T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LORENTZIAN PARA-SASAKIAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE Bİ-f-HARMONİK EĞRİLER

FERHAT KİY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2020

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZIAN PARA-SASAKIAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE Bİ-f-HARMONİK EĞRİLER

Ferhat KİY

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Bu tez 20/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Bilal Eftal ACET
Danışman

Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Üye

Prof. Dr. Ahmet YILDIZ
Üye

Doç. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZIAN PARA-SASAKIAN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE Bİ-f-HARMONİK EĞRİLER

Ferhat KİY

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Bilal Eftal ACET
Yıl : 2020, Sayfa sayısı: 49+vi

Jüri : Doç. Dr. Bilal Eftal ACET
Prof. Dr. Ahmet YILDIZ
Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerinde tanımlı null (lightlike) olmayan eğrilerin harmonik olmayan (özgün) bi-*f*-harmonik eğri olmaları için gerek ve yeter şartlar araştırılarak bu eğrilerin bi-*f*-harmonik denklemleri verilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm tezin giriş kısmı olup bu bölümde araştırma konusunun gelişimi ile ilgili daha önce yapılmış olan çalışmalar anlatılmıştır.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerin daha iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için harmonik dönüşümler, biharmonik dönüşümler, *f*-biharmonik dönüşümler ve bi-*f*-harmonik dönüşümler ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yarı-Riemann manifoldlar ve Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlarla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin orijinal bölümü dördüncü bölüm olup bu bölümde 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerinde tanımlı spacelike ve timelike bir eğrinin bi-*f*-harmonik olma koşullarıyla ilgili teoremlere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Harmonik dönüşüm; Biharmonik dönüşüm; *f*-Biharmonik dönüşüm; Bi-*f*-harmonik dönüşüm; Lorentzian para-Sasakian manifold.

ABSTRACT

MSc Thesis

BI-f-HARMONIC CURVES ON LORENTZIAN PARA-SASAKIAN MANIFOLDS

Ferhat KİY

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET
Year : 2020 , Number of pages: 49+vi

Jury : Assoc. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET
Prof. Dr. Ahmet YILDIZ
Assoc. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

In this study, which was prepared as a master's thesis, the necessary and sufficient conditions for non-null curves to be non-harmonic (original) bi-f-harmonic curves on 4-dimensional conformal flat, quasi conformal flat or conformal symmetric Lorentzian para-Sasakian manifolds bi-f-harmonic equations of these curves are given.

This thesis consists of four chapters.

The first part is the introduction part of the thesis and in this part, the previous studies on the development of the research subject are explained.

In the second part, definitions and theorems related to harmonic transformations, biharmonic transformations, f-biharmonic transformations and bi-f-harmonic transformations are presented in order to better understand the next sections.

In the third chapter, definitions and theorems about semi-Riemannian manifolds and Lorentzian almost paracontact manifolds are given.

The original part of the thesis is the fourth chapter, and in this section, theorems related to the conditions of being a bi-f-harmonic of a spacelike and a timelike curve defined on 4-dimensional conformal flat, quasi conformal flat or conformal symmetric Lorentzian para-Sasakian manifolds.

Key Words: Harmonic maps; Biharmonic map; *f*-Biharmonic map; Bi-*f*-harmonic map; Lorentzian para-Sasakian manifold.

BEYAN

"Lorentzian Para-Sasakian Manifoldlar Üzerinde Bi-f-Harmonik Eğriler" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Ferhat KİY

CANCAĞAZIMA…

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler

$E_2(\varphi)$	: Bienerji fonksiyoneli
$E_{f,2}(\varphi)$	: Bi-*f*-enerji fonksiyoneli
Γ_{ij}^k	: Christoffel Sembolü
$\nabla d\varphi$	: Dönüşümün ikinci temel formu
$\tau(\varphi)$	: Dönüşümün tensiyon alanı
$\tau_2(\varphi)$	: Dönüşümün bitensiyon alanı
$E(\varphi; D)$	: Dönüşümün enerji fonksiyoneli
$\tau_f(\varphi)$	: *f*-gerilim alanı
$\tau_{2,f}(\varphi)$	: *f*-ikinci gerilim alanı
$E_f(\varphi)$	: *f*-enerji fonksiyoneli
$E_{2,f}(\varphi)$	: *f*-bienerji fonksiyoneli
∇	: Lineer (Afin) konneksiyon
$T_x M$	: M manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı
C^r	: *r*. mertebeden diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferensiyellenebilir bir $\varphi : M \rightarrow N$ dönüşümü eğer

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2 v_g$$

ile verilen enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise harmonik dönüşüm olarak adlandırılır. Enerji için Euler-Lagrange denklemi $\tau(\varphi) = iz\nabla d\varphi$ ile tanımlanan tensiyon alanının sıfır olması ile karakterize edilir [1].

Biharmonik dönüşümler ise harmonik dönüşümlerin bir genelleştirmesi olarak J. Eells ve J. H. Sampson [2] tarafından tanımlandı. Biharmonik dönüşümler,

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

ile tanımlanan bienerji fonksiyonelinin kritik noktalarıdır.

Riemann manifoldları arasındaki bir diferensiyellenebilir $\varphi : M \rightarrow N$ dönüşümünün bienerji fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemi 1986 yılında G. Y. Jiang ([1], [3]) tarafından

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta\tau(\varphi) - izR^N(d\varphi, \tau(\varphi))d\varphi = 0$$

şeklinde tanımlandı. Bu denklemden her harmonik dönüşümün biharmonik olacağı açıktır. Dolayısıyla harmonik olmayan (özgün) biharmonik dönüşümler daha fazla ilgi çekmektedir.

2004 yılında N. Course, *f*-harmonik dönüşümleri tanımlamıştır [4]. W-J. Lu ise, 2013 yılında Riemann manifoldları arasındaki *f*-biharmonik dönüşüm tanımını vermiş ve Euler-Lagrange denklemlerini kullanarak *f*-ikinci gerilim alanı denklemini hesaplamıştır [5]. Bu çalışmalardan faydalanarak, Y-L Ou, 2014 yılında *f*-biharmonik dönüşümlerin bazı temel özelliklerini çalışmış ve *f*-biharmonik altmanifold kavramını tanıtmıştır [6]. Daha sonra [7] de bi-*f*-harmonik eğriler ve hiperyüzeyler çalışılmıştır. [8] de ise Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerinde binormali timelike olan eğrilerin bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırıldı.

Hemen hemen kontakt manifoldlara benzer şekilde hemen hemen parakontakt manifoldlar I. Sato tarafından tanıtıldı [9]. I. Sato tarafından verilen tanıma göre hemen hemen parakontakt metrik yapıyı oluşturan metrik bir Riemann metriktir. T. Adati ve K. Matsumoto [10], I. Sato tarafından tanımlanan hemen hemen parakontakt manifoldların özel durumları olarak göz önüne alınabilecek olan para-Sasakian ve özel para-Sasakian manifoldları tanımladılar ve bu manifoldların geometrisini çalıştılar. 1989 yılında ise K. Matsumoto [11], Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar ve bu manifoldların özel bir sınıfı olan Lorentzian para-Sasakian manifold tanımını verdi. Hemen hemen parakontakt metrik manifoldları Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlardan ayıran en temel özellik Lorentzian hemen hemen parakontakt yapıyı oluşturan metriğin bir Lorentzian metrik ve bu yapının karakteristik vektör alanının ise bir timelike vektör alanı olmasıdır.

Yine K. Matsumoto tarafından [11] de bir Lorentzian manifoldun Lorentzian parakontakt yapıya sahip olması için gerekli bazı şartlar araştırıldı. I. Mihai ve R. Rosca [12] de K. Matsumoto'dan bağımsız olarak Lorentzian para-Sasakian manifoldları tanımladılar ve bu manifoldların pek çok özelliğini incelediler. Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların bir diğer özel sınıfı olan Lorentzian parakosimplektik manifoldlar ise [13] te tanıtıldı ve diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde Lorentzian hemen hemen parakontakt yapının bir tek olmadığı gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm dört alt başlıktan oluşmaktadır. İlk olarak harmonik dönüşümler, ikinci alt başlıkta biharmonik dönüşümler, üçüncü alt başlıkta *f*-biharmonik dönüşümler ve son olarak da bi-*f*-harmonik dönüşümler ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi.

2.1 Harmonik Dönüşümler

Tanım 2.1.1. W, M ve N C^{∞} manifoldlar olmak üzere

$$\varphi : M \to N$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. Bir $W \to N$ vektör demetinin pull-back demeti

$$\varphi^{-1}W \to M$$

ile gösterilir ve $x \in M$ için bu demet

$$(\varphi^{-1}W)_x = W_{\varphi(x)} \tag{2.1.1}$$

ile tanımlanan liflere sahiptir. $W \to N$ vektör demeti üzerindeki konneksiyon ∇^{W} ise $\varphi^{-1}W \to M$ pull-back demeti üzerindeki konneksiyon ∇^{φ} ile gösterilen ve

$$\nabla^{\varphi} : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}W) \to \Gamma(\varphi^{-1}W)$$

$$(X, \varphi^{*}\sigma) \to \nabla^{\varphi}_{X}(\varphi^{*}\sigma) = \nabla^{W}_{d\varphi(X)}\sigma \tag{2.1.2}$$

ile tanımlanan tek lineer konneksiyondur. ∇^{φ} konneksiyonuna *pull-back konneksiyon* denir. Burada

$$\varphi^{*}\sigma = \sigma \circ \varphi$$

dir [14].

