T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEOMETRİK-ARİTMETİK KONVEKS VE GEOMETRİK-GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

KÜBRA YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK-ARİTMETİK KONVEKS VE GEOMETRİK-GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

KÜBRA YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 13/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
BAŞKAN

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
ÜYE

Yrd. Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ
DANIŞMAN

Prof. Dr. Ramazan GÜRBÜZ
Enstitü Müdürü

Bu çalışma Adıyaman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.
Proje No: -

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

GEOMETRİK-ARİTMETİK KONVEKS VE GEOMETRİK-GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Kübra YILDIZ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ
Yıl : 2017 - Sayfa Sayısı : vi+60

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
: Yrd. Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ

Bu tezin birinci bölümünde konveks fonksiyon ve eşitsizlik tarihi ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konveks fonksiyon, ortalama fonksiyonu ve temel bazı eşitsizlikler tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde literatürde mevcut olan lemmalar yardımıyla elde edilmiş Hermite–Hadamard tipli eşitsizliklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise tanımlanan yeni lemmalar yardımıyla ve temel eşitsizliklerin kullanılmasıyla özel ortalamalara bağlı konveks fonksiyonlar ile ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bulunan bu eşitsizlikler Hermite–Hadamard tipinde eşitsizlik içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyon, Ortalama fonksiyonu, özel ortalamalar, Hölder eşitsizliği, power-mean eşitsizliği.

ABSTRACT
MSc THESIS

INTEGRAL INEQUALITIES FOR GEOMETRIC-ARITHMETIC CONVEX AND GEOMETRIC-GEOMETRIC CONVEX FUNCTION CLASSES

Kübra YILDIZ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Merve AVCI ARDIÇ

Year : 2017 - Number of Pages : vi+60

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
: Asst. Prof. Dr. Merve AVCI ARDIÇ

In the first chapter of the this thesis, some information on convex function and inequality history is given. In the second chapter convex function, mean function and some basic inequalities are introduced. In the third chapter Hermite – Hadamard type inequalities are given by using the lemmas in the literatüre. In the fourth chapter new inequalities releted to convex functions due to special means are obtained by using the new defined lemmas and using the fundamental inequalities. These found inequalities contain Hermite – Hadamard type inequalities.

Key Words : Convex funcion, mean function, special means, Hölder inequality, power-mean inequality.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında geniş bilgi birikimiyle benden desteğini esirgemeyen, her zaman yol gösterici olan ve karşılaşılan zorlukların üstesinden gelinmesinde bana yardımcı olan sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ' a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan ve benden hiçbir fedakarlığı esirgemeyen değerli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Kübra YILDIZ

Ocak - 2017

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

SİMGELER DİZİNİ

$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$' de bir aralık
I°	: I' nın içi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
$\leq$	: Küçük veya Eşittir
$\geq$	: Büyük veya Eşittir
$\in$	: Elemanıdır
$\subseteq$	: Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	: Kapsar veya Eşit
$\cap$	: Kesişim
$\cup$	: Birleşim

1.GİRİŞ

Matematikte “eşitsizlik“ kelimesi iki farklı miktar arasında farklılığı ifade eder ve bu iki miktar arasında oran kurmak için kullanılır. Modern matematikte eşitsizlik her alanda önemli bir rol oynamaktadır. Fizik, mühendislik gibi birçok bilimsel alanda eşitsizlik sayesinde birçok yeni uygulamalar ortaya çıkmıştır. Bu sayede birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir ve diğer bilim dallarıyla ilişkili olarak günümüze kadar gelmiştir. Eşitsizlik alanında en önemli eserlerden biri 1934 yılında Hardy, Littlewod ve Polya tarafından yazılan “Inequalities“ adlı kitaptır.

Konvekslik geometride temel bir kavram olmasının yanı sıra diğer alanlarda da genişçe kullanılmaktadır. Fonksiyonel analiz, grafik teorisi, olasılık teorisi ve daha birçok alanda konvekslik önemli bir rol oynamaktadır. Konveksliğin ilk temelleri Yunan filozoflar tarafından atılmasına rağmen kökeni Mısır zamanına kadar dayanmaktadır. Yunanlıların matematiğe en önemli katkılarından biri de Euclid’in “Elements” adlı kitabıdır. Konvekslikle alakalı ilk ifade ve gösterimler bu kitapta bulunmaktadır. Konvekslikle alakalı daha kesin bir tanımı Archimedes’in “On The Sphere and Cylinder” adlı eserinde bulmak mümkündür (Dwilewicz 2009).

Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramı beraber göz önünde bulundurularak birçok çalışma ve integral eşitsizlik elde edilmiştir. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite’in (1822 - 1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği konveks fonksiyonlar için Hermite – Hadamard eşitsizliğidir.

Eşitsizlik üzerine yapılan çalışmalar yeni eşitsizlikler keşfetmek ve var olan klasik yaklaşımları güçlendirmeye dayanmaktadır. Modern eşitsizlik teorisi matematikte önemini yitirmeden derin temellere dayalı bir alan olarak gelişmektedir ve hala araştırmalarda önemli bir yer tutarak sonsuz bir branş olarak matematikte yer almaya devam etmektedir.

Literatürde konveks fonksiyon ve eşitsizlik kavramları üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarla ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar Set (2010); Alomari (2011); Kavurmacı (2011); Özdemir (2011); Akdemir (2012); Kavurmacı (2012); Avcı-Ardıç (2013) Özdemir (2013); Ekinci (2014); Yaldız (2014); Set (2014); Yıldız (2014); Set (2015); Yıldız (2015); Latif (2015); Barani (2015); Sarıkaya (2015); Erden (2015); Gökçe (2015); İşcan (2015); Dragomir (2015); Sarıkaya (2015); Akdemir

(2015); Avcı-Ardıç (2016); Dragomir (2016); Erdem (2016); Turhan (2016); Yaldız (2016) ve Özdemir *et al* (2016) çalışmalarında rastlamak mümkündür.

Sunulan bu tezde konveks fonksiyon sınıflarından olan GA-konveks ve GG-konveks fonksiyon sınıfları detaylı olarak incelenmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teoremler ve ayrıca reel sayıların özel ortalamalarına ilişkin bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bu konveks fonksiyon sınıfları için yazılmış bazı temel Hermite–Hadamard tipli eşitsizlikler tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde ise çalışmalar sonucu elde edilen lemmalardan faydalanılarak GA-konveks ve GG-konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Bulunan bu eşitsizlikler Hermite – Hadamard tipli eşitsizliklerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu bölümde çalışma süresince kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.
$+: L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) $L, +$işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

$G1$. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

$G2$. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

$G4$. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

$G5$. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B)$x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

$L1$. $\alpha. x \in L$ dir,

$L2$. $\alpha.(x + y) = \alpha. x + \alpha. y$ dir,

$L3$. $(\alpha + \beta). x = \alpha. x + \beta. x$ dir,

$L4$. $(\alpha\beta). x = \alpha.(\beta. x)$ dir,

$L5$. $1. x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

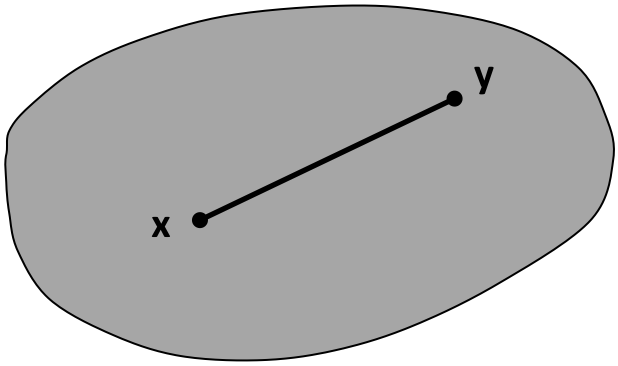
$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir (Anton 1994).

