$$

yazılabilir.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun  $\bar{x}$  de

diferansiyellenebilir olduğunu varsayalım. Böylece  $f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + O(h^2)$  yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= f(\bar{x} + z_n) - \bar{x} \\ &= f(\bar{x} + z_n) - f(\bar{x}) \\ &= z_n f'(\bar{x}) + O(z_n^2) \end{aligned}$$

elde edilir.  $O(z_n^2)$  ifadesi çok küçük olduğundan ihmal edilebilir ki

$$z_{n+1} \approx z_n f'(\bar{x}), \tag{2.6}$$

ifadesine ulaşılır [21].

**Örnek 2.1.1.**  $f(x_n) = x_{n+1} = ax_n + b, (a \neq 1)$  (2.7)

homojen olmayan lineer modeli gözönüne alınsın. Burada  $a$ , sürekli yenilenme hızıdır ve büyüme veya azalma da  $x_n$  ile doğru orantılıdır,  $b$  ise göç sabitidir. Bu fark denklemi bir



popülasyon modeli örneğidir. Buna göre  $x_n$  bir balık popülasyonu olsun,  $a$  yenilenme oranını,  $b$  ise yakalanma kotasını gösterebilir. Denklem (2.7)'nin denge noktası

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \bar{x} \\ \Leftrightarrow a\bar{x} + b &= \bar{x} \\ \Leftrightarrow b &= (1-a)\bar{x} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

### Örnek 2.1.2. (Bir böcek popülasyonu modeli)

Bir kavak yaprağı biti popülasyonunun yaşam modeli örneği aşağıdaki gibidir. Yetişkin yaprak bitleri kavak yaprağında bir ura yerleşir. Bitin bütün (bir nesil) nesli buradadır. Sadece bir kısmı erişkinliğe ulaşana kadar büyür. Popülasyon yemek bulma ve nüfus büyüklüğü gibi çevresel etmenlere bağlıdır, bu son parametreler hayatta kalma için de geçerlidir. Bu etkileri ihmal edip parametreleri sabit farz edelim. Buradaki terimler,

- $a_n$ ,  $n$ . kuşakta bulunan yetişkin anne yaprak biti sayısı
- $p_n$ ,  $n$ . kuşaktaki yavru sayısı
- $m$ , genç yaprak bitlerinin ölüm oranı
- $f$ , erişkin anne başına düşen genç yaprak biti sayısı
- $r$ , anne yaprak bitinin çocuklara oranı şeklinde tanımlanabilir. Başlangıç şartları olan  $a_0$  anne yaprak biti sayısıdır. Şimdi aşağıda yaprak biti popülasyonunun oluşturduğu dizinin denklemi

$$p_{n+1} = fa_n \quad (2.8)$$

şeklindedir, sadece  $l-m$  kadar yavru yetişkinliğe ulaşabilir.  $r$  ise erişkin bireylerin hayatta kalma oranı olur. Buradan,

$$a_{n+1} = r(1-m)p_{n+1} \quad (2.9)$$

yazılabilir. (2.8) ve (2.9) denklemi düzenlenirse;

$$a_{n+1} = fr(1-m)a_n,$$

elde edilir. Bu denklem de birinci dereceden iyi bilinen homojen doğrusal fark denkleminin karşılığıdır. Böylece,

$$a_n = (fr(1-m))^n a_0, \quad (2.10)$$

çözümüne ulaşılır. Biliyoruz ki  $fr(1-m) < 1$  için, popülasyon yok olacaktır.  $fr(1-m)$  ifadesi anne yaprak biti başına düşen erişkinliğe ulaşmış yavru olarak yorumlanabilir [30].

### Örnek 2.1.3. (Kırmızı kan hücresi (R.B.C.) modeli)

Dolaşım sistemimizde bulunan kırmızı kan hücrelerinde sürekli bir doğum-ölüm döngüsü yaşanır. Bu hücreler vücudun farklı organlarına oksijeni taşırlar ve bunların sabit bir uygun değerde tutulması gerekir. Bu modelde  $R_n$ , n. gündeki kırmızı kan hücre sayısını gösterebilir.  $M_n$  ise n. günde kemik iliği tarafından üretilen kırmızı kan hücresi sayısı olsun. Aynı zamanda kan hücrelerinin belli bölümü dalak tarafından günlük üretildiğini varsayalım. Burada eksilen kan hücresi başına yeniden üretilen hücre sayısı  $\beta$  yeniden üretim sabiti olsun [30].

Böylece kırmızı kan hücresi sayısını gösteren popülasyon modeli,

$$\begin{aligned}R_{n+1} &= (1-f)R_n + M_n \\M_{n+1} &= \beta f R_n\end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Bu model lineerleştirilirse,

$$R_{n+1} = (1-f)R_n + \beta f R_{n-1}$$

gecikmeli fark popülasyon modeli oluşturulabilir.

### Örnek 2.1.4. (Bir host-parasitoid modeli)

Son yıllarda özellikle tarımda kullanılan kimyasalların, hem üretilen ürüne hem de diğer canlı ve insanlara verdiği zararlar kaçınılmazdır. Bu kimyasallar yerine, ürüne ya da ortama zarar veren zararlıyla (host) savaşacak organizmalar (parasitoid) üretilerek, biyolojik mücadele yapılmaya çalışılmaktadır. Matematiksel olarak, bu iki türün etkileşimini incelemek için canlıların yaşam modeline ihtiyaç vardır. Bu iki böcek türünü içeren fark zamanlı modelin ilk uygulamalarından biri, 1935 yılında yapılan "Nicholson-Bailey" modelidir. Bu model, "Trialeurodes vaporariorum" adında host türü ile onun parasitoidi olan "Encarsia formosa" türlerinin etkileşimine dayanır. Bunun ardından 1988'de "Edelstein-Keshet" (Nicholson-Bailey modelinin bir türemesine dayalı olan model) ve 1993'de "Hoffman ve Frodshom" (avcı uçan bir böcek türü olan "vedalia beetle" parasitoid türü tanıtan model) farklı host-parasitoid modeller sundular. Canlı yaşamının modellenmesiyle elde edilen sistemin dinamikliğinin incelenmesi daha önce de ifade ettiğimiz gibi matematiksel anlamda kararlılık çalışmasını gerektirir. Böylece zaman içinde iki türün sayısındaki değişimler gözlemlenebilmektedir. Burada türler

beraber yaşamını devam ettirebilir ya da her iki tür yok olabilir. Eğer bu süre içinde bir kaos yaşanmayıp, türler belli bir sayı ile hayatlarını devam ettirebiliyorlarsa, bu model bu noktada kararlıdır. Lokal asimptotik kararlılıkta çözümler denge noktasına yakın başlangıç şartları için denge noktasına yaklaşırken, global asimptotik kararlılıkta çözümler her başlangıç noktası için denge noktasına yaklaşır. Kararlılık, popülasyonun hayatta kalmasını etkileyen göç, insan aktiviteleri, çevre ve türler arasındaki etkileşimi gösteren "Allee etkisi" gibi olası faktörlerden etkilenir [1,2,3,4,5,6,14]. Zararlı böcekleri kontrol etmek için bir biyolojik kontrol faktörü olarak kullanılan parasitoidler, host türünün "pupa" veya "larvalarına" yumurtalarını bırakır. Başarılı bir şekilde parazitlenen hostlar ölürken, parazitler tarafından bırakılan yumurtalar gelecek jenerasyon için hayatta kalabilir. Bir host parazitlendiği zaman tekrar parazitlenmez. Genel bir host-parasitoid modeli

$$N_{t+1} = rN_t(f(N_t, P_t)) \quad (2.11)$$

$$P_{t+1} = eN_t(1 - f(N_t, P_t))$$

formda verilebilir [6,10,11,13,18,19,26]. Modeldeki parametreler aşağıdaki ifadelerle açıklanır.

- $N_t$ ,  $t$ . jenerasyondaki host türlerinin yoğunluğu,
- $P_t$ ,  $t$ . jenerasyondaki parasitoid türlerinin yoğunluğu,
- $r$ , larva, pupa ve yetişkin aşamaları ile hayatta kalan bir host tarafından bırakılan yumurta sayısı,
- $e$ , larva, pupa ve yetişkin aşamaları ile hayatta kalan tek bir host zararlısının üzerine parasitoid tarafından bırakılan yumurta sayısı,
- $f(N_t, P_t)$ , parazitlenmeyen host sayısı olarak verilir.

$N_t$  host jenerasyonu ile  $P_t$  parasitoidlerinin karşılaşma sayısı kütle-hareket yasasını takiple  $aN_tP_t$  olarak ifade edilir. Burada  $a$  sabiti "parasitoidin araştırıcı etkililiği" olarak isimlendirilir. Varolan host'lar ile karşılaşma sayısı

$$P(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

poisson dağılımı ile açıklanır. Ayrıca  $\mu = aP_t$  olmak üzere, hostla parasitoidin ortalama karşılaşma sayısıdır. Bir host, parasitoidle karşılaşmamışsa bu sayı  $P(0)$  ile tanımlanır.

Bu formül  $P(0) = \frac{e^{-\mu} \mu^0}{0!} = e^{-\mu} = e^{-aP_t}$  ile verilir. Bu bilgilere dayanarak  $f(N_t, P_t) = e^{-aP_t}$

olup  $(1 - e^{-aP_t})$  ifadesi hostun parazitoidle en az bir kere karşılaşma durumudur. Bu durumda model (2.11)'e denk olan aşağıdaki modeli yazabiliriz.

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= rN_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} &= eN_t(1 - e^{-aP_t}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Tanım 2.1.1.**  $(N^*, P^*)$  model (2.12)'nin denge noktası olması için;

$$\begin{aligned} N^* &= rN^* e^{-aP^*} \\ P^* &= eN^*(1 - e^{-aP^*}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

**Teorem 2.1.1.** (2.12) modeli  $(0,0)$  ve  $(N^*, P^*)$  olmak üzere iki denge noktasına sahiptir.

**İspat**  $N^* \neq 0$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} N^* &= rN^* e^{-aP^*} \\ \Rightarrow 1 &= r(e^{-aP^*}) \\ \Rightarrow \ln 1 &= \ln r - aP^* \\ \Rightarrow P^* &= \frac{\ln r}{a}, \quad r > 1 \end{aligned}$$

Son ifade model (2.13) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} P^* &= eN^*(1 - e^{-aP^*}) \\ \frac{\ln r}{a} &= eN^*\left(\frac{r-1}{r}\right) \\ \Rightarrow N^* &= \frac{r \ln r}{ae(r-1)}, \quad r > 1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Sonuç olarak  $(N^*, P^*) = \left(\frac{r \ln r}{ae(r-1)}, \frac{\ln r}{a}\right)$  denge noktası bulunur.

**Teorem 2.1.2** (2.12) sisteminin kararlılığı için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- $0 < r < 1$  ise  $(0,0)$  denge noktası karardır.
- $eaN^* e^{-aP^*} (1-r) + re^{-aP^*} < 1$  ve  $earN^* e^{-aP^*} < 1$  ise  $(N^*, P^*)$  denge noktası karardır.