$M = (M, g)$, $N = (N, h)$ Riemann manifoldları,

$$\varphi : M \to N$$

dönüşümünün türev dönüşümü $d\varphi$,

$$T^{*}M \otimes \varphi^{-1}TN = Hom(TM, \varphi^{-1}TN) \to M$$

vektör demetinin bir kesiti olarak düşünülebilir. $Hom(TM,\varphi^{-1}TN)\to M$ vektör demeti, M manifoldu üzerindeki ∇^M Levi-Civita konneksiyonu ve ∇^φ pull-back konneksiyonundan indirgenen ∇ konneksiyonuna sahiptir. ∇ konneksiyonunun $d\varphi\in\Gamma(T^*M\otimes\varphi^{-1}TN)$ kesitine uygulanmasıyla φ dönüşümünün

$$T^*M\otimes T^*M\otimes\varphi^{-1}TN\to M$$

vektör demetinin bir kesiti olan ikinci temel formuna ulaşılır.

Tanım 2.1.2 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,

$$\varphi: M\to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ dönüşümünün ikinci temel formu, $d\varphi\in\Gamma(T^*M\otimes\varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $\nabla d\varphi$ ile gösterilir ve $X,\ Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\nabla d\varphi:\Gamma(TM)\otimes\Gamma(TM)\to\Gamma(\varphi^{-1}TN)$$
$$(X,Y)\to\nabla d\varphi(X,Y)$$

$$\nabla d\varphi(X,Y)=(\nabla_X d\varphi)(Y)=\nabla_X^\varphi d\varphi(Y)-d\varphi(\nabla_X^M Y) \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 2.1.3 (M^m,g) ve (N^n,h) Riemann manifoldları,

$$\varphi: M^m\to N^n$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin tensiyon alanı $\tau(\varphi)\in\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ ile gösterilir ve

$$\tau(\varphi)=divd\varphi=-d^*d\varphi=iz\nabla d\varphi=\sum_{i=1}^{m}\nabla d\varphi(e_i,e_i) \tag{2.1.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ M üzerinde bir ortonormal bazdır [14].

Tanım 2.1.4 (M^m,g) ve (N^n,h) Riemann manifoldları, $x\in M$ ve

$$\varphi: M\to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin enerji yoğunluğu $e(\varphi)$ ile gösterilen ve

$$e(\varphi): M \to [0,\infty)$$

$$x \to e(\varphi)_x = \frac{1}{2}\left|d\varphi_x\right|^2 \qquad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanan bir C^∞ fonksiyondur. Burada

$$\left|d\varphi_x\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)) \qquad (2.1.6)$$

ile tanımlanan *Hilbert-Schmidt* normudur [14].

Tanım 2.1.5 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları; D, M de bir kompakt bölge ve

$$\varphi: M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin *enerji integrali*, φ nin enerji yoğunluğunun integrali olarak tanımlanır ve $E(\varphi;D)$ ile gösterilir. Yani

$$E(\varphi;D) = \int_D e(\varphi)v_g = \frac{1}{2}\int_D \left|d\varphi\right|^2 v_g \qquad (2.1.7)$$

dir [14].

$E(\varphi;D) \geq 0$ dır ve $E(\varphi;D) = 0$ olması için gerek ve yeter şart φ nin D üzerinde sabit olmasıdır. Eğer M manifoldu kompakt ise $E(\varphi;M)$ yerine $E(\varphi)$ gösterimi kullanılır. Enerji integrali sadece g ve h metriklerine bağlıdır.

Tanım 2.1.6 (M,g), (N,h) Riemann manifoldları ve

$$C^\infty(M,N) = \left\{\varphi \mid \varphi: M \to N,\ \varphi\, bir\, C^\infty\ dönüşüm\right\}$$

kümesini göz önüne alalım. $\varphi \in C^\infty(M,N)$ dönüşümü kompakt bir D bölgesi üzerinde

$$E(.;D): C^\infty(M,N) \to R$$

ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ ye *harmoniktir* denir [14].

Tanım 2.1.7 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin bir C^∞ varyasyonu, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\varphi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

$$(x,t) \to \varphi_t(x)$$

biçiminde tanımlanır öyleki $\varphi_0 = \varphi$ dir [14].

$\{\varphi_t\}$, C^∞ olarak sadece bir $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametresine bağlı C^∞ dönüşümlerin bir ailesi olarak düşünülebilir [14].

Tanım 2.1.8 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. $\forall x \in M$ için $t \to \varphi_t(x)$ dönüşümü $\varphi(x) \in N$ noktasından geçen bir C^∞ eğri tanımlar. Bu eğrinin

$$v(x) = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}N$$

ile tanımlanan ve $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan hız vektörüne φ_t nin varyasyon vektör alanı denir [14].

Tersine $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan v için φ nin

$$\varphi_t(x) = \exp_{\varphi(x)}(tv(x))$$

ile tanımlı bir tek olmayan $\{\varphi_t\}$ ailesi vardır [14].

Tanım 2.1.9 (M,g), (N,h) Riemann manifoldları ve D, M nin kompakt bir altkümesi olsun. Bu durumda $\varphi : M \to N$ C^∞ dönüşümünün bir C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonu $\forall t$ için $M \setminus \overset{\circ}{D}$ üzerinde $\varphi_t = \varphi$ şartını sağlıyorsa $\{\varphi_t\}$ varyasyonu D içinde desteklenir denir. Burada $\overset{\circ}{D}$ ile D nin içi gösterilmektedir [14].

Tanım (2.1.6) yı bir başka şekilde aşağıdaki gibi vermek mümkündür:

Tanım 2.1.10 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M \to N$$

C^∞ dönüşümü M nin bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t;D)|_{t=0}=0$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir *harmonik dönüşüm* denir [14].

Tanım 2.1.11 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları , $x\in M$ ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik $\langle , \rangle$ ile gösterilir ve $v,w\in\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $x\in M$ noktasında

$$\langle v,w\rangle_x = h_{\varphi(x)}(v(x),w(x))$$

şeklinde tanımlanır [14].

Önerme 2.1.1 (Enerjinin Birinci Varyasyonu) $\varphi : M\to N$, Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir C^∞ dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D\subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle , \rangle$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t;D)|_{t=0}=-\int_D\langle v,\tau(\varphi)\rangle v_g \qquad (2.1.8)$$

dir. Burada $x\in D$ ve $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin

$$v(x)=\frac{\partial\varphi_t(x)}{\partial t}|_{t=0}$$

ile tanımlanan varyasyon vektör alanıdır [14].

Teorem 2.1.1 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları, $\varphi: M \to N$ bir C^∞ dönüşüm ve D, M nin bir kompakt altkümesi olsun. O halde φ nin harmonik olması için gerek ve yeter koşul $\tau(\varphi)=0$ olmasıdır [14].

Tanım 2.1.12 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları, $\varphi: M \to N$ bir harmonik dönüşüm olsun. O halde $\tau(\varphi)=0$ denklemi *harmonik denklem* veya *tensiyon alanı denklemi* olarak adlandırılır [14].

2.2 Biharmonik Dönüşümler

Tanım 2.2.1 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,

$$\varphi: M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin tensiyon alanı

$$\tau(\varphi) = iz\nabla d\varphi$$

olmak üzere $D \subseteq M$ kompakt bölgesi için φ nin *bienerji integrali*

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_D \left|\tau(\varphi)\right|^2 v_g$$

ile tanımlanır [15].

Önerme 2.2.1 (Bienerjinin Birinci Varyasyonu) (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları, $\varphi: M \to N$ bir C^∞ dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt altkümesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle , \rangle$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik ve $\Delta^\varphi = -iz(\nabla^\varphi\nabla^\varphi - \nabla^\varphi_\nabla)$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin kesitleri üzerindeki Laplasyan olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\,|_{t=0} = \int_D \langle \tau_2(\varphi), v\rangle v_g \tag{2.2.1}$$

dir. Burada $x \in D$ için $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin varyasyon vektör alanı; R^N, N manifoldu üzerinde eğrilik operatörü ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^{\varphi}(\tau(\varphi)) - izR^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-)$$

dir [15].

Tanım 2.2.2 (Bitensiyon Alanı) (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları, $\varphi : M \to N$ bir C^{∞} dönüşüm olsun. φ nin bitensiyon alanı $\tau_2(\varphi)$ ile gösterilir ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^{\varphi}(\tau(\varphi)) - izR^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-) \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlanır [15].

Tanım 2.2.3 (Biharmonik Denklem ve Biharmonik Dönüşüm) (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları, $\varphi : M \to N$ bir C^{∞} dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^{\varphi}(\tau(\varphi)) - izR^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-) = 0 \tag{2.2.3}$$

eşitliğine φ *dönüşümünün biharmonik denklemi* ve $\tau_2(\varphi) = 0$ denklemini sağlayan φ dönüşümüne de *biharmonik dönüşüm* denir [15].

Böylece her harmonik dönüşümün biharmonik olacağı açıktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Dolayısıyla harmonik olmayan (non-harmonik) biharmonik dönüşümler özel bir öneme sahiptir. Böyle dönüşümleri *özgün biharmonik dönüşümler* olarak adlandıracağız. (N, h) manifoldunun bir yarı-Riemann manifold olması durumunda da $\varphi : M \to N$ dönüşümünün bienerjisi ve biharmonik denklemi yukarıda verilen şekilde tanımlanır [14].

Tanım 2.2.4 $I \subseteq R$ olmak üzere $\gamma : I \to (M, g)$ bir izometrik immersiyon olsun. $\gamma(I)$ görüntü kümesi M de bir eğrinin görüntüsüdür. γ eğrisi yay parametresi ile verilsin. Bu durumda γ eğrisinin tensiyon alanı $\gamma' = \frac{d\gamma}{ds} = T$ olmak üzere

$$\tau(\gamma) = \nabla_{\gamma'}\gamma' \tag{2.2.4}$$

dır.

Böylece bitensiyon alanı

$$\tau_2(\gamma) = -\Delta\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma$$
$$= -iz(\nabla^\gamma\nabla^\gamma - \nabla^\gamma_\nabla)\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma$$

şeklinde yazılabilir. O halde γ eğrisinin biharmonik denklemi

$$-\nabla^2_{\gamma'}\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma = 0 \qquad (2.2.5)$$

şeklindedir [16].

