T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAJORİZASYON YÖNTEMİYLE ELDE EDİLEN GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

İRFAN GÜLMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2020

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAJORİZASYON YÖNTEMİYLE ELDE EDİLEN GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

İrfan GÜLMEZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 06/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Danışman

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA
Üye

Doç. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü V.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAJORİZASYON YÖNTEMİYLE ELDE EDİLEN GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

İrfan GÜLMEZ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Yıl : 2020, Sayfa sayısı: VI + 52

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA

Bu tez çalışması derleme bir çalışma olup bu tezimizde, majorizasyon teorisi kullanılarak bir üçgenin açıları ve kenarları ile ilgili eşitsizlikler üzerine çalışılmıştır.

Tezin birinci bölümü giriş için ayrılmış olup bu bölümde majorizasyon tarihi üzerine bilgi verilmiştir. İkinci bölüm bazı temel kavram ve teoremlere ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde majorizasyon, doubly stochastic matris ve Schur – konveks fonksiyon kavramları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde ise özel üçgenlerin kenar ve açılarıyla ilgili eşitsizlikler detaylı olarak ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Majorizasyon ; Doubly Stochastic Matris ; Schur – Konveks Fonksiyon ; Geometrik Eşitsizlikler.

ABSTRACT

MSc Thesis

GEOMETRIC INEQAULITIES BY USING MAJORIZATION

İrfan GÜLMEZ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Year : 2020 , Number of pages: VI+52

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Assoc. Prof. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Asst. Prof. Dr. Bayram BALA

As this thesis is a review, in this thesis, by using majorization theory, inequalities related to the angles and edges of a triangle are considered.

The first part of the thesis is reserved for introduction and in this section information on the history of majorization is given. The second section is devated to some basic concepts and theories.

In the third section, concepts of majorization, doubly stochastic matris and Schur – convex functions are introduced.

In the fourth section, ınequalities related to the edges and angles of special triangles are discassed in detail.

Key Words: Majorization; Doubly stochastic matrix; Schur – Convex Function; Geometric Inequalities.

BEYAN

"Majorizasyon yöntemiyle elde edilen geometrik eşitsizlikler" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

İrfan GÜLMEZ

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyip bana rehberlik eden, kıymetli bilgi, birikim, tecrübesi ile bana yol gösterici ve çalışmalarıma etkin katkı sağlayan, her türlü tökezlememde elimden tutup kaldıran değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ' e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bu tez çalışmamda ilgisini, önerilerini göstermekten kaçınmayan Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI' ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ailem ve eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{R}_+$	: Negatif olmayan reel sayılar
I	: $\mathbb{R}$ de herhangi bir aralık
$\mathbb{R}^n$	: n tane reel bileşenli vektörlerin kümesi
$\mathbb{R}^n_+$	: n tane negatif olmayan reel bileşenli vektörlerin kümesi
E^n	: n boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_{++}$	: Bileşenleri pozitif reel olan sıralı n-liler
$\mathbb{R}_{++}$	: Pozitif reel sayılar
$x^{\downarrow}$	: $x_1^{\downarrow} \geq x_2^{\downarrow} \geq \ldots \geq x_n^{\downarrow}$ iken $x^{\downarrow} = (x_1^{\downarrow}, x_2^{\downarrow}, \ldots, x_n^{\downarrow})$
$x^{\uparrow}$	: $x_1^{\uparrow} \leq x_2^{\uparrow} \leq \ldots \leq x_n^{\uparrow}$ iken $x^{\uparrow} = (x_1^{\uparrow}, x_2^{\uparrow}, \ldots, x_n^{\uparrow})$
$x \prec_w y$	: x, y tarafından zayıf majorize edilir yani $\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$ $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$
$x \prec y$	: x, y tarafından majorize edilir yani $x \prec_w y$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$
$x \prec_{w\log} y$	: x, y tarafından zayıf log-majorize edilir yani $\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$ $1 \leq k \leq n$
$x \prec_{\log} y$	: x, y tarafından log-majorize edilir yani $x \prec_{w\log} y$ ve $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$

Kısaltmalar

Log	: Logaritma fonksiyonu
In	: Doğal logaritma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Eşitsizliklerin matematiğin bir çok dalında rol oynadığı ve çok farklı uygulamalara sahip olduğu biliniyor. Bu tez çalışmasında birçok bilim dalında uygulaması bulunan özellikle eşitsizlik üretmede kullanılan majorizasyon teorisi üzerinde çalışılacaktır.

Matematikte birçok iyi bilinen eşitsizlik $\bar{y} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} y_i$ olmak üzere

$$\phi\left(\bar{y}, \bar{y}, ..., \bar{y}\right) \leq \phi\left(y_1, y_2 ..., y_n\right)$$

formunda gösterilebilir. Dolayısıyla bu tarz eşitsizlikler $x_1, x_2, ..., x_n$ ' ler birbirinden farklı, lakin $y_1, y_2, ..., y_n$ ' lere nazaran "daha az yayılmış" olması durumunda

$$\phi\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \leq \phi\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$$

gibi daha genel karşılaştırmaların doğru olup olmadığı sorusunu ortaya çıkarır. Örneğin

$$\sum_{i=1}^{n} g\left(\bar{y}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} g\left(y_i\right)$$

eşitsizliğinin $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olması durumunda doğru olduğu gerçeği $x_1, x_2 ..., x_n$ ve $y_1, y_2 ..., y_n$ ' ler üzerine hangi şartlar koymalıyız ki

$$\sum_{i=1}^{n} g\left(x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} g\left(y_i\right) \qquad (1)$$

eşitsizliği de doğru olsun sorusunu sormamıza sebep olur.

Bu problem ünlü matematikçiler Hardy vd. (1929) tarafından sorulmuş ve yine kendileri tarafından "(1) eşitsizliğinin bütün konveks fonksiyonlar için doğru olması ancak ve ancak $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ vektörünün $y = \left(y_1, y_2 ..., y_n\right)$ vektörü tarafından majorize edilmesidir" şeklinde cevaplanmıştır.

Bu noktada "Majorizasyon nedir?" sorusuna cevap vermek gerekir.

$x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $x^{\downarrow} = \left(x_1^{\downarrow}, x_2^{\downarrow} ..., x_n^{\downarrow}\right)$ vektörü $x_1^{\downarrow} \geq x_2^{\downarrow} \geq ... \geq x_n^{\downarrow}$ olacak şekilde azalan sırada sıralanmış bileşenlere sahip vektöre karşılık gelsin. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri ve $k = 1, 2, ..., n-1$ için

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$$

şartları sağlanıyorsa x vektörü y vektörü tarafından majorize ediliyor denir ve $x \prec y$ şeklinde gösterilir. Eğer $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$$

şartı sağlanıyor ise x vektörü y vektörü tarafından zayıf majorize ediliyor denir ve $x \prec_w y$ ile gösterilir.

Majorizasyon kavramının önemini artıran en önemli çalışmalardan biri Schur' un (1923) Hadamard determinant eşitsizliği üzerine yaptığı çalışmadır. Bu çalışmasında Schur, pozitif tanımlı hermityen matrisin köşegen elemanları olan $a_1, a_2, ..., a_n$' nin aynı matrisin özdeğerleri olan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tarafından majorize edildiğini ispatlamıştır. Bu durum sembolik olarak

$$\left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \prec \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) \quad (2)$$

ile gösterilebilir. Horn (1954) yaptığı bir çalışmasında Schur' un elde ettiği sonuçlara farklı bir bakış açısı getirmiştir. (2) durumunu sağlayan vektörlerin bir hermityen matrisin köşegen elemanları ve özdeğerleri olabileceğini göstermiştir.

Majorizasyon konusu, matris teoride halen aktif bir şekilde çalışılmaktadır. İçerisinde özdeğerler, singüler değerler, matris normları ve determinant barındıran birçok eşitsizlik majorizasyon ile elde edilmeye devam etmektedir.

Özellikle birçok klasik determinant eşitsizliği (Hadamard-Fischer eşitsizliği, Oppenheim eşitsizliği) majorizasyon konusunda kendisine karşılık bulmaktadır. Örneğin X, Y nxn matrisler ve özdeğerleri pozitif reel sayılar ise

$$\lambda(X) \succ \lambda(Y) \Rightarrow \det(Y) \ge \det(X)$$

iyi bilinen bir majorizasyon örneğidir [9].

Kuantum bilgi teorisi son zamanlarda birçok bilim dalından araştırmacının çalıştığı popüler bir alandır. Bu bilim dalı da majorizasyonu sıklıkla kullanmaktadır.

Örneğin kuantum durumlarının çok karışık ilişkileri hermityen matrislerin majorizasyon ilişkileri ile aynıdır.

20. yüzyılın başlarında ekonomistler gelir eşitsizliği ile ilgilenmeye başladılar. Gerekli önlemleri alabilmek için bir gelir dağılımının diğerinden daha dengeli olup olmadığını belirlemeleri gerekti. Bu bağlamda yapılan ilk çalışmada Lorenz, adına daha sonra Lorenz eğrisi diyeceğimiz ve gelir dağılımında adaleti göstermek amacıyla kullanılan bir eğriyi literatüre kattı. $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ ve $y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$ toplam gelirin bireylere dağılımı sonucunda herbir bireyin gelirini gösteren örnek iki durum olsun. Lorenz' e göre $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$' nin $y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$' e göre daha iyi bir gelir dağılımı olması için gerek ve yeter şart x vektörünün y vektörü tarafından majorize edilmesidir.

Özetle, majorizasyon teorisi bilimin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Eşitsizlik üretmede temel araçlardan biri olan majorizasyon teoriyi bizde tez çalışmasında kullanacağız. Özellikle üçgenlerin kenarları ve açıları ile ilgili eşitsizlikler elde etmeye çalışacağız.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmamızda kullanılacak olan bazı temel, teoremler ve eşitsizliklere bu bölümde değinilmiştir.

