T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN POLY-NORDEN METRİK MANİFOLDLARIN BAZI NONDEJENERE ALTMANİFOLDLARI

VİLDAN AYHAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2020

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN POLY-NORDEN METRİK MANİFOLDLARIN BAZI NONDEJENERE ALTMANİFOLDLARI

Vildan AYHAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Bu tez 20/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Danışman

Prof. Dr. Erol KILIÇ
Üye

Doç. Dr. Bilal Eftal ACET
Üye

Doç. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdür V.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN POLY-NORDEN METRİK MANİFOLDLARIN BAZI NONDEJENERE ALTMANİFOLDLARI

Vildan AYHAN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Yıl : 2020, Sayfa sayısı: VII+70

Jüri : Prof. Dr. Erol KILIÇ
Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Doç. Dr. Bilal Eftal ACET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olarak düzenlenen birinci bölümde altın, metalik, hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldlar gibi bazı özel diferensiyellenebilir manifoldların ortaya çıkışı ve gelişimi ile ilgili bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde, diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde altın oran ile ilgili temel tanım ve özellikler verildikten sonra altın oranın yakınsakları, kuvvetleri ve kuvvetlerinin yakınsakları incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca bronz ve gümüş oranlar ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldlar incelenerek bu tipteki manifoldların altmanifoldları ile ilgili temel özellikler verilmiş ve özel olarak bu tip manifoldların invaryant ve anti invaryant altmanifoldlarının geometrisi araştırılmıştır.

Tezin orijinal sonuçlarını içeren beşinci bölümde hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldların slant altmanifoldları ilk kez tanıtılmış, geometrik özellikleri incelenmiş ve örnekler verilmiştir. Ayrıca hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldlarının altmanifoldları üzerine indirgenen yapının normallik şartları elde edilmiştir.

Son bölüm ise sonuçlar ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bronz oran, Hemen hemen poly-Norden Riemann manifold, İnvaryant altmanifold, Anti-invaryant altmanifold, Slant altmanifold, Nijenhuis tensör alanı.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME NONDEGENERATE SUBMANIFOLDS OF ALMOST POLY-NORDEN METRIC MANIFOLDS

Vildan AYHAN

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Year : 2020 , Number of pages: VII+70

Jury : Prof. Dr. Erol KILIÇ
Assoc. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET

This study, which is designed as a master thesis, consists of six chapters. The first chapter is the introduction part and this section presents information on the emergence and development of some special differentiable manifolds such as golden manifolds, metallic manifolds and almost poly-Norden Riemannian manifolds. In the second section, some basic concepts for better understanding of the rest of the thesis are given.

In the third section after giving basic definitions and properties of golden ratio; convergence, powers and convergence of powers of golden ratio are investigated. Also, bronze and silver ratios are discussed.

In the fourth section, almost poly-Norden Riemannian manifolds and their basic geometric properties are investigated. Especially, the invariant and anti-invariant submanifolds of such manifolds are studied.

In the fifth chapter, which contains the original results of the thesis, the slant submanifolds of poly-Norden Riemann manifolds are introduced for the first time, their geometric properties are examined and examples are given. In addition, the normality conditions of the structure, which is induced to the submanifolds from the ambient manifolds, are obtained. The last section is devoted to the results and recommendations.

Key Words: Bronze ratio, Almost poly-Norden Riemannian manifold, Invariant submanifold, Anti-invariant submanifold, Slant submanifold, Nijenhuis tensor field.

BEYAN

"Hemen Hemen Poly-Norden Metrik Manifoldların Bazı Nondejenere Altmanifoldları" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Vildan AYHAN

TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim süresince tecrübesi ve birikimi ile yolumu aydınlatan Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI’ ya; zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanlarını ayıran Sayın Doç. Dr. Bilal Eftal ACET’e teşekkürlerimi sunarım.