2.3 *f*-Biharmonik Dönüşümler

Tanım 2.3.1 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $f \in C^\infty(M,R)$ ve $D \subset M$ bir kompakt küme olmak üzere, eğer φ

$$E_f(\varphi) = \frac{1}{2}\int_D f\,|d\varphi|^2\, v_g \qquad (2.3.1)$$

ile verilen *f*-enerji fonksiyonelinin bir kritik noktası ise φ ye *f-harmonik dönüşüm* denir.

f-enerji fonksiyonelinin Euler- Lagrange denklemi,

$$\tau_f(\varphi) = d\varphi(gradf) + f\,\tau(\varphi) = 0 \qquad (2.3.2)$$

f-harmonik dönüşüm eşitliğini verir ve $\tau_f(\varphi)$ *f-gerilim alanı* olarak adlandırılır ([4],[17]).

Tanım 2.3.2 (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Böylece $D \subset M$ bir kompakt küme olmak üzere bu küme üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonu

$$E_{2,f}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_D f\,|\tau(\varphi)|^2\, v_g \qquad (2.3.3)$$

biçiminde verilen *f*-bienerji fonksiyonelinin bir kritik noktası ise φ ye *f-biharmonik dönüşüm* denir.

f-bienerji fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi,

$$\tau_{2,f}(\varphi) = f\tau_2(\varphi) + (\nabla f)\tau(\varphi) + 2\nabla^{\varphi}_{gradf}\tau(\varphi) = 0 \qquad (2.3.4)$$

f-biharmonik dönüşüm eşitliğini verir ve $\tau_{2,f}(\varphi)$ *f-ikinci gerilim alanı* olarak adlandırılır [5].

Harmonik ve biharmonik olmayan *f*-biharmonik bir dönüşüme *has f-biharmonik dönüşüm* denir [5].

Tanım 2.3.3 $f : I \to R$, $\gamma : I \to N$ olup γ nın *f*-biharmonik eğri [18,19] olması

$$f(\nabla^3_T T - R^N(T, \nabla_T T)T) + 2f'\nabla^2_T T + f''\nabla_T T = 0$$

şeklinde tanımlanır. $(\gamma' = T)$

2.4 Bi-*f*-Harmonik Dönüşümler

Tanım 2.4.1 (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. Böylece $D \subset M$ bir kompakt küme olmak üzere bu küme üzerinde tanımlı bir bi-*f*-enerji fonksiyoneli

$$E_{f,2}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_D \left|\tau_f(\varphi)\right|^2 v_g \qquad (2.4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Bi-*f*-harmonik dönüşümün [18] denklemi,

$$\tau_{f,2}(\varphi) = -iz(\nabla^{\varphi} f(\nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi)) - f\nabla^{\varphi}_{\nabla^M}\tau_f(\varphi) + fR^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi) = 0$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.4.2 $\gamma : I \to N$ olmak üzere γ nın bi-*f*-harmonik eğri [7] olması için gerek ve yeter şart

$$0 = (ff''' + f'f'')T + (3ff'' + 2(f')^2)\nabla^N_T T + 4ff'\nabla^2_T T + f^2\nabla^3_T T + f^2 R^N(\nabla^N_T T, T)T$$

olmasıdır. Burada $f : I \to (0, \infty)$ bir C^{∞} dönüşüm,

$$\nabla_T^2 T = \nabla_T^N \nabla_T^N T$$

ve

$$\nabla_T^3 T = \nabla_T^N \nabla_T^N \nabla_T^N T$$

dir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Yarı-Riemann Manifoldlar

Tanım 3.1.1 V bir sonlu vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlanan bir simetrik bilineer $b:V\times V\rightarrow R$ fonksiyonuna *bilineer form* denir [20].

Tanım 3.1.2 V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve b de V üzerinde bir bilineer form olsun. Eğer

(i) Her $v\neq 0$ vektörü için $b(v,v)<0$ (≤ 0) ise b ye *negatif tanımlıdır (negatif yarı-tanımlı)*

(ii) Her $v\neq 0$ vektörü için $b(v,v)>0$ (≥ 0) ise b ye *pozitif tanımlıdır (pozitif yarı-tanımlı)*

(iii) $v\in V$ ve her $w\in V$ için $b(v,w)=0\Leftrightarrow v=0$ ise b ye *non-dejeneredir* denir [21].

b, V üzerinde bir bilineer form ise $W\subset V$ alt uzayı için b nin W ya kısıtlanmışı olan $b|_W$ de bir bilineer formdur [21].

Tanım 3.1.3 V sonlu boyutlu vektör uzayı üzerinde simetrik, non-dejenere olan bir g bilineer formuna *skaler çarpım* ve (V,g) ikilisine de *skaler çarpım uzayı* denir [21].

Tanım 3.1.4 V üzerinde bir simetrik bilineer form verildiğinde $boyV=m$ olmak üzere V nin bir $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ bazı vardır öyleki $p,q\geq 0$ tamsayıları için

$$g(e_i,e_j)=0 \quad (i\neq j)$$

ve

$$g(e_i,e_i)=\begin{cases}-1, & (1\leq i\leq p)\\ 1, & (p+1\leq i\leq p+q)\\ 0, & (p+q+1\leq i\leq m)\end{cases}$$

dir. Bu durumda g bilineer formuna (p,q) *işaretlidir* denir [22].

g bilineer formu non-dejenere ise

$$p+q=boyV$$

dir.

Pozitif ve negatif tanımlı iç çarpımlar non-dejeneredir ve sırasıyla $(0,m)$ ve $(m,0)$ işaretlidirler [21].

Tanım 3.1.5 M bir C^{∞} manifold ve $boyM=n$ olsun. M üzerinde C^{∞}, (p,q) tipinde, simetrik, 2-kovaryant tensör alanına bir *yarı-Riemann metrik* denir ve g ile gösterilir.

g yarı-Riemann metriği, M nin her noktasındaki tanjant uzayı üzerinde sabit (p,q) işaretli bir non-dejenere iç çarpım tanımlar. Böylece $q=n-p$ olur. $(0,n)$ işaretli bir yarı-Riemann metrik bir Riemann metriğidir. $(1,n-1)$ işaretli bir yarı-Riemann metrik ise bir *Lorentz metriktir* [21].

Tanım 3.1.6 M bir C^{∞} manifold olmak üzere bir g yarı-Riemann metrik ile donatılmışsa, M ye bir *yarı-Riemann manifoldu* denir.

$(p,n-p)$ işaretli bir $n-boyutlu$ yarı-Riemann manifoldu M_p^n ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.7 (M^n,g) bir yarı-Riemann manifold olsun. $v\in T_xM$ olmak üzere

(i) $g(v,v)<0$ ise v ye *timelike vektör,*

(ii) $g(v,v)>0$ ise v ye *spacelike vektör,*

(iii) $v\neq 0$ *için* $g(v,v)=0$ ise v ye *null (lightlike) vektör*

denir. Sıfır vektörü spacelike vektör kabul edilir [21].

Tanım 3.1.8 M bir yarı-Riemann manifold, $p \in M$ olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasında T_pM nin bir alt uzayı W olsun. Her $w \in W$ için $g(v,w) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq v \in W$ vektörü var ise W ya *dejenere altuzay* denir [21].

Sıfır altuzayı non-dejeneredir. T_pM nin bir W altuzayının non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $g|_W$ indirgenmiş metrik tensörünün non-dejenere olmasıdır [21].

Önerme 3.1.1 Bir V Lorentz uzayının W altuzayının non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^{\perp}$ yazılabilmesidir [21].

Özel olarak $(W^{\perp})^{\perp} = W$ olduğundan W nın dejenere olması için gerek ve yeter şart $W^{\perp}$ alt uzayının dejenere olmasıdır.

Tanım 3.1.9 V, *n*-boyutlu bir vektör uzayı ve V nin bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. V üzerinde tanımlı 2-kovaryant metrik tensörü için $g(e_i, e_i) = -1$ olacak şekildeki e_i $(1 \leq i \leq n)$ ortonormal baz vektörlerinin sayısına g *metrik tensörünün indeksi* denir [21].

Önerme 3.1.2 V, *n*-boyutlu bir vektör uzayı ve g de V üzerinde tanımlı 2-kovaryant metrik tensör olsun. Bu durumda g nin indeksi V nin ortonormal baz seçiminden bağımsızdır ve $g|_W$, negatif tanımlı olacak şekildeki V nin en büyük W altuzayının boyutuna eşittir [21].

3.2 Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlar

Tanım 3.2.1 M, bir *n*-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde ϕ, $(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-form olmak üzere

$$\eta(\xi) = -1 \qquad (3.2.1)$$

$$\phi^2 = I + \eta \otimes \xi \qquad (3.2.2)$$

şartlarını sağlayan bir (ϕ,ξ,η) üçlüsü varsa M ye bir *hemen hemen parakontakt manifold* ve (ϕ,ξ,η) üçlüsüne de M üzerinde bir *hemen hemen parakontakt yapı* denir. Burada I , TM üzerindeki birim dönüşüm ve $\otimes$ tensör çarpımıdır [11].

Önerme 3.2.1 M , (ϕ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip *n*-boyutlu hemen hemen parakontakt bir manifold olsun. Bu durumda

$$\phi\xi = 0 \tag{3.2.3}$$

$$\eta\circ\phi = 0 \tag{3.2.4}$$

$$rank(\phi) = n-1 \tag{3.2.5}$$

dir [11].