Tanım 2.1. $X \subset E^n$ kümesi verilsin. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ ise X e konveks küme denilir.

$[x_1, x_2] = \{\lambda . x_1 + (1-\lambda)x_2 : 0 \le \lambda \le 1\}$ kümesine x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası denilir [4].

Tanım 2.2. $X \subset E^n$ konveks kümesi ve $f : X \to E$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x)_1 + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (1)$$

sağlanıyorsa, o halde f fonksiyonuna konveks fonksiyon denilir. Eğer $\lambda \in (0,1)$ ve $x_1 \ne x_2$ olduğunda (1) eşitsizliği kesin küçüktür şeklinde (yani $<$) sağlanıyorsa f ’ ye kesin konveks fonksiyon denilir [4].

Tanım 2.3. $X \subset E^n$ konveks kümesi ve $f : X \to E$ fonksiyonu verilsin, eğer $-f$ konveks fonksiyon ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir [4].

Tanım 2.4. (Jensen eşitsizliği): Konveks $X \subset E^n$ kümesi üzerinde konveks $f : X \to E$ fonksiyonu ve

$$\Lambda_m = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \middle| \lambda_i \ge 0,\ i = 1,2,...,m : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right\}$$

kümesi verilsin. O halde $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \Lambda_m$ ve $x_i \in X$, $i = 1,2,...,m$ için

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$$

eşitsizliğine Jensen eşitsizliği denir [4].

Örnek 2.5. $f(x) = -Inx$ fonksiyonu $E_+ = \{x \in E : x > 0\}$ kümesinde konvekstir. O halde Jensen eşitsizliğine göre her $x_i > 0$, $i = 1,2,...,m$, $\lambda \in \Lambda_m$, $m = 1,2,...$ için

$$-In\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right)\leq -\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Inx_i = -In\left(\prod_{i=1}^{m}x_i^{\lambda_i}\right)$$

bu eşitsizlik elde edilir buradan da

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{m}x_i^{\lambda_i}$$

bulunur. Eğer burada $\lambda_i = \dfrac{1}{m}, \quad i=1,2,,...,m$ alınırsa

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{m}x_i\right)^{\frac{1}{m}}$$

sonucu elde edilir [4].

Tanım 2.6. *A,* sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f: A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x_1, x_2 \in A$ $x_1 < x_2$ için $f(x_1)\leq f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna A üzerinde monoton artan fonksiyon, $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna kesin artan fonksiyon denir.

Benzer şekilde, eğer her $x_1, x_2 \in A$ $x_1 < x_2$ için $f(x_1)\geq f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna A üzerinde monoton azalan fonksiyon, $f(x_1) > f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna kesin azalan fonksiyon denir [5].

Teorem 2.7. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ ve $f(0)\leq 0$ koşulunu sağlayan f fonksiyonu kesin konveks fonksiyon olsun. Eğer $x_1, x_2,..., x_n$ negatif olmayan sayılar ve en az 2 tane x_i sıfırdan farklı ise o halde

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) < f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

koşulu sağlanır [9].

İspat : n=2 durumu için aşağıdaki gibi ispatlanır. Genellikle bu durum tümevarımla gösterilir.

$x_1, x_2 > 0$ olsun.

$$x_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}(x_1 + x_2) + \frac{x_2}{x_1 + x_2}.0$$

yazılabilir. O halde

$$f(x_1) < \frac{x_1}{x_1 + x_2} f(x_1 + x_2) + \frac{x_2}{x_1 + x_2}.f(0)$$

dır. Benzer yolla

$$f(x_2) < \frac{x_1}{x_1 + x_2}.f(0) + \frac{x_2}{x_1 + x_2}.f(x_1 + x_2)$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(x_1) + f(x_2) < f(x_1 + x_2) + f(0)$$

elde edilir. İstenilen eşitsizlik $f(0) \leq 0$ olarak elde edilir.

3. MAJORİZASYON

$\mathbb{R}^n$ de iki vektör birçok yolla karşılaştırılabilir. Örneğin iki vektörün normları hesaplandığında biri diğerinden daha uzun veya bileşenler karşılaştırılarak biri diğerini domine ediyor denebilir.

İki vektör adına majorizasyon denen bir yöntemle de karşılaştırılabilir. Bu yöntemde vektörler bileşenlerinin dağınıklığına göre karşılaştırılır.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ve } y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$$

vektörleri verilsin. Eğer

1) $\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \quad k = 1, 2, \dots, n-1$

ve

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$

şartlarını sağlıyorsa y vektörü x vektörünü majorize ediyor veya x vektörü y vektörü tarafından majorize ediliyor denir. $x \prec y \quad ve \quad y \succ x$ ile gösterilir. Eğer (2) durumu yerine $\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i$ eşitsizliği gerçekleşirse y vektörü x vektörünü zayıf majorize ediyor veya x vektörü y vektörü tarafından zayıf majorize ediliyor denir. $x \prec_w y \quad ve \quad y \succ_w x$ ile gösterilir [1].

Örneğin $x = (-1, 0, 1)$, $y = (3, -2, -1)$, $z = (3, 0, 0)$ vektörlerini alırsak $x \prec y \quad ve \quad y \prec_w z$ olduğu görülür.

Vektörlerin bileşenlerinin pozisyonları majorizasyon için önemli değildir. Eğer x vektörü, y vektörü tarafından majorize edilirse, x vektörünün bileşenlerinin herhangi bir sıralamasından elde edilen vektör de y vektörü tarafından majorize edilir.

Kolayca görüleceği gibi majorizasyon ve zayıf majorizasyon geçişme özelliğine sahip ikili işlemlerdir. Yani

$$x \prec y,\ y \prec z \Rightarrow x \prec z$$

ve

$$x \prec_w y,\ y \prec_w z \Rightarrow x \prec_w z \ [1].$$

Majorizasyon ve zayıf majorizasyon ait bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1. $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ vektörlerini alalım.

1) $\forall\ i = 1, 2, ..., n\ için \quad x \prec y \Rightarrow y_n^{\downarrow} \leq x_i \leq y_1^{\downarrow}$

2) $p, q \geq 0\ ve\ p + q = 1$ olmak üzere $x \prec z,\ y \prec z \Rightarrow px + qy \prec z$

dır.

3) $p, q \geq 0\ ve\ p + q = 1$ olmak üzere $x \prec_w z,\ y \prec_w z \Rightarrow px + qy \prec_w z$

dır.

4) $x \prec y,\ y \prec x \Leftrightarrow$ bazı P permütasyon matrisleri için

$$x = yP$$

olmasıdır.

5) $x \prec_w y,\ y \prec_w x \Leftrightarrow$ bazı P permütasyon matrisleri için

$$x = yP$$

olmasıdır.

6) $x \prec y \Leftrightarrow x \prec_w y$ ve $-x \prec_w -y$

olmasıdır [1].

Sıradaki teorem zayıf majorizasyon ve majorizasyon arasındaki ilişkiyi bileşensel baskınlık $(\leq)$ kullanarak karakterize etmektedir.

Teorem 3.2. Aşağıdaki durumlar denktir.

1) $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere $x \prec_w y$

2) Bazı $z \in \mathbb{R}_+^n$ için $x \leq z$ ve $z \prec y$

3) Bazı $u \in \mathbb{R}_+^n$ için $x \prec u$ ve $u \leq y$ [1].

Teorem 3.3. $x, y \in \mathbb{R}^m\ ve\ u, v \in \mathbb{R}^n$ olsun. Öyleyse

1) $x \prec y, \quad u \prec v \Rightarrow (x, u) \prec (y, v)$

2) $x \prec_w y, \quad u \prec_w v \Rightarrow (x, u) \prec_w (y, v)$

3) $x \prec y, \quad u \prec v \Rightarrow x + u \prec y^{\downarrow} + v^{\downarrow} \quad (m = n)$

4) $x \prec_w y, \quad u \prec_w v \Rightarrow x + u \prec_w y^{\downarrow} + v^{\downarrow} \quad (m = n)$ [1].

Teorem 3.4. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,\dots y_n)\in\mathbb{R}^n$ vektörleri alınsın. Öyleyse

1) $x \prec_w |x|$

2) $|x+y| \prec_w |x|^{\downarrow} + |y|^{\downarrow}$

3) $x^{\downarrow} + y^{\uparrow} \prec x + y \prec x^{\downarrow} + y^{\downarrow}$

4) $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} y_i^{\uparrow} \le \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} y_i^{\downarrow}$

ifadeleri geçerlidir [1].

Teorem 3.5. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,\dots y_n)\in\mathbb{R}^n$ vektörleri alınsın. Öyleyse her $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ için

$$x \prec y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow}$$

ve her $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ için

$$x \prec_w y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow} u_i^{\downarrow}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

Birazdan verilecek olan teorem için gerekli olan bir eşitsizlik lemma olarak verilsin.

Lemma 3.6. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ vektörünü alınsın. Eğer $x_1 \ge x_2 \ge,\dots,\ge x_n$ ise $m \le n$ için

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat : $m \le n$ için $(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}) \prec (\frac{1}{m},\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m},0,0,\dots,0)$ olduğundan Teorem 3.5 gereğince

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i \le \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}x_i$$

olduğu açıktır.

Şimdi ise bu çalışma için önem arz eden bir teorem verilsin.