Tez konumu belirleyerek beni bu konuda çalışmaya teşvik eden, bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, sabır ve ilgisini hiçbir zaman eksik etmeyen ve bu çalışmanın ortaya çıkmasında çok büyük emeği olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ’a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Öğrenim hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli anneme, babama ve sevgili eşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
I	: Reel sayılar kümesinde bir aralık
M	: Manifold
$C^{\infty}(M)$	: M üzerinde diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi
g	: Metrik tensör
$\Gamma(TM)$	: M nin tanjant demetinin diferensiyellenebilir kesitlerinin vektör uzayı
Φ	: (1,1)- tensör alanı
T_pM	: M nin p noktasındaki tanjant uzay
B_m	: Bronz oran
S_m	: Gümüş oran
$F_{m,n}$	: Gümüş Fibonacci Sayıları
$L_{m,n}$	: Gümüş Lucas Sayıları
$f_{m,n}$	: Bronz Fibonacci Sayıları
$l_{m,n}$	: Bronz Lucas Sayıları

1. GİRİŞ

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasındaki uyumu ifade eden, basit bir kurala göre belirlenmiş ancak saptandığı her nesne ve varlıkta mükemmel bir sistemi ortaya çıkaran geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Altın oran olarak bilinen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033$ sayısı $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin bir çözümü olup doğada sıklıkla karşılaşılması ve sanat eserlerinde kullanılmasından dolayı çok ilginçtir.

Spinadel 1997 de [1-3] altın oranın bir genelleştirmesi olarak metalik oranlar ailesini veya metalik oranları tanıttı. p ve q pozitif tamsayılar olmak üzere metalik oranlar ailesinin elamanları $x^2 - px + q = 0$ denkleminin çözümüdür ve (p, q)-metalik sayıları olarak adlandırılan bu metalik sayılar $\delta_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ile gösterilir. Metalik oranlar ailesinin elemanları altın oran, gümüş oran, bronz oran, bakır oran ve diğer birçok metal gibi bir metalin adını alır.

Belirli diferensiyellenebilir geometrik yapılarla donatılmış manifoldlar, diferensiyel geometride önemli bir yere sahiptir. Bu tip manifoldlar arasında olan kompleks manifoldlar, çarpım manifoldları, kontakt metrik manifoldlar, altın manifoldlar ve metalik manifoldlar yoğun olarak çalışılmaktadır.

Son yıllarda altın orandan ve metalik orandan esinlenerek altın Riemann manifoldları [4] ve metalik Riemann manifoldları [5] Crasmareanu and Hretcanu tarafından tanımlandı. Metalik Riemann manifoldlarının önemli bir alt sınıfı olarak kabul edilen altın Riemann manifoldları ve altmanifoldları pek çok geometrici tarafından yoğun olarak çalışılmaktadır [6-11]. Altın yapı ile donatılmış semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları da geniş bir çalışma alanı oluşturmaktadır [12-13]. Esas manifold üzerindeki metalik Riemann yapısı, altın yapıyı özel bir durumu olarak ortaya koyduğu ve altın Riemann yapısına göre daha geniş geometrik özellikler sunmaya imkan verdiği için son dönemlerde sıklıkla çalışılmaya başlanmıştır. Söz konusu çalışmalar metalik Reimann manifoldların farklı tipteki nondejenere altmanifoldları ve metalik yapı ile donatılmış semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları üzerinde yoğunlaşmaktadır [14-18].

Diğer taraftan farklı bir bakış açısıyla 2011 yılında Kalia [19], Spinadel tarafından [3] de verilen bronz orandan farklı olan ve metalik oran ile arasında herhangi bir kapsama ilişkisi bulunmayan yeni bir bronz oran tanımlamıştır. [19] da yazar bronz Fibonacci ve Lucas sayılarını tanıtarak bronz oranların kuvvetlerinin sürekli kesirleri ile bronz Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Kalia tarafından tanımlanan bronz orana p ve q pozitif tamsayılar olmak üzere $\delta_{p,q}$ metalik sayıları ile ulaşmak mümkün değildir.

Gümüş oran $(2{,}414\ldots)$, 2 ve 3 arasındaki bir metalik oran iken altın oran $(1{,}618\ldots)$, 1 ve 2 arasındaki bir metalik orandır. "Bronz oran" $(3{,}303\ldots)$ terimi veya diğer metallerin adları kullanılan terimler (nikel veya bakır gibi) bazen sonraki metal oranlarını adlandırmak için kullanılır. Metalik oranlar ailesinin elemanları matematik, fizik ve sanat arasında bir köprü teşkil eden önemli matematiksel özelliklere sahiptir. Örneğin Altın oran ve gümüş oran Mısır, Türkiye, Hindistan, Çin ve diğer birçok eski medeniyetlerin dinsel sanatlarında görünmektedir [20]. Gümüş oran fraktal geometriyi açıklamada kullanılmaktadır, bronz oranlar dinamik sistemler, quasi-kristaller [2], vb. çalışma alanlarında önemli bir rol oynar. Yüksek mertebeden Cantor kümelerinin Hausdorf boyutları arasındaki ilişkiler ve altın oran veya gümüş oran El Naschie [21-24] tarafından incelenmiştir. El Naschie Bijection, Altın oran, Değiştirilmiş Fibonacci, Gümüş oran ve Aritmetik oran teoremlerini ispatlamıştır.