İspat: (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \phi^2\xi &= \xi + \eta(\xi)\xi \\ &= \xi - \xi \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

olur. Böylece ya $\phi\xi = 0$ ya da $\phi\xi$, ϕ nin 0 karakteristik değerine karşılık gelen aşikar olmayan karakteristik vektörüdür. (3.2.2) ve (3.2.6) dan

$$0 = \phi^2\phi\xi = \phi\xi + \eta(\phi\xi)\xi$$

yani

$$\phi\xi = -\eta(\phi\xi)\xi \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Eğer $\phi\xi$, ϕ nin 0 karakteristik değerine karşılık gelen aşikar olmayan karakteristik vektör ise

$$\eta(\phi\xi) \neq 0$$

dır. (3.2.7) eşitliğinin her iki tarafına ϕ uygulanırsa

$$0 = \phi^2\xi = -\eta(\phi\xi)\phi\xi = (\eta(\phi\xi))^2\xi \neq 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\phi\xi = 0$ olmak zorundadır. $\phi\xi = 0$ olduğu için (3.2.2) den herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için

$$\begin{aligned} \eta(\phi X)\xi &= \phi^2\phi X - \phi X \\ &= \phi(X + \eta(X)\xi) - \phi X \end{aligned}$$

$$= \eta(X)\phi\xi$$
$$= 0$$

elde edilir. Buradan $\eta \circ \phi = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak M üzerinde $\phi\xi = 0$ ve $\xi \neq 0$ olduğundan $rank(\phi) < n$ dir. Eğer bir $\xi^{'}$ vektör alanı $\phi\xi^{'} = 0$ şartını sağlayan bir diğer vektör alanı ise (3.2.2) den

$$0 = \xi^{'} + \eta(\xi^{'})\xi$$

dir. Böylece $\xi^{'} = -\eta(\xi^{'})\xi$ olarak yazılır. Yani $\xi^{'}$, ξ doğrultusundadır. Dolayısıyla $rank(\phi) = n - 1$ olur.

Lemma 3.2.1 M bir diferensiyellenebilir manifold, ξ ve η da $\eta(\xi) = -1$ şartını sağlayan sırasıyla bir kontravaryant ve bir kovaryant vektör alanı olsun. Eğer M üzerinde ξ vektör alanını timelike yapacak bir Lorentz metrik varsa bu durumda

$$\eta(X) = h(X, \xi) \qquad (3.2.8)$$

olacak şekilde bir h Lorentz metriği vardır [11].

İspat: M bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $\eta(\xi) = -1$ olacak şekilde ξ vektör alanını ve η 1-formunu alalım. f nin $f(\xi, \xi) = -1$ şartını sağlayan Lorentz metriği olduğunu düşünelim. Bu metriği kullanarak herhangi $X,\ Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$h(Y, X) = f(Y + \eta(Y)\xi, X + \eta(X)\xi) - \eta(X)\eta(Y) \qquad (3.2.9)$$

şeklinde yeni bir h metriği tanımlayalım. Bu durumda eğer X ve Y vektör alanları f metriğine göre ξ ye dik ise X ve Y vektör alanları f metriğine göre spacelike vektörlerdir. Böylece $h(Y, X) = f(Y, X)$ olur. Bu da (3.2.9) ile tanımlanan h metriğinin (3.2.8) şartını sağlayan bir Lorentz metrik olduğunu gösterir.

Lemma 3.2.1 kullanılarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.2.2 M, bir (ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip n-boyutlu bir manifold ise M hemen hemen parakontakt manifoldu her $X,\ Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

ve

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Lorentz metriğine sahiptir [11].

Tanım 3.2.2 M , bir (ϕ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısı ile birlikte *n*-boyutlu bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Her $X,\, Y\in\Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \tag{3.2.10}$$

ise M ye bir *Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold* ve (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsüne de M üzerinde *Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı* denir [11].

Eğer (3.2.10) eşitliğinde Y yerine ξ alınırsa

$$0=g(\phi X,\phi\xi)=g(X,\xi)+\eta(X)\eta(\xi)$$

yazılır. Buradan

$$g(X,\xi)=\eta(X) \tag{3.2.11}$$

elde edilir. (3.2.1) ve (3.2.11) den karakteristik vektör alanı olarak adlandırılan ξ vektör alanının bir timelike vektör olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 3.2.3 M , (ϕ,ξ,η,g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip manifold olsun. O halde M üzerinde

$$\Phi(X,Y)=g(X,\phi Y) \quad , \qquad \forall\; X,\, Y\in\Gamma(TM) \tag{3.2.12}$$

şeklinde tanımlanan Φ 2-formuna (ϕ,ξ,η,g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısının temel 2-formu denir ([11],[21]).

(3.2.10) eşitliğinde Y yerine ϕY yazılırsa (3.2.4) ten

$$g(\phi X,\phi^2 Y)=g(X,\phi Y) \tag{3.2.13}$$

elde edilir. (3.2.2) , (3.2.13) eşitliğinde kullanılırsa

$$g(\phi X,Y+\eta(Y)\xi)=g(X,\phi Y)$$

$$g(\phi X,Y)+\eta(Y)g(\phi X,\xi)=g(X,\phi Y) \tag{3.2.14}$$

olur. Böylece (3.2.11) den

$$g(\phi X, Y) = g(X, \phi Y), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.2.15}$$

elde edilir ki bu da Φ temel 2-formunun simetrik olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\Phi(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.2.16}$$

dir.

Tanım 3.2.4 M , (ϕ, ξ, η, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Her $X,\ Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2}((\nabla_X \eta)Y + (\nabla_Y \eta)X) \tag{3.2.17}$$

şartı sağlanıyor ise M ye *Lorentzian parakontakt manifold (kısaca LP-manifold)* denir [11].

Tanım 3.2.5 M , (ϕ, ξ, η, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi^2 X \tag{3.2.18}$$

veya denk olarak

$$(\nabla_X \phi)Y = \eta(Y)X + g(X, Y)\xi + 2\eta(X)\eta(Y)\xi \tag{3.2.19}$$

veya denk olarak

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y) + 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \tag{3.2.20}$$

şartı sağlanıyor ise M ye *Lorentzian para-Sasakian manifold (kısaca, LP-Sasakian manifold)* denir [11].

(M, ϕ, ξ, η, g) bir Lorentzian para-Sasakian manifold ise η 1-formu kapalıdır ve her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X \xi = \phi X$$

dir [11].

Önerme 3.2.3 (M, g) bir Lorentzian manifold; ξ, M üzerinde bir birim timelike vektör alanı ve η da M üzerinde ξ ile birleşen bir 1-form olsun. Bu durumda η 1-formu kapalı ve

$$(\nabla_X \nabla_Y \eta)Z = g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y) + 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \tag{3.2.21}$$

şartı sağlanıyor ise M üzerinde bir Lorentzian para-Sasakian yapı vardır [11].

Tanım 3.2.6 (M,g) bir Lorentzian manifold olsun. Eğer M üzerinde

$$\Phi(X,Y)=(\nabla_X\eta)Y=\varepsilon(g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)) \qquad \varepsilon^2=1$$

olacak şekilde bir ξ timelike vektör alanı ve ξ ile birleşen bir η 1-formu var ise M ye L*orentzian özel para-Sasakian manifold* denir [22].

Tanım 3.2.7 (M,ϕ,ξ,η,g) bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. S, M nin Ricci tensör alanı olmak üzere eğer her $X,\,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y)+\mu\eta(X)\eta(Y), \tag{3.2.22}$$

ise M ye $\eta-Einstein\,manifold$ denir. Burada λ ve μ, M üzerinde fonksiyonlardır [23].

(M,ϕ,ξ,η,g), *n*-boyutlu bir η- Einstein Lorentzian para-Sasakian manifold ise M nin Ricci tensör alanı her $X,\,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$S(X,Y)=\left(\frac{r}{n-1}-1\right)g(X,Y)+\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\eta(X)\eta(Y) \tag{3.2.23}$$

ile verilir [23].

Lemma 3.2.2 (M,ϕ,ξ,η,g) bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve $boyM=n$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır ([23],[24]):

$$g(R(X,Y)Z,\xi)=\eta(R(X,Y)Z)=g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y) \tag{3.2.24}$$

$$R(\xi,X)Y=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X \tag{3.2.25}$$

$$R(\xi,X)\xi=X+\eta(X)\xi \tag{3.2.26}$$

$$R(X,Y)\xi=\eta(Y)X-\eta(X)Y \tag{3.2.27}$$

$$S(X,\xi)=(n-1)\eta(X) \tag{3.2.28}$$

$$S(\phi X,\phi Y)=S(X,Y)+(n-1)\eta(X)\eta(Y) \tag{3.2.29}$$

Tanım 3.2.8 M bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. M üzerinde *konformal eğrilik tensörü* C ile gösterilir ve her $X,\ Y\in\Gamma(TM)$ için

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{(n-2)}\left\{\begin{array}{l} g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + S(Y,Z)X \\ -S(X,Z)Y \end{array}\right\} + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right\} \tag{3.2.30}$$

dir. Burada R, Riemann eğrilik tensörünü; S, Ricci tensör alanını; Q, Ricci operatörünü ve r de skaler eğriliği göstermektedir [25].

Tanım 3.2.9 M bir Lorenzian para-Sasakian manifold ve C de M üzerinde konformal eğrilik tensörü olsun. Eğer $C=0$ ise M ye *konformal flat manifold* denir [25].

Tanım 3.2.10 M bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve C de M üzerinde konformal eğrilik tensörü olsun. Eğer $\nabla C=0$ ise M ye *konformal simetrik manifold* denir [26].

Teorem 3.2.1 M bir konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda M , $S_1^n(1)$ Lorentzian küresi ile lokal olarak izometriktir [28].