Teorem 3.7. $a_1, a_2, ..., a_n$ negatif olmayan ve $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ eşitliğini sağlayan sayılar olsun. Öyleyse

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) \prec (a_1, a_2, ..., a_n) \prec (1, 0, ..., 0)$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat: Bir önceki lemmadan $m \leq n$ pozitif tamsayıları için

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\downarrow}$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca $a_1, a_2, ..., a_n$ sayılarının aritmetik ortalamasıda v olsun. Öyleyse

$$mv \leq \sum_{i=1}^{m} a_i^{\downarrow}$$

olduğu aşikardır. Buradan da $(v, v, ..., v) \prec (a_1, a_2, ..., a_n)$ elde edilir. Özel olarak $v = \frac{1}{n}$ ve $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ alınırsa teorem elde edilmiş olur.

Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı açıktır.

3.1 Doubly Stochastic Matris

Satır ve sütun toplamları ayrı ayrı 1 e eşit olan bileşenleri negatif olmayan kare matrise doubly stochastic matris denir.

Sembolik olarak negatif olmayan bir A matrisi $e = (1, 1, ... 1) \in \mathbb{R}^n$ vektörü için

$$eA = e \quad ve \quad Ae^T = e^T$$

eşitliklerini sağlarsa A matrisine doubly stochastic matris denir.

Eğer satır ve sütun toplamları ayrı ayrı 1 den küçük veya en fazla 1 oluyorsa bu A matrisine doubly substochastic matris denir. Sembolik olarak da

$$eA \leq e \text{ ve } Ae^T \leq e^T$$

eşitsizliklerini sağlayan negatif olmayan A matrisine doubly substochastic matris denir [1].

Teorem 3.1.1. A negatif olmayan bir nxn matris olsun. A' nın doubly stochastic matris olması için gerek yeter şart bütün $x \in \mathbb{R}^n$ satır vektörleri için $xA \prec x$ durumunun sağlamasıdır [1].

Şimdi majorizasyon teorisi için önemli bir teorem verilsin.

Teorem 3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri alınsın. x vektörünün y vektörü tarafından majorize edilmesi için gerek ve yeter şart bazı D doubly stochastic matris için

$$x \prec y \Leftrightarrow x = yD$$

eşitliğinin sağlamasıdır [10].

Örnek 3.1.3. $x = (1,2,3)$ *ve* $y = (6,0,0) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri alınsın.

$$x \prec y$$

olduğu kolayca görülmektedir.

$$x = yD$$

eşitliğini sağlayan D doubly stochostic matrisi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir [1].

Örnek 3.1.4. Teorem 3.7 de verilen ve $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ şartını sağlayan negatif olmayan a_i sayılardan oluşan $(a_1, a_2, ..., a_n)$ vektörünün

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$$

vektörünü majorize ettiği ispatlamıştı. Bu ispatı

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) = (a_1, a_2, ..., a_n)D$$

eşitliğinde

$$D=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

matrisinin doubly stoctastic matris olduğu gerçeğinden yararlanarak kolayca ispat edilir [1].

3.2. Majorizasyon ve Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1. $\mathbb{R}^n$ de tanımlı reel değerli bir Φ fonksiyonu için

$$x \prec y \Rightarrow \Phi(x) \le \Phi(y)$$

durumu gerçekleşirse Φ fonksiyonuna Schur - konveks fonksiyon adı verilir.

Örneğin $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ olmak üzere ve

$$\Phi(x)=|x_1|^2+|x_2|^2+...+|x_n|^2$$

fonksiyonları Schur - konveks fonksiyonlardır. Genel olarak $f(x)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı konveks fonksiyonlar ise

$$\Phi(x)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$$

fonksiyonu Schur- konveks fonksiyonlardır .

$x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x)$ denildiğinde anlaşılması gereken şey $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ iken $f(x)=(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$ olduğudur.

Örneğin $x^2=(x_1^{\,2}, x_2^{\,2}, ..., x_n^{\,2})$ ve $Inx=(Inx_1, Inx_2, ..., Inx_n)$ gibi [1].

Teorem 3.2.2. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri alınsın. Eğer $f(x)$ konveks fonksiyon ise

$$x \prec y \Rightarrow f(x) \prec_w f(y)$$

dır.

Eğer $f(x)$ hem artan, hem de konveks fonksiyon ise

$$x \prec_w y \Rightarrow f(x) \prec_w f(y)$$

dır [1].

Sonuç 3.2.3. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri alınsın. Öyleyse

$i)$ $x \prec y \Rightarrow |x| \prec_w |y|$, $\quad \left((|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) \prec_w (|y_1|, |y_2|, ..., |y_n|)\right)$

$ii)$ $x \prec y \Rightarrow x^2 \prec_w y^2$

$iii)$ $Inx \prec_w Iny \Rightarrow x \prec_w y$, $\quad x_i > 0$, $\; y_i > 0$ [1].

İspat: $|t|$ ve t^2 fonksiyonları konveks fonksiyonlar, e^t fonksiyonu ise hem artan hem de konveks fonksiyon olduğundan Teorem 3.2.2 yardımıyla kolaylıkla görülebilir.

Majorizasyon kavramı konveks fonksiyonlar yardımı ile de karakterize edilebilir.

Teorem 3.2.4. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri alınsın. Öyleyse

1) Bütün $f(x)$ konveks fonksiyonları için

$$x \prec y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

2) Bütün artan ve konveks $f(x)$ fonksiyonlar için

$$x \prec_w y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \text{ [1].}$$

3.3 Logaritmik Majorizasyon

Tanım 3.3.1. x_i ve y_i ler negatif olmayan sayılar olmak üzere $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektörleri alınsın. Eğer

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \qquad k = 1, 2, ..., n-1$$

ve

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$$

şartları sağlanırsa x vektörü y vektörü tarafından log-majorize ediliyor denir ve $x \prec_{\log} y$ ile gösterilir. Eğer

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow} \qquad k = 1, 2, ..., n$$

eşitsizliği geçerliyse x vektörü y vektörü tarafından zayıf log-majorize ediliyor denir ve $x \prec_{w\log} y$ şeklinde gösterilir. Majorizasyon ile logaritmik majorizasyon arasında bir geçiş vardır. $x \prec_{w\log} y$ ile $Inx \prec_w Iny$ aynıdır. Çünkü

$$\begin{aligned} Inx \prec_w Iny &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} Inx_i \leq \sum_{i=1}^{n} Iny_i \\ &\Leftrightarrow In\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \leq In\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right) \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i \\ &\Leftrightarrow x \prec_{w\log} y \end{aligned}$$

Aynı şekilde $x \prec_{\log} y \Leftrightarrow Inx \prec Iny$ yazılabilir [1].

Şimdi pozitif bileşenli vektörler için logaritmik majorizasyon majorizasyondan daha kuvvetli olduğunu gösteren bir teorem verilsin.

Teorem 3.3.2. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri alınsın.

$$x \prec_{w\log} y \Rightarrow x \prec_w y$$

dır.

Yani $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$$

önermesi geçerlidir [1].

İspat : $x \prec_{w\log} y$ ile $Inx \prec_w Iny$ nin aynı olduğu biliniyor. Ayrıca e^x fonksiyonu artan ve konveks fonksiyon olduğundan Teorem 3.2.4 ün ikinci kısmı gereğince ispat açıktır.

Teorem 3.3.3. $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$x \prec y \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \geq \prod_{i=1}^{n} y_i$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat : $f(x) = -Inx$ konveks fonksiyonu alınsın. Teorem 3.2.4 ün 1. maddesinden

$$-\sum_{i=1}^{n} Inx_i \leq -\sum_{i=1}^{n} Iny_i$$

elde edilir buradan da

$$\sum_{i=1}^{n} Inx_i \geq \sum_{i=1}^{n} Iny_i$$
$$\Rightarrow In\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \geq In\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)$$
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \geq \prod_{i=1}^{n} y_i$$

sonucuna varılır.

3.4 Örnekler

$x_1, x_2, ..., x_n$ toplamları 1 olan pozitif sayılar olsun. Aşağıdaki eşitsizlikleri ispatları verilsin.

$a)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i} \geq \frac{n}{n-1}$

$b)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1+x_i}{x_i} \geq n.(n+1)$

$c)\quad n-1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{1+x_i} \geq \frac{n.(n-1)}{n+1}$

$d)\quad \sum_{i=1}^{n} x_i In\frac{1}{x_i} \leq In\, n$ [1].

Çözüm: $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) \prec (x_1, x_2, ..., x_n) \prec (1, 0, ..., 0)$

olduğu biliniyor. Teorem 3.2.4 ün birinci kısmını ve aşağıdaki $(0,1)$ aralığı üzerindeki tanımlı konveks fonksiyonlar kullanılarak istenen eşitsizlikler elde edilmiş olur.

a) $g(t)=\dfrac{t}{1-t}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur. Teorem 3.2.4 gereğince

$$x \prec y \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

olduğu biliniyor. $x=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},...,\dfrac{1}{n}\right)$ ve $y=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ vektörleri alınırsa

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \prec (x_1,x_2,...,x_n)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{1}{n}\right) \le f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}+...+\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \le \frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}+...+\frac{x_n}{1-x_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+...+\frac{1}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}$$

elde edilir.

b) $f(t)=\dfrac{1+t}{t}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur. Teorem 3.2.4 gereğince

$$x \prec y \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

olduğu biliniyor. $x=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},...,\dfrac{1}{n}\right)$ ve $y=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ vektörleri alınırsa

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \prec (x_1,x_2,...,x_n)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{1}{n}\right) \le f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$$
$$\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+...+\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \le \frac{1+x_1}{x_1}+\frac{1+x_2}{x_2}+...+\frac{1+x_n}{x_n}$$
$$\Rightarrow (n+1)+(n+1)+...+(n+1) \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{x_i}$$
$$\Rightarrow n(n+1) \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{x_i}$$

elde edilir.

c) $g(t)=\dfrac{1-t}{1+t}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur. Teorem 3.2.4 gereğince

$$x \prec y \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

olduğu biliniyor. $x=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right)$ ve $y=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ vektörleri alınırsa

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \prec (x_1,x_2,...,x_n)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} g(y_i)$$
$$\Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{1}{n}\right)+...+g\left(\frac{1}{n}\right) \le g(x_1)+g(x_2)+...+g(x_n)$$
$$\Rightarrow \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+...+\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \le \frac{1-x_1}{1+x_1}+\frac{1-x_2}{1+x_2}+...+\frac{1-x_n}{1+x_n}$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}+...+\frac{n-1}{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{1+x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{n-1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{1-x_i}$$

elde edilir.

d) $f(t)=t.Int$ fonksiyonu konveks fonksiyondur. Teorem 3.2.4 gereğince

$$x \prec y \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

olduğu biliniyor. $x=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right)$ ve $y=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ vektörleri alınırsa

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \prec (x_1,x_2,...,x_n)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$$

$$\frac{1}{n}In\frac{1}{n}+\frac{1}{n}In\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}In\frac{1}{n} \leq x_1Inx_1+x_2Inx_2+...+x_nInx_n$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n}In\frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} x_iInx_i$$

$$\Rightarrow In\frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} x_iInx_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_iIn\frac{1}{x_i} \leq Inn$$

elde edilir.