Tanım 2.1.2. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

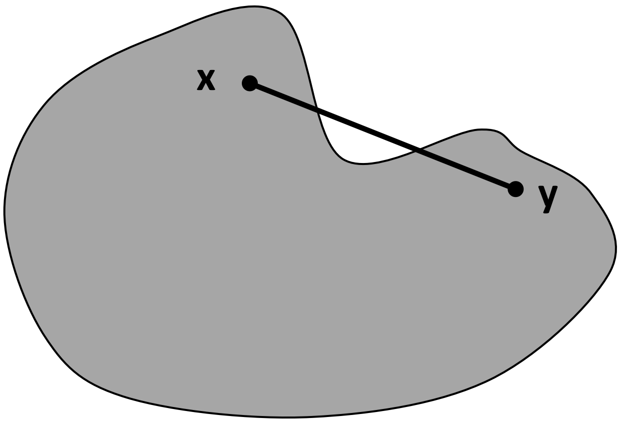
$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y

olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.3. (J −Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Kesin J −Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

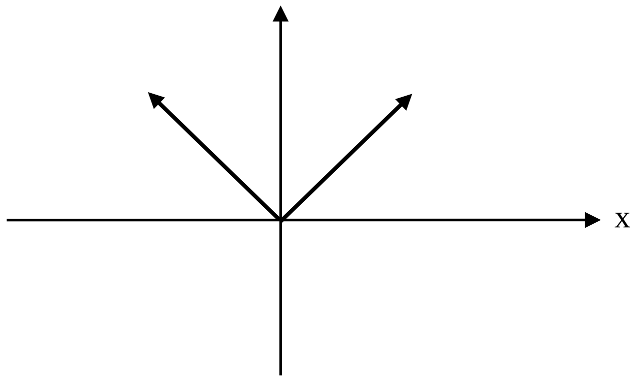
oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.5. (Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad (2.1)$$

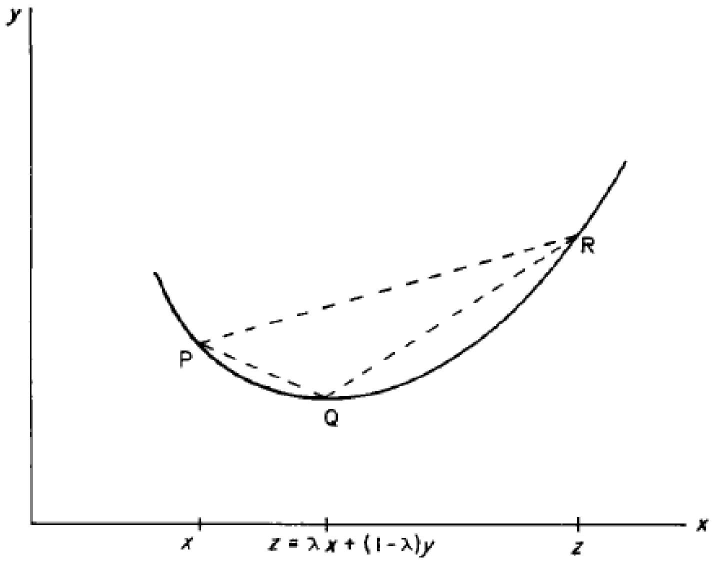
şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (Pečarić *et al*. 1992).

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Geometrik olarak (2.1) eşitsizliği şu anlama gelmektedir:



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Q, P ve R'nin arasında olmak üzere P, Q ve R f'nin grafiğinin üzerinde herhangi üç nokta olsun. Bu durumda Q noktası PR kirişinin üzerinde veya altındadır. Başka bir deyişle

$$egimPQ \leq egimPR \leq egimQR$$

dir. f'nin kesin konveks olması durumunda yukarıdaki eşitsizlik kesin olur.

Teorem 2.1.1. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve $x_0 \in (a, b)$ noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq (\leq) f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2.2)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferensiyellenebilen konveks (konkav) fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar (Roberts ve Varberg 1973).

Tanım 2.1.6. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I'da iki nokta olsun. Bu durumda

(a)$x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b)$x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c)$x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(d)$x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir (Adams ve Essex 2010).

Teorem 2.1.2. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

(b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

(c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

(Adams ve Essex 2010).

Teorem 2.1.3. f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts ve Varberg 1973).

Teorem 2.1.4. $f: I \to \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon olmak üzere $f'_-(x)$ ve $f'_+(x)$ mevcuttur ve I üzerinde artandır (kesin artandır) (Roberts ve Varberg 1973).

Teorem 2.1.5. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>)0$$

olmasıdır (Pečarić *et al*. 1992).

Teorem 2.1.6. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için ;

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$$

eşitsizlikleri ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Teorem 2.1.7. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.1. (Power Mean Eşitsizliği):$q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.1.8. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x) dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Tanım 2.1.7. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa f, x_0'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.8. (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ şartını sağlayan her } x_1, x_2 \in S \text{ için } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f, S'de düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.9. (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.2. f, S'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S'de düzgün süreklidir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.10. (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n}|b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter ve Brunt 2000).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 2.1.9. $[a, b] \subseteq I^{\circ}$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak $f, [a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I°'de süreklidir (Pečarić *et al*. 1992).

Teorem 2.1.10. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise
a.f, (a, b) aralığında süreklidir ve
b.f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Teorem 2.1.10'da da belirtildiği gibi konveks bir fonksiyon tanım kümesinin uç noktalarında sürekli olmayabilir.

Örneğin; $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = -1 \; ise \\ x^2, & x \in (-1,1) ise \\ 2, & x = 1 \; ise \end{cases}$$

fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında konveks; $(-1,1)$ aralığında süreklidir (Roberts ve Varberg 1973).

Tanım 2.1.11. ($\boldsymbol{Ortalama}$ Fonksiyonu): M fonksiyonu $M: (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ şeklinde verilsin. Eğer;

1) $M(x,y) = M(y,x)$

2) $M(x,x) = x$

3) $x < M(x,y) < y, \quad x < y$

4) $M(ax,ay) = aM(x,y), \quad a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.1.1. $M(x,y) = A(x,y) = \frac{x+y}{2}$ ise $Aritmetik$ ortalama,

$M(x,y) = G(x,y) = \sqrt{xy}$ ise $Geometrik$ ortalama,

$M(x,y) = H(x,y) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)}$ ise $Harmonik$ ortalama,

$M(x,y) = L(x,y) = \frac{x-y}{logx-logy}$, $x \neq y$ ve $L(x,x) = x$ ise $Logaritmik$ ortalama,

$M(x,y) = I(x,y) = \left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}$, $x \neq y$ ve $I(x,x) = x$ ise $Identrik$ ortalama

yazılabilir (Anderson *et al.* 2007).

Tanım 2.1.12. (MN–Konveks (Konkav) Fonksiyon): $f\colon \mathrm{I} \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $\mathrm{I} \subseteq (0,\infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in \mathrm{I}$ için;

$$f\big(M(x,y)\big) \leq (\geq) N\big(f(x), f(y)\big)$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna $MN - konveks(konkav)$ fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Teorem 2.1.11. $\mathrm{I} \subseteq (0,\infty)$ ve $f\colon \mathrm{I} \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $\mathrm{I} = (0,b)$ ve $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

1- f nin AA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks (konkav) olmasıdır.

2- f nin AG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $logf$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

3- f nin AH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{f}$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

4- f nin GA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

5- f nin GG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

6- f nin GH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{f(be^{-t})}$ nin $(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

7- f nin HA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f\left(\frac{1}{x}\right)$ nin $\left(\frac{1}{b},\infty\right)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

8- f nin HG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $logf\left(\frac{1}{b}\right)$ nin $\left(\frac{1}{b},\infty\right)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

9- f nin HH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ nin $\left(\frac{1}{b},\infty\right)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır (Anderson *et al.* 2007).

Teorem 2.1.12. $\mathrm{I} \subseteq (0,\infty)$ ve $f\colon \mathrm{I} \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $\mathrm{I} = (0,b)$ ve $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

1- f nin AA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)$ in artan (azalan) olmasıdır.

2- f nin AG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{f'(x)}{f(x)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

3- f nin AH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

4- f nin GA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ in artan (azalan) olmasıdır.

5- f nin GG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

6- f nin GH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{xf'(x)}{f^2(x)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

7- f nin HA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)$ in artan (azalan) olmasıdır.

8- f nin HG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x^2f'(x)}{f(x)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

9- f nin HH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x^2f'(x)}{f(x)^2}$ in artan (azalan) olmasıdır (Anderson *et al.* 2007).