İspat: M bir konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda $C=0$ dır. Riemann Christoffel eğrilik tensörü

$$\grave{R}(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) \qquad \forall X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$$

olmak üzere (3.2.30) eşitliğinden

$$`R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{(n-2)}\begin{Bmatrix} g(Y,Z)S(X,W)-g(X,Z)S(Y,W) \\ +S(Y,Z)g(X,W)-S(X,Z)g(Y,W)\end{Bmatrix}$$

$$-\frac{r}{(n-1)(n-2)}(g(Y,Z)g(X,W)) \qquad (3.2.31)$$

$$+\frac{r}{(n-1)(n-2)}(g(X,Z)g(Y,W))$$

yazılabilir. (3.2.31) de W yerine ξ alınır, (3.2.24), (3.2.11) ve (3.2.28) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)=\frac{1}{(n-2)}\begin{Bmatrix} g(Y,Z)S(X,\xi)-g(X,Z)S(Y,\xi) \\ +S(Y,Z)g(X,\xi)-S(X,Z)g(Y,\xi)\end{Bmatrix}$$

$$-\frac{r}{(n-1)(n-2)}g(Y,Z)g(X,\xi)$$

$$+\frac{r}{(n-1)(n-2)}g(X,Z)g(Y,\xi)$$

olur. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)=\frac{1}{(n-2)}\begin{Bmatrix} (n-1)g(Y,Z)\eta(X) \\ -(n-1)g(X,Z)\eta(Y) \\ +S(Y,Z)\eta(X)-S(X,Z)\eta(Y)\end{Bmatrix}$$

$$-\frac{r}{(n-1)(n-2)}g(Y,Z)\eta(X) \qquad (3.2.32)$$

$$+\frac{r}{(n-1)(n-2)}g(X,Z)\eta(Y)$$

elde edilir. Burada X yerine ξ alınarak (3.2.32) eşitliğinden

$$-g(Y,Z)-\eta(Z)\eta(Y)=\frac{1}{(n-2)}\begin{Bmatrix} -(n-1)g(Y,Z)-(n-1)\eta(Y)\eta(Z) \\ -S(Y,Z)-(n-1)\eta(Y)\eta(Z)\end{Bmatrix}$$

$$-\frac{r}{(n-1)(n-2)}\{-g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z)\} \qquad (3.2.33)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlikten

$$S(Y,Z)=\left(\frac{r}{n-1}-1\right)g(Y,Z)+\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\eta(Y)\eta(Z) \tag{3.2.34}$$

elde edilir. (3.2.34), (3.2.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\grave{R}(X,Y,Z,W)=\frac{1}{(n-2)}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{r}{n-1}-2\right)\left\{g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\right\}\\ +\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\left\{\begin{array}{l}g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)\\ +g(X,W)\eta(Y)\eta(Z)\\ -g(X,Z)\eta(Y)\eta(W)\\ -g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)\end{array}\right\}\end{array}\right] \tag{3.2.35}$$

bulunur. Şimdi (3.2.34) ve (3.2.12) eşitliklerini göz önüne alarak S nin X vektör alanı boyunca kovaryant türevini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z) &= \nabla_X S(Y,Z)-S(\nabla_X Y,Z)-S(Y,\nabla_X Z)\\ &=\frac{dr(X)}{(n-1)}\left\{g(Y,Z)+\eta(Y)\eta(Z)\right\}\\ &\quad+\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\left\{\begin{array}{l}\left[\eta(\nabla_X Z)+g(Z,\varphi X)\right]\eta(Y)\\ +\left[\eta(\nabla_X Y)+g(Y,\varphi X)\eta(Z)\right]\end{array}\right\}\\ &\quad+\left(\frac{r}{n-1}-1\right)\left\{g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)\right\}\\ &\quad-\left(\frac{r}{n-1}-1\right)g(\nabla_X Y,Z)-\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\eta(\nabla_X Y)\eta(Z)\\ &\quad-\left(\frac{r}{n-1}-1\right)g(Y,\nabla_X Z)-\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\eta(\nabla_X Z)\eta(Y)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \frac{dr(X)}{(n-1)}\{g(Y,Z)+\eta(Y)\eta(Z)\} + \left(\frac{r}{n-1}-n\right)\{\Phi(X,Z)\eta(Y)+\Phi(X,Y)\eta(Z)\} \tag{3.2.36}$$

eşitliği bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z)-(\nabla_Y S)(X,Z) = {} & \frac{dr(X)}{n-1}\{g(Y,Z)+\eta(Y)\eta(Z)\} \\ & -\frac{dr(Y)}{n-1}\{g(X,Z)+\eta(X)\eta(Z)\} \\ & +\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\Phi(X,Z)\eta(Y) \\ & -\left(\frac{r}{n-1}-n\right)\Phi(Y,Z)\eta(X)\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan $(\nabla_W C)(X,Y)Z = 0$ olduğundan $divC = 0$ dır. Buradan

$$(\nabla_X S)(Y,Z)-(\nabla_Y S)(X,Z) = \frac{1}{2(n-1)}\{g(Y,Z)dr(X)-g(X,Z)dr(Y)\} \tag{3.2.38}$$

elde edilir. (3.2.37) ve (3.2.38) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$r = n(n-1) \tag{3.2.39}$$

bulunur. (3.2.39), (3.2.35) eşitliğinde yerine yazılarak

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

elde edilir.

Tanım 3.2.11 M bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. M üzerinde her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{C}(X,Y)Z = aR(X,Y)Z + b\begin{Bmatrix} S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ +g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY \end{Bmatrix} - \frac{r}{n}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \tag{3.2.40}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{C}$ tensör alanına *quasi konformal eğrilik tensör alanı* denir. Burada a ve b, $ab \neq 0$ şartını sağlayan sabitleri; R, Riemann eğrilik tensörünü; S, Ricci tensör alanını; Q, Ricci operatörünü ve r de skaler eğriliği göstermektedir [27].

Tanım 3.2.12 M bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\tilde{C}$ da M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü olsun. Eğer $\tilde{C} = 0$ ise M ye *quasi konformal flat manifold* denir [27].

Teorem 3.2.2 M bir quasi konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda M, $S_1^n(1)$ Lorentzian küresi ile lokal olarak izometriktir [28].

İspat: M bir quasi konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda (3.2.40) eşitliğinden

$$`R(X,Y,Z,W) = -\frac{b}{a}\begin{Bmatrix} S(Y,Z)g(X,W) - S(X,Z)g(Y,W) \\ +g(Y,Z)S(X,W) - g(X,Z)S(Y,W) \end{Bmatrix} + \frac{r}{an}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right)\begin{Bmatrix} g(Y,Z)g(X,W) \\ -g(X,Z)g(Y,W) \end{Bmatrix} \tag{3.2.41}$$

yazılır. (3.2.41) eşitliğinde W yerine ξ alınır, (3.2.24), (3.2.11) ve (3.2.28) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)=-\frac{b}{a}\begin{Bmatrix} S(Y,Z)\eta(X)-S(X,Z)\eta(Y) \\ +(n-1)g(Y,Z)\eta(X) \\ -(n-1)g(X,Z)\eta(Y) \end{Bmatrix}$$
$$+\frac{r}{an}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)\begin{Bmatrix} g(Y,Z)\eta(X) \\ -g(X,Z)\eta(Y) \end{Bmatrix} \qquad (3.2.42)$$

elde edilir. Burada $X=\xi$ seçilerek

$$-g(Y,Z)-\eta(Z)\eta(Y)=-\frac{b}{a}\begin{Bmatrix} -S(Y,Z)-(n-1)\eta(Y)\eta(Z) \\ -(n-1)g(Y,Z)-(n-1)\eta(Y)\eta(Z) \end{Bmatrix}$$
$$+\frac{r}{an}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)\{-g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z)\}$$

olur. Böylece bu son eşitlikten

$$S(Y,Z)=\left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)-(n-1)-\frac{a}{b}\right)g(Y,Z)$$
$$+\left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)-2(n-1)-\frac{a}{b}\right)\eta(Y)\eta(Z) \qquad (3.2.43)$$

olduğu kolaylıkla görülür. (3.2.43), (3.2.41) de yerine yazılırsa

$$`R(X,Y,Z,W)=-\frac{b}{a}\left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)-(n-1)-2\right)\begin{Bmatrix} g(Y,Z)g(X,W) \\ -g(X,Z)g(Y,W) \end{Bmatrix}$$
$$-\frac{b}{a}\left[\left(\frac{r}{n}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)-2(n-1)-\frac{a}{b}\right)\right]\begin{Bmatrix} \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ -\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) \\ +\eta(X)\eta(W)g(Y,Z) \\ -\eta(Y)\eta(W)g(X,Z) \end{Bmatrix} \qquad (3.2.44)$$

elde edilir.

Şimdi (3.2.43) ve (3.2.12) yi göz önüne alarak S nin X vektör alanı boyunca kovaryant türevini hesaplayalım:

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \frac{dr(X)}{bn}\{g(Y,Z)+\eta(Y)\eta(Z)\} + \left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)-2(n-1)-\frac{a}{b}\right)\begin{Bmatrix}\Phi(X,Y)\eta(Z) \\ +\Phi(X,Z)\eta(Y)\end{Bmatrix} \tag{3.2.45}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z)-(\nabla_Y S)(X,Z) &= \frac{dr(X)}{bn}\{g(Y,Z)+\eta(Y)\eta(Z)\} \\ &\quad -\frac{dr(Y)}{n}\{g(X,Z)+\eta(X)\eta(Z)\} \\ &\quad +\left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)-2(n-1)-\frac{a}{b}\right)\Phi(X,Z)\eta(Y) \\ &\quad -\left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1}+2b\right)-2(n-1)-\frac{a}{b}\right)\Phi(Y,Z)\eta(X)\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

dir. Diğer taraftan $(\nabla_W \tilde{C})(X,Y)Z = 0$ olduğundan (3.2.46) eşitliği göz önüne alınarak

$$r = n(n-1) \tag{3.2.47}$$

bulunur. (3.2.47), (3.2.44) te yerine yazılarak

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1 M $n-$boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ise

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{3.2.48}$$

dir. Burada R , M nin Riemann eğrilik tensör alanıdır.

4. Bİ-*f*-HARMONİK EĞRİLER

Bu bölümde 4-boyutlu bir konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold üzerindeki null (lightlike) olmayan eğrilerin özgün bi-*f*-harmonik eğri olmaları için gerek ve yeter şartlar araştırılarak bu eğrilerin bi-*f*-harmonik denklemleri verilecektir.

İlk olarak M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \to M$ da M üzerinde birinci binormali timelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğrinin bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şartları inceleyelim. Bu durumda γ nın Frenet formülleri aşağıdaki gibidir [29].