4. SCHUR –KONVEKS FONKSİYONLAR

K kümesi üzerinde tanımlı $\leq$ kısmi sıralamayı alalım. Eğer K kümesi üzerinde tanımlı ϕ reel değerli fonksiyonu için

$$x \leq y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$$

önermesi gerçekleşiyorsa ϕ fonksiyonuna "monoton" , "izoton" veya "sıra koruyan" fonksiyon denir [2].

Majorizasyon sıralaması için sıra-koruyan fonksiyonlar üzerine ilk sistematik çalışmalar Schur tarafından 1923 yılında çalışılmıştır. Schur' un bu çalışmalarından ötürü bu fonksiyonlar Schur-konveks fonksiyonlar olarak adlandırılmıştır. Her ne kadar " Schur-artan" isminin daha uygun olacağı düşünülse de, literatürde "Schur-konveks" ismi daha çok kullanılmaktadır [2].

Tanım 4.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir ϕ fonksiyonu için $x, y \in A$ olmak üzere

$$x \prec y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$$

önermesi gerçekleşiyorsa ϕ fonksiyonuna A kümesi üzerinde schur- konveks fonksiyon

$$x \prec y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$$

önermesi gerçekleşiyorsa keskin Schur- konveks fonksiyon denir.

Eğer $A = \mathbb{R}^n$ ise, ϕ basitçe Schur – konveks veya keskin Schur – konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Benzer olarak

$$x \prec y \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(y)$$

önermesi gerçekleşiyorsa ϕ fonksiyonuna Schur – konkav fonksiyon adı verilir.

Sonuç olarak ϕ, Schur – konveks $\Leftrightarrow -\phi$, Schur – konkav olduğu kolaylıkla görülür [1].

Teorem 4.2. $\phi \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir ϕ fonksiyonunu ele alınsın. $x, y \in A$ olmak üzere

$$x \prec_w y \Rightarrow \phi(x) \le \phi(y)$$

olması için gerek ve yeter şart ϕ' nin A üzerinde artan ve Schur – konveks fonksiyon olmalıdır.

$\mathbb{R}^k$ üzerinde tanımlı reel değerli h fonksiyonunu ve $A \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı reel değerli $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ fonksiyonlarını içeren

$$\psi(x) = h\left(\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_k(x)\right)$$

bileşke fonksiyonu ele alınsın.

Aşağıdaki tablo Schur – konveks ve Schur – konkav fonksiyon elde etmenin değişik yollarını göstermektedir.

Unutulmamalıdır ki buradaki "artanlık" kavramı her bir değişken üzerinde tanımlanmaktadır [1].

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = h(\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_k(x))$$

	$h\ (\mathbb{R}^k)$	$\phi_i\ (A)$	$h(\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_k(x))\ (A)$
i)	Artan	Schur –konveks	Schur –konveks
ii)	Azalan	Schur –konveks	Schur –konkav
iii)	Artan	Schur-konkav	Schur konkav
iv)	Azalan	Schur konkav	Schur konveks
v)	Artan	Artan ve Schur-konveks	Artan ve schur-konveks
vi)	Azalan	Artan ve Schur-konveks	Azalan ve schur-konkav
vii)	Artan	Azalan ve Schur-konkav	Azalan ve schur-konkav
viii)	Azalan	Azalan ve Schur-konkav	Artan ve schur-konveks
ix)	Artan	Azalan ve Schur-konveks	Azalan ve schur-konveks
x)	Azalan	Artan ve Schur-konkav	Azalan ve schur-konveks
xi)	Artan	Artan ve Schur-konkav	Artan ve schur-konkav
xii)	Azalan	Azalan ve Schur-konveks	Artan ve schur-konkav

Tablo 1

i) maddesinin ispatı verilsin. $x \prec y$ ve her bir ϕ_i Schur – konveks olduğundan $\phi_i(x) \le \phi_i(y)$, $i \doteq 1,2,...,k,$ yazılabilir. h fonksiyonu her bir değişken üzerinde artan olduğundan

$$h\left(\phi_1(x),\phi_2(x),...,\phi_k(x)\right) \le h\left(\phi_1(y),\phi_2(y),...,\phi_k(y)\right)$$

bileşke fonksiyonunun da Schur – konveks olduğu görülür [1].

Bazı Özel Durumlar

1- (*i*) maddesinde $k=1$ alınarak Schur – konveks fonksiyonun ile artan fonksiyonunun bileşkesi de Schur – konveks olduğu görülür.

2- $\phi_1,\phi_2,...,\phi_k$ Schur – konveks fonksiyonlar ise $\min\left(\phi_1,\phi_2,...,\phi_k\right)$ ve $\max\left(\phi_1,\phi_2,...,\phi_k\right)$ fonksiyonları da Schur – konveksdirler.

3- Her bir $i=1,...,k$ için ϕ_i fonksiyonları Schur – konveks (konkav) ve her x için $\phi_i(x) \ge 0$ ise

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^{k} \phi_i(x)$$

Schur – konveks (konkav) fonksiyondur.

Schur – konveks fonksiyonları elde etmeyi sağlayan diğer bir bileşke alma işlemi $\phi : \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}$ *ve* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\psi(x) = \phi\left(g(x_1), g(x_2),..., g(x_n)\right)$$

şeklindedir [1].

Bu bileşke işlemi ile elde edilen Schur - konveks fonksiyonları Tablo 2 olarak sıralanır.

$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \phi(g_1(x_1), g_2(x_2), ..., g_k(x_2))$

	ϕ	g	ψ
i)	Artan ve schur konveks	konveks	schur-konveks
ii)	Azalan ve Schur-konveks	konkav	schur-konveks
iii)	Artan ve schur-konveks	artan ve konveks	artan ve schur-konveks
iv)	Azalan ve schur-konveks	azalan ve konkav	artan ve schur-konveks
v)	Artan ve schur-konveks	azalan ve konveks	azalan ve schur- konveks
vi)	Azalan ve schur konveks	artan ve konkav	azalan ve schur –konveks

Tablo 2

Teorem 4.3. $I \subset \mathbb{R}$ *bir aralık ve* $g : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

I^n ' de Schur – konveks fonksiyondur [10].

İspat: $\phi(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i$ alınarak Tablo 2' nin (i) maddesinde rahatlıkla görülür.

Teorem 4.4. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ve artan (azalan) ise $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$ artan (azalan) ve Schur – konveks fonksiyondur. Sonuç olarak $x \prec_w y$ ise $\phi(x) \le \phi(y)$ dır [11].

Teorem 4.5. $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve $\phi : \mathrm{I}^n \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. ϕ fonksiyonun I^n üzerinde sürekli Schur - konveks bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart ϕ ' nin I^n üzerinde simetrik olması ve $i \neq j$ olmak üzere her $z \in \mathrm{I}^n$ için

$$(z_i - z_j)\left(\frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_j}\right) \ge 0$$

şartının sağlanmasıdır. Aynı şartlar altında fonksiyonun Schur - konkav olması için eşitsizliğin yön değiştirmesi yeterlidir [3].

Teorem 4.6. $x=(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n$ *ve* $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)-\prod_{i=1}^{n}x_i$ fonksiyonu Schur konkav fonksiyondur [1].

İspat: $f(x)$ fonksiyonu simetrik fonksiyondur.

$$\begin{aligned}&(x_1-x_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\\&=(x_1-x_2)\left(\left(\frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}\right)\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\\&=-(x_1-x_2)^2\left(\prod_{i=3}^{n}(1+x_i)-\prod_{i=3}^{n}x_i\right)\le 0\end{aligned}$$

Teorem 4.7. ϕ fonksiyonun simetrik ve konveks ise ϕ, Schur – konvekstir. Sonuç olarak $x\prec y$ *ise* $\phi(x)\le\phi(y)$ dir [1].

Teorem 4.8. ϕ fonksiyonu simetrik , konveks ve artan(azalan) ise ϕ, Schur – konveks ve artan(azalan)' dır. Yani $x\prec_w y\Rightarrow\phi(x)\le\phi(y)$ dır [1].

g fonksiyonu konveks olduğunda $\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}g(x_i)$ fonksiyonunun da Schur – konveks fonksiyondur.