Altın manifold ve metalik manifold tanımlarından esinlenerek Şahin [25], Kalia tarafından tanımlanan bronz oran ile donatılmış yeni bir manifold tanımladı ve bu tip manifoldları hemen hemen poly-Norden manifoldlar olarak adlandırdı. 2020 de ise Perktaş [26] tarafından Şahin'in tanımladığı hemen hemen poly-Norden metrik manifoldların altmanifoldları ile ilgili ilk çalışma yapıldı.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada hemen hemen poly-Norden metrik manifoldların invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları ile ilgili yapılmış çalışmalar göz önüne alınarak slant altmanifoldları ilk kez tanıtılmış ve altmanifolda indirgenmiş yapının normalliği Nijenhuis tensör alanı kullanılarak araştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için Riemann manifoldları ve altmanifoldları ile ilgili temel tanımlar verilmiştir.

2.1. Riemann Metriği

Tanım 2.1.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M)$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

i) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

ii) $g(X,X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine Riemann manifoldu denir [27].

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayını ve bu uzay üzerinde

$$< X,Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

iç çarpımını göz önüne alalım. Bu durumda kolayca görülür ki $<,>$ bilineer, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $<,>$ bir Riemann metrik ve $(\mathbb{R}^n, <,>)$ ikilisi bir Riemann manifoldudur [28].

Örnek 2.1.3. (M,g) ve (B,g'), $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ve $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta \in J}$ diferensiyellenebilir yapılara sahip m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. $\{U_\alpha \times V_\beta\}_{\alpha \in I, \beta \in J}$, $M \times B$ topolojik çarpım uzayı için bir açık örtü oluşturur. Bu durumda

$$\varphi_\alpha \times \phi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

$$(p,q) \to \varphi_\alpha \times \phi_\beta(p,q) = (\varphi_\alpha(p), \phi_\beta(q))$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Kolayca görülür ki $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \phi_\beta)$, $M \times B$ için C^{∞} uyumlu haritalardır ve $M \times B$ için diferensiyellenebilir yapı meydana getirirler. Sonuç olarak $M \times B$ bir diferensiyellenebilir manifolddur, bu manifolda çarpım manifoldu denir. Diğer taraftan $M \times B$ çarpım manifoldunu ve π_1 ve π_2 de $M \times B$ den sırasıyla M ve B ye olan projeksiyonları göstersin. Bu durumda

$$g_{M\times B}(X,Y)=\pi_1^*g(X,Y)+\pi_2^*g'(X,Y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu ifade

$$g_{M\times B}(X,Y)=g(\pi_{1*}X,\pi_{1*}Y)+g'(\pi_{2*}X,\pi_{2*}Y)$$

şeklinde de yazılır. Kolayca görülür ki $g_{M\times B}$, simetrik bilineer bir fonksiyondur. Diğer taraftan, kabul edelim ki $V\neq 0$ için

$$g_{M\times B}(V,V)=0,\ V\in\chi(M\times B)$$

olsun. Böylece

$$g_{M\times B}(V,\pi_{1*}(V))=g(\pi_{1*}(V),\pi_{1*}(V))=0$$
$$\Rightarrow\pi_{1*}(V)=0$$

ve

$$g_{M\times B}(V,\pi_{2*}(V))=g(\pi_{2*}(V),\pi_{2*}(V))=0$$
$$\Rightarrow\pi_{2*}(V)=0$$

olur. Bu ifadelerden $V=0$ elde edilir. Bu ise $g_{M\times B}$ bilineer formunun pozitif tanımlı olduğunu gösteriri. Böylece $(M\times B, g_{M\times B})$ bir Riemann manifoldudur [28].

Manifold üzerinde Riemann metriğinin tanımlı olması bir vektör alanının uzunluğunu ve iki vektör alanı arasındaki açıyı tanımlamayı