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.1}$$

Burada $T,\ N,\ B_1,\ B_2$

$$g(T,T) = g(N,N) = g(B_2,B_2) = 1, \quad g(B_1,B_1) = -1$$

şartlarını sağlayan ortogonal vektör alanlarıdır. (4.1.1) de verilen Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa_1 N, \\ \nabla_T \nabla_T T &= -\kappa_1^2 T + \kappa_1' N + \kappa_1 \kappa_2 B_1, \\ \nabla_T \nabla_T \nabla_T T &= -3\kappa_1 \kappa_1' T \\ &\quad + (\kappa_1'' - \kappa_1^3 + \kappa_1 \kappa_2^2) N \\ &\quad + (2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2') B_1 \\ &\quad + (\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3) B_2, \\ R(\nabla_T T, T)T &= \kappa_1 N, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Burada $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$ sırasıyla γ nın birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleridir.

Önerme 4.1.1 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to (N,h)$ M de yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir eğri olsun. γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} 0 = {} & (ff''' + f'f'')T \\ & + (3ff'' + 2(f')^2)\nabla_T^N T \\ & + 4ff'\nabla_T^2 T + f^2\nabla_T^3 T \\ & + f^2 R^N(\nabla_T^N T, T)T \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

olmasıdır. Burada $f : I \to (0,\infty)$ bir dönüşümdür.

Teorem 4.1.1 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \to M$ birinci binormali timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş spacelike bir eğri olsun. $\{T, N, B_1, B_2\}$, γ boyunca ortogonal Frenet çatısı olmak üzere γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} 0 = {} & (-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'')T \\ & + \begin{pmatrix} 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 + 4\kappa_1' ff' \\ +\kappa_1'' f^2 - \kappa_1^3 f^2 + \kappa_1\kappa_2^2 f^2 + \kappa_1 f^2 \end{pmatrix} N \\ & + \left(\left(2\kappa_1'\kappa_2 f + \kappa_1\kappa_2' f + 4\kappa_1\kappa_2 f' \right) f \right) B_1 \\ & + \left(\kappa_1\kappa_2\kappa_3 f^2 \right) B_2 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

olmasıdır. (4.1.4) eşitliğinden

$$\begin{gathered} -3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 + 4\kappa_1' ff' + \kappa_1'' f^2 - \kappa_1^3 f^2 + \kappa_1\kappa_2^2 f^2 + \kappa_1 f^2 = 0, \\ 2\kappa_1'\kappa_2 f + \kappa_1\kappa_2' f + 4\kappa_1\kappa_2 f' = 0, \\ \kappa_1\kappa_2\kappa_3 = 0, \end{gathered} \tag{4.1.5}$$

elde edilir.

I. DURUM: Eğer $\kappa_1 = 0$, yani γ bir geodezik eğri ise (4.1.5) eşitliklerinden

$$f f'' + ff''' = 0 \Rightarrow \left(ff'' \right)' = 0 \Rightarrow ff'' = sabit$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2 Bir geodezik eğrinin bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart $ff'' = sabit$ olmasıdır.

II. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = 0$ ise (4.1.5) eşitlikleri

$$\begin{cases} -4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f f'' = 0, \\ -\kappa_1^2 f^2 + 3ff'' + 2\left(f' \right)^2 + f^2 = 0, \end{cases} \tag{4.1.6}$$

eşitliklerine indirgenir. (4.1.6) daki ikinci eşitlikten

$$ff'' = \frac{\left(\kappa_1^2 - 1 \right) f^2 - 2\left(f' \right)^2}{3} \tag{4.1.7}$$

elde edilir. (4.1.7) eşitliği

$$f'\left(\left(5\kappa_1^2 + 1 \right) f + 2f'' \right) = 0 \tag{4.1.8}$$

olmasını gerektirir.

Teorem 4.1.3 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ birinci binormali timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart f nin sabit olması veya

$$f(s) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{5\kappa_1^2 + 1}{2}} s \right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{5\kappa_1^2 + 1}{2}} s \right), \quad s \in I \text{ ve } c_1, c_2 \in R$$

denklemini sağlamasıdır.

III. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = sabit \neq 0$ ise (4.1.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} -4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' &= 0, \\ -\kappa_1^2 f^2 + \kappa_2^2 f^2 + 3ff'' + 2(f')^2 + f^2 &= 0, \\ f' &= 0, \\ \kappa_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1.9) dan

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 - \kappa_2^2 &= 1, \\ f' &= 0, \\ \kappa_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

eşitlikleri bulunur.

Teorem 4.1.4 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ birinci binormali timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = sabit \neq 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1^2 - \kappa_2^2 = 1$$

olacak şekilde bir helis olmasıdır.

IV. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 \neq sabit$ ise (4.1.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} -4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' &= 0, \\ -\kappa_1^2 f^2 + \kappa_2^2 f^2 + 3ff'' + 2(f')^2 + f^2 &= 0, \\ \kappa_2' f + 4\kappa_2 f' &= 0, \\ \kappa_2\kappa_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.1.5 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ birinci binormali timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun.

$\kappa_1 = sabit \neq 0,\ \kappa_2 \neq sabit$ *(hiçbir yerde sıfır olmayan)* olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_2^{-\frac{1}{4}}$ (c *bir pozitif sabit*), $\kappa_3 = 0$ ve $\kappa_1,\ \kappa_2$ eğriliklerinin

$$\begin{aligned} &32\kappa_1^2\kappa_2^2\kappa_2' - 25\left(\kappa_2'\right)^3 + 32\kappa_2\kappa_2'\kappa_2'' - 8\kappa_2^2\kappa_2''' = 0, \\ &-16\kappa_1^2\kappa_2^2 + 16\kappa_2^4 + 16\kappa_2^2 + 17\left(\kappa_2'\right)^2 - 12\kappa_2\kappa_2'' = 0, \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır.

V. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 = 0$ ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.6 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ birinci binormali timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ &-\kappa_1^3 f^2 + \kappa_1'' f^2 + 4\kappa_1' ff' + 3\kappa_1 ff'' \\ &\quad + 2\kappa_1\left(f'\right)^2 + \kappa_1 f^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

VI. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 = sabit \neq 0$ ise (4.1.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ &-\kappa_1^3 f^2 + \kappa_1\kappa_2^2 f^2 + \kappa_1'' f^2 + 4\kappa_1' ff' \\ &\quad + 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1\left(f'\right)^2 + \kappa_1 f^2 = 0, \\ &\kappa_1' f + 2\kappa_1 f' = 0, \\ &\kappa_1\kappa_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ birinci binormali timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$ (*hiçbir yerde sıfır olmayan*), $\kappa_2 = sabit \neq 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_1^{-\frac{1}{2}}$ (c *bir pozitif sabit*), $\kappa_3 = 0$ ve κ_1, κ_2 eğriliklerinin

$$
\begin{aligned}
&-9\left(\kappa_1'\right)^3 - 4\kappa_1^4\kappa_1' + 10\kappa_1\kappa_1'\kappa_1'' - 2\kappa_1^2\kappa_1''' = 0, \\
&3\left(\kappa_1'\right)^2 - 4\kappa_1^4 + 4\kappa_1^2 + 4\kappa_1^2\kappa_2^2 - 2\kappa_1\kappa_1'' = 0,
\end{aligned}
\tag{4.1.15}
$$

diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır.

VII. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 \neq sabit$ ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.8 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ birinci binormali timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$, $\kappa_2 \neq sabit$ (κ_1 *ve* κ_2 *hiçbir yerde sıfır olmayan)* olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_1^{-\frac{1}{2}}\kappa_2^{-\frac{1}{4}}$ (c *bir pozitif sabit*), $\kappa_3 = 0$ ve κ_1, κ_2 eğriliklerinin

$$
\begin{aligned}
&-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\
&-\kappa_1^3 f^2 + \kappa_1\kappa_2^2 f^2 + \kappa_1'' f^2 + \kappa_1 f^2 \\
&+ 4\kappa_1' ff' + 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1\left(f'\right)^2 = 0,
\end{aligned}
\tag{4.1.16}
$$

eşitliklerini sağlamasıdır.

İkinci olarak M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \to M$ da M üzerinde normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğrinin bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şartları inceleyelim. Bu durumda γ nın Frenet formülleri aşağıdaki gibidir [29].

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.17}$$

Burada $T,\ N,\ B_1,\ B_2$

$$g(T,T)=g(N,N)=1,\ g(B_2,B_2)=g(B_1,B_1)=0,\ g(B_1,B_2)=1$$
$$g(T,N)=g(T,B_1)=g(T,B_2)=g(N,B_1)=g(N,B_2)=0$$

şartlarını sağlayan vektör alanlarıdır. (4.1.17) de verilen Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa_1 N, \\ \nabla_T \nabla_T T &= -\kappa_1^2 T + \kappa_1' N + \kappa_1\kappa_2 B_1, \\ \nabla_T \nabla_T \nabla_T T &= -3\kappa_1\kappa_1' T \\ &\quad + (\kappa_1'' - \kappa_1^3) N \\ &\quad + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2' + \kappa_1\kappa_2\kappa_3) B_1, \\ R(\nabla_T T, T)T &= \kappa_1 N, \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

elde edilir. Burada $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$ sırasıyla γ nın birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleridir.

Teorem 4.1.9 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \to M$ normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş spacelike bir eğri olsun. $\{T, N, B_1, B_2\}$, γ boyunca ortogonal Frenet çatısı olmak üzere γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} 0 &= (-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'')T \\ &\quad + \begin{pmatrix} 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 + 4\kappa_1' ff' \\ +\kappa_1'' f^2 - \kappa_1^3 f^2 + \kappa_1 f^2 \end{pmatrix} N \\ &\quad + \left(\left(2\kappa_1'\kappa_2 f + \kappa_1\kappa_2' f + 4\kappa_1\kappa_2 f' + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 f \right) f \right) B_1 \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

olmasıdır. (4.1.19) eşitliğinden

$$\begin{aligned} -3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' &= 0, \\ 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 + 4\kappa_1' ff' + \kappa_1'' f^2 - \kappa_1^3 f^2 + \kappa_1 f^2 &= 0, \\ 2\kappa_1'\kappa_2 f + \kappa_1\kappa_2' f + 4\kappa_1\kappa_2 f' + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 f &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

elde edilir.