**İspat:** (2.12) sistemine bağlı olarak

$$\begin{aligned} F(N_t, P_t) &= rN_t(e^{-aP_t}) \\ G(N_t, P_t) &= eN_t(1 - e^{-aP_t}) \end{aligned}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda Jakobiyan matrisi oluşturulursa;

$$J(N_t, P_t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial N_t} & \frac{\partial F}{\partial P_t} \\ \frac{\partial G}{\partial N_t} & \frac{\partial G}{\partial P_t} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

**i)** (0,0) denge noktasında değerlendirilen Jakobiyan matrisi,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Verilen modelin istenen noktada kararlı olabilmesi için özdeğerlerin mutlak değerce birden küçük olması gerektiğinden  $\lambda_1 = r$  ,  $\lambda_2 = 0$  olmak üzere  $-1 < r < 1$  yazabiliriz. Dikkat edelim ki  $r > 0$  'dır. O halde  $0 < r < 1$  şartı altında (0,0) denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

**ii)**  $(N^*, P^*)$  noktasında değerlendirilen Jakobiyan matrisi,

$$J(N^*, P^*) = \begin{pmatrix} re^{-aP^*} & -arN^*e^{-aP^*} \\ e(1-e^{-aP^*}) & eaN^*e^{-aP^*} \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Buna göre  $iz(J) = re^{-aP^*} + eaN^*e^{-aP^*}$  ve  $det(J) = earN^*e^{-aP^*}$  yazılabilir.

Jakobiyan matrisinden yararlanarak kararlılık şartını

$$|izJ| < 1 + detJ < 2$$

şeklinde yazabiliriz. Gerekli işlemler yapılırsa  $eaN^*e^{-aP^*}(1-r) + re^{-aP^*} < 1$  ve  $earN^*e^{-aP^*} < 1$  elde edilir[6,7].

### 3. LİTERATÜRDEKİ HOST-PARASİTOİD MODELLERİNİN İNCELENMESİ

#### 3.1. Host-Parasitoid Modelinin Göç Parametresine Bağlı Kararlılık Analizi

Bu kısımda [26] çalışmasında alınan aşağıdaki host-parasitoid modelin

$$N_t = \frac{\lambda N_t}{1 + kN_t} e^{-bP_t} + \beta, \quad \beta \in (1, \infty) \quad (3.1)$$
$$P_t = \alpha N_t (1 - e^{-bP_t})$$

dinamikliği hakkında bilgi verilmiştir.

**Teorem 3.1.1.** *Model (3.1),  $(N^*, 0)$  denge noktasına sahiptir.*

**İspat** Model (3.1)'in denge noktasını  $N_t = N_{t+1} = N^*$  ve  $P_t = P_{t+1} = P^*$  kullanarak elde edilir. Denge noktası tanımından hareketle

$$N^* = \frac{\lambda N^*}{1 + kN^*} e^{-bP^*} + \beta$$
$$P^* = \alpha N^* (1 - e^{-bP^*})$$

yazılabilir.  $(0,0)$  noktasının denge noktası olmadığı görülür. Şimdi,  $N^* \neq 0$  ve  $P^* = 0$  alalım. Burada (3.1) sisteminin ilk denkleminde

$$\lambda = \frac{(1 + kN^*)(N^* - \beta)}{N^*} \quad (3.2)$$

yazılabilir.  $N^* = x$  alınarak

$$f(x) = \frac{(1 + kx)(x - \beta)}{x} \quad (3.3)$$

fonksiyon oluşturulabilir.  $f(x)$  fonksiyonunun türevini alırsak,

$$f'(x) = \frac{(kx^2 + \beta)}{x^2}$$

elde edilir. Eğer  $f'(x) = 0$  ise çözümde  $f(x)$ 'in  $[\beta, \infty)$  aralığında reel kökü yoktur. Böylece  $f$  fonksiyonu kritik noktaya sahip değildir.  $[\beta, \infty)$ , aralığında  $f'(x) > 0$  ve  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  olup (3.2) eşitliği sadece bir çözüme sahiptir.

**Teorem 3.1.2.**  $\beta < N_1^* < \frac{-(1 - \lambda - \beta k) + \sqrt{(1 - \lambda - \beta k)^2 + 4\beta k}}{2k}$  durumunda (3.1) modeli

$(N_1^*, P_1^*)$  denge noktasına sahiptir.

**İspat** (3.1) modelinden  $N_1^* \neq 0, P_1^* \neq 0$  için,

$$N_1^*(1 + kN_1^*e^{-bP_1^*}) = \lambda N_1^*e^{-bP_1^*} + \beta(1 + kN_1^*e^{-bP_1^*})$$

$$\Rightarrow e^{-bP_1^*} = \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*} \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow P_1^* = -\frac{1}{b} \ln \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*} \quad (3.5)$$

elde edilir ve

$$0 < \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*} < 1 \quad (3.6)$$

ise  $P_1^* > 0$  dır. (3.4) ile (3.1)'deki ilk eşitliği birlikte düşünülürse,

$$P_1^* = aN_1^* \left(1 - \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*}\right)$$

yazabiliriz ve  $P_1^*$ , (3.1) eşitliğinde yazılırsa,

$$N_1^* = \frac{\lambda N_1^*}{1 + kN_1^* e^{-abN_1^* \left(1 - \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*}\right)}} e^{-abN_1^* \left(1 - \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*}\right)} + \beta$$

$$\Rightarrow N_1^* (1 + kN_1^* e^{-abN_1^* \left(1 - \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*}\right)})$$

$$= \lambda N_1^* e^{-abN_1^* \left(1 - \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*}\right)} + \beta (1 + kN_1^* e^{-abN_1^* \left(1 - \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*}\right)})$$

$$\lambda = \left(1 - \frac{\beta}{N_1^*}\right) \left(e^{-abN_1^* \left(1 - \frac{N_1^* - \beta}{-kN_1^{*2} + (\lambda + \beta k)N_1^*}\right)} + kN_1^*\right) \quad (3.7)$$

elde edilir. Şimdi  $N_1^* = x$  alalım. (3.7) eşitliğinin sağ tarafını

$$g(x) = \left(1 - \frac{\beta}{x}\right) \left(e^{-abx \left(1 - \frac{x - \beta}{-kx^2 + (\lambda + \beta k)x}\right)} + kx\right) \quad (3.8)$$

şeklinde yazılsın. Eğer  $g(x)$  fonksiyonunun türevi incelenirse, ekstremum nokta olmadığı görülür. Burada,  $g(\beta) = 0$ ,  $g'(\beta) > 0$  ve  $x \rightarrow \infty \Rightarrow g(x) \rightarrow \infty$ . Buradan (3.7) eşitliğinin tek çözümü olduğu elde edilir. Şimdi de (3.6) eşitsizliğini sadeleştirip çözümlürse,

$$\beta < N_1^* < \frac{\lambda + \beta k}{k} \text{ ve } N_1^* < \frac{-(1 - \lambda - \beta k) + \sqrt{(1 - \lambda - \beta k)^2 + 4\beta k}}{2k} \quad (3.9)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca  $\frac{\lambda + \beta k}{k}$  ve  $\frac{-(1 - \lambda - \beta k) + \sqrt{(1 - \lambda - \beta k)^2 + 4\beta k}}{2k}$  ifadeleri

karşılaştırılsın. Farzedelim ki,

$$\frac{\lambda + \beta k}{k} > \frac{-(1 - \lambda - \beta k) + \sqrt{(1 - \lambda - \beta k)^2 + 4\beta k}}{2k} \quad (3.10)$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} 1 + \lambda + \beta k &> \sqrt{(1 - \lambda - \beta k)^2 + 4\beta k} \\ \Leftrightarrow (1 + \lambda + \beta k)^2 &> (1 - \lambda - \beta k)^2 + 4\beta k \\ \Leftrightarrow 4\lambda &> 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

dır.  $\lambda > 0$  olduğu için varsayım doğru olur. Buradan,

$$\beta < N_1^* < \frac{-(1 - \lambda - \beta k) + \sqrt{(1 - \lambda - \beta k)^2 + 4\beta k}}{2k} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) numaralı eşitsizliklerden yola çıkılarak ispat tamamlanır.

**Sonuç 3.1.1.** (3.12) eşitsizliği sağlanmıyorsa  $(N^*, 0)$  tek denge noktasıdır, aksi halde  $(N^*, P^*)$  tek denge noktasıdır.

Şimdi, model (3.1)'in denge noktasının lokal kararlılık şartlarını araştıralım. Öncelikle (3.12) numaralı eşitsizliğin sağlanmadığını varsayalım. Yani  $(N^*, 0)$  tek denge noktasıdır. Model (3.1) için,

$$\begin{aligned} F(N_t, P_t) &= \frac{\lambda N_t}{1 + kN_t e^{-bP_t}} e^{-bP_t} + \beta \\ G(N_t, P_t) &= \alpha N_t (1 - e^{-bP_t}) \end{aligned}$$

fonksiyonlarını oluşturalım. Model (3.1)'in  $(N^*, 0)$  komşuluğunda Jakobiyan matrisi,

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{(1 + kN^*)^2} & \frac{-b\lambda N^*}{(1 + kN^*)^2} \\ 0 & abN^* \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturulur.  $J_1$  matrisinin özdeğerleri  $\sigma_1 = \frac{\lambda}{(1 + kN^*)^2}$ ,  $\sigma_2 = abN^*$ 'dir.  $(N^*, 0)$

noktasının lokal kararlılığı için

$$\frac{\lambda}{(1 + kN^*)^2} < 1 \quad \text{ve} \quad abN^* < 1 \quad (3.13)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Şimdi  $\sigma_1 > 1$  ve  $\sigma_2 > 1$  durumunu gözönüne alalım.

$(N^*, 0)$  kararlı değildir. Şu durumda model (3.1)'in tek denge noktası  $(N_1^*, P_1^*)$  olduğu görülür. O halde,  $(N_1^*, P_1^*)$  komşuluğunda jakobiyan matrisi oluşturulduğunda,



$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda e^{-bP_1^*}}{(1 + kN_1^* e^{-bP_1^*})^2} & \frac{-b\lambda N_1^* e^{-bP_1^*}}{(1 + kN_1^* e^{-bP_1^*})^2} \\ a(1 - e^{-bP_1^*}) & abN_1^* e^{-bP_1^*} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris yardımıyla

$$izJ_2 = \frac{\lambda e^{-bP_1^*}}{(1 + kN_1^* e^{-bP_1^*})^2} + abN_1^* e^{-bP_1^*}$$

$$\det J_2 = \frac{ab\lambda N_1^* e^{-bP_1^*}}{(1 + kN_1^* e^{-bP_1^*})^2}$$

yazılabilir. Eğer,

$$|izJ_2| < 1 + \det J_2 < 2 \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanırsa  $(N_1^*, P_1^*)$  denge noktası lokal kararlı olur. (3.14) durumu kullanılarak  $(N_1^*, P_1^*)$  noktasının lokal kararlılığı için,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda e^{-bP_1^*}}{(1 + kN_1^* e^{-bP_1^*})^2} + abN_1^* e^{-bP_1^*} < 1 \\ \frac{ab\lambda N_1^* e^{-bP_1^*}}{(1 + kN_1^* e^{-bP_1^*})^2} < 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

şartları elde edilir.

**Sonuç 3.1.2.** Eğer (3.12) eşitsizliği sağlanmıyorsa model (3.1),  $(N^*, 0)$  olacak şekilde tek denge noktasına sahiptir ve bu nokta (3.13) şartı altında kararlı olur.

**Sonuç 3.1.3.** Eğer (3.12) eşitsizliği sağlanıyorsa model (3.1),  $(N_1^*, P_1^*)$  olacak tek denge noktasına sahip ve bu nokta (3.15) şartı altında kararlı olur.

### 3.2. Genel Fark-Zamanlı Host-Parazitoid Modelinin Karahlığı Üzerine Allee Etkisi

Bu kısımda, göç parametresine bağlı host-parazitoid modelin, Allee etkisi altında dinamikliği hakkında bilgi verilmiştir [4].