Sonuç 2.1.3.; $H(x,y) \leq G(x,y) \leq A(x,y)$ olduğundan aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

1-f, AH-konveks ise AG-konvekstir ve dolayısıyla AA-konvekstir.

2-f, GH- konveks ise GG- konvekstir ve dolayısıyla GA- konvekstir.

3-f, HH- konveks ise HG- konvekstir ve dolayısıyla HA- konvekstir. (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.1.2. a) $(0,\infty)$ üzerinde $f(x)=coshx$ fonksiyonu AG- konvekstir. Böylece GG- konveks ve HG- konvekstir denilir.

b) $(0,\infty)$ üzerinde $f(x)=sinhx$ fonksiyonu AA- konveks olmasına rağmen AG-konkavdır.

c) $(0,\infty)$ üzerinde $f(x)=e^x$ fonksiyonu GG- konveks ve HG- konveks olmasına rağmen GH- konveks ve HH- konveks değildir.

d) $(0,\infty)$ üzerinde $f(x)=\log(1+x)$ fonksiyonu GA- konveks olmasına rağmen GG-konkavdır.

e) $(0,\infty)$ üzerinde $f(x)=arctanx$ fonksiyonu HA- konveks olmasına rağmen HG-konveks değildir (Anderson *et al.* 2007).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmanın temel kısmında kullanılacak temel lemma ve teoremler verilecektir.

Teorem 3.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) : I, ℝ'de bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al*. 1992).

Aşağıda literatürde mevcut olan bazı lemmalar ve bu lemmalar yardımıyla elde edilmiş olan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 3.1. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = (lnb - lna)\int_0^1 b^{2t}a^{2(1-t)}f'(b^t a^{1-t})dt$$

eşitliği geçerlidir (Zhang *et al.* 2013).

Yukarıdaki lemma kullanılarak aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 3.2. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^q$, $GA -$ konveks ise $q \geq 1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{[(b-a)A(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}}{(2)^{\frac{1}{q}}}\times\{[L(a^2,b^2)-a^2]|f'(a)|^q+[b^2-L(a^2,b^2)]|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et al.* 2013).

Teorem 3.3. $f:\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in$ I°, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{\,q}$, $GA-$konveks ise $q>1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq (lnb-lna)\times\left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}},b^{\frac{2q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}[A(|f'(a)|^q,|f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et al.* 2013).

Teorem 3.4. $f:\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in$ I°, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{\,q}$, $GA-$konveks ise $q\geq 1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}}\times\{[L(a^{2q},b^{2q})-a^{2q}]|f'(a)|^q+[b^{2q}-L(a^{2q},b^{2q})]|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et al.* 2013).

Teorem 3.5. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in$ I°, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{q}$, GA −konveks ise $2q > p > 0$ ve $q > 1$ için

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\, du \right|$$

$$\leq \frac{(lnb - lna)^{1-\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}} \times \left[L\left(a^{\frac{2q-p}{q-1}}, b^{\frac{2q-p}{q-1}} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \{ [L(a^p, b^p) - a^p] |f'(a)|^{q} + [b^p - L(a^p, b^p)] |f'(a)|^{q} \}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et al.* 2013).

Lemma 3.2. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in$ I°, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

$$= \frac{lnb - lna}{2} \left[\int_0^1 b^{1+t} a^{1-t} f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt + \int_0^1 b^{1-t} a^{1+t} f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) dt \right]$$

eşitliği geçerlidir (Latif 2014).

Yukarıdaki lemma kullanılarak aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 3.6. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in$ I°, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{q}$ $GA -$ konveks ise $q \geq 1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}+1}}\Big[b[(L(a,b)-a)|f'(a)|^{\,q}+(2b-a-L(a,b))|f'(b)|^{\,q}]^{\frac{1}{q}}$$

$$+a\big[\big(b-2a+L(a,b)\big)|f'(a)|^{\,q}+(b-L(a,b))|f'(b)|^{\,q}]^{\frac{1}{q}}\Big]$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif 2014).

Teorem 3.7. $f:\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^\circ$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{\,q}$, $GA-$ konveks ise $q\geq 1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\Big\{b[(L(a^q,b^q)-a^q)|f'(a)|^{\,q}+(2b^q-a^q-L(a^q,b^q))|f'(b)|^{\,q}]^{\frac{1}{q}}$$

$$+a[(b^q-2a^q+(L(b^q,b^q))|f'(a)|^{\,q}+(b^q-L(a^q,b^q))|f'(b)|^{\,q}]^{\frac{1}{q}}\Big\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif 2014).

Teorem 3.8. $f:\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^\circ$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{\,q}$, $GA-$ konveks ise $q>1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{(lnb - lna)}{2^{1+\frac{1}{q}}}\left[L(a^{\frac{q}{q-1}}, b^{\frac{q}{q-1}}\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[b[A(|f'(a)|^{q}, 3|f'(b)|^{q})]^{\frac{1}{q}} + a[A(3|f'(a)|^{q}, |f'(b)|^{q})]^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif 2014).

Teorem 3.9. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{q}, GA -$ konveks ise $q > 1$ için

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\, dx\right|$$

$$\leq \frac{(lnb - lna)\left[L(a^{\frac{q-p}{q-1}}, b^{\frac{q-p}{q-1}}\right]^{1-\frac{1}{q}}}{2(2p)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times \left\{a^{1-\frac{p}{q}}[(L(a^p, b^q) - a^p)|f'(a)|^{q} + (2b^p - a^p - L(a^p, b^p))|f'(b)|^{q}]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + ab^{1-\frac{p}{q}}[(b^p - 2a^p + L(a^p, b^q))|f'(a)|^{q} + (b^p - L(a^p, b^p))|f'(b)|^{q}]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif 2014).

Lemma 3.3. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\, du\right|$$

$$= (lnx - lna)\int_0^1 x^{2t}\, a^{2(1-t)} f'\big(x^t a^{(1-t)}\big)dt$$

$$-(lnx - lnb)\int_0^1 x^{2t}\, b^{2(1-t)} f'\big(x^t b^{(1-t)}\big)dt$$

eşitliği geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015).

Yukarıdaki lemma kullanılarak aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 3.10. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in$ I°, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|$, $GG -$ konveks ise $x \in [a, b]$ için

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\, du\right|$$

$$\leq (lnx - lna)L(a^2|f'(a)|, x^2|f'(x)|) + (lnb - lnx)L(x^2|f'(x)|, b^2|f'(b)|)$$

eşitsizliği geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015) .

Teorem 3.11. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in$ I°, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{\,q}$, $GG -$ konveks ise $q \geq 1$ için

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\, du\right|$$

$$\leq (lnx - lna)L^{1-\frac{1}{q}}(a^2, x^2)L^{\frac{1}{q}}(a^2|f'(a)|^q, x^2|f'(x)|^q)$$

$$+(lnb - lnx)L^{1-\frac{1}{q}}(x^2, b^2)L^{\frac{1}{q}}(x^2|f'(x)|^q, b^2|f'(b)|^q)$$

eşitsizliği geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015) .

Teorem 3.12. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^q$, $GG -$ konveks ise $q > 1$ için

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\,du \right|$$

$$\leq (lnx - lna) L^{1-\frac{1}{q}}\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}}\right) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(x)|^q)$$

$$+(lnb - lnx) L^{1-\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right) L^{\frac{1}{q}}(|f'(x)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015) .

Teorem 3.13. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^q$, $GG -$ konveks ise $q \geq 1$ için

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\,du \right|$$

$$\leq (lnx - lna) L^{\frac{1}{q}}(a^2|f'(a)|^q, x^2|f'(x)|^q)$$

$$+(lnb - lnx) L^{\frac{1}{q}}(x^2|f'(x)|^q, b^2|f'(b)|^q)$$

eşitsizliği geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015) .

Lemma 3.3'ü kullanarak Avcı-Ardıç *et al.* aşağıdaki teoremleri elde etmiştir.

Teorem 3.14. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|, GA -$ konveks ise $q \geq 1$ için

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\, du \right|$$

$$\leq \left(\frac{L(x^2, b^2) - L(a^2, x^2)}{2} \right) |f'(x)|$$

$$+ \left(\frac{L(a^2, x^2) - a^2}{2} \right) |f'(a)| + \left(\frac{b^2 - L(x^2, b^2)}{2} \right) |f'(b)|$$

eşitsizliği geçerlidir (Avcı-Ardıç *et al.* 2015).

Teorem 3.15. $f: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^q$, $GA -$ konveks ise $q \geq 1$ için

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\, du \right|$$

$$\leq (lnx - lna)^{1-\frac{1}{q}} \left(L(a^2, x^2) \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\frac{|f'(x)|^q \left(x^2 - L(a^2, x^2) \right) + |f'(a)|^q \left(L(a^2, x^2) - a^2 \right)}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + (lnb - lnx)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left(L(b^2, x^2) \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\frac{|f'(x)|^q \left(L(x^2, b^2) - x^2 \right) + |f'(b)|^q \left(b^2 - L(x^2, b^2) \right)}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Avcı-Ardıç *et al.* 2015).

Teorem 3.16. $f: \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I$^\circ$'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in$ I$^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{q}$, $GA-$ konveks ise $q > 1$ için

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq (lnx - lna)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}} - a^{\frac{2q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb - lnx)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{\frac{2q}{q-1}} - x^{\frac{2q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Avcı-Ardıç *et al.* 2015).

Teorem 3.17. $f: \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I$^\circ$'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in$ I$^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eger $|f'(x)|^{q}$, $GA-$ konveks ise $q \geq 1$ için

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{(lnx - lna)^{1-\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} \left[F_q(a,x)\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(lnb - lnx)^{1-\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} \left[F_q(x,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$F_r(a,x) = \frac{|f'(x)|^q\left(x^{2r} - L(a^{2r},x^{2r})\right) + |f'(a)|^q(L(a^{2r},x^{2r}) - a^{2r})}{2}$$

$$F_r(x,b) = \frac{|f'(x)|^q(L(x^{2r},b^{2r}) - x^{2r}) + |f'(b)|^q\left(b^{2r} - L(x^{2r},b^{2r})\right)}{2}$$

biçiminde tanımlıdır (Avcı-Ardıç *et al.* 2015).

Literatürde GA- konveks ve GG- konveks fonksiyon sınıfları için Hermite – Hadamard tipli eşitsizlikler üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizliklerle ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar Ji *et al* (2013); İşcan (2013); İşcan (2014); Kavurmacı *et al* (2014); Özdemir (2014); Dragomir (2015a); Dragomir (2015b); Akdemir *et al* (2015); Kunt ve İşcan (2015); Latif (2015) çalışmalarında bulunabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde yeni lemmalar ve bu lemmalardan faydalanarak GG- konveks fonksiyon ve GA- konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.1. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon,

$a, b \in \mathrm{I}^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du$$

$$= \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 (b^t a^{2-t}) f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) dt + \int_0^1 (a^t b^{2-t}) f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right) dt\right]$$

eşitliği elde edilir.

İspat : Eşitliği ispatlamak için $\int_0^1 (b^t a^{2-t}) f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) dt = \mathrm{I}_1$ olsun.

$$d\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) = b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}} \left[\frac{lnb - lna}{2}\right] dt \tag{4.1}$$

olduğundan I_1 tekrar yazılırsa;

$$I_1 = \left[\frac{2}{lnb - lna}\right] \int_0^1 b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}} f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) d\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2) eşitliğinde $b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$I_1 = \frac{2}{lnb - lna}\left[\sqrt{ab}\, f\left(\sqrt{ab}\right) - af(a) - \int_a^{\sqrt{ab}} f(u)du\right]$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\int_0^1 (a^t b^{2-t}) f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right) dt = \mathrm{I}_2$$

olsun.

$$d\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right) = -a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\left[\frac{lnb - lna}{2}\right]dt \tag{4.3}$$

olduğundan I_2 yeniden yazılırsa;

$$I_2 = -\frac{2}{lnb - lna}\int_0^1 a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}} f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right) d\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right) \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) denkleminde $a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$I_2 = \frac{2}{lnb - lna}\left[bf(b) - \sqrt{ab}\, f\left(\sqrt{ab}\right) - \int_{\sqrt{ab}}^{b} f(u)du\right]$$

elde edilir. I_1 ve I_2 $\frac{lnb-lna}{2}$ ile çarpılıp sonuçlar toplanırsa

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du$$

$$= \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 (b^t a^{2-t}) f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)dt + \int_0^1 (a^t b^{2-t}) f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)dt\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu lemmadan faydalanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1. $f\colon \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $t \in [0,1]$ için

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[L\left(a\sqrt{|f'(a)|}\, , b\sqrt{|f'(b)|}\right)\left(a\sqrt{|f'(a)|} + b\sqrt{|f'(b)|}\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 (b^t a^{2-t})\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right| dt + \int_0^1 (a^t b^{2-t})\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right| dt\right]$$

yazılır. Burada $|f'|$'nün $GG-$ konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\int_0^1 |b^t a^{2-t}||f'(b)|^{\frac{t}{2}}|f'(a)|^{\frac{2-t}{2}} dt + \int_0^1 |a^t b^{2-t}||f'(a)|^{\frac{t}{2}}|f'(b)|^{\frac{2-t}{2}} dt$$

$$= \frac{lnb - lna}{2}\left[L\left(a\sqrt{|f'(a)|}\,, b\sqrt{|f'(b)|}\right)\left(a\sqrt{|f'(a)|} + \ b\sqrt{|f'(b)|}\right)\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2. $f\colon \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(a\sqrt{|f'(a)|} + \ b\sqrt{|f'(b)|}\right)\left(L(a^p, b^p)\right)^{\frac{1}{p}}\left(L\left(\sqrt{|f'(a)|^q}, \sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.1 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 (b^t a^{2-t})\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right| dt + \int_0^1 (a^t b^{2-t})\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right| dt\right]$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GG-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(\int_0^1 b^{tp}a^{(2-t)p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 a^{tp}b^{(2-t)p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[a^2\left(\int_0^1 \left(\frac{b^p}{a^p}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'^{(b)}\right|^{\frac{tq}{2}}\left|f'^{(a)}\right|^{\frac{(2-t)q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+b^2\left(\int_0^1 \left(\frac{a^p}{b^p}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(a)|^{\frac{tq}{2}}|f'(b)|^{\frac{(2-t)q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{lnb-lna}{2}\left[\left(a\sqrt{|f'(a)|}+\ b\sqrt{|f'(b)|}\right)\ \left(L(a^p,b^p)\right)^{\frac{1}{p}}\left(L\left(\sqrt{|f'(a)|^q},\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in \mathrm{I}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(a\sqrt{|f'(a)|}+\ b\sqrt{|f'(b)|}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(L(a,b)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(L\left(a\sqrt{|f'(a)|^q},b\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.1 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\int_0^1 (b^t a^{2-t})\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt+\int_0^1 (a^t b^{2-t})\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

yazılır. Burada integraller için Power-mean eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GG-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(\int_0^1 (b^t a^{2-t})\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (b^t a^{2-t})\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 (a^t b^{2-t})\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (a^t b^{2-t})\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[a^{2\left(1-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt\right)^{1-\frac{1}{q}} a^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t |f'(b)|^{\frac{qt}{2}}|f'(a)|^{\frac{(2-t)q}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+b^{2\left(1-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t dt\right)^{1-\frac{1}{q}} b^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t |f'(a)|^{\frac{qt}{2}}|f'(b)|^{\frac{(2-t)q}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(a\sqrt{|f'(a)|}+\ b\sqrt{|f'(b)|}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(L(a,b)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(L\left(a\sqrt{|f'(a)|^q},b\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1. Teorem 4.3'te $q=1$ seçilirse Teorem 4.3, Teorem 4.1'e indirgenir.

Teorem 4.4. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2} \left[\left(a\sqrt{|f'(a)|} + b\sqrt{|f'(b)|} \right) \left(L\left(a^q \sqrt{|f'(a)|^q}, b^q \sqrt{|f'(b)|^q} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.1 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2} \left[\int_0^1 (b^t a^{2-t}) \left| f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}} \right) \right| dt + \int_0^1 (a^t b^{2-t}) \left| f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}} \right) \right| dt \right]$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GG-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2} \left[\left(\int_0^1 dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 b^{tq} a^{(2-t)q} \left| f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 a^{tq} b^{(2-t)q} \left| f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2} \left[\left(\int_0^1 dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 b^{tq} a^{(2-t)q} |f'(b)|^{\frac{qt}{2}} |f'(a)|^{\frac{(2-t)q}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$+\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 a^{tq}b^{(2-t)q}|f'(a)|^{\frac{qt}{2}}|f'(b)|^{\frac{(2-t)q}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$=\frac{lnb-lna}{2}\left[\left(a\sqrt{|f'(a)|}+b\sqrt{|f'(b)|}\right)\left(L\left(a^q\sqrt{|f'(a)|^q},b^q\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5. $f\colon \mathrm{I}\subset\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a,b\in \mathrm{I}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq\frac{lnb-lna}{2}\Bigg[\left(a\sqrt{|f'(a)|}+b\sqrt{|f'(b)|}\right)\times\left(L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}},b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(L\left(a^p\sqrt{|f'(a)|^q},b^p\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.1 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq\frac{lnb-lna}{2}\left[\int_0^1(b^ta^{2-t})\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt+\int_0^1(a^tb^{2-t})\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GG-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(\int_0^1 (b^t a^{2-t})^{\frac{q-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (b^t a^{2-t})^p \left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 (a^t b^{2-t})^{\frac{q-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (a^t b^{2-t})^p \left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(\int_0^1 (b^t a^{2-t})^{\frac{q-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (b^t a^{2-t})^p |f'(b)|^{\frac{tq}{2}}|f'(a)|^{\frac{(2-t)q}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 (a^t b^{2-t})^{\frac{q-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (a^t b^{2-t})^p |f'(a)|^{\frac{tq}{2}}|f'(b)|^{\frac{(2-t)q}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{lnb-lna}{2}\left[\left(a\sqrt{|f'(a)|}+b\sqrt{|f'(b)|}\right)\times\left(L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}},b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.\times\left(L\left(a^p\sqrt{|f'(a)|^q},b^p\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2. $f\colon \mathrm{I}\subset\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon $a,b\in\mathrm{I}^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise

$$b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du$$

$$=\frac{lnb-lna}{2}\left[\int_0^1\left(b^{\frac{3t}{2}}a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)dt+\int_0^1\left(a^{\frac{3t}{2}}b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)dt\right]$$

eşitliği elde edilir.

İspat : Eşitliği ispatlamak için $\int_0^1\left(b^{\frac{3t}{2}}a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)dt=\mathrm{I}_3$ olsun.

$$d\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)=b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\left[\frac{lnb-lna}{2}\right]dt \qquad (4.5)$$

olduğundan I_3 tekrar yazılırsa;

$$I_3 = \left[\frac{2}{lnb - lna}\right] \int_0^1 b^t a^{2-t} f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) d\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinde $b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$I_3 = \frac{2}{lnb - lna}\left[ab\, f(\sqrt{ab}) - a^2 f(a) - 2\int_a^{\sqrt{ab}} uf(u)du\right]$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\int_0^1 \left(a^{\frac{3t}{2}} b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right) f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right) dt = I_4$$

olsun.

$$d\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right) = -a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}} \left[\frac{lnb - lna}{2}\right] dt \tag{4.7}$$

olduğundan I_4 yeniden yazılırsa;

$$I_4 = -\frac{2}{lnb - lna} \int_0^1 a^t b^{2-t} f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right) d\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) denkleminde $a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$I_4 = \frac{2}{lnb - lna}\left[b^2 f(b) - ab\, f(\sqrt{ab}) - 2\int_{\sqrt{ab}}^{b} uf(u)du\right]$$

elde edilir. I_3 ve I_4 toplanırsa;

$$b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du$$

$$= \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 \left(b^{\frac{3t}{2}} a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right) f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right) dt + \int_0^1 \left(a^{\frac{3t}{2}} b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right) f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right) dt\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu lemmadan faydalanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.6. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $t \in [0,1]$ için

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[L\left(\sqrt{a^3|f'(a)|}, \sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\left(\sqrt{a^3|f'(a)|} + \sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : Lemma 4.2 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 \left(b^{\frac{3t}{2}} a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right| dt + \int_0^1 \left(a^{\frac{3t}{2}} b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right| dt\right]$$

yazılır. $|f'|$'nün $GG-$ konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 \left|b^{\frac{3t}{2}} a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right| |f'(b)|^{\frac{t}{2}} |f'(a)|^{\frac{2-t}{2}} dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left|a^{\frac{3t}{2}} b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right| |f'(a)|^{\frac{t}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-t}{2}} dt\right]$$

$$= \frac{lnb - lna}{2}\left[L\left(\sqrt{a^3|f'(a)|}, \sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\left(\sqrt{a^3|f'(a)|} + \sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(\sqrt{a^3|f'(a)|}+\sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(L\left(\sqrt{a^{3p}},\sqrt{b^{3p}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(L\left(\sqrt{|f'(a)|^q},\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.2 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\int_0^1\left(b^{\frac{3t}{2}}a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt+\int_0^1\left(a^{\frac{3t}{2}}b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun GG −konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[\left(\int_0^1\left(b^{\frac{3t}{2}}a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left(a^{\frac{3t}{2}}b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}\left[a^3|f'(a)|\left(\int_0^1\left(\frac{b^3}{a^3}\right)^{\frac{tp}{2}}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\frac{|f'(b)|}{|f'(a)|}\right)^{\frac{tq}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+b^3|f'(b)|\left(\int_0^1\left(\frac{a^3}{b^3}\right)^{\frac{tp}{2}}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\frac{|f'(a)|}{|f'(b)|}\right)^{\frac{tq}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{2}{lnb-lna}\left[\left(\sqrt{a^3|f'(a)|}+\sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(L\left(\sqrt{a^{3p}},\sqrt{b^{3p}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(L\left(\sqrt{|f'(a)|^q},\sqrt{|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.8. $f\colon \mathrm{I}\subset\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a,b\,\epsilon\,\mathrm{I}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q\geq 1$ için

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq\frac{lnb-lna}{2}\left[\left(\sqrt{a^3|f'(a)|}+\sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\left(L\left(\sqrt{a^3},\sqrt{b^3}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.\times\left(L\left(\sqrt{a^3|f'(a)|^q},\sqrt{b^3|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.2 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq\frac{lnb-lna}{2}\left[\int_0^1\left(b^{\frac{3t}{2}}a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt+\int_0^1\left(a^{\frac{3t}{2}}b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

yazılır. Burada integraller için Power-mean eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GG-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{3t}{2}} a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right) dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{3t}{2}} a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right) \left|f'\left(b^{\frac{t}{2}} a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 \left(a^{\frac{3t}{2}} b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right) dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(a^{\frac{3t}{2}} b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right) \left|f'\left(a^{\frac{t}{2}} b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(\int_0^1 a^3 \left(\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}\right)^t dt\right)^{1-\frac{1}{q}} |f'^{(a)}| \left(\int_0^1 a^3 \left(\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}\right)^t \left|\frac{f'^{(b)}}{f'(a)}\right|^{\frac{qt}{2}} dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 b^3 \left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}\right)^t dt\right)^{1-\frac{1}{q}} |f'(b)| \left(\int_0^1 b^3 \left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}\right)^t \left|\frac{f'(a)}{f'\,(b)}\right|^{\frac{qt}{2}} dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(\sqrt{a^3|f'(a)|} + \sqrt{b^3|f'(b)|}\right) \left(L\left(\sqrt{a^3}, \sqrt{b^3}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. \times \left(L\left(\sqrt{b^3|f'(b)|^q}, \sqrt{a^3|f'(a)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \left(b^{\frac{3}{2q}}\sqrt{|f'(b)|} + a^{\frac{3}{2q}}\sqrt{|f'(b)|}\right)\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2. Teorem 4.8'de $q = 1$ seçilirse Teorem 4.8'deki eşitsizlik Teorem 4.6'daki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.9. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(\sqrt{a^3|f'(a)|} + \sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\left(L\left(\sqrt{a^{3q}|f'(a)|^q}, \sqrt{b^{3q}|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.2 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2f(b) - a^2f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\int_0^1 \left(b^{\frac{3t}{2}}a^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt + \int_0^1 \left(a^{\frac{3t}{2}}b^{\frac{3(2-t)}{2}}\right)\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun GG −konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2f(b) - a^2f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 b^{\frac{3tq}{2}}a^{\frac{3(2-t)q}{2}}\left|f'\left(b^{\frac{t}{2}}a^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 a^{\frac{3tq}{2}}b^{\frac{3(2-t)q}{2}}\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 b^{\frac{3tq}{2}}a^{\frac{3(2-t)q}{2}}|f'(b)|^{\frac{tq}{2}}|f'(a)|^{\frac{(2-t)q}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 a^{\frac{3tq}{2}}b^{\frac{3(2-t)q}{2}}|f'(b)|^{\frac{tq}{2}}|f'(a)|^{\frac{(2-t)q}{2}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= \frac{lnb - lna}{2}\left[\left(\sqrt{a^3|f'(a)|} + \sqrt{b^3|f'(b)|}\right)\left(L\left(\sqrt{a^{3q}|f'(a)|^q}, \sqrt{b^{3q}|f'(b)|^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.3. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in \mathrm{I}^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du$$

$$= (lnb - lnx)\int_0^1 \left(b^{3t} x^{3(1-t)}\right) f'(b^t x^{1-t}) dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left(x^{3t} a^{3(1-t)}\right) f'(x^t a^{1-t}) dt$$

eşitliği elde edilir.

İspat : Eşitliği ispatlamak için $\int_0^1 \left(b^{3t} x^{3(1-t)}\right) f'(b^t x^{1-t}) dt = \mathrm{I}_5$ olsun.

$$d(b^t x^{1-t}) = (lnb - lnx)(b^t x^{1-t}) dt \tag{4.9}$$

olduğundan I_5 tekrar yazılırsa;

$$I_5 = \frac{1}{(lnb - lnx)} \int_0^1 b^{2t} x^{2(1-t)} f'(b^t x^{1-t}) d(b^t x^{1-t}) \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) eşitliğinde $b^t x^{1-t} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$I_5 = \frac{1}{(lnb - lnx)} \left[b^2 f(b) - x^2 f(x) - 2\int_x^b u f(u) du \right]$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\int_0^1 \left(x^{3t} a^{3(1-t)}\right) f'(x^t a^{1-t}) dt = \mathrm{I}_6$$

olsun.

$$d(x^t a^{1-t}) = (lnx - lna)(x^t a^{1-t}) dt \tag{4.11}$$

olduğundan I_6 yeniden yazılırsa;

$$I_6 = \frac{1}{(lnx - lna)} \int_0^1 a^{2t} b^{2(1-t)} f'(x^t a^{1-t}) d(x^t a^{1-t}) \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) denkleminde $x^t a^{1-t} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$I_6 = \frac{1}{(lnx - lna)}\left[x^2 f(x) - a^2\, f(a) - 2\int_a^x uf(u)du\right]$$

elde edilir. I_5 ve I_6 toplanırsa;

$$b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du$$

$$= (lnb - lnx)\int_0^1 \left(b^{3t} x^{3(1-t)}\right) f'(b^t x^{1-t})dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left(x^{3t} a^{3(1-t)}\right) f'(x^t a^{1-t})dt$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu lemmadan faydalanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.10. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $t \in [0,1]$ için

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\, L(\, x^3|f'(x)|, b^3|f'(b)|\,) + (lnx - lna)(a^3|f'(a)|, x^3|f'(x)|)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq\; (lnb - lnx)\int_0^1 \left(b^{3t} x^{3(1-t)}\right)|f'(b^t x^{1-t})|dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left(x^{3t} a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})|dt$$

eşitliği yazılır. $|f'|$'nün $GG-$ konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\int_0^1 \left|b^{3t}x^{3(1-t)}\right||f'(b)|^t|f'(x)|^{1-t}dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left|x^{3t}a^{3(1-t)}\right||f'(x)|^t|f'(a)|^{1-t}dt$$

$$= (lnb - lnx)\, L(\, x^3|f'(x)|, b^3|f'(b)|\,) + (lnx - lna)(a^3|f'(a)|, x^3|f'(x)|\,)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.11. $f\colon \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\big(L(b^{3p}, x^{3p})\big)^{\frac{1}{p}}\big(L(|f'(b)|^q, |f'(x)|^q)\big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb - lnx)\big(L(b^{3p}, x^{3p})\big)^{\frac{1}{p}}\big(L(|f'(b)|^q, |f'(x)|^q)\big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq\ (lnb - lnx)\int_0^1 \big(b^{3t}x^{3(1-t)}\big)|f'(b^t x^{1-t})|dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \big(x^{3t}a^{3(1-t)}\big)|f'(x^t a^{1-t})|dt$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun GG −konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u)du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\left(\int_0^1 b^{3tp} x^{3(1-t)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b^t x^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\left(\int_0^1 x^{3tp} a^{3(1-t)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(x^t a^{1-t})|^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (lnb - lnx)\left(x^{3p}\int_0^1 \left(\frac{b^{3p}}{x^{3p}}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{qt} \, |f'(x)|^{(1-t)q} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\left(a^{3p}\int_0^1 \left(\frac{x^{3p}}{a^{3p}}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qt} \, |f'(a)|^{(1-t)q} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (lnb - lnx)\big(L(b^{3p}, x^{3p})\big)^{\frac{1}{p}} \big(L(|f'(b)|^q, |f'(x)|^q)\big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\big(L(x^{3p}, a^{3p})\big)^{\frac{1}{p}} \big(L(|f'(x)|^q, |f'(a)|^q)\big)^{\frac{1}{q}}$$

elde edlir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.12. $f\colon \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ için

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u)du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\big(L(b^3, x^3)\big)^{1-\frac{1}{q}} \big(L(b^3|f'(b)|, x^3|f'(x)|)\big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\big(L(x^3, a^3)\big)^{1-\frac{1}{q}} \big(L(x^3|f'(x)|, a^3|f'(a)|)\big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u)du\right|$$

$$\leq \ (lnb - lnx)\int_0^1 \left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^t x^{1-t})|dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})|dt$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun GG −konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u)du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\left(\int_0^1 \left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right) dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^t x^{1-t})|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\left(\int_0^1 \left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right) dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (lnb - lnx)\left(\int_0^1 x^3\left(\sqrt{\frac{b^3}{x^3}}\right)^t dt\right)^{1-\frac{1}{q}} |f'(x)|\left(\int_0^1 x^3\left(\sqrt{\frac{b^3}{x^3}}\right)^t \left|\frac{f'(b)}{f'(x)}\right|^{qt} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\left(\int_0^1 a^3\left(\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}\right)^t dt\right)^{1-\frac{1}{q}} |f'(a)|\left(\int_0^1 a^3\left(\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}\right)^t \left|\frac{f'(x)}{f'(a)}\right|^{qt} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \ (lnb - lnx)\int_0^1 \left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^t x^{1-t})|dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})|dt$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.13. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $GG-$ konveks fonksiyon ise $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\left| b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du \right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\left(L(b^{3q}|f'(b)|^q, x^{3q}|f'(x)|^q)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\left(L(x^{3q}|f'(x)|^q, a^{3q}|f'(a)|^q)\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du \right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\int_0^1 \left(b^{3t} x^{3(1-t)}\right)|f'(b^t x^{1-t})| dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left(x^{3t} a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})| dt$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GG-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left| b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du \right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 b^{3qt} x^{3q(1-t)}|f'(b^t x^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 x^{3qt} a^{3q(1-t)}|f'(x^t a^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (lnb - lnx)\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 b^{3qt}x^{3q(1-t)}|f'(b)|^{tq}|f'(x)|^{(1-t)q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 x^{3qt}a^{3q(1-t)}|f'(x)|^{tq}|f'(a)|^{(1-t)q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (lnb - lnx)\big(L(b^{3q}|f'(b)|^q, x^{3q}|f'(x)|^q)\big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx - lna)\big(L(x^{3q}|f'(x)|^q, a^{3q}|f'(a)|^q)\big)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.14. $f\colon \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $GA-$ konveks fonksiyon ise

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq \frac{|f'(b)|}{3}[b^3 - L(x^3, b^3)] + \frac{|f'(x)|}{3}[L(x^3, b^3) - L(a^3, x^3)]$$

$$+\frac{|f'(a)|}{3}[L(a^3, x^3) - a^3]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)\int_0^1 \left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^t x^{1-t})|dt$$

$$+(lnx - lna)\int_0^1 \left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})|dt$$

yazılır. $|f'|$'nün GA $-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)x^3 \int_0^1 \left(\frac{b}{x}\right)^{3t} [t|f'(b)| + (1-t)|f'(x)|]dt$$

$$+(lnx - lna)a^3 \int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{3t} [t|f'(x)| + (1-t)|f'(a)|]dt$$

$$= \frac{|f'(b)|}{3}[b^3 - L(x^3, b^3)] + \frac{|f'(x)|}{3}[L(x^3, b^3) - L(a^3, x^3)]$$

$$+\frac{|f'(a)|}{3}[L(a^3, x^3) - a^3]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.15. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $GA-$ konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ için

$$\left|b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du\right|$$

$$\leq (lnb - lnx)^{1-\frac{1}{q}} \left(L(x^3, b^3)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\frac{|f'(b)|^q [b^3 - L(x^3, b^3)] + |f'(x)|^q [L(x^3, b^3) - x^3]}{3}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb - lnx)^{1-\frac{1}{q}} \left(L(x^3, b^3)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\frac{|f'(x)|^q [x^3 - L(a^3, x^3)] + |f'(a)|^q [L(a^3, x^3) - a^3]}{3}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq\ (lnb-lnx)\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^tx^{1-t})|dt$$

$$+(lnx-lna)\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^ta^{1-t})|dt$$

yazılır. Burada integraller için Power-mean eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GA-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq(lnb-lnx)\left(\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^tx^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)\left(\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^ta^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq(lnb-lnx)\left(\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)[t|f'(b)|^q+(1-t)|f'(x)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)\left(\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)[t|f'(x)|^q+(1-t)|f'(a)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=(lnb-lnx)^{1-\frac{1}{q}}\left(L(x^3,b^3)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\frac{|f'(b)|^q[b^3-L(x^3,b^3)]+|f'(x)|^q[L(x^3,b^3)-x^3]}{3}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb-lnx)^{1-\frac{1}{q}}\left(L(x^3,b^3)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\frac{|f'(x)|^q[x^3-L(a^3,x^3)]+|f'(a)|^q[L(a^3,x^3)-a^3]}{3}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3. Teorem 4.15' te $q=1$ seçilirse Teorem 4.15' teki eşitsizlik Teorem 4.14' teki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.16. $f\colon \mathrm{I}\subset\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a,b\,\epsilon\,\mathrm{I}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GA-$ konveks fonksiyon ise $q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq(lnb-lnx)\left(L\left(x^{\frac{3q}{q-1}}-b^{\frac{3q}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}(A(|f'(b)|^q,|f'(x)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)\left(L\left(a^{\frac{3q}{q-1}}-x^{\frac{3q}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}(A(|f'(x)|^q,|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq\ (lnb-lnx)\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^tx^{1-t})|dt$$

$$+(lnx-lna)\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^ta^{1-t})|dt$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun GA −konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq(lnb-lnx)\left(\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|f'(b^tx^{1-t})|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)\left(\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|f'(x^ta^{1-t})|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq(lnb-lnx)\left(\int_0^1 x^3\left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{3qt}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\,|f'(b)|^q+(1-t)|f'(x)|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)\left(\int_0^1 a^3\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3qt}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\,|f'(x)|^q+(1-t)|f'(a)|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=(lnb-lnx)^{\frac{1}{q}}\left(L\left(x^{\frac{3q}{q-1}}-b^{\frac{3q}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}(A(|f'(b)|^q,|f'(x)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)^{\frac{1}{q}}\left(L\left(a^{\frac{3q}{q-1}}-x^{\frac{3q}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}(A(|f'(x)|^q,|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.17. $f\colon \mathrm{I}\subset\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a,b\in\mathrm{I}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GA-$ konveks fonksiyon ise $q\geq 1$ için

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(lnb-lnx)^{1-\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} \times \left(\frac{|f'(b)|^q[b^{3q}-L(x^{3q},b^{3q})]+|f'(x)|^q[L(x^{3q},b^{3q})-x^{3q}]}{3}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnx-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} \times \left(\frac{|f'(x)|^q[x^{3q}-L(a^{3q},x^{3q})]+|f'(a)|^q[L(a^{3q},x^{3q})-a^{3q}]}{3}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b)-a^2 f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq (lnb-lnx)\int_0^1 \left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)|f'(b^t x^{1-t})|dt$$

$$+(lnx-lna)\int_0^1 \left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})|dt$$

yazılır. Burada integraller için Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun $GA-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2 f(b)-a^2 f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq (lnb-lnx)\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)^q |f'(b^t x^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)^q |f'(x^t a^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (lnb-lnx)x^3\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left(\frac{b}{x}\right)^{3qt}[t|f'(b)|^q+(1-t)|f'(x)|^q dt]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)a^3\left(\int_0^1 dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{3qt}[t|f'(b)|^q+(1-t)|f'(x)|^q dt]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(lnb - lnx)^{1-\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} \times \left(\frac{|f'(b)|^q [b^{3q} - L(x^{3q}, b^{3q})] + |f'(x)|^q [L(x^{3q}, b^{3q}) - x^{3q}]}{3} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(lnx - lna)^{1-\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} \times \left(\frac{|f'(x)|^q [x^{3q} - L(a^{3q}, x^{3q})] + |f'(a)|^q [L(a^{3q}, x^{3q}) - a^{3q}]}{3} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.18. $f: \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in \mathrm{I}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $GA-$ konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ için

$$\left| b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du \right|$$

$$\leq \frac{(lnb - lnx)^{1-\frac{1}{q}}}{(3p)^{\frac{1}{q}}} \left(L\left(x^{\frac{3(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{3(q-p)}{q-1}} \right) \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(|f'(x)|^q [L(x^{3p}, b^{3p}) - x^{3p}] + |f'(b)|^q [b^{3p} - L(x^{3p}, b^{3p})] \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(lnx - lna)^{1-\frac{1}{q}}}{(3p)^{\frac{1}{q}}} \left(L\left(a^{\frac{3(q-p)}{q-1}}, x^{\frac{3(q-p)}{q-1}} \right) \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(|f'(a)|^q [L(a^{3p}, x^{3p}) - a^{3p}] + |f'(x)|^q [x^{3p} - L(a^{3p}, x^{3p})] \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 4.3 ve integraller için mutlak değer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b u f(u) du \right|$$

$$\leq (lnb - lnx) \int_0^1 \left(b^{3t} x^{3(1-t)} \right) |f'(b^t x^{1-t})| dt$$

$$+(lnx-lna)\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)|f'(x^t a^{1-t})|dt$$

yazılır. Burada integraller için Power-mean eşitsizliği ve $|f'|^q$'nun GA −konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\left|b^2f(b)-a^2f(a)-2\int_a^b uf(u)du\right|$$

$$\leq (lnb-lnx)\left(\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)^{\frac{(q-p)}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\times\left(\int_0^1\left(b^{3t}x^{3(1-t)}\right)^p|f'(b^t x^{1-t})|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)\left(\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)^{\frac{(q-p)}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\times\left(\int_0^1\left(x^{3t}a^{3(1-t)}\right)^p|f'(x^t a^{1-t})|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (lnb-lnx)x^3\left(\int_0^1\left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{3t(q-p)}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(\frac{b}{x}\right)^{3pt}[t|f'(b)|^q+(1-t)|f'(x)|^q dt]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnx-lna)a^3\left(\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3t(q-p)}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^{3pt}[t|f'(x)|^q+(1-t)|f'(a)|^q dt]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{(lnb-lnx)^{1-\frac{1}{q}}}{(3p)^{\frac{1}{q}}}\left(L\left(x^{\frac{3(q-p)}{q-1}},b^{\frac{3(q-p)}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(|f'(x)|^q[L(x^{3p},b^{3p})-x^{3p}]+|f'(b)|^q[b^{3p}-L(x^{3p},b^{3p})]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnx-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{(3p)^{\frac{1}{q}}}\left(L\left(a^{\frac{3(q-p)}{q-1}},x^{\frac{3(q-p)}{q-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(|f'(a)|^{q}[L(a^{3p},x^{3p})-a^{3p}]+|f'(x)|^{q}[x^{3p}-L(a^{3p},x^{3p})]\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın temel kısmını oluşturan dördüncü bölümde elde edilen lemmalar dikkate alınarak Hölder eşitsizliği ve Power- Mean eşitsizliği yardımıyla özel ortalamaları içeren yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar çalışma süresince kullanılan lemmaların genelleştirmelerini veya daha farklı ifade edilmiş şekillerini elde ederek Hermite–Hadamard tipinde yeni integral eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

Adams, R.A. and Essex, C., (2010). Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.

Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. and Sevinç, F., (2015). Some Inequalities For GG-Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 104.

Akdemir, A.O., (2012). Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Akdemir, A.O., Set, E. and Özdemir, M.E., (2015). New Generalizations For Functions whose Second Derivatives are GG- Convex. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 102

Akdemir, A.O., Set, E., Özdemir,M.E. and Yalçın, A., (2015). New Generalizations for Functions whose Second Derivatives are GG-Convex. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 102.

Alomari, M.V.N., (2011). Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s-Convex, Quasi Convex and r-Convex Mappings and Applications. Ph.D. Thesis. Faculty of Science and Technology Universiti Kebansgsaan, Malaysia, Bangi.

Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., (2007). Generalized convexity and İnequalities , J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294-1308.

Anton, H., (1994). Elementary Linear Algebra, JhonWiley & Sons, Inc.

Avcı-Ardıç, M., (2013). Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları İçin İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Avcı-Ardıç, M., Akdemir, A.O. and Set, E., (2015). New Integral Via GA-Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 103.

Avcı-Ardıç, M., Akdemir, A.O. and Set, E., (2016). New Ostrowski Like Inequalities for GG-Convex and GA-Convex Functions. Mathematical Inequalities and Applications. Vol. 19, number: 4. (1159-1168).

Azpeitia, A.G., (1994). Convex Functions and the Hadamard Inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bayraktar, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Bayraktar, M., (2010). Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Barani, A. and Malmir, F., (2015). Hermite-Hadamard Inequality for Geometrically Quasi Convex Functions on Co-ordinates. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 37.

Carter, M. and van Brunt, B., (2000). The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. Springer-Verlag, 228, New York.

Dragomir, S.S., (2015). Weighted Integral Inequalities for GG-Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 75.

Dragomir, S.S., (2015a). Inequalities of Hermite – Hadamard Type for GA-Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 30.

Dragomir, S.S., (2015b). Some New Inequalities of Hermite – Hadamard Type for GA-Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 33.

Dragomir, S.S., (2016). Some Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator Convex Functions and Positive Maps. RGMIA Research Report Collection, vol. 19, article 80.

Dwilewicz, R.J., (2009). A Short History of Convexity. Differential Geometry – Dynamical Systems, vol. 11, pp: 112-129.

Ekinci, A., (2014). Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Erdem, Y., Ögünmez, H. and Budak, H., (2016). Some Generalized Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Strongly s-Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 19, article 110.

Erden, S. and Sarıkaya, M.Z., (2015). On Generalized Some Inequalities for Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 56.

Gökçe, L., (2015). Konveks Dönüşümler için İntegral Eşitsizlikler. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce Üniversitesi, Düzce.

İşcan, İ., (2013). New General İntegral İnequalities for Some GA-Convex and Quasi-Geometrically convex Functions via Fractional İntegrals. Journal of İnequalities and Application. 491.

İşcan, İ., (2014). Hermite – Hadamard Type Inequalities for GA-s Convex Functions. Le Mathematiche, vol.LXIX- Fasc.II pp.129-146.

İşcan, İ. and Kunt, M., (2015). Hermite- Hadamard Fejer Type Inequalities for GA-Convex Functions via Fractional Integrals. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 101.

Ji, A.P., Zhang, T.Y. and Qi, F., (2013). İntegral İnequalities of Hermite – Hadamard Type for (α, m) – GA – Convex Functions. arXiv:1306.0852v1 [math.CA].

Kavurmacı, H., Avcı, M. and Özdemir, M.E., (2011). New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Convex Functions with Applications. Journal of Inequalities and Applications. Vol: 2011, article:86.

Kavurmacı, H., (2012). Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite – Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk üniversitesi, Erzurum.

Kavurmacı Önalan, H. and Tunç, M., (2014). Some Simpson Type Integral Inequalities for s-Geometrically Convex Functions with Application. Le Matematiche, vol.LXIX – Fasc.II pp.193-204.

Kunt, M. and İşcan, İ., (2015). On New Inequalities of Hermite – Hadamard – Fejer Type for GA-Convex Functions via Fractional Integrals. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 108.

Latif, M.A., (2014). New Hermite – Hadamard Type Inequalities for GA-Convex with Application. RGMIA Research Report Collection, vol. 17, article 124.

Latif, M.A., (2015). Hermite – Hadamard Type Inequalities for GA-Convex Functions on the Co-ordinates with Applications. Pakistan Academy of Sciences 52(4):367-379.

Latif,M.A., Dragomir, S.S. and Momoniat, E., (2015). Some Fejer Type Inequalities for Geometrically- Convex Functions with Application. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 25.

Mitrinović, D.S., (1970). Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinović, D.S.,Pečarić, J.E. and Fink, A.M., (1993). Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Niculescu, C.P , Convexity According to the Geometric Mean, Math. Inequal. Appl. 3(2) (2000), 155-167. Avaible online at http://dx.doi.org/10.7153/mia-03-19.

Özdemir, M.E. and Yıldız, Ç., (2011). New Inequalities for Hermite-Hadamard and Simpson Type and Applications. arXiv: 1103.1965v1 [math.CA].

Özdemir, M.E. and Yıldız, Ç., (2013). New Ostrowski Type Inequalities for Geometrically Convex Functions. International Journal of Modern Mathematical Sciences. Vol: 8, number:1. (27-35).

Özdemir, M.E., Yıldız, Ç. and Gürbüz, M.,(2014). A Note on Geometrically Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 17, article 180.

Özdemir, M.E., Avcı-Ardıç, M. and Kavurmacı-Önalan, H., (2016). Hermite-Hadamard Type inequalities for s-Convex and s-Concave Functions via Fractional Integrals. Turkish Journal of Science, cilt:1 article :1, 28-40.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., (1992). Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E., (1973). Convex Functions. Academic Press, 300 pp, New York.

Sarıkaya, M.Z. and Budak, H.,(2015). On Generalized Hermite- Hadamard Inequality for Generalized Convex Function. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 64.

Sarıkaya, M.Z. and Erden, S., (2015). New Weighted Integral Inequalities for Twice Differentiable Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 54.

Set., E., (2010). Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Set, E., Sarıkaya, M.Z., Özdemir, M.E. and Yıldırım, H., (2014). The Hermite-Hadamard's Inequality for Some Convex Functions via Fractional Integrals and Related Results. JAMSI vol:10, no:2.

Set, E., İşcan, İ. and Paca, S., (2015). Hermite- Hadamard Fejer Type Inequalities via Fractional Integrals. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 2.

Turhan, S., (2016). GA-konveks ve Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Yeni İntegral Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu Üniversitesi, Ordu.

Yaldız, H., (2016). Kesirli İntegraller ile İlgili Bazı Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce Üniversitesi, Düzce.

Yaldız, H. and Sarıkaya, M.Z., (2014). On Generalized Hermite – Hadamard Type Integral Inequalities Involving Riemann- Liouville Fractional Integrals. Nihonkai Math. J. Vol : 25, Number: 2. 93-104.

Yıldız, Ç., (2014). n. Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Yıldız, Ç. and Özdemir, M.E., (2015). On Generalized Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Convex Functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 4.

Zhang, T.Y., Ping, A. and Qi,F., (2013). Some Inequalities of Hermite – Hadamard Type for GA-Convex Functions with Applications to Means, Le Matematiche, vol:68, no 1.pp . 229-239.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kübra YILDIZ

Doğum Yeri : Şahinbey / Gaziantep

Doğum Tarihi : 20.10.1991

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : 19 Mayıs Anadolu Lisesi (2005 – 2009).

Lisans : Adıyaman Üniversitesi - Matematik Bölümü (2009 –2014-Şubat).

Yüksek Lisans : Adıyaman Üniversitesi – Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü (2014 - 2017).