I. DURUM: Eğer $\kappa_1 = 0$, yani γ bir geodezik eğri ise (4.1.20) eşitliklerinden

$$f'f'' + ff''' = 0 \Rightarrow (ff'')' = 0 \Rightarrow ff'' = sabit$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.1.10 Bir geodezik eğrinin bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart $ff'' = sabit$ olmasıdır.

II. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = 0$ ise (4.1.20) eşitlikleri

$$\begin{cases} -4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ -\kappa_1^2 f^2 + 3ff'' + 2(f')^2 + f^2 = 0, \end{cases} \tag{4.1.21}$$

eşitliklerine indirgenir. (4.1.21) deki ikinci eşitlikten

$$ff'' = \frac{(\kappa_1^2 - 1) f^2 - 2(f')^2}{3} \tag{4.1.22}$$

elde edilir. (4.1.22) eşitliği

$$f'\left((5\kappa_1^2 + 1) f + 2f''\right) = 0 \tag{4.1.23}$$

olmasını gerektirir.

Teorem 4.1.11 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart f nin sabit olması veya

$$f(s)=c_1\cos\left(\sqrt{\frac{5\kappa_1^2+1}{2}}s\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\frac{5\kappa_1^2+1}{2}}s\right),\quad s\in I \text{ ve } c_1,\, c_2\in R$$

denklemini sağlamasıdır.

III. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0,\ \kappa_2 = sabit \neq 0,\ \kappa_3 = 0$ ise (4.1.20) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} -4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' &= 0, \\ -\kappa_1^2 f^2 + 3ff'' + 2\left(f'\right)^2 + f^2 &= 0, \\ f' &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1.24) ten

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 &= 1, \\ f' &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

eşitlikleri bulunur.

Teorem 4.1.12 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart κ_1 eğriliğinin

$$\kappa_1^2 = 1$$

eşitliğini sağlamasıdır.

IV. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0,\ \ \kappa_2 \neq sabit,\ \ \kappa_3 = 0$ ise (4.1.20) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} -4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' &= 0, \\ -\kappa_1^2 f^2 + 3ff'' + 2\left(f'\right)^2 + f^2 &= 0, \\ \kappa_2' f + 4\kappa_2 f' &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.1.13 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0,\ \kappa_2 \neq sabit$ (*hiçbir yerde sıfır olmayan*), $\kappa_3 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_2^{-\frac{1}{4}}$ (c *bir pozitif sabit*) ve $\kappa_1,\ \kappa_2$ eğriliklerinin

$$\begin{aligned} &32\kappa_1^2\kappa_2^2\kappa_2' - 25\left(\kappa_2'\right)^3 + 32\kappa_2\kappa_2'\kappa_2'' - 8\kappa_2^2\kappa_2''' = 0,\\ &-16\kappa_1^2\kappa_2^2 + 16\kappa_2^2 + 17\left(\kappa_2'\right)^2 - 12\kappa_2\kappa_2'' = 0, \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır.

V. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit,\ \kappa_2 = 0,\ \kappa_3 = 0$ ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.14 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit,\ \kappa_2 = 0,\ \kappa_3 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0,\\ &-\kappa_1^3 f^2 + \kappa_1'' f^2 + 4\kappa_1' ff' + 3\kappa_1 ff''\\ &\quad + 2\kappa_1\left(f'\right)^2 + \kappa_1 f^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

VI. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit,\ \kappa_2 = sabit \neq 0,\ \kappa_3 = 0$ ise (4.1.20) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f f'' = 0,\\
&-\kappa_1^3 f^2 + \kappa_1'' f^2 + 4\kappa_1' ff'\\
&+3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 + \kappa_1 f^2 = 0,\\
&\kappa_1' f + 2\kappa_1 f' = 0,
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.15 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$ *(hiçbir yerde sıfır olmayan)*, $\kappa_2 = sabit \neq 0$, $\kappa_3 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_1^{-\frac{1}{2}}$ (c *bir pozitif sabit*) ve κ_1, κ_2 eğriliklerinin

$$\begin{aligned}
&-9(\kappa_1')^3 - 4\kappa_1^4\kappa_1' + 10\kappa_1\kappa_1'\kappa_1'' - 2\kappa_1^2\kappa_1''' = 0,\\
&3(\kappa_1')^2 - 4\kappa_1^4 + 4\kappa_1^2 - 2\kappa_1\kappa_1'' = 0,
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır.

VII. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit$, $\kappa_2 \neq sabit$, $\kappa_3 = 0$ ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.16 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ normali spacelike ve birinci binormali null olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$, $\kappa_2 \neq sabit$ *(*κ_1 *ve* κ_2 *hiçbir yerde sıfır olmayan)*, $\kappa_3 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_1^{-\frac{1}{2}}\kappa_2^{-\frac{1}{4}}$ (c *bir pozitif sabit*) ve κ_1, κ_2 eğriliklerinin

$$
\begin{aligned}
-3\kappa_1\kappa_1' f^2 - 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0,& \\
-\kappa_1^3 f^2 + \kappa_1'' f^2 + \kappa_1 f^2& \\
+4\kappa_1' ff' + 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 \left(f'\right)^2 = 0,&
\end{aligned}
\tag{4.1.31}
$$

eşitliklerini sağlamasıdır.

Son olarak M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \to M$ da M üzerinde teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir timelike eğrinin bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şartları inceleyelim. Bu durumda γ nın Frenet formülleri aşağıdaki gibidir [29].

$$
\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}
\tag{4.1.32}
$$

Burada $T,\ N,\ B_1,\ B_2$

$$
g(B_1,B_1) = g(N,N) = g(B_2,B_2) = 1,\ \ g(T,T) = -1
$$

şartlarını sağlayan vektör alanlarıdır. (4.1.32) de verilen Frenet formülleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla_T T &= \kappa_1 N, \\
\nabla_T \nabla_T T &= \kappa_1^2 T + \kappa_1' N + \kappa_1\kappa_2 B_1, \\
\nabla_T \nabla_T \nabla_T T &= -3\kappa_1\kappa_1' T \\
&\quad + (\kappa_1'' + \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2) N \\
&\quad + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2') B_1 \\
&\quad + (\kappa_1\kappa_2\kappa_3) B_2, \\
R(\nabla_T T, T)T &= -\kappa_1 N,
\end{aligned}
\tag{4.1.33}
$$

elde edilir. Burada $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$ sırasıyla γ nın birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleridir.

Teorem 4.1.17 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \to M$ teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş timelike bir eğri olsun. $\{T, N, B_1, B_2\}$,

γ boyunca ortogonal Frenet çatısı olmak üzere γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}0 \; = \; & (3\kappa_1\kappa_1' f^2 + 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'')T \\ & + \begin{pmatrix} 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 + 4\kappa_1' ff' \\ +\kappa_1'' f^2 + \kappa_1^3 f^2 - \kappa_1\kappa_2^2 f^2 - \kappa_1 f^2 \end{pmatrix} N \\ & + \left(\left(2\kappa_1'\kappa_2 f + \kappa_1\kappa_2' f + 4\kappa_1\kappa_2 f'\right) f\right) B_1 \\ & + \left(\kappa_1\kappa_2\kappa_3 f^2\right) B_2\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

olmasıdır. (4.1.34) eşitliğinden

$$\begin{gathered}3\kappa_1\kappa_1' f^2 + 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 + 4\kappa_1' ff' + \kappa_1'' f^2 + \kappa_1^3 f^2 - \kappa_1\kappa_2^2 f^2 - \kappa_1 f^2 = 0, \\ 2\kappa_1'\kappa_2 f + \kappa_1\kappa_2' f + 4\kappa_1\kappa_2 f' = 0, \\ \kappa_1\kappa_2\kappa_3 = 0,\end{gathered} \tag{4.1.35}$$

elde edilir.

I. DURUM: Eğer $\kappa_1 = 0$, yani γ bir geodezik eğri ise (4.1.35) eşitliklerinden

$$f'f'' + ff''' = 0 \Rightarrow (ff'')' = 0 \Rightarrow ff'' = sabit$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.1.18 Bir geodezik eğrinin bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart $ff'' = sabit$ olmasıdır.

II. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = 0$ ise (4.1.35) eşitlikleri

$$\begin{cases} 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ \kappa_1^2 f^2 + 3ff'' + 2(f')^2 - f^2 = 0, \end{cases} \tag{4.1.36}$$

eşitliklerine indirgenir. (4.1.36) daki ikinci eşitlikten

$$ff'' = \frac{\left(1-\kappa_1^2\right) f^2 - 2(f')^2}{3} \tag{4.1.37}$$

elde edilir. (4.1.37) eşitliği

$$f'\left(\left(5\kappa_1^2+1\right)f-2f''\right)=0 \tag{4.1.38}$$

olmasını gerektirir.

Teorem 4.1.19 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma: I \to M$ teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart f nin sabit olması veya

$$f(s)=c_1e^{\sqrt{\frac{5\kappa_1^2+1}{2}}s}+c_2e^{-\sqrt{\frac{5\kappa_1^2+1}{2}}s}, \quad s\in I \text{ ve } c_1,\, c_2 \in R$$

denklemini sağlamasıdır.

III. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = sabit \neq 0$ ise (4.1.35) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' &= 0, \\ \kappa_1^2 f^2 - \kappa_2^2 f^2 + 3ff'' + 2\left(f'\right)^2 - f^2 &= 0, \\ f' &= 0, \\ \kappa_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1.39) dan

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 - \kappa_2^2 &= 1, \\ f' &= 0, \\ \kappa_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.40}$$

eşitlikleri bulunur.

Teorem 4.1.20 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma: I \to M$ teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 = sabit \neq 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1^2 - \kappa_2^2 = 1$$

olacak şekilde bir helis olmasıdır.