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \alpha x_t f(y_t) + \beta \\ y_{t+1} &= \alpha x_t (1 - f(y_t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

olmak üzere  $\alpha \in (0,1)$ ; büyüme oranı,  $\beta \in (1,\infty)$ ; göç parametresi,  $f(y_t)$ ; parazitlenmemiş host popülasyonunu,  $x_t$  ve  $y_t$  ise sırayla  $t$  anındaki host ve parazitoid popülasyonudur.  $f$  fonksiyonu için varsayımlar ise,

- $y_t \in [0, \infty)$  için  $f'(y_t) < 0$
- $0 < f(x) < \infty$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer (3.16) modelinde host popülasyonuna bir  $I(x_t)$  Allee fonksiyonu eklenirse

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \alpha^* I(x_t) x_t f(y_t) + \beta \\ y_{t+1} &= \alpha x_t (1 - f(y_t)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada,  $\alpha^* = \frac{a}{I(x^-)}$  ( $\alpha^* > 0$ ), host popülasyonunun büyüme oranıdır. Allee

etkisiyle alakalı biyolojik varsayımlar,

- Eğer  $x = 0 \Rightarrow I(x) = 0$  olup burada eşler olmadan çoğalma mümkün değildir.
- $x \in (0, \infty) \Rightarrow I'(x) > 0$  burada ise Allee etkisi azaldıkça popülasyon yoğunluğu artar.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = 1$  burada ise yüksek popülasyon yoğunluğunda Allee etkisi kaybolur.

şeklinde tanımlıdır.

(3.16) modelinde parasitoid popülasyonuna Allee etkisi eklersek

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \alpha x_t f(y_t) + \beta \\ y_{t+1} &= \alpha^* I(x_t) x_t (1 - f(y_t)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha^* = \frac{a}{I(x^-)}$  parasitoid popülasyonunun büyüme oranıdır.

Şimdi (3.16) modelinde hem host hem de parasitoid popülasyonunu Allee etkisi altında düşünülürse

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \alpha^* I(x_t) x_t f(y_t) + \beta \\ y_{t+1} &= \alpha^* I(x_t) x_t (1 - f(y_t)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

model yapısına sahip olunur.  $\alpha^* = \frac{a}{I(x^-)}$  hem host hem de parasitoid popülasyonunun büyüme oranıdır.

Açıktır ki (3.16) modelinin  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktası; aynı zamanda (3.17), (3.18), (3.19) modellerinin de denge noktalarıdır.

Ele alınan modellerin kararlılık analizi için aşağıdaki teoremler geçerlidir.

**Teorem 3.2.1.** Model (3.16)'nın  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktası,

$$\frac{1-af(\bar{y})}{a-1} < a\bar{x}f'(\bar{y}) \text{ ve } \frac{-1}{a} < a\bar{x}f'(\bar{y}) \quad (3.20)$$

eşitsizliğin sağlanması ile lokal kararlı olur.

**Teorem 3.2.2.** Model (3.17)'nin  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktası,  $a\bar{x}\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}f(\bar{y})+af(\bar{y}) > 1$  olmak üzere

$$-\frac{1}{a(1+x\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}-x\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}f(\bar{y}))} < a\bar{x}f'(\bar{y}) < \frac{1-af(\bar{y})-a\bar{x}f(\bar{y})\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}}{a\bar{x}\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}f(\bar{y})+a-1} \quad (3.21)$$

eşitsizliği gerçekleşirse lokal kararlıdır.

**Teorem 3.2.3.** Model (3.18)'in  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktası,  $\alpha f(\bar{y}) - \alpha\bar{x}f'(\bar{y}) > 1$  olmak üzere

$$-\frac{1}{a(1+x\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}-\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}f(\bar{y}))} < a\bar{x}f'(\bar{y}) < \frac{1-af(\bar{y})+a\bar{x}f(\bar{y})}{a(1+x\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}-x\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}f(\bar{y}))} \quad (3.22)$$

eşitsizliği gerçekleşirse lokal kararlıdır.

**Teorem 3.2.4.** Model (3.19)' un  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktası,  $f(\bar{y})(a+a\bar{x}\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}) > 1$  olmak üzere

$$-\frac{1}{a(1+x\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})})} < a\bar{x}f'(\bar{y}) < \frac{1-af(\bar{y})+a\bar{x}\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}f(\bar{y})}{a+a\bar{x}\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}-1} \quad (3.23)$$

eşitsizliği gerçekleşirse lokal kararlıdır.

**Sonuç 3.2.1.**  $a\bar{x}\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}f(\bar{y})+af(\bar{y}) > 1$  şartı altında model (3.16)'nın  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge

noktasının kararlılığı, host popülasyonuna eklenen Allee etisi altında azalır.

**Sonuç 3.2.2.**  $\alpha f(\bar{y}) - \alpha\bar{x}f'(\bar{y}) > 1$  şartı altında model (3.16)'in  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge noktasının kararlılığı, parazitoid popülasyonuna eklenen Allee etkisi altında azalır.

**Sonuç 3.2.3.**  $f(\bar{y})(a + a\bar{x}\frac{I'(\bar{x})}{I(\bar{x})}) > 1$  şartı altında (3.16) modelinin  $(\bar{x}, \bar{y})$  denge

noktasının kararlılığı hem host hem de parazitoid popülasyonunun Allee etkisi altında azalır.

### 3.3. Bir Host-Parasite Modelin Kararlılık Analizi

Bu bölüm, [15] çalışmasının sonuçlarının bir iyileştirmesini sunan host parasite modelinin kararlılık analizi hakkındadır [19]. Doğada av-avcı, host-parazitoid, mutualizm gibi modeller iki popülasyon bağıntısıyla modellenir. Genel formla bu sistem

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f(x_t, y_t) \\y_{t+1} &= g(x_t, y_t)\end{aligned}$$

şeklinde popülasyon değişimini tanımlar. Buradaki modeller birinin yokluğunda diğerinin büyüme oranını ve popülasyonların birbirini etkileme durumlarını inceler. Bu sistem,

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= ax_t + bx_t y_t \\y_{t+1} &= cy_t + dx_t y_t\end{aligned}$$

şeklinde alınabilir. Burada  $a > 1$ ,  $b < 0$ ,  $0 < c < 1$ , ve  $d > 0$  seçimleri yapılırsa model *av-avcı* modelini ifade ederken;  $a, c > 1$  ve  $b, d > 0$  seçimi yapılırsa model *mutualizm* modeli olur ki mutualizmde her iki tür birlikte yaşamayı destekler. Bunlardan farklı bir model daha tanıtmak gerekirse  $A, B > 0$  ve  $x_0, y_0 \geq 0$  olmak üzere, A ve B parametrelerine bağlı olarak

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{Ax_n y_n}{1 + y_n} \\y_{n+1} &= \frac{Bx_n y_n}{1 + x_n}\end{aligned}$$

sistemi verilir. Diğer tanıtılan sistemler gibi bu sistem de bize iki popülasyonun gelecekteki durumu hakkında gerekli bilgiyi verir.

Çalışma  $a, b > 0$  olmak üzere,  $F(H_t) = \frac{R}{(1 + aH_t)^b}$  Hassel büyüme fonksiyonuna

bağlı

$$\begin{aligned}H_{t+1} &= \frac{RH_t}{(1 + H_t)^b} e^{-cP_t} \\P_{t+1} &= H_t(1 - e^{-cP_t}).\end{aligned}\tag{3.24}$$

modelini ele alır.

Öncelikle modelin denge noktaları araştırılmalıdır. Bunun için  $H_{t+1} = H_t = H^*$  ve  $P_{t+1} = P_t = P^*$  olmak üzere denge noktası tanımından,

$$H^* = \frac{RH^*}{(1+H^*)^b} e^{-cP^*}$$

$$P^* = H^*(1 - e^{-cP^*})$$

(0,0) noktasının bu sistemin bir denge noktası olduğu gözlenir. Benzer yolla  $H^* \neq 0$  ve  $P^* = 0$  için  $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$  bir denge noktasıdır.  $H^* \neq 0$  ve  $P^* \neq 0$  için  $(H^*, P^*)$  denge noktasının varlığı, verilen denklemler düzenlenerek araştırıldığında,  $P^* = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right)$  eşitliğine ulaşılır. Burada  $R$  parametresinin durumu, sonuç için önem arz edeceğinden bu parametreye bağlı bir değerlendirme yapılması gerekir.

- $R \leq 1$  olduğu durumu gözönüne alınırsa,  $R^{\frac{1}{b}} - 1 \leq 0$  ve  $\frac{1}{c} \ln\left(\frac{R}{(1+H^*)^b}\right) < 0$  dir.

Dolayısıyla  $R < 1$  durumunda birlikte yaşamının olduğu bir denge noktası vardır.

- $R > 1$  olsun.  $H^* \neq 0$  durumunda,

$$e^{-cP^*} = \frac{(1+H^*)^b}{R}$$

doğru olup ikinci denklemde yerine yazılırsa,  $P^* = H^* \left(1 - \frac{(1+H^*)^b}{R}\right)$

denkleminde ulaşılır. Bu ifade ilk denkleme yerleştirilirse,  $R = (1+H^*)^b e^{cH^* \left(1 - \frac{(1+H^*)^b}{R}\right)}$  eşitliği elde edilir.  $H^*$  değişkenine bağlı olarak bir fonksiyon yazarsak,

$z = F(x) = (1+x)^b e^{cx \left(1 - \frac{(1+x)^b}{R}\right)}$  elde edilir.  $F$  fonksiyonunun grafiğinin  $z = R$  doğrusunu kestiği noktalar denge noktalarıdır. Burada  $F(x) = R$  denkleminin çözümü, gerekli matematiksel işlemlerle  $(H^*, 0)$  ve  $(H^*, P^*)$  şeklinde iki denge noktasının var olduğu

sonucuna ulaşılır.  $x = R^{\frac{1}{b}} - 1$  noktasının da bu denklemi sağladığı açıktır.  $F'(x) = 0$

denkleminde hareketle,  $\frac{R(b+c+cx)}{c(1+x+bx)} = (1+x)^b$  elde edilir.  $x > 0$  için birisi artan diğeri

azalan iki fonksiyondan yola çıkılarak söylenebilir ki tek kesim noktası vardır. Ayrıca  $F(0) = 1$ ,  $F'(0) > 0$ , ve  $x \rightarrow \infty$  için  $F(x) \rightarrow 0$  olduğu görülebilir.

**Teorem 3.3.1.** Verilen (3.24) sisteminde:

a)  $R \leq 1$  durumunda  $(0,0)$  tek denge noktasıdır.

b)  $0 < R \leq (1 + \frac{1}{c})^b$  durumunda  $(0,0)$  ve  $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$  şeklinde iki denge noktası vardır.

c)  $R > (1 + \frac{1}{c})^b$  durumunda  $(0,0)$ ,  $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$  ve  $(H^*, P^*)$  şeklinde üç denge noktası vardır.

Bulunan denge noktalarına bağlı olarak (3.24) sistemin kararlılığını araştıralım.

Verilen sisteminin Jakobiyen matrisi

$$J = \begin{pmatrix} R(1+H-bH)(1+H)^{-1-b}e^{-cP} & -cRH(1+H)^{-b}e^{-cP} \\ 1-e^{-cP} & cHe^{-cP} \end{pmatrix}$$

olup  $(0,0)$  denge noktasında değerlendirilen Jakobiyen matrisi

$$J_{0,0} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Denge noktası için özdeğerler  $\lambda_1 = R$  ve  $\lambda_2 = 0$  bulunur.  $R < 1$  olduğunda  $(0,0)$  denge noktası, lokal asimptotik kararlıdır.

**Teorem 3.3.2.** Verilen sisteminin diğer denge noktası olan  $(R^{\frac{1}{b}} - 1, 0)$

$$\max\left(\frac{c}{c+1}, \frac{b-2}{b}\right) < R^{\frac{1}{b}} < 1$$

şartıyla lokal asimptotik kararlıdır.

### 3.4. Fark Zamanlı Host-Parasitoid Modelinin Global Kararlılığı

Bu kısımda, [18] çalışması incelenmiştir. Bu çalışmada  $\lambda, k > 0$  olmak üzere

$\frac{\lambda N}{1 + kNe^{-bP}}$  büyüme fonksiyonuna bağlı

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \frac{\lambda N_t}{1 + kN_t e^{-bP_t}} e^{-bP_t} \\ P_{t+1} &= \beta N_t (1 - e^{-bP_t}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Beverton-Holt modelinin global kararlılığı çalışılmıştır. Burada,  $N_t$ , t anındaki host popülasyonu,  $P_t$ , t anındaki parazitoid popülasyonu,  $\beta$ , parazitlenen host sayısı olmak üzere, host ile parazitoid arasındaki karşılaşma sayısı  $bN_t P_t$  şeklinde ifade edilir. Poisson dağılımı yardımıyla parazitlenmeden kalan host sayısı  $e^{-bP}$  olarak ifade edilir.  $N_0, P_0 \geq 0$

olmak üzere;  $E_0 = (0,0)$  noktası her zaman çözümdür. Sistemin Jakobiyen matrisi

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\lambda e^{-bP}}{(1+kNe^{-bP})^2} & \frac{-\lambda bNe^{-bP}}{(1+kNe^{-bP})^2} \\ \beta(1-e^{-bP}) & \beta bNe^{-bP} \end{pmatrix} \text{şeklindedir. } E_0 \text{ noktasında değerlendirilen Jakobiyen}$$

matrisi  $J(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dir.  $\lambda < 1$  şartıyla sistem bu denge noktasında lokal asimptotik

kararlı olur. Global asimptotik kararlılık araştırılırsa,

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \frac{\lambda N_t}{1+kN_t e^{-bP_t}} e^{-bP_t} \\ &= \frac{\lambda N_t}{e^{bP_t} + kN_t} \leq \frac{\lambda N_t}{1+kN_t} \leq \lambda N_t \leq N_t, \quad \lambda < 1 \\ N_{t+1} &\leq N_t \end{aligned}$$

yazılacağından,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = 0$  ve buradan da  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = 0$  olup bu iki durumda  $(0,0)$  noktasında global çekicilik vardır. Hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekici olduğundan model  $(0,0)$  noktasında global asimptotik kararlı olur.

Şimdi de  $(N^*, 0)$  denge noktası incelenirse (3.25) sistemi için  $E_1 = (\frac{\lambda-1}{k}, 0)$  noktası

bulunur.  $E_1$  denge noktasında değerlendirilen Jakobiyen matrisi

$$J\left(\frac{\lambda-1}{k}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{-\lambda bNe^{-bP}}{(1+kNe^{-bP})^2} \\ 0 & \beta b \frac{\lambda-1}{k} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.  $E_1$  noktasının lokal asimptotik kararlı olması için  $\beta b \frac{\lambda-1}{k} = \beta b N^*$

ve  $\lambda > 1$  olmalıdır.  $\beta b N^* < 1$  ise  $(N^*, P^*)$  denge noktası yoktur.  $(N^*, P^*)$  için

$$h(P) = \frac{P}{\beta(1-e^{-bP})} \text{ olmak üzere,}$$

$$\lambda = e^{bP} + kh(P)$$

şeklinde tanımlanabilir.  $P > 0$  için  $\lim_{P \rightarrow 0^+} h(P) = \frac{1}{\beta b}$  ve  $h'(P) > 0$  yazılabilir.  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$

olup,

$$\begin{aligned} \frac{\beta b + k}{\beta b} &< \lambda, \\ \beta b N^* &> 1 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri varsa  $P^*$  pozitif bir çözüme sahiptir. O halde bu iki şart altında  $E_1 = (N^*, P^*)$  denge noktası vardır. Sonuç olarak  $\lambda > 1$  ve  $\beta b N^* < 1$  iken  $E_1$  noktası lokal asimptotik kararlıdır ve burada  $(N^*, P^*)$  denge noktası mevcut değildir.  $t \geq 0$  için,

$$N_{t+1} = \frac{\lambda N_t}{e^{bP_t} + kN_t} \leq \frac{\lambda N_t}{1 + kN_t} \text{ ve}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N_t \leq \frac{\lambda - 1}{k}$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.  $\varepsilon > 0$  için  $N_t < \frac{\lambda - 1}{k} + \varepsilon$ ,  $t \geq t_0$  olacak bir  $t_0 > 0$  noktasından bahsedilebilir.  $\beta b N^* < 1$  iken  $\varepsilon > 0$  seçilip

$$\beta b (N^* + \varepsilon) < 1$$

ve

$$P_{t+1} = \beta N_t (1 - e^{-bP_t})$$

$$< \beta (N^* + \varepsilon) (1 - e^{-bP_t})$$

$$\leq \beta b (N^* + \varepsilon) P_t$$

dır. Buradan da  $t \geq t_0$  için  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = 0$  olması gerektiği çıkar.

Sonuç olarak eğer  $N_0 > 0$  ise  $\liminf_{t \rightarrow \infty} N_t \geq \frac{\lambda - 1}{k}$  olur. Böylece  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = N^*$  olup  $E_1$  noktası global asimptotik kararlıdır.

Benzer şekilde  $\lambda > 1$  ve  $\beta b N^* > 1$  durumu alınırsa  $(N_t, P_t)$  denge noktasının global kararlılığı incelenebilir.



#### 4. OLUŞTURULAN BİR HOST-PARAZİTOİD MODELİNİN DİNAMİKLİĞİ

Bu bölümde genel bir host-parazitoid modelinin dinamikliği araştırılmıştır. Aynı zamanda Allee etkisi ve göç parametresinin modelin dinamikliğine etkisi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

$$H_{t+1} = \frac{(1 + ae^b)H_t}{1 + ae^{bH_t}} e^{-cP_t}, \quad a, b, c > 0 \quad (4.1)$$
$$P_{t+1} = H_t(1 - e^{-cP_t}).$$

sistemini alalım. Burada,  $H_t$ ,  $t$  anındaki host popülasyonu,  $P_t$ ,  $t$  anındaki parazitoid popülasyonudur.  $\frac{(1 + ae^b)}{1 + ae^{bH_t}}$ , host popülasyonunun büyüme oranı, Pennycuick ve ark. [43] fonksiyonu ile ilişkilidir.

##### 4.1. Model (4.1)'in Denge Noktaları

Bu bölümde model (4.1)'in denge noktalarını  $H_t = H_{t+1} = H^*$  ve  $P_t = P_{t+1} = P^*$  kullanarak

$$H^* = \frac{(1 + ae^b)H^*}{1 + ae^{bH^*}} e^{-cP^*}, \quad a, b, c > 0 \quad (4.2)$$
$$P^* = H^*(1 - e^{-cP^*}).$$

eşitlikleri elde edilir.

**Teorem 4.1.1.** Model (4.1);  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  ve  $(H^*, P^*)$  denge noktalarına sahiptir.

**İspat**  $(0,0)$  noktasının model (4.1) için denge noktası olduğu açıkça görülüyor. Şimdi  $H^* \neq 0$  ve  $P^* = 0$  alalım. Buradan,

$$H^* = \frac{(1 + ae^b)H^*}{1 + ae^{bH^*}} \quad (4.3)$$

elde edilir.  $H^* = 1$  noktasının (4.3) eşitliğini sağladığını görülür. Buradan  $(1,0)$  noktası model (4.1)'in denge noktası olur. Şimdi de model (4.1)'in  $(H^*, P^*)$  denge noktasının varlığı araştırılırsa;  $H^* \neq 0$  ve  $P^* \neq 0$  alalım. (4.2)'nin birinci eşitliği gözönüne alınarak,

$$H^* = \frac{(1 + ae^b)H^*}{1 + ae^{bH^*}} e^{-cP^*}$$

$$e^{-cP^*} = \frac{1 + ae^{bH^*}}{(1 + ae^b)} \quad (4.4)$$

$$P^* = \frac{-1}{c} \ln \frac{1 + ae^{bH^*}}{(1 + ae^b)} \quad (4.5)$$

yazılabilir. Eğer

$$0 < \frac{1 + ae^{bH^*}}{(1 + ae^b)} < 1 \quad (4.6)$$

eşitsizlik sağlanırsa, (4.5)'den  $P^* > 0$  olur. Buradan da

$$0 < H^* < 1 \quad (4.7)$$

elde edilir. Eğer (4.4) eşitsizliğiyle (4.2) 'nin ikinci denklemi birlikte ele alınır,sa,

$$P^* = H^* \left(1 - \frac{1 + ae^{bH^*}}{(1 + ae^b)}\right)$$

elde ederiz. Eğer  $P^*$ , (4.2)'nin ilk denkleminde yazılırsa,

$$1 + ae^b = (1 + ae^{bH^*}) e^{cH^* \left(1 - \frac{1 + ae^{bH^*}}{(1 + ae^b)}\right)} \quad (4.8)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (4.8)'in sağ tarafından,  $H^* = x$  alarak aşağıdaki fonksiyonu

$$f(x) = (1 + ae^{bx}) e^{cx \left(1 - \frac{1 + ae^{bx}}{(1 + ae^b)}\right)}$$

oluşturulsun. (1,0) noktası model (4.1)'in denge noktası olduğu için, kolaylıkla  $x = 1$ 'in (4.8)'in bir çözümü olduğu görülür. (4.7)'yi düşünerek (4.8) denklemini sağlayan  $x = 1$ 'den başka noktaların varlığını araştırmak için  $f(x)$  fonksiyonunun türevi hesaplanırsa,

$$f'(x) = e^{cx \left(1 - \frac{1 + ae^{bx}}{(1 + ae^b)}\right)} \left[abe^{bx} + (1 + ae^{bx}) \left(\frac{ace^b}{1 + ae^b} - \frac{ace^{bx} + xabce^{bx}}{1 + ae^b}\right)\right]$$

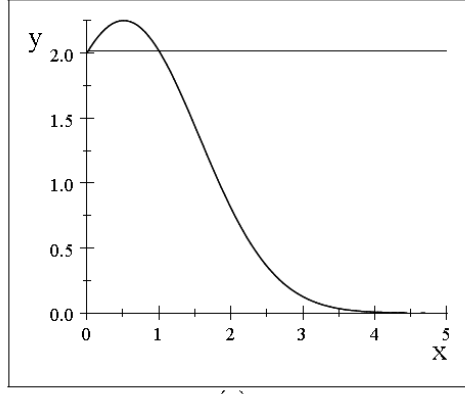
elde edilir.  $f'(x) = 0$  denkleminde;

$$1 = \frac{(1 + abe^{bx})}{abe^{bx}} \left(\frac{ace^{bx} + xabce^{bx} - ace^b}{1 + ae^b}\right) \quad (4.9)$$

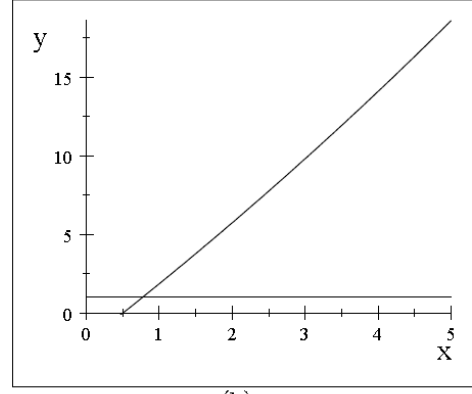
elde edilir. (4.9) denkleminin sağ yanına  $F(x)$  denilirse,  $F(x)$  artan olup ( $x \rightarrow \infty$  için  $F(x) \rightarrow \infty$ ), (4.9) denklemi tek çözüme sahiptir. Ayrıca,  $f(0) = 1 + a$ ,

$f'(0) = ab + \frac{(1 + a)ace^b}{1 + ae^b} > 0$  olup  $f(x)$  bir yerel maksimuma sahiptir. Buradan (4.7)

eşitsizliği gözönüne alınır,sa,  $f'(1) < 0$  sağlanmalıdır. Eğer bu eşitsizlik çözülürse,  $c > 1$  elde edilir.



(a)



(b)

Şekil 4.1.(a):  $a=1$ ,  $b=0.02$  ve  $c=45.161$  için  $(1+ae^b)$  ve  $f$  fonksiyonunun aynı koordinat düzleminde grafiği

4.1.(b):  $a=1$ ,  $b=0.02$  ve  $c=45.161$  değerleri için  $y=1$  doğrusu ve  $F$  fonksiyonunun aynı koordinat düzleminde grafiği

Şekil 4.1.1.(a)'da,  $f(x)$ 'in kritik bir noktaya sahip olduğu kolayca görülüyor. Şekil 4.1.1.(b)'de, (4.9) denklemindeki fonksiyonlar aynı koordinat düzleminde çizilmiş olup, kesişim noktası  $x=0.58208$ 'dir.

**Sonuç 4.1.1.** Model (4.1) için aşağıdaki durumları söyleyebiliriz:

- Eğer  $c \leq 1$  ise, o zaman (4.1) modeli  $(0,0)$  ve  $(1,0)$  ve noktaları denge noktalarına sahiptir.
- Eğer  $c > 1$  ise, o zaman (4.1) modeli  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  ve  $(H^*, P^*)$  denge noktalarına sahiptir.

## 4.2. Model (4.1)'in Kararlılık Analizi

Şimdi (4.1)'in denge noktalarının lokal asimptotik kararlılık şartlarını araştıralım.

**Teorem 4.2.1.** Model (4.1)in denge noktaları için aşağıdaki durumlar doğrudur.

- $(0,0)$  denge noktası lokal asimptotik kararlı değildir.
- Eğer  $2+2ae^b - abe^b > 0$  ve  $c < 1$  ise, o zaman  $(1,0)$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- $c > 1$  ve ek şartlar altında,  $(H^*, P^*)$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

**İspat** Model (4.1)'i gözönüne aldığımızda,

$$F(H_t, P_t) = \frac{(1+ae^b)H_t}{1+ae^{bH_t}} e^{-cP_t}, \quad a, b, c > 0$$

$$G(H_t, P_t) = H_t(1 - e^{-cP_t})$$

yazılabilir. Öncelikle  $c \leq 1$  durumunu gözönüne alalım. Eğer model (4.1)'in  $(0,0)$  komşuluğunda Jakobiyan matrisi,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1+ae^b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

dir.  $J(0,0)$  matrisinin özdeğerleri  $\sigma_1 = 1+ae^b$  ve  $\sigma_2 = 0$ . Böylece,  $(0,0)$  noktası

$$|\sigma_1| < 1 \text{ ve } |\sigma_2| < 1 \quad (4.10)$$

şartları altında lokal asimptotik kararlıdır. Fakat,  $ae^b > 0$  olduğundan  $(0,0)$  denge noktası lokal asimptotik kararlı değildir.

- Benzer şekilde, model (4.1)'in  $(1,0)$  komşuluğunda Jakobiyan matrisi

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{1+ae^b - abe^b}{1+ae^b} & -c \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

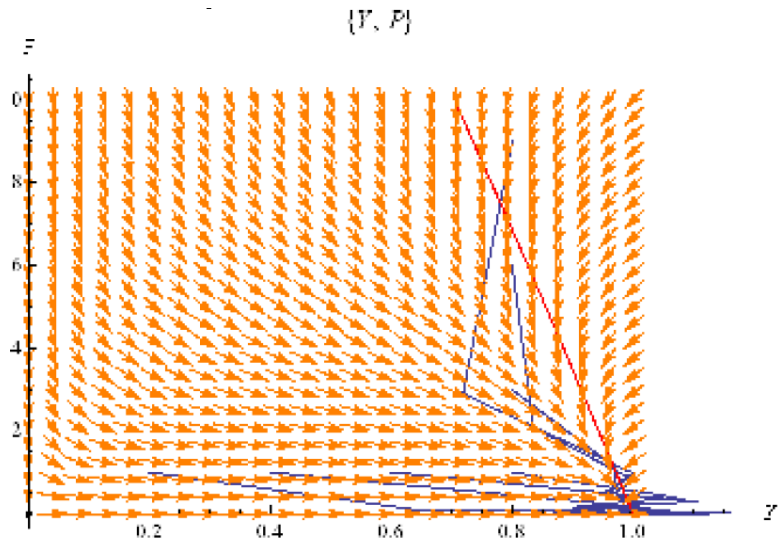
şeklindedir. Buradan  $(1,0)$ , noktasının lokal asimptotik kararlı olması

$$\left| \frac{1+ae^b - abe^b}{1+ae^b} \right| < 1 \text{ ve } |c| < 1 \quad (4.11)$$

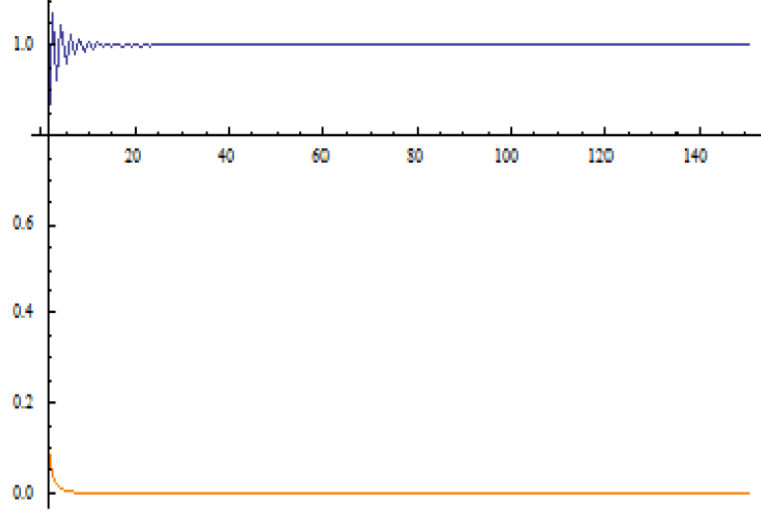
şartına bağlanır. İlk eşitsizlik çözülerek,  $abe^b > 0$  ve  $2+2ae^b - abe^b > 0$  eşitsizliklerini elde edilir.  $abe^b > 0$  ve  $c > 0$  olduğundan,  $(1,0)$  denge noktası

$$c < 1 \text{ ve } 2+2ae^b - abe^b > 0 \quad (4.12)$$

şartı altında lokal asimptotik kararlı olur. Bazı özel değerler için  $(1,0)$  denge noktasının lokal asimptotik kararlılık davranışı aşağıdaki grafikte görülebilir.



(a)



(b)

Şekil 4.2.(a): Model (4.1)'in  $a=1$ ,  $b=2$  ve  $c=0.5$  şartı altında faz diyagramı

4.2.(b): Model (4.1)'in  $a=1$ ,  $b=2$  ve  $c=0.5$  için zaman serisi diyagramı

Burada başlangıç şartları  $H_0 = 0.8$  ve  $P_0 = 0.1$  olarak alınmıştır

Son olarak  $c > 1$  alalım. Jakobiyan matris girişlerini  $(H^*, P^*)$  komşuluğunda değerlendirelim. Buradan,

$$J(H^*, P^*) = \begin{pmatrix} e^{-cP^*} (1 + ae^b) \frac{1 + ae^{bH^*} - abe^{bH^*} H^*}{(1 + abe^{bH^*})^2} & -ce^{-cP^*} \frac{(1 + ae^b)H^*}{1 + abe^{bH^*}} \\ 1 - e^{-cP^*} & cH^* e^{-cP^*} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Determinant ve iz  $J(H^*, P^*)$  tanımından

$$\text{iz} J(H^*, P^*) = e^{-cP^*} (1 + ae^b) \frac{1 + ae^{bH^*} - abe^{bH^*} H^*}{(1 + abe^{bH^*})^2} + cH^* e^{-cP^*}$$

$$\det J(H^*, P^*) = e^{-2cP^*} (1 + ae^b) \frac{(1 + ae^{bH^*} - abe^{bH^*} H^*)}{(1 + abe^{bH^*})^2} cH^* + ce^{-cP^*} \frac{(1 + ae^b)H^*}{(1 + abe^{bH^*})} (1 - e^{-cP^*})$$

yazılabilir. Eğer,

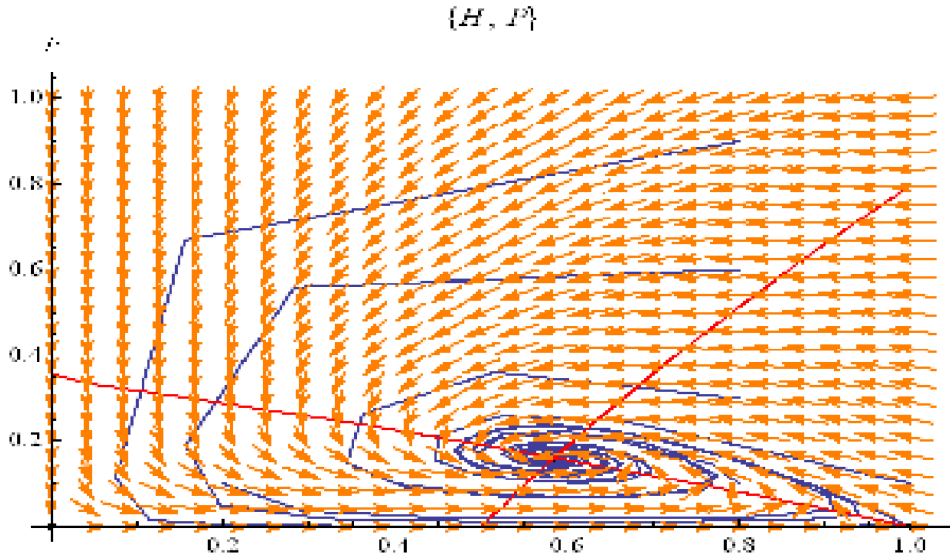
$$|\text{iz} J| < 1 + \det J < 2 \quad (4.13)$$

eşitsizliği sağlanırsa  $(H^*, P^*)$  denge noktası lokal asimptotik kararlı olur [2].

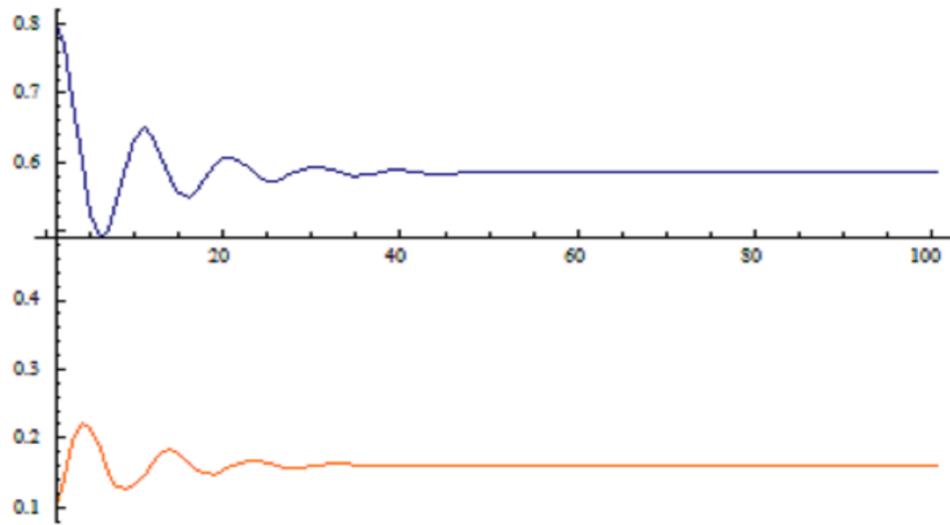
(4.13) eşitsizliği kullanılarak  $c > 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& e^{-cP^*} \left( (1+ae^b) \frac{(1+ae^{bH^*} - abe^{bH^*} H^*)}{(1+abe^{bH^*})^2} \right) (1-e^{-cP^*} cH^*) + e^{-cP^*} cH^* - ce^{-cP^*} \frac{(1+ae^b)H^*}{(1+ae^{bH^*})} (1-e^{-cP^*}) < 1 \\
& e^{-2cP^*} \frac{(1+ae^b)(1+ae^{bH^*} - abe^{bH^*} H^*)}{(1+abe^{bH^*})^2} cH^* + ce^{-cP^*} \left( \frac{(1+ae^b)H^*}{(1+ae^{bH^*})} \right) (1-e^{-cP^*}) < 1 \\
& e^{-cP^*} \frac{(1+ae^b)(1+ae^{bH^*} - abe^{bH^*} H^*)}{(1+abe^{bH^*})^2} (1+e^{-cP^*} cH^*) + e^{-cP^*} cH^* + ce^{-cP^*} \left( \frac{(1+ae^b)H^*}{(1+ae^{bH^*})} \right) (1-e^{-cP^*}) > -1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$(H^*, P^*)$  denge noktasının lokal asimptotik kararlılık şartları elde edilir. Aynı şekilde  $(H^*, P^*)$  denge noktasının davranışı aşağıdaki grafiklerle görülebilir.



(a)



(b)

Şekil 4.3.(a) : Model (4.1)'in  $a=1$ ,  $b=1.1$  ve  $c=2$  koşulu altında faz diyagramı

4.3.(b) : Model (4.1)'in  $a=1$ ,  $b=1.1$  ve  $c=2$  koşulu altında zaman serisi diyagramı

Burada, başlangıç şartları  $H_0 = 0.8$  ve  $P_0 = 0.1$  olarak alınmıştır

**Sonuç 4.2.1.** Eğer  $c \leq 1$  eşitsizliği sağlanırsa, model (4.1);  $(0,0)$  ve  $(1,0)$  denge noktalarına sahip olur.  $(0,0)$  noktası her zaman kararsızdır.  $(1,0)$  denge noktasıysa (4.12) şartı altında tek lokal asimptotik kararlı denge noktasıdır.

**Sonuç 4.2.2.** Eğer  $c > 1$  eşitsizliği sağlanırsa, model (4.1);  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  ve  $(H^*, P^*)$  denge noktalarına sahip olur.  $(H^*, P^*)$  denge noktası (4.14) şartı altında tek lokal asimptotik kararlı denge noktası olur.

### 4.3. Model (4.1)'in Göç Parametresine Bağlı Denge Noktaları

Model (4.1)'in host popülasyonuna,  $\beta$  göç parametresi ekleyerek denge noktalarını araştıracağız. Fark zamanlı host popülasyon modeli

$$H_{t+1} = \frac{(1 + ae^b)H_t}{1 + ae^{bH_t}} e^{-cP_t} + \beta, \quad a, b, c > 0 \quad (4.15)$$
$$P_{t+1} = H_t(1 - e^{-cP_t}).$$

şeklindedir. Burada,  $\beta \in (1, \infty)$  aralığındadır [3,4]. Şimdi model (4.15)'in denge noktalarını hesaplayalım.  $H_t = H_{t+1} = H_1^*$  ve  $P_t = P_{t+1} = P_1^*$  yazımları kullanılarak,

$$H_1^* = \frac{(1 + ae^b)H_1^*}{1 + ae^{bH_1^*}} e^{-cP_1^*} + \beta \quad (4.16)$$
$$P_1^* = H_1^*(1 - e^{-cP_1^*}).$$

elde edilir. O halde, aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 4.3.1.**  $H_1^* > \beta$  olmak üzere eğer  $0 < \frac{(1 + ae^{bH_1^*})(H_1^* - \beta)}{(1 + ae^b)H_1^*} < 1$  durumu

sağlanıyorsa, model (4.15);  $(H_1^*, 0)$  ve  $(H_1^*, P_1^*)$  gibi iki denge noktasına sahip; değilse tek denge noktası  $(H_1^*, 0)$  olur.

**İspat**  $(0,0)$  noktasının denge noktası olmadığı açıkça görülüyor.  $\beta \in (1, \infty)$  ise  $H_1^* \neq 0$  olmalıdır. Şimdi  $H_1^* \neq 0$  ve  $P_1^* = 0$  alalım. (4.16)'da ilk denklemden

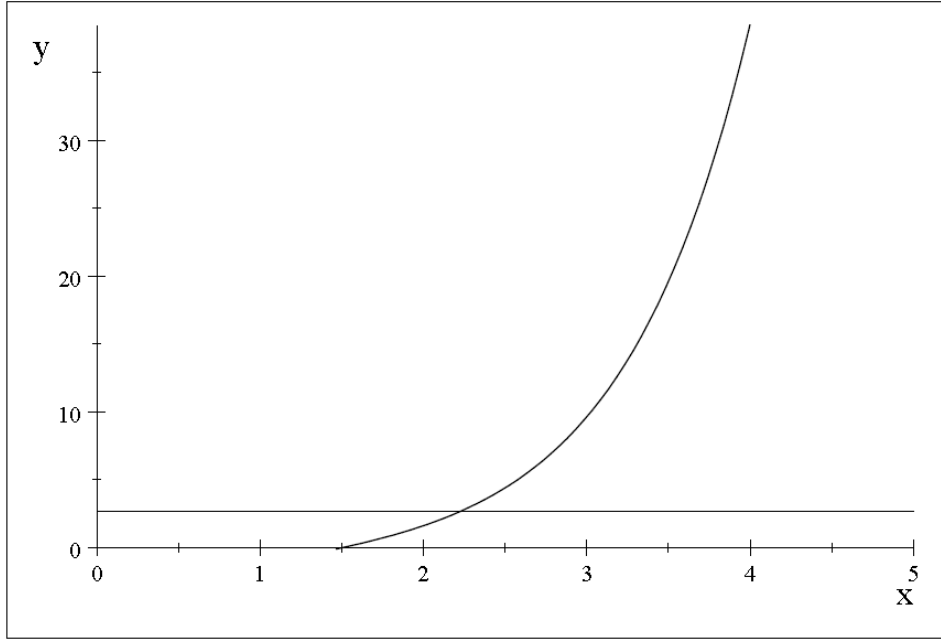
$$H_1^* = \frac{(1 + ae^b)H_1^*}{(1 + ae^{bH_1^*})} + \beta$$

$$\Rightarrow (1 + ae^b) = \frac{(1 + ae^{bH_1^*})(H_1^* - \beta)}{H_1^*}, \quad H_1^* > \beta \quad (4.17)$$

elde edilir. Şimdi de  $H_1^* = x$  seçilirse

$$g(x) = \frac{(1 + ae^{bx})(x - \beta)}{x}, \quad x \neq 0 \quad (4.18)$$

fonksiyonu elde edilir. (4.17)'deki fonksiyonların grafikleri aynı koordinat düzleminde grafikleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 4.4.(a):  $a = 0.5$ ,  $b = 1.2$  ve  $\beta = 1.5$  değerlerine göre  $g$  fonksiyonu ve  $y = (1 + ae^b)$  doğrusunun aynı koordinat düzleminde grafiği

Buradan,  $g(x)$ 'in türeviyle

$$abe^{bx} \left(1 - \frac{\beta}{x}\right) = -\frac{\beta}{x^2} (1 + ae^{bx}) \quad (4.19)$$

eşitliğini elde edilir. (4.19) denkleminin kesim noktası yoktur. Ayrıca,  $x \rightarrow \infty$  için  $g(x) \rightarrow \infty$  olduğunu görülür.  $g(x)$  fonksiyonunun artan olduğu için, (4.17) denklemi  $H_1^*$  gibi bir kesim noktasına sahiptir.

Şimdi de model (4.15)'in  $(H_1^*, P_1^*)$  denge noktasını araştıralım.  $H_1^* \neq 0$ ,  $P_1^* \neq 0$  olmak üzere, (4.15) modeli gözönüne alınırsa,

$$H_1^* = \frac{(1 + ae^b)H_1^*}{1 + ae^{bH_1^*}} e^{-cH_1^*} + \beta$$

$$\Rightarrow (1 + ae^{bH_1^*})(H_1^* - \beta) = (1 + ae^b)H_1^* e^{-cH_1^*}$$



$$e^{-cH_1^*} = \frac{1 + ae^{bH_1^*}}{(1 + ae^b)H_1^*} (H_1^* - \beta) \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow P_1^* = -\frac{1}{c} \ln \frac{1 + ae^{bH_1^*}}{(1 + ae^b)H_1^*} (H_1^* - \beta) \quad (4.21)$$

yazılabilir. (4.21)'de aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa

$$0 < \frac{1 + ae^{bH_1^*}}{(1 + ae^b)H_1^*} (H_1^* - \beta) < 1$$

$P_1^* > 0$  'dır. Buradan,

$$\beta < H_1^*, \quad (1 + ae^{bH_1^*}) \left(1 - \frac{\beta}{H_1^*}\right) < 1 + ae^b \quad (4.22)$$

elde edilir. Şimdi (4.20) eşitliğini (4.15)'in ikinci denklemini beraber düzenlenirse;

$$P_1^* = H_1^* \left(1 - \frac{1 + ae^{bH_1^*}}{(1 + ae^b)H_1^*} (H_1^* - \beta)\right).$$

elde edilir. Şimdi  $P_1^*$ , model (4.15)'in birinci denkleminde yerine yazılırsa;

$$H_1^* = \frac{(1 + ae^b)H_1^*}{1 + ae^{bH_1^*}} e^{-cH_1^* \left(1 - \frac{1 + ae^{bH_1^*}}{(1 + ae^b)H_1^*} (H_1^* - \beta)\right)}$$

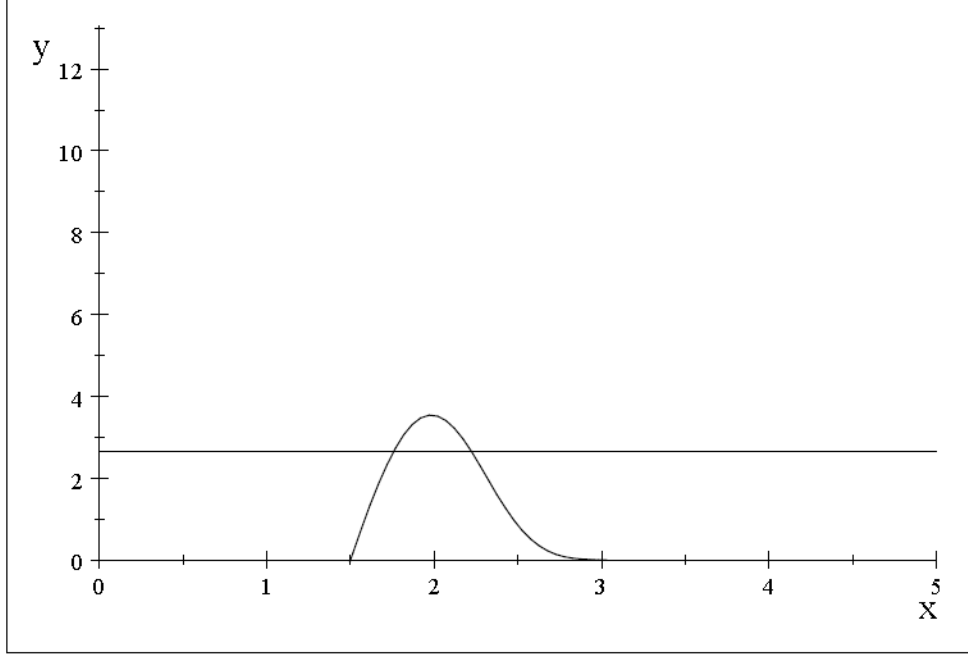
$$\Rightarrow 1 + ae^b = (1 + ae^{bH_1^*}) \left(1 - \frac{\beta}{H_1^*}\right) e^{-cH_1^* \left(1 - \frac{1 + ae^{bH_1^*}}{(1 + ae^b)H_1^*} (H_1^* - \beta)\right)} \quad (4.23)$$

elde edilir. Eğer önceki işlemler tekrarlanırsa, (4.23)'ün iki kesim noktası olduğu görülür.

Benzer işlemlerle (4.23)'ün sağ tarafını kullanarak  $H_1^* = x$  alınırsa,

$$h(x) = (1 + ae^{bx}) \left(1 - \frac{\beta}{x}\right) e^{-cx \left(1 - \frac{1 + ae^{bx}}{(1 + ae^b)x} (x - \beta)\right)}$$

fonksiyonunu yazılabilir. Burada  $x \rightarrow \infty$  için  $h(x) \rightarrow 0$  olduğu görülür.



Şekil 4.4.(b):  $a = 0.5$ ,  $b = 1.2$ ,  $c = 1$  ve  $\beta = 1.5$  durumunda  $(1 + ae^b)$  ve  $h(x)$  fonksiyonun aynı koordinat düzleminde grafiği

#### 4.4. Model (4.1)'in Göç Parametresine Bağlı Kararlılık Analizi

Bu bölümde, (4.15)'in denge noktalarının lokal asimptotik kararlılık şartlarını araştıracağız. Model (4.15)'den,

$$F(H_t, P_t) = \frac{(1 + ae^b)H_t}{1 + ae^{bH_t}} e^{-cP_t} + \beta, \quad a, b, c > 0$$

$$G(H_t, P_t) = H_t(1 - e^{-cP_t}).$$

yazılabilir. Yapılan analizler aşağıdaki teoremde verilmiştir.

**Teorem 4.4.1.** Model (4.15)in denge noktaları için aşağıdaki durumlar doğrudur:

- (a)- Farzedelim ki (4.22) eşitsizliği sağlanmasın. Model (4.15)'in  $(H_1^*, 0)$  denge noktası (4.14) şartı altında lokal asimptotik kararlı olur.
- (b)- Farzedelim ki (4.22) eşitsizliği sağlansın ve  $(H_1^*, 0)$  noktası kararsız olsun. Eğer (4.14) şartı  $(H_1^*, P_1^*)$  tarafından sağlanırsa model (4.15)'in  $(H_1^*, P_1^*)$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

**İspat** (a)-  $(H_1^*, 0)$  denge noktasının model (4.15) için tek denge noktası olduğunu varsayalım.  $(H_1^*, 0)$  komşuluğunda Jakobiyan matris hesaplanırsa,

$$J(H_1^*, 0) = \begin{pmatrix} \frac{(1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*]}{(1+ae^{bH_1^*})^2} & -c \frac{(1+ae^b)H_1^*}{1+ae^{bH_1^*}} \\ 0 & cH_1^* \end{pmatrix}$$

elde edilir.  $J(H_1^*, 0)$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1 = \frac{(1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*]}{(1+ae^{bH_1^*})^2}$  ve

$\lambda_2 = cH_1^*$  olup,

$$\left| \frac{(1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*]}{(1+ae^{bH_1^*})^2} \right| < 1 \text{ ve } |cH_1^*| < 1$$

şartını sağlarsa lokal asimptotik kararlıdır.  $H_1^* > 1$  olduğunu teoremden elde edilir. Son eşitsizlikler kolaylıkla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(1+ae^{bH_1^*})^2 - (1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*] > 0 \quad (4.24)$$

$$(1+ae^{bH_1^*})^2 + (1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*] > 0$$

$$cH_1^* < 1.$$

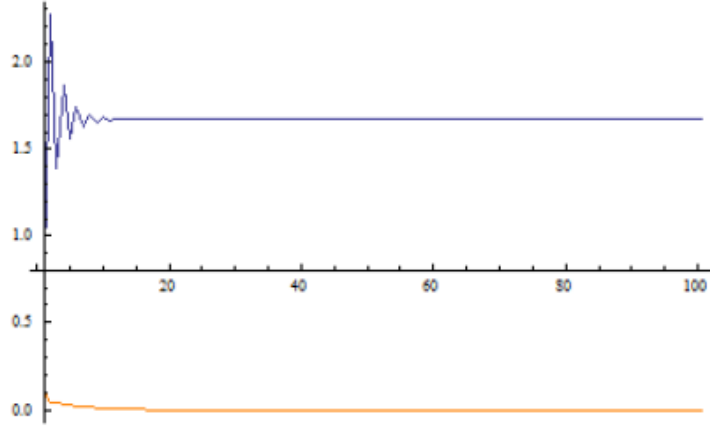
(b)-  $(H_1^*, P_1^*)$  noktası için lokal asimptotik kararlılık şartlarını araştıralım. Model (4.1)'in denge noktası  $(H^*, P^*)$  için lokal asimptotik kararlılık şartları elde edilmişti ve bu şartlar  $(H_1^*, P_1^*)$  denge noktasına uyarlanabilir. Böylece, (4.14)'ün şartları  $(H_1^*, P_1^*)$  için yeniden yazılırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir,

$$e^{-cP_1^*} \left( \frac{(1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*]}{(1+ae^{bH_1^*})^2} \right) (1 - e^{-cP_1^*} cH_1^*) + cH_1^* e^{-cP_1^*} - ce^{-cP_1^*} \frac{(1+ae^b)H_1^*}{(1+ae^{bH_1^*})} (1 - e^{-cP_1^*}) < 1$$

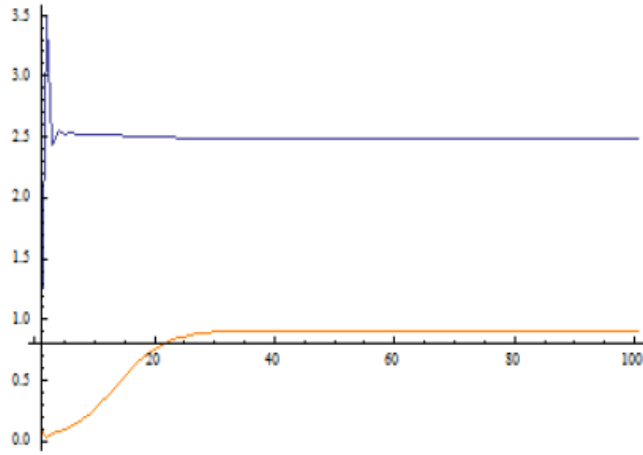
$$e^{-2cP_1^*} \left( \frac{(1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*]}{(1+ae^{bH_1^*})^2} \right) cH_1^* + ce^{-cP_1^*} \frac{(1+ae^b)H_1^*}{(1+ae^{bH_1^*})} (1 - e^{-cP_1^*}) < 1 \quad (4.25)$$

$$e^{-cP_1^*} \left( \frac{(1+ae^b)[(1+ae^{bH_1^*}) - ae^{bH_1^*} H_1^*]}{(1+ae^{bH_1^*})^2} \right) (1 - e^{-cP_1^*} cH_1^*) + cH_1^* e^{-cP_1^*} - ce^{-cP_1^*} \frac{(1+ae^b)H_1^*}{(1+ae^{bH_1^*})} (1 - e^{-cP_1^*}) > -1$$

Bazı özel değerler alınarak, model (4.1)'in zamana bağlı yoğunluk grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 4.5.(a) Model (4.1)'in  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=0.5$  ve  $\beta=1.2$  için zaman serisi diyagramı

4.5.(b) Model (4.1)'in  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=0.5$  ve  $\beta=2.4$  için zaman serisi diyagramı

Burada başlangıç şartları  $H_0 = 0.8$  ve  $P_0 = 0.1$  alınmıştır

**Sonuç 4.4.1.** Model (4.1)'in  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  ve  $(H^*, P^*)$  denge noktaları göç parametresi altında kaybolur. (4.22) eşitsizliği sağlanmadığında  $(H_1^*, 0)$  denge noktası Model (4.15)'in tek denge noktası olur ve bu nokta (4.24) şartı altında lokal asimptotik kararlı olur. Aksi takdirde Model (4.15)  $(H_1^*, 0)$  ve  $(H_1^*, P_1^*)$  denge noktalarına sahip olur. Eğer  $(H_1^*, 0)$  kararsız ise,  $(H_1^*, P_1^*)$  denge noktası (4.25) altında lokal asimptotik kararlı olur.

#### 4.5. Model (4.1)'in Allee Etkisi Altında Kararlılık Analizi

Model (4.1)'in Allee etkisi  $\alpha(H_t)$  altında host popülasyonunun denge noktalarını araştıralım. Genel fark zamanlı host popülasyonu modeli

$$H_{t+1,a} = \frac{a^* H_t}{1 + ae^{bH_t}} e^{-cP_t} a(H_t), \quad a, b, c > 0 \quad (4.26)$$

$$P_{t+1} = H_t(1 - e^{-cP_t}).$$

şeklindedir. Burada  $\alpha(H_t) > 0$  olmak üzere  $a^* = \frac{(1 + ae^b)}{\alpha(H^*)}$  normalize edilmiş büyüme oranı etkisidir. Böylece, model (4.1) ile model (4.26)'nın aynı denge noktalarına sahip olduğu açıkça görülmektedir.

**Teorem 4.5.1.** (0,0) model (4.26)'nın tek lokal asimptotik kararlı denge noktasıdır.

**İspat** Model (4.26)'nın Jakobiyan matris girişleri

$$J_{11,a} = \frac{a^* e^{-cP_t} H_t}{(1 + ae^{bH_t})^2} \left( (a(H_t) + a'(H_t)H_t)(1 + ae^{-bP_t}) - abe^{bH_t} \alpha(H_t)H_t \right) \quad (4.27)$$

$$J_{12,a} = -a^* ce^{-cP_t} \frac{H_t a(H_t)}{1 + ae^{bH_t}}$$

$$J_{21,a} = 1 - e^{-cP_t}$$

$$J_{22,a} = cH_t e^{-cP_t}$$

şeklindedir. Model (4.26)'nın (1,0) denge noktası civarında Jakobiyan matrisi

$$J_{(1,0)a} = \begin{pmatrix} \frac{a^*}{(1 + ae^b)^2} \left( (a(1) + a'(1))(1 + ae^{-b}) - abe^b \alpha(1) \right) & \frac{a^* a(1)}{(1 + ae^b)} \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Sonuç olarak,  $\lambda_{1,a} = \frac{a^*}{(1 + ae^b)^2} \left( (a(1) + a'(1))(1 + ae^{-b}) - abe^b \alpha(1) \right)$  ve

$\lambda_{2,a} = c$  bulunur. (1,0) denge noktası  $\left| \frac{a^*}{(1 + ae^b)^2} \left( (a(1) + a'(1))(1 + ae^{-b}) - abe^b \alpha(1) \right) \right| < 1$

ve  $|c| < 1$  şartı altında kararlı olur. (4.27) kullanılarak, model (4.26)'nın  $(H^*, P^*)$  civarında Jakobiyan matris girişleri aşağıdaki gibidir.

$$J_{11,a} = \frac{a^* e^{-cP^*}}{(1 + ae^{bH^*})^2} \left( (a(H^*) + a'(H^*)H^*)(1 + ae^{-bH^*}) - abe^{bH^*} \alpha(H^*)H^* \right)$$

$$J_{12,a} = \frac{-a^* ce^{-cP^*} H^* a(H^*)}{1 + ae^{bH^*}}$$

$$J_{21,a} = 1 - e^{-cP^*}$$

$$J_{22,a} = cH^* e^{-cP^*}$$

$iz\left(J_{a(H^*, P^*)}\right)$  ve determinant tanımından

$$iz\left(J_{a(H^*, P^*)}\right) = \left| \frac{a^* e^{-cP^*}}{(1+ae^{bH^*})^2} \left( (a(H^*) + a'(H^*)H^*)(1+ae^{-bH^*}) - abe^{bH^*} \alpha(H^*)H^* + cH^* e^{-cP^*} \right) \right|$$

$$\det\left(J_{a(H^*, P^*)}\right) = \frac{a^* e^{-2cP^*} cH^*}{(1+ae^{bH^*})^2} \left( (a(H^*) + a'(H^*)H^*)(1+ae^{-bH^*}) - abe^{bH^*} \alpha(H^*)H^* \right) + a^* ce^{-cP^*} \frac{H^* a(H^*)}{(1+ae^{bH^*})} (1-e^{-cP^*})$$

elde edilir. (4.13) eşitsizliği'nden

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a^* e^{-cP^*}}{(1+ae^{bH^*})^2} \left( (a(H^*) + a'(H^*)H^*)(1+ae^{-bH^*}) - abe^{bH^*} \alpha(H^*)H^* + cH^* e^{-cP^*} \right) \right| \\ & < 1 + \frac{a^* e^{-2cP^*} cH^*}{(1+ae^{bH^*})^2} \left( (a(H^*) + a'(H^*)H^*)(1+ae^{-bH^*}) - abe^{bH^*} \alpha(H^*)H^* \right) \quad (4.29) \\ & + a^* ce^{-cP^*} \frac{H^* a(H^*)}{(1+ae^{bH^*})} (1-e^{-cP^*}) < 2. \end{aligned}$$

$(H^*, P^*)$  denge noktasının kararlılık şartlarına ulaşırız. Benzer şekilde, model (4.26)'nın  $(0,0)$  denge noktası civarında Jakobiyan matrisi

$$J_{a(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

şeklindedir.  $(0,0)$  noktası tüm durumlarda lokal asimptotik kararlı olur. Şimdi  $(0,0)$  denge noktasının global asimptotik kararlı olup olmadığını araştıralım. Bunun için  $(0,0)$  denge noktasının global çekiciliği araştırmalıyız. O halde,  $\lim_{t \rightarrow \infty} H_t = 0$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = 0$  sağlanmalıdır. Model (4.26)'nın ilk denklemini göz önüne alınırsa,

$$H_{t+1} = \frac{(1+ae^b)H_t e^{-cP_t}}{1+ae^{bH_t}} < \frac{(1+ae^{bH_t})H_t e^{-cP_t}}{1+ae^{bH_t}} < \frac{H_t}{e^{P_t}} < H_t.$$

$H_{t+1} < H_t$  olup  $H_t$  azalandır. O halde  $\lim_{t \rightarrow \infty} H_t = 0$  sonucuna varırız. Model (4.26)'nın

ikinci denklemindeki  $(1-e^{-cP_t})$  fonksiyonuna denk olan  $\frac{e^{cP_t} - 1}{e^{cP_t}}$  yazılırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} H_t (1 - e^{-cP_t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} H_t \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-cP_t}) = 0$$

Sonuç olarak,  $(0,0)$  denge noktası, global çekiciliğe sahiptir.

**Sonuç 4.5.1.** Model (4.1) Allee etkisi ile ve Allee etkisiz aynı denge noktalarına sahiptir.  $(1,0)$  ve  $(H^*, P^*)$  denge noktaları Allee etkisi altında kararsız hale gelirken,  $(0,0)$  denge noktası ise global asimptotik kararlı olur. Böylece, model (4.1)'de  $(0,0)$  denge noktası Allee etkisi altında tek global asimptotik kararlı denge noktası olur.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle fark ve diferansiyel modeller hakkında bir tanıtım yapılmış olup, gereken tanım, teorem ve özellikler verilmiştir. Özellikle host-parasitoid modeller olmak üzere fark zamanlı sistem modelleri tanıtılmıştır. Konu ile ilgili daha önce çalışılmış modellerin denge noktaları incelenmiş ve bulunan denge noktalarına bağlı olarak lokal ve global kararlılık analizleri hakkında bilgi verilmiştir. Son kısım tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturmuştur. Bu bölümde oluşturulan host-parasitoid modelinin dinamiği incelenmiş olup, hem Allee faktörünün hem de göç parametresinin modelin dinamiğine etkisi incelenmiştir. Çalışmanın analizinde elde edilen teorik sonuçlar nümerik simülasyonlar ile doğrulanmıştır. Nümerik simülasyonlar için scientific workplace ve mathematica kodları yardımıyla [22], mathematica programı kullanılmıştır.



## KAYNAKLAR

- [1] Ak Gümüş Ö., Köse H., (2012). On the stability of delay population dynamics related with Allee effects, *Math. and Comput. Appl.*,17(1): 56-67.
- [2] Ak Gümüş Ö., Köse H., (2012). Allee effect on a new delay population model and stability analysis, *Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications*, 7: 21-31.
- [3] Ak Gümüş Ö., (2014). Global and local stability analysis in a nonlinear discrete-time population model, *Advances in Difference Equations*, 299: 2-9.
- [4] Ak Gümüş Ö., Kangalgil F., (2015). Allee effect and stability in a discrete-time host-parasitoid model, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, 7: 1-6.
- [5] Allee W. C., (1931). *Animal Aggregations: A Study in General Sociology*, University of Chicago Press, Chicago.
- [6] Allen L.J.S., (2007). *An introduction to Mathematical Biology*, Pearson, New Jersey.
- [7] Elaydi S., (2006). *An introduction to Difference Equations*, Springer, New York.
- [8] Bartha F.A. , Garab A., Krisztin T., (2013). Local stability implies global stability for the 2-dimensional Ricker map, *Journal of Difference Equations and Applications*, 19: 1-35.
- [9] Cull P., (1981). Global stability of population models, *Bull. Math. Biol.*, 43: 47–58.
- [10] Qureshi M. N., Khan A., Q., and Din Q., (2014). Asymptotic behavior of a Nicholson-Bailey model, *Advances in Difference Equation*, 62 (1): 2-11.
- [11] Kaitala V., Ylikarjula J. and Heino M., (1999). Dynamic Complexities in Host-Parasitoid Interaction, *J. Theor. Biol.*, 197: 331-341.
- [12] Liz E, (2007). A sharp global stability result for a discrete population model, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 330 (1): 740-743.
- [13] May R.M., Hassell M.P., Anderson R. M., and Tonkyn D.W., (1981). Density dependence in host-parasitoid models, *Journal of Animal Ecology*, 50: 855-865.
- [14] Merdan H., Ak Gümüş Ö., (2012). Stability analysis of a general discrete-time population model involving delay and Allee effect, *Applied Math. and Comput.*, 219: 1821-1832.
- [15] Misra J. C., Mitra A, (2006). Instabilities in single species and host parasite systems: period doubling bifurcations and chaos, *Comput. Math. Appl.* 52: 525-538.
- [16] Muroya Y., Ishiwata E., Guglielmi N., (2009). New global stability conditions for a class of difference equations, *Frontiers of Mathematics in China*, 4 (1): 131-154.

- [17] Pounder J.R., Rogers T.D., (1982). Global stability in population models, *Math. Model.*, 3(3): 207-214.
- [18] Sophia R., Jang J. and Yu. J.L., (2006). A Discrete-time host-parasitoid model, Hindawi Publishing Corporation, *Proceedings of the Conference on Differential & Difference Equation and Applications*, 452-454.
- [19] Ufuktepe Ü., Kapçak S., (2013). Stability analysis of a host parasite model, *Advances in Difference Equations*: 79 (1), 2-7.
- [20] Ak Gümüş Ö., (2011). Kararlılık üzerine Allee etkisi, Doktora tezi, Selçuk Üniv., Konya.
- [21] Erdoğan Karaoğlu E., (2011). Allee etkisi altında bir genel fark denkleminin kararlılık analizi, Yüksek Lisans Tezi, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniv., Ankara.
- [22] Kapçak S., (2013). Av-Avcı modellerinin Allee etkisi altında kararlılığı ve çatallanması, Doktora tezi, İzmir Ekonomi Üniv., İzmir.
- [23] Cunningham K., Kulenovic MRS, Ladas G., Valicenti SV., (2001). On the recursive sequences, *Nonlinear Anal.*, 47: 4603-4614.
- [24] Dennis D. B. and Blanchard P., (1992). *Calculus*, HBJ/Saunders College Publish, America.
- [25] Thomas G.B., Finney R.L., (1995). *Calculus and analytic geometry* 9th edition, Addison wesley publishing, New York.
- [26] Ak Gümüş Ö., (2015). Dynamical Consequences and Stability Analysis of a New Host-Parasitoid Model, *Gen. Math. Notes*, 27 (1): 9-15
- [27] Ak Ö., (2005). Skaler denklemlerin kararlılığı üzerine metotlar, T.C. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- [28] Kocic V. L., Ladas G., (1993). *Mathematics and its application*, Kingston.
- [29] Devaney R., (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems* second edition, Addison-wesley publishing company, Boston.
- [30] Edelstein-Keshet L., (2005). *Mathematical models in biology*, University of British Columbia, Vancouver.
- [31] Kuttler C., (2009). *Mathematical models in biology*, Springer publishing company, Berlin
- [32] Kocic V.L. ve Ladas G., (1993). *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer Academic Publisher, Rhoe island.
- [33] Brand L., (1995). A sequence defined by a difference equation, *Amer. Math.*, 62:489-492.

- [34] Pielou E. C., (1969). An introduction to Mathematical ecology, Wiley Interscience, New York.
- [35] Pielou E. C., (1974). Population and Community Ecology, Gordon and Breach, New York.
- [36] Lyness, R. C., Note (1942). 1581. Math. Gaz., 26: 62.
- [37] Bereketoğlu H., Kutay V., (2012). Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, Ankara.
- [38] Nenyay, O. I., Tkachenko, V., I., Trofymchuk, S., I., (2004). On the global stability of one nonlinear difference equation, Nonlinear Oscillation, 7: 473-480.
- [39] Eduardo, L., Ferreira, J., B., (2002). A note on the global stability of generalized difference equation, Applied Mathematics Letters, 15: 655-659.
- [40] Eduardo, L., (2007). Local stability implies global stability in some one-dimensional discrete single-species models, Discrete and continuous dynamical systems-series B, 7: 191-199.
- [41] Eduardo, L., Tkachenko, V., Trofymchuk, S., (2006). Global stability in discrete population models with delayed-density dependence, Mathematical biosciences, 199: 26-37.
- [42] Kocic V. L., Ladas G., (1992). Global attractivity in nonlinear delay difference equations, proceedings of the american mathematical society, 115 (4): 1083-1088.
- [43] Pennycuik C. J., Compton R. M., ve Beckingham A., (1968). A Computer Model for Simulating the Growth of a Population, or of Two Interacting Populations, Journal of Theoretical Biology, 18, 316-329.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bekir Sıtkı BİLGİ

Doğum Yeri : Gaziantep

Doğum Tarihi : 21/08/1984

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Mimar Sinan Lisesi 2002

Lisans : Yüzüncü Yıl Üniversitesi 2007

Yüksek Lisans: Adıyaman Üniversitesi 2016

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : M.E.B; Matematik öğretmeni, 2008-