Bu sonuca bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.9. (Entropi): $i=1,2,...,n$ için $p_i\ge 0$ ve $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ ise $H(p_1,...,p_n)=-\sum p_i\log p_i$ fonksiyonu p' nin entropisi veya Shannon bilgi entropisi olarak adlandırılır. ($x=0$ için $x\log x=0$ kabul edilir). $H(p)$' nin keskin Schur – konkav fonksiyon olduğu kolaylıkla görülür. Dolaysıyla $p\prec q$ iken $H(p)\ge H(q)$ olduğu özellikle de

$$H(1,0,...,0)\le H(p)\le H\left(\frac{1}{2},...,\frac{1}{n}\right)$$

eşitsizlikleri elde edilir [1].

Örnek 4.10. $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ olsun. $\phi(x) = \left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $x_1, x_2, ..., x_n$ sayıların standart sapması olarak adlandırılır [12].

Basit bir gözlemle ϕ' nin keskin Schur – konveks fonksiyonun olduğu bulunabilir. Bu bilgi 1920' de Dalton tarafından ispatlanmıştır ve ϕ gelir eşitsizliği ölçüsü olarak kullanılmıştır.

Örnek 4.11. $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde keskin Schur – konveks ve azalandır [1].

Örnek 4.12. $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$, $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde keskin Schur – konveks bir fonksiyondur [1].

Teorem 4.13. g, $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $x \in I^n$ olmak üzere

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$$

fonksiyonun I^n' de Schur – konveks olması için gerek ve yeter şart $\log g(x)$ fonksiyonunun I aralığında konveks olmasıdır.

Aynı şekilde $\phi(x) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$ fonksiyonunun Schur – konkav olması için gerek yeter şart $\log g(x)$ fonksiyonunun konkav olmasıdır [1].

Örneğin

$$\phi_1(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_i}{x_i},$$

$$\phi_2(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{x_i}$$

$$\phi_3(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_i}{x_i}$$

fonksiyonları sırası ile $\mathbb{R}^n_{++}$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)^n$ *ve* $(0,1)^n$ kümeleri üzerinde keskin Schur - konveks fonksiyonlardır. Çünkü bir önce ki teoremden $\log\left[\frac{(1+z)}{z}\right]$, $\log\left[\frac{(1-z)}{z}\right]$ *ve* $\log\left[\frac{(1+z)}{(1-z)}\right]$ fonksiyonları sırasıyla $\mathbb{R}_{++}$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *ve* $(0,1)$ kümeleri üzerinde konveks fonksiyonlardır.

$x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i - 1$ için $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}\right) \prec (x_1, x_2, ..., x_n)$ bilgisinden ve ϕ_1, ϕ_2 *ve* ϕ_3 fonksiyonlarının Schur – konveksliğinden yararlanarak;

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(1+x_i)}{x_i} \geq (n+1)^n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(1-x_i)}{x_i} \geq (n-1)^n$$

ve

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(1+x_i)}{(1-x_i)} \geq \left(\frac{(n+1)}{(n-1)}\right)^n$$

eşitsizlikleri elde edlir [1].

Tanım 4.14. (Elementer Simetrik Fonksiyonlar): $S_k(x)$ ile $x_1, x_2 \ldots, x_n$ ' nin k. elementer simetrik fonksiyonunu gösterelim. Bu simetrik fonksiyonlar

$$S_0(x) = 1,$$

$$S_1(x) = \sum_{i=1} x_i,$$

$$S_2(x) = \sum_{i<j} x_i y_j$$

$$S_3(x) = \sum_{i<j<k} x_i y_j z_k, ...$$

$$S_n(x) = \prod_{i=1}^{n} x_n$$

şeklindedir [1].

Teorem 4.15. S_k fonksiyonu $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde artan ve Schur - konkav bir fonksiyondur. $k>1$ *ise* S_k, $\mathbb{R}_{++}^n$ üzerinde keskin Schur - konkavdır [1].

Sonuç 4.16. $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ise

$$x \prec y \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \geq \prod_{i=1}^{n} y_i$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat: Bir önce ki teoremde $k=n$ alınarak kolaylık görülür.

Örnek 4.17. $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon aşağıdaki şartları sağlarsa simetrik gauge (ölçü) fonksiyon olarak adlandırılır.

(i) $U \neq 0$ iken $\phi(U) > 0$

(ii) γ reel sayılar için $\phi(\gamma U) = |\gamma| \phi(U)$

(iii) $\phi(u+v) \leq \phi(u) + \phi(v)$

(iv) $(i, i_1, ..., i_n)$, $(1,2,...,n)'nin$ ϕ permütasyon ve $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere

$$\phi(u_1, ..., u_n) = \phi(\varepsilon_1 u_i, ..., \varepsilon_n u_{in})$$

dır.

Eğer ϕ simetrik gauge fonksiyon ise ϕ simetrik ve konveks, dolayısıyla ϕ**,** Schur konvekstir [1].

Örneğin

$\phi(x) = \max |x_i|$,

$\phi(x) = \left(\sum |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad r \geq 1,$

$\phi(x) = \max\limits_{i_1 < i_2 < ... < i_k} \left(|x_{i1}| + ... + |x_{ik}| \right).$

bazı simetrik gauge fonksiyonlardır.

5. BİR ÜÇGENİN İÇ AÇILARI İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Bir üçgenin iç açıları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olsun. O halde $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ olduğunu biliyoruz.

1. Bütün açılar için $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0)$

2. Dar açılı üçgenler için $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

3. Geniş açılı üçgenler için $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha_{1,} \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0)$

majorizasyonları sağlanır.

Sonuç olarak $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bir Schur – konveks fonksiyon ise Teorem 3.2.4 ve yukarıdaki majorizasyonları kullanılarak

Bütün üçgenler için $\phi\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \le \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \le \phi(\pi, 0, 0)$

Dar açılı üçgenler için $\phi\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \le \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \le \phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

Geniş açılı üçgenler için $\phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \le \phi(\alpha_{1,} \alpha_2, \alpha_3) \le \phi(\pi, 0, 0)$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi ise bu Schur – konveks fonksiyonlarını sağlayan Sinüs, Cosinüs ve Tanjant fonksiyonları örnek olarak verilsin [1].

5.1 Sinüs Fonksiyonu

Şimdi bazı üçgen çeşitlerinde majorizasyon özelliklerini, Sinüs fonksiyonu için sağlatalım.

Örnek 5.1.1. $f(x) = -\sin x$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre

a) Bütün üçgenler için $0 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) Dar açılı üçgenler için $2 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

c) Geniş açılı üçgenler için $0 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 \leq 1 + \sqrt{2}$

eşitsizlikleri sağlanır [6].

İspat : $f(x) = -\sin x$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında konveks fonksiyon, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ olmak üzere

a) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) < f(\pi) + f(0) + f(0)$$

$$\Rightarrow -\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \leq -\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 - \sin\alpha_3 < -\sin\pi - \sin 0 - \sin 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq -\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 - \sin\alpha_3 < 0$$

$$\Rightarrow 0 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

b) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4

gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\le f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)$$

$$\Rightarrow -\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\le -\sin\alpha_1-\sin\alpha_2-\sin\alpha_3<-\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2}\le -\sin\alpha_1-\sin\alpha_2-\sin\alpha_3<2$$

$$\Rightarrow 2<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

c) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\prec(\alpha_{1,}\alpha_2,\alpha_3)\prec(\pi,0,0)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)\le f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)<f(\pi)+f(0)+f(0)$$

$$\Rightarrow -\sin\frac{\pi}{2}-\sin\pi\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\le -\sin\alpha_1-\sin\alpha_2-\sin\alpha_3<-\sin\pi-\sin 0-\sin 0$$

$$\Rightarrow -1-\sqrt{2}\le -\sin\alpha_1-\sin\alpha_2-\sin\alpha_3<0$$

$$\Rightarrow 0<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3\le 1+\sqrt{2}$$

eşitsizliği elde edilir

Örnek 5.1.2. $f(x)=-\sin\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0,2\pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre dar açılı üçgenler için

$$\sqrt{2}<\sin\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_3}{2}\le\frac{3}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

İspat : $f(x)=-\sin\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0,2\pi)$ aralığında konveks fonksiyon $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ olmak üzere

$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\prec(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\prec\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\le f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)< f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)$$

$$\Rightarrow -\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\le -\sin\frac{\alpha_1}{2}-\sin\frac{\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_3}{2}<-\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\le -\sin\frac{\alpha_1}{2}-\sin\frac{\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_3}{2}<-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}<\sin\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_3}{2}\le\frac{3}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 5.1.3. $f(x)=-\sqrt{\sin x}$ fonksiyonun $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre

a) Bütün açılar için $0<\sqrt{\sin\alpha_1}+\sqrt{\sin\alpha_2}+\sqrt{\sin\alpha_3}\le 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

b) Dar açılı üçgenler için $2<\sqrt{\sin\alpha_1}+\sqrt{\sin\alpha_2}+\sqrt{\sin\alpha_3}\le 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

c) Geniş açılı üçgenler için $0<\sqrt{\sin\alpha_1}+\sqrt{\sin\alpha_2}+\sqrt{\sin\alpha_3}\le 1+2^{\frac{3}{4}}$

eşitsizlikleri sağlanır [1].

İspat : $f(x)=-\sqrt{\sin x}$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyon $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ olmak üzere

a) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\prec(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\prec(\pi,0,0)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\le f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)< f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)$$

$$\Rightarrow -3\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}} \leq -\sqrt{\sin\alpha_1} - \sqrt{\sin\alpha_2} - \sqrt{\sin\alpha_3} < -\sqrt{\sin\pi} - 2\sqrt{\sin 0}$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{\sin\alpha_1} + \sqrt{\sin\alpha_2} + \sqrt{\sin\alpha_3} \leq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

eşitsizliği elde edilir.

b) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \prec \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0)$$

$$\Rightarrow -3\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}} \leq -\sqrt{\sin\alpha_1} - \sqrt{\sin\alpha_2} - \sqrt{\sin\alpha_3} < -2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin 0}$$

$$\Rightarrow 2 < \sqrt{\sin\alpha_1} + \sqrt{\sin\alpha_2} + \sqrt{\sin\alpha_3} \leq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

eşitsizliği elde edilir.

c) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha_{1,}\alpha_2,\alpha_3) \prec (\pi,0,0)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) < f(\pi) + f(0) + f(0)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{4}} \leq -\sqrt{\sin\alpha_1} - \sqrt{\sin\alpha_2} - \sqrt{\sin\alpha_3} < -\sqrt{\sin\pi} - 2\sqrt{\sin 0}$$

$$\Rightarrow -1 - 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq -\sqrt{\sin\alpha_1} - \sqrt{\sin\alpha_2} - \sqrt{\sin\alpha_3} < 0$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{\sin\alpha_1} + \sqrt{\sin\alpha_2} + \sqrt{\sin\alpha_3} \leq 1 + 2^{\frac{3}{4}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 5.1.4. $f(x) = -\log\sin x$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre

a) Bütün üçgenler için $\sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

b) Geniş açılı üçgenler için $\sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 \le \frac{1}{2}$

eşitsizlikleri sağlanır [1].

İspat : $f(x) = -\log\sin x$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyonu $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ olmak üzere

a) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right) \le f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)$$

$$\Rightarrow -3\log\frac{\pi}{3} \le -\log\sin\alpha_1 - \log\sin\alpha_2 - \log\alpha_3$$

$$\Rightarrow -3\log\frac{\sqrt{3}}{2} \le -\log\sin\alpha_1 - \log\sin\alpha_2 - \log\alpha_3$$

$$\Rightarrow \log\sin\alpha_1 + \log\sin\alpha_2 + \log\alpha_3 \le 3\log\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \log(\sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3) \le 3\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

eşitsizliği sağlanır.

b) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha_{1,}\alpha_2,\alpha_3)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \le f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)$$

$$\Rightarrow -\log\sin\frac{\pi}{2} - \log\sin\frac{\pi}{4} - \log\sin\frac{\pi}{4} \le -\log\sin\alpha_1 - \log\sin\alpha_2 - \log\sin\alpha_3$$

$$\Rightarrow -\log 1 - \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log\frac{1}{\sqrt{2}} \le -\log\sin\alpha_1 - \log\sin\alpha_2 - \log\sin\alpha_3$$

$$\Rightarrow \log\sin\alpha_1 + \log\sin\alpha_2 + \log\sin\alpha_3 \le 2\log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \log\left(\sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3\right) \le \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 \le \frac{1}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 5.1.5. $f(x) = -\log\sin\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre dar açılı üçgenler için

$$\sin(\frac{\alpha_1}{2}).\sin(\frac{\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_3}{2}) \le \frac{1}{8}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat : $f(x) = -\log\sin\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyon, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ olmak üzere $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right) \le f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)$$

$$\Rightarrow -3\log\frac{\pi}{6} \le -\log\sin\alpha_1 - \log\sin\alpha_2 - \log\alpha_3$$

$$\Rightarrow -3\log\frac{1}{2} \le -\log\sin\alpha_1 - \log\sin\alpha_2 - \log\alpha_3$$

$$\Rightarrow \sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 \le \frac{1}{8}$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 5.1.6. $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre bütün üçgenler için

$$\frac{3}{4} \leq \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)<1$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat : $f(x)=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ olmak üzere

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \prec (\pi,0,0)$$

majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)<\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\sin^2\left(\frac{0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)<1$$

eşitsizliği elde edilir.

5.2. Cosinus Fonksiyonu

Şimdi bazı üçgen çeşitlerinde majorizasyon özelliklerini, Cosinüs fonksiyonu için sağlatalım.

Örnek 5.2.1. $f(x)=-\cos x$ fonksiyonu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre dar açılı üçgenler için

$$1<\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3 \leq \frac{3}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat : $f(x)=-\cos x$ fonksiyonu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ olmak üzere

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \prec (\pi,0,0)$$

majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$-3\cos\frac{\pi}{3} \le -\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 - \cos\alpha_3 < -2\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \le -\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 - \cos\alpha_3 < -1$$

$$\Rightarrow 1 < \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 \le \frac{3}{2}$$

eşitsizliğini elde edilir.

Örnek 5.2.2. $f(x) = -\cos\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre dar açılı üçgenler için

$$2 < \cos\frac{\alpha_1}{2} + \cos\frac{\alpha_2}{2} + \cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat : $f(x) = -\cos\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ olmak üzere

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0)$$

majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$-3\cos\frac{\pi}{6} \le -\cos\frac{\alpha_1}{2} - \cos\frac{\alpha_2}{2} - \cos\frac{\alpha_3}{2} < -\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2} \le -\cos\frac{\alpha_1}{2} - \cos\frac{\alpha_2}{2} - \cos\frac{\alpha_3}{2} < -2$$

$$\Rightarrow 2 < \cos\frac{\alpha_1}{2} + \cos\frac{\alpha_2}{2} + \cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

eşitsizliğini elde edilir.

Örnek 5.2.3. $f(x) = -\cos^2\frac{x}{2}$ fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre bütün açılı üçgenler için

$$2 < \cos^2\frac{\alpha_1}{2} + \cos^2\frac{\alpha_2}{2} + \cos^2\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{9}{4}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat : $f(x) = -\cos^2\frac{x}{2}$ fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ olmak üzere

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0)$$

majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$-3\cos^2\frac{\pi}{6} \le -\cos^2\frac{\alpha_1}{2} - \cos^2\frac{\alpha_2}{2} - \cos^2\frac{\alpha_3}{2} < -\cos^2\frac{\pi}{2} - 2\cos^2 0$$

$$\Rightarrow -3\frac{3}{4} \le -\cos^2\frac{\alpha_1}{2} - \cos^2\frac{\alpha_2}{2} - \cos^2\frac{\alpha_3}{2} < -2$$

$$\Rightarrow 2 < \cos^2\frac{\alpha_1}{2} + \cos^2\frac{\alpha_2}{2} + \cos^2\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{9}{4}$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 5.2.4. $f(x) = -\log\cos\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre

a) Bütün üçgenler için $0 < \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

b) Dar açılı üçgenler için $\frac{1}{2} < \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

c) Geniş açılı üçgenler için $0 < \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}$

eşitsizlikler geçerlidir [1].

İspat : $f(x) = -\log\cos\frac{x}{2}$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ olmak üzere

a) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$-3\log\cos\frac{\pi}{6}\le -\log\cos\frac{\alpha_1}{2}-\log\cos\frac{\alpha_2}{2}-\log\cos\frac{\alpha_3}{2}$$

$$\Rightarrow -3\log\frac{\sqrt{3}}{2}\le -\log\cos\frac{\alpha_1}{2}-\log\cos\frac{\alpha_2}{2}-\log\cos\frac{\alpha_3}{2}$$

$$\Rightarrow -3\frac{\sqrt{3}}{2}\le -\cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

eşitsizliği sağlanır.

b) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\prec(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\prec(\pi,0,0)$ majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$-3\log\cos\frac{\pi}{6}\le -\log\cos\frac{\alpha_1}{2}-\log\cos\frac{\alpha_2}{2}-\log\cos\frac{\alpha_3}{2}<-2\log\cos\frac{\pi}{4}-\log\cos 0$$

$$\Rightarrow -3\log\frac{\sqrt{3}}{2}\le -\log\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}\right)<-2\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log 0$$

$$\Rightarrow -3\frac{\sqrt{3}}{2}\le -\cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}<-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}<\cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

eşitsizliği sağlanır.

c) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\prec(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ majorizyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$-\log\cos\frac{\pi}{4}-\log\cos\frac{\pi}{8}\le -\log\cos\frac{\alpha_1}{2}-\log\cos\frac{\alpha_2}{2}-\log\cos\frac{\alpha_3}{2}$$

$$\Rightarrow -\log\frac{1}{\sqrt{2}}-2\log\cos\frac{\pi}{8}\le -\log\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos^2\frac{\pi}{8}\right) \le -\log\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right) \le -\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2} \le \left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

5.3 Tanjant Fonksiyonu

Şimdi bazı üçgen çeşitlerinde majorizasyon özelliklerini Tanjant fonksiyonu için sağlatalım.

Örnek 5.3.1. $f(x)=(\tan x)^m$, $m \ge 1$ için $f(x)$ fonksiyonu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre

a) $3^{\frac{m+2}{2}} \le \tan^m \alpha_1 + \tan^m \alpha_2 + \tan^m \alpha_3$

b) $3^{-\frac{(m+2)}{2}} \le \tan^m \frac{\alpha_1}{2} + \tan^m \frac{\alpha_2}{2} + \tan^m \frac{\alpha_3}{2}$

eşitsizliği geçerlidir. [1]

İspat : $f(x)=(\tan x)^m$, $m \ge 1$ için $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ olmak üzere

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$\tan^m\frac{\pi}{3}+\tan^m\frac{\pi}{3}+\tan^m\frac{\pi}{3} \le \tan^m \alpha_1 + \tan^m \alpha_2 + \tan^m \alpha_3$$

$m=1$ alırsak

$$3\sqrt{3} \le \tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \tan\alpha_3$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 5.3.2. $f(x) = -\log\tan\frac{x}{2}$ fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre dar açılı üçgenler için

$$0 < \tan\frac{\alpha_1}{2}.\tan\frac{\alpha_2}{2}.\tan\frac{\alpha_3}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat : $f(x) = -\log\tan\frac{x}{2}$ fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında konveks fonksiyon olduğuna göre ve $\boldsymbol{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi}$ olmak üzere

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

majorizasyon bilgisi ve Teorem 3.2.4 gereğince

$$-3\log\tan\frac{\pi}{6} \leq -\log\tan\frac{\alpha_1}{2} - \log\tan\frac{\alpha_2}{2} - \log\tan\frac{\alpha_3}{2}$$

$$\Rightarrow \log\left(\tan\frac{\alpha_1}{2}.\tan\frac{\alpha_2}{2}.\tan\frac{\alpha_3}{2}\right) \leq \log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha_1}{2}.\tan\frac{\alpha_2}{2}.\tan\frac{\alpha_3}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

eşitsizliği elde edilir.

6. BİR ÜÇGENİN KENARLARI İÇİN EŞİTSİZLİKLER

a_1, a_2, a_3 bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ çevre uzunluğunun yarısı ve $\bar{a} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{2s}{3}$ kenar uzunluklarının aritmetik ortalamasını göstersin.

Aşağıda maddeler halinde verilecek olan bir üçgenin kenarları arasındaki eşitsizlikler, bütün üçgenler için

$$(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}) \prec (a_1, a_2, a_3) \prec (s, s, 0)$$

majorizasyon yardımıyla bulunacaktır. Öncelikle bu majorizasyonun ispatı verilecektir [1].

Teorem 6.1. a_1, a_2, a_3 bir üçgenin kenarları $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ ve $\bar{a} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ olmak üzere

$$(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}) \prec (a_1, a_2, a_3) \prec (s, s, 0) \tag{1}$$

majorizasyonu geçerlidir [1].

İspat : $a_1 > a_2 > a_3$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} &\bar{a} < a_1 & & & &a_1 < s \\ &\bar{a} + \bar{a} < a_1 + a_2 & &\text{ve} & &a_1 + a_2 < s + s \\ &\bar{a} + \bar{a} + \bar{a} = a_1 + a_2 + a_3 & & & &a_1 + a_2 + a_3 < s + s + 0 \end{aligned}$$

olduğu aşikardır.

Şimdi Teorem 6.1 yardımıyla bir üçgenin kenarları arasındaki bağıntısı verilsin.

Örnek 6.2. a_1, a_2, a_3 üçgenin kenarları olmak üzere

$$\frac{1}{3} \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2} < \frac{1}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat: $\phi(a_1, a_2, a_3) = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2}$ fonksiyonu Schur - konveks fonksiyondur.

Çünkü

$$\phi(a_1,a_2,a_3)=\frac{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}{(a_1+a_2+a_3)^2}$$

fonksiyonuna Teorem 4.5 uygulanırsa yani,

$$(a_1-a_2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial a_1}-\frac{\partial\phi}{\partial a_2}\right)=\frac{(a_1+a_2+a_3)(2a_1-2a_2)}{(a_1+a_2+a_3)^3}(a_1-a_2)>0$$

olduğundan Teorem 4.5 den Schur - konveks olduğu görülür. Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığından

$$\frac{1}{3}\le\frac{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}{(a_1+a_2+a_3)^2}<\frac{1}{2}$$

elde edilir.

Örnek 6.3. a_1,a_2,a_3 üçgenin kenarları olmak üzere

$$\frac{1}{4}<\frac{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}\le\frac{1}{3}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat: $\phi(a_1+a_2+a_3)=\dfrac{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}$ fonksiyonu Schur konkav fonksiyondur.

Çünkü

$$(a_1-a_2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial a_1}-\frac{\partial\phi}{\partial a_2}\right)<0$$

olduğundan Teorem 4.5 den Schur - konkav fonksiyon olduğu görülür. Ama $-\phi\,(a_1,a_2,a_3)$ fonksiyonu Schur - konveks fonksiyonu olur.

Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığında

$$\frac{1}{4}<\frac{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}\le\frac{1}{3}$$

elde edilir.

Örnek 6.4. a_1,a_2,a_3 üçgenin kenarları olmak üzere

$$\frac{1}{4}<\frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)}{(a_1+a_2+a_3)^3}\le\frac{8}{27}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat: $\phi(a_1,a_2,a_3)=\dfrac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)}{(a_1+a_2+a_3)^3}$ fonksiyonu Schur - konkav bir fonksiyondur

$$(a_1-a_2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial a_1}-\frac{\partial\phi}{\partial a_2}\right)<0$$

olduğundan Teorem 4.5 den Schur - konkavdır. Ve $-\phi\,(a_1,a_2,a_3)$ fonksiyonun Schur - konveks fonksiyondur.

Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığında

$$\frac{1}{4}<\frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)}{(a_1+a_2+a_3)^3}\le\frac{8}{27}$$

elde edilir.

Örnek 6.5. a_1, a_2, a_3 üçgenin kenarları olmak üzere

$$1<\frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)}{a_1^3+a_2^3+a_3^3}\le\frac{8}{3}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

Örnek 6.6. a_1, a_2, a_3 üçgenin kenarları olmak üzere

$$\frac{4(9-2d)}{27}s^2\le a_1^2+a_2^2+a_3^2-d\,\frac{a_1a_2a_3}{s}<2s^2$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat : $\phi(a_1,a_2,a_3)=a_1^2+a_2^2+a_3^2-d\,\dfrac{a_1a_2a_3}{s}$ fonksiyonun Schur - konveks bir fonkiyondur. Çünkü

$$(a_1-a_2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial a_1}-\frac{\partial\phi}{\partial a_2}\right)>0$$

olduğundan Teorem 4.5 den Schur - konveksdir. Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığından

$$\frac{4(9-2d)}{27}s^2\le a_1^2+a_2^2+a_3^2-d\,\frac{a_1a_2a_3}{s}<2s^2$$

elde edilir.

Örnek 6.7. a_1, a_2, a_3 üçgenin kenarları, $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ *ve* $d \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{3(3d+2)}{4} \leq \frac{ds + a_1}{a_2 + a_3} + \frac{ds + a_2}{a_1 + a_3} + \frac{ds + a_3}{a_1 + a_2} < \frac{5d+4}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat : $\phi(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{ds + a_1}{a_2 + a_3} + \frac{ds + a_2}{a_1 + a_3} + \frac{ds + a_3}{a_1 + a_2}$

fonksiyonu

$$(a_1 - a_2)\left(\frac{\partial \phi}{\partial a_1} - \frac{\partial \phi}{\partial a_2}\right) > 0$$

olduğundan Teorem 4.5 den Schur - konveksdir.

Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığından

$$\frac{3(3d+2)}{4} \leq \frac{ds + a_1}{a_2 + a_3} + \frac{ds + a_2}{a_1 + a_3} + \frac{ds + a_3}{a_1 + a_2} < \frac{5d+4}{2}$$

elde edilir.

Örnek 6.8. a_1, a_2, a_3 üçgenin kenarları, $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ olmak üzere

$$\sqrt{s} < \sqrt{s - a_1} + \sqrt{s - a_2} + \sqrt{s - a_3} \equiv \sqrt{\frac{s_1}{2}} + \sqrt{\frac{s_2}{2}} + \sqrt{\frac{s_3}{2}} \leq \sqrt{3s}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat:

$$\phi(a_1 + a_2 + a_3) = \sqrt{s - a_1} + \sqrt{s - a_2} + \sqrt{s - a_3}$$
$$\equiv \sqrt{\frac{s_1}{2}} + \sqrt{\frac{s_2}{2}} + \sqrt{\frac{s_3}{2}}$$

fonksiyonu Schur - konkav bir fonksiyondur. Çünkü

$$(a_1 - a_2)\left(\frac{\partial \phi}{\partial a_1} - \frac{\partial \phi}{\partial a_2}\right) < 0$$

olduğundan Teorem 4.5 den Schur - konkav ve $-\phi(a_1 + a_2 + a_3)$ fonksiyonu Schur - konveks fonksiyondur.

Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığında

$$\sqrt{s} < \sqrt{s-a_1} + \sqrt{s-a_2} + \sqrt{s-a_3} \equiv \sqrt{\frac{s_1}{2}} + \sqrt{\frac{s_2}{2}} + \sqrt{\frac{s_3}{2}} \le \sqrt{3s}$$

elde edilir.

Örnek 6.9. a_1, a_2, a_3 üçgenin kenarları, $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ olmak üzere

$$\sqrt{a_1(s-a_1)} + \sqrt{a_2(s-a_2)} + \sqrt{a_3(s-a_3)} \le \sqrt{2}s$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat: $\phi(a_1 + a_2 + a_3) = \sqrt{a_1(s-a_1)} + \sqrt{a_2(s-a_2)} + \sqrt{a_3(s-a_3)}$

fonksiyonu Schur - konkav bir fonksiyondur. Çünkü

$$(a_1 - a_2)\left(\frac{\partial \phi}{\partial a_1} - \frac{\partial \phi}{\partial a_2}\right) < 0$$

olduğundan Teorem 4.5 den Schur - konkavdır. Ve $-\phi(a_1 + a_2 + a_3)$ fonksiyon Schur - konveks fonksiyondur. Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığında

$$\sqrt{a_1(s-a_1)} + \sqrt{a_2(s-a_2)} + \sqrt{a_3(s-a_3)} \le \sqrt{2}s$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 6.10. a_1, a_2, a_3 üçgenin kenarları, $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ ve

$$s_1 \equiv 2(s-a_1) = -a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_2 \equiv 2(s-a_2) = a_1 - a_2 + a_3$$
$$s_3 \equiv 2(s-a_3) = -a_1 + a_2 - a_3$$

olmak üzere

$$\frac{9}{s} \le \frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_3} = \frac{2}{s_1} + \frac{2}{s_2} + \frac{2}{s_3}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat: $\phi(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_3} = \frac{2}{s_1} + \frac{2}{s_2} + \frac{2}{s_3}$

fonksiyonu

$$(a_1 - a_2)(\frac{\partial \phi}{\partial a_1} - \frac{\partial \phi}{\partial a_2}) > \ 0$$

eşitsizliği sağladığından Teorem 4.5 gereğince Schur - konveksdir. Böylece (1) majorizasyonuna bu fonksiyon uygulandığından

$$\frac{9}{s} \leq \frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_3} = \frac{2}{s_1} + \frac{2}{s_2} + \frac{2}{s_3}$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 6.11. Δ, kenarları a_1, a_2, a_3 olan bir üçgenin alanı olmak üzere $s^2 \geq 3\sqrt{3}\Delta$

eşitsizliği "Geometric Inequalities" [6] kitabındaki 4.2 eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik

$$\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{s_i}{2}\right) = \prod_{i=1}^{3}(s-a_i) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3$$

eşitsizliğine denk olup

$$\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) \prec \left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_3}{2}\right)$$

majorizasyon bilgisinden ve $\prod$, $S_n(x)$ in elementer fonksiyon Schur konkavlığından elde edilir [7].

Örnek 6.12. Üçgenin kenarları a_1, a_2, a_3, $u_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $u_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$, $u_3 = (a_2 + a_3)$ olmak üzere

$$(u_1, u_2, u_3) \prec (a_1, a_2, a_3)$$

majorizasyonu sağlanır. Buradan da

$$a_1 a_2 a_3 \leq \frac{1}{8}(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_2 + a_3)$$

eşitsizliği elde edilir [1].

6.1. (a_1, a_2, a_3) *ve* (s_1, s_2, s_3) Arasındaki Eşitsizlikler

(a_1, a_2, a_3) kenar uzunlukları ve $s_1 = 2(s-a_1)$, $s_2 = 2(s-a_2)$, $s_3 = 2(s-a_3)$ değerlerini içeren eşitsizlikler $\mathbb{R}^3_{++}$ üzerinde $S_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ elementer simetrik fonksiyonlarını içerirler [1].

Örnek 6.1.1. $s_1 s_2 s_3 \le a_1 a_2 a_3$ eşitsizliği sağlanır [1].

İspat: $\left(a_1, a_2, a_3\right) \prec (s_1, s_2, s_3)$ olduğu biliniyor.

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

fonksiyonu Teorem 4.5 den Schur - konkavdır. Yani

$$\left(a_1, a_2, a_3\right) \prec (s_1, s_2, s_3)$$

ise

$$\phi(a_1, a_2, a_3) \ge \phi(s_1, s_2, s_3)$$

dır. Böylece

$$s_1 s_2 s_3 \le a_1 a_2 a_3$$

dır.

Örnek 6.1.2. $\dfrac{s_1 s_2 s_3}{s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3} \le \dfrac{a_1 a_2 a_3}{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3}$ eşitsizliği sağlanır [1].

İspat : $\phi(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{s_3(x_1, x_2, x_3)}{s_2(x_1, x_2, x_3)}$

fonksiyonu Teorem 4.5 den Schur - konkavdır. $(a_1, a_2, a_3) \prec (s_1, s_2, s_3)$ mojorizasyonu biliniyor. Öyleyse

$$\phi(a_1, a_2, a_3) \ge \phi(s_1, s_2, s_3)$$

$$\frac{s_1 s_2 s_3}{s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3} \le \frac{a_1 a_2 a_3}{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 6.1.3. $(s_1 s_2 s_3)(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) \le (a_1 a_2 a_3)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)$ eşitsizliği sağlanır [1].

İspat: $\phi(x_1, x_2, x_3) = s_3(x_1, x_2, x_3) s_2(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonu Teorem 4.5 den Schur - konkavdır. $(a_1, a_2, a_3) \prec (s_1, s_2, s_3)$ majorizasyonu biliniyor. Öyleyse

$$\phi(a_1, a_2, a_3) \ge \phi(s_1, s_2, s_3)$$

$$(s_1 s_2 s_3)(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) \le (a_1 a_2 a_3)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)$$

eşitsizliği sağlanır.

7. BİR ÜÇGENİN AÇILARI VE KENARLARI İÇİN EŞİTSİZLİKLER

a_i kenarlarının karşısındaki açılar α_i, $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ise $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ dır. Böylece kenarlar ve açılar benzer şekilde sıralanır.

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\tau_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)$$
$$\tau_3 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)$$

dır. O halde $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$ ve $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ majorizasyonu sağlanır [1].

Teorem 7.1. Eğer $x \prec y$ ise

$$\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Teorem 7.2. Eğer $a_i, b_i,\ i = 1, 2, ..., n$ iki sayı kümesi olsun.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{[i]} b_{[n-i+1]} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_{[i]} b_{[i]}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Örnek 7.3. $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \geq a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + a_3\tau_3 \geq a_1\tau_3 + a_2\tau_2 + a_3\tau_1$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \geq a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + a_3\tau_3$ eşitsizliği aşağıdaki gibi ispatlanır.

$(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ olduğu biliniyor. Ve Teorem 7.1 den

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \tau_i \leq \sum_{i=1}^{3} a_i \alpha_i$$

olduğu açıktır.

$a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + a_3\tau_3 \geq a_1\tau_3 + a_2\tau_2 + a_3\tau_1$ eşitsizliğin doğruluğu verilsin. Teorem 7.2 den

$$\sum_{i=1}^{3} a_{[i]}\tau_{[n-i+1]} \leq \sum_{i=1}^{3} a_{[i]}\tau_{[i]}$$

olduğunu biliyoruz. Ve buradan da eşitsizliğin doğruluğu açıktır.

8. BULGULAR ve TARTIŞMA

Çalışmamız esnasında temel kaynak olarak kullanılan "Inequalities Theory of Majorization and Its Application" adlı kitabında 276. sayfasında verilen bir majorisazyon ifadesinin yanlış olduğu tespit edildi. Öncelikle bu majorizasyon ifadesinin geçtiği teoremi kitaptaki hali ile verip sonra yanlışlığını ters örnek yardımıyla gösterelim.

Teorem 8.1. a_1, a_2, a_3 bir üçgenin kenar uzunlukları, $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ çevre uzunluğunun yarısı ve $\bar{a} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{2s}{3}$ kenar uzunluklarının aritmetik ortalaması olsun. İkizkenar üçgenler için

$$(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}) \prec (a_1, a_2, a_3) \prec (s, \frac{s}{2}, \frac{s}{2})$$

majoriasyonu geçerlidir.

Eğer bu teoremde $a_1 = 10$ $a_2 = 10$ ve $a_3 = 6$ alınırsa $\bar{a} = \frac{26}{3}$ ve $s = 13$ olarak elde edilir. Bu değerleri teoremdeki majorizasyonda yerine yazarsak

$$(\frac{26}{3}, \frac{26}{3}, \frac{26}{3}) \prec (10, 10, 6) \prec (13, \frac{13}{2}, \frac{13}{2})$$

bulunur. Lakin sağ tarafdaki majorizasyon ifadesi

$$10 < 13$$

$$10 + 10 < 13 + \frac{13}{2}$$

olduğundan doğru değildir.

İkizkenar üçgenler için bir majorizasyon bulma çalışmalarımız devam etmektedir.

9. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, majorizasyon teorinin temel özelliklerini kullanarak geometrik eşitsizlikler üzerine çalışılmıştır. Özellikle üçgenlerin kenarlarını ve açılarını içeren eşitsizliklerin majorizasyon teori yardımıyla nasıl elde edildiği detaylı bir şekilde incelenmiştir. Üçgenler, açılar ve kenarlarına göre sınıflandırılarak her bir sınıflandırma için majorizasyon ifadelerindeki değişiklikler ele alınmıştır.

Üçgenler üzerine yapılacak eşitsizlik çalışmaları için yardımcı bir kaynak olacağı düşüncesindeyiz

KAYNAKLAR

[1] W. M. Albert, O. Ingram ve C. A. Barry, *İnequalities: Theory of majorization and Its Applications,* New york: Springer, second edition, 2011.

[2] A. M. Ostrowski, "Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur", *J. Math. Pures Appl.* vol. 31, pp. 253–292, 1952.

[3] I. Schur, "Uber eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen die Determinanten-Theorie Sitzungsber", *Berlin. Math. Gesellschaft* vol. 22, pp. 9–20, 1923.

[4] A. Azimli, *Matematiksel Optimizasyon,* İstanbul, Papatya, 2011.

[5] M. Balcı, *analiz 1,* İstanbul: palme, 8, baskı, 2016

[6] O. Bottema, R. Z. Djordjevic, R. R. Janic, D. S. Mitrinovic ve P. M. Vasic, *Geometric Inequalities*. Wolters-Noordhoff, Groningen, the Netherlands, 1969.

[7] D. S. Mitrinovic, *Elementary Inequalities*. P. Noordhoff, Groningen 1964.

[8] A. Oppenheim, "Some inequalities for triangles", *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn,* vol. 363, pp. 21–28, 1971.

[9] F. Zhang, *Matrix Theory,* Basic Results and Techniques, New York, Springer, second edition, 1999.

[10] G. Hardy H. J. E. Littlewood, and G. Polya, "Some simple inequalities satisfied by convex function", *Messenger Math*. vol. 58, pp. 145– 152, 1929.

[11] M. Tomic, "Theoreme de Gauss relatif au centre de gravite et son application", *Bull. Soc. Math*. Phys. Serbie 1, 31–40, 1949.

[12] H. Dalton, "The measurement of the inequality of incomes" *Econ. J*. 30, 348–361, 1920.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İrfan GÜLMEZ

Doğum Yeri : Adıyaman

Doğum Tarihi : 23.09.1991

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : irfangulmez0244@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	2014
Lise	Fen Bilimleri	Kahta Fatih Anadolu Lisesi	2010