IV. DURUM: Eğer $\kappa_1 = sabit \neq 0$ ve $\kappa_2 \neq sabit$ ise (4.1.35) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ \kappa_1^2 f^2 - \kappa_2^2 f^2 + 3ff'' + 2(f')^2 - f^2 = 0, \\ \kappa_2' f + 4\kappa_2 f' = 0, \\ \kappa_2\kappa_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.1.41}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.1.21 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. $\kappa_1 = sabit \neq 0$, $\kappa_2 \neq sabit$ *(hiçbir yerde sıfır olmayan)* olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_2^{-\frac{1}{4}}$ $(c\ bir\ pozitif\ sabit)$, $\kappa_3 = 0$ ve κ_1, κ_2 eğriliklerinin

$$\begin{aligned} -32\kappa_1^2\kappa_2^2\kappa_2' - 25(\kappa_2')^3 + 32\kappa_2\kappa_2'\kappa_2'' - 8\kappa_2^2\kappa_2''' = 0, \\ 16\kappa_1^2\kappa_2^2 - 16\kappa_2^4 - 16\kappa_2^2 + 17(\kappa_2')^2 - 12\kappa_2\kappa_2'' = 0, \end{aligned} \tag{4.1.42}$$

diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır.

V. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 = 0$ ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.22 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 = 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &3\kappa_1\kappa_1' f^2 + 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ &\kappa_1^3 f^2 + \kappa_1'' f^2 + 4\kappa_1' ff' + 3\kappa_1 ff'' \\ &\quad + 2\kappa_1 (f')^2 - \kappa_1 f^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.1.43}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

VI. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 = sabit \neq 0$ ise (4.1.35) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &3\kappa_1\kappa_1' f^2 + 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' = 0, \\ &\kappa_1^3 f^2 - \kappa_1\kappa_2^2 f^2 + \kappa_1'' f^2 + 4\kappa_1' ff' \\ &+ 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 - \kappa_1 f^2 = 0, \\ &\kappa_1' f + 2\kappa_1 f' = 0, \\ &\kappa_1\kappa_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.1.44}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.23 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$ *(hiçbir yerde sıfır olmayan)* ve $\kappa_2 = sabit \neq 0$ olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_1^{-\frac{1}{2}}$ (*c bir pozitif sabit*), $\kappa_3 = 0$ ve κ_1, κ_2 eğriliklerinin

$$\begin{aligned} &-9(\kappa_1')^3 + 4\kappa_1^4\kappa_1' + 10\kappa_1\kappa_1'\kappa_1'' - 2\kappa_1^2\kappa_1''' = 0, \\ &3(\kappa_1')^2 + 4\kappa_1^4 - 4\kappa_1^2 - 4\kappa_1^2\kappa_2^2 - 2\kappa_1\kappa_1'' = 0, \end{aligned} \tag{4.1.45}$$

diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır.

VII. DURUM: Eğer $\kappa_1 \neq sabit$ ve $\kappa_2 \neq sabit$ ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.24 M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ teğet vektör alanı timelike olan yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. $\kappa_1 \neq sabit$, $\kappa_2 \neq sabit$ *(κ_1 ve κ_2 hiçbir yerde sıfır olmayan)* olduğunda γ nın bi-*f*-harmonik olması için gerek ve yeter şart $f = c\kappa_1^{-\frac{1}{2}}\kappa_2^{-\frac{1}{4}}$ (c *bir pozitif sabit*), $\kappa_3 = 0$ ve κ_1, κ_2 eğriliklerinin

$$\begin{aligned} 3\kappa_1\kappa_1' f^2 + 4\kappa_1^2 ff' + ff''' + f'f'' &= 0, \\ \kappa_1^3 f^2 - \kappa_1\kappa_2^2 f^2 + \kappa_1'' f^2 - \kappa_1 f^2 & \\ + 4\kappa_1' ff' + 3\kappa_1 ff'' + 2\kappa_1 (f')^2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

eşitliklerini sağlamasıdır.

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

Tezin dördüncü bölümünde bir 4-boyutlu konformal flat, quasi konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold üzerinde tanımlı bir bi-*f*-harmonik eğrinin $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortogonal Frenet çatısındaki teğet vektör alanının timelike, birinci binormal vektör alanının timelike ve normal vektör alanının spacelike iken birinci binormalinin null olma koşullarında eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü eğriliklerin birbirlerine göre sıfır, sabit veya sabitten farklı olma durumlarında bu eğrilikler ile ilgili denklemler elde edilmiştir.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tezin son bölümünde elde edilien sonuçlar ışığında, daha sonrasında konu ile ilgilenen araştırmacılar farklı tipteki manifoldlar üzerinde farklı tipteki eğriler ile ilgili karakterizasyonlar ve sınıflandırmalar yapabilirler.

KAYNAKLAR

[1] G.Y. Jiang, "*2-harmonic isometrik immersions between Riemannian manifolds*", Chinese Ann. Math. Ser. A, vol. 7, pp. 130-144, 1986.

[2] J. Eells and J. H. Sampson, "*Harmonic mappings of Riemannian manifolds*", Amer. J. Math., vol. 86, pp. 109-160, 1964.

[3] G. Y. Jiang, "*2-harmonic maps and their first and second variational formulas*", Chinese Ann. Math. Ser. A, vol. 7, pp. 389-402, 1986.

[4] N. Course, "*f-Harmonic maps*", Ph.D. Thesis, University of Warwick, 2004.

[5] W-J. Lu, "*On f-biharmonic maps and bi-f-harmonic maps between Riemannian manifolds*", Science China Mathematics, vol. 58, no. 7, pp. 1483-1498, 2015.

[6] Y.L. Ou, "*On f-biharmonic maps and f-biharmonic submanifolds*", Pacific J. Math., vol. 271, pp. 461-477, 2014.

[7] S. Yüksel Perktaş, A. M. Blaga, F.E. Erdoğan and B. E. Acet, "*Bi-f-harmonic curves and hypersurfaces*", Filomat, vol. 33, pp. 5167-5180, 2019.

[8] B. E. Acet, "On bi-f-harmonic curves", in 2^{nd} International Conference on Mathematical and Related Science, Antalya, 2019, pp. 65-74.

[9] I. Sato, "*On a structure similar to the almost contact structure*", Tensor (N.S.), vol. 30, pp. 219-224, 1976.

[10] T. Adati and K. Matsumoto, "*On conformally recurrent and conformally symmetric P-Sasakian Manifolds*", TRU Math., vol. 13, pp. 25-32, 1977.

[11] K. Matsumoto, "*On Lorentzian paracontact manifolds*", Bull. of Yamagata Univ. Nat. Sci., vol. 12, pp. 151-156, 1989.

[12] I. Mihai and R. Rosca, "*On P-Sasakian Manifolds*", Classical Analysis, World Scientific Publ., pp. 156-169, 1992.

[13] S. Prasad and R. H. Ojha, "*Lorentzian paracontact submanifolds*", Publ. Math. Debrecen., vol. 44, pp. 215-223, 1994.

[14] P. Baird and J. C. Wood, "*Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*", New York: Clarendons Press, 2003.

[15] S. Montaldo and C. Oniciuc, "*A Short Survey on Biharmonic Maps Between Riemannian Manifolds", Revista dela Union Mathematica Argentina, vol. 47, no. 2, pp. 1-22, 2006.*

[16] R. Caddeo, S. Montaldo and P. Piu, "*Biharmonic curves on a surface"*, Rend. Mat. Appl., vol. 21, pp. 143-157, 2001.

[17] S. Ouakkas,, R. Nasri, and M. Djaa, "*On the f-harmonic and f-biharmonic maps*", JP J.Geom. Topol. vol. 10, pp. 11-27, 2010.

[18] Y.L. Ou, "On *f*-biharmonic maps and *f*-biharmonic submanifolds", Pacific J. Math., vol. 271, pp. 461-477, 2014.

[19] Y.L. Ou, "*Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds*", Pacific J. Math., vol. 248, pp. 217-232, 2010.

[20] A. Sabuncuoğlu, *Lineer Cebir*, Ankara: Nobel Yayınları, 2004.

[21] B. O'Neill, "*Semi-Riemann Geometry"*, New York: Academic Press, 1983.

[22] K. Matsumoto, I. Mihai and R. Rosca, "ξ*-null geodesic gradient vector fields on a Lorentzian para-Sasakian manifold"*, J. Korean Math. Soc., vol 32, no. 1, pp. 17-31, 1995.

[23] I. Mihai, A. A. Shaikh and U. C. De, "*On Lorentzian para-Sasakian manifolds"*, Korean Journal of Mathematical Sciences, vol. 6, pp. 1-13, 1999.

[24] K. Matsumoto and I. Mihai, "*On a certain transformation in a Lorentzian para-Sasakian manifold"*, Tensor (N.S.), vol. 47, pp. 189-197, 1988.

[25] K. Yano and M. Kon, "*Structures on Manifolds"*, 3. World Scientific Co., Singapore, 1984.

[26] M. C. Chaki and B. Gupta, "*On conformally symmetric spaces"*, Indian J. Math, vol. 5, pp. 113-122, 1963.

[27] K. Yano and S. Sawaki, "*Riemannian manifolds admitting on a conformal transformation group"*, J. Differential Geometry, vol. 2, pp. 161-184, 1968.

[28] M. Tarafdar and A. Bhattacharyya, *"On Lorentzian para-Sasakian manifolds"*, Hungary: Steps in Diff. Geom, Proccedings of the Collquium on Diff. Geom., 2000.

[29] J. Walrave, "Curves and surfaces in Minkowski spaces", Doctoral Thesis, K.U. Leuven, Fac. of Science, 1995.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Ferhat KİY

Doğum Yeri : Adıyaman

Doğum Tarihi : 19.10.1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : bitensiyonalani@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	**Alan**	**Üniversite/Okul**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik	Kocaeli Üniversitesi	2009
Lise	Sayısal	Adıyaman Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı Lise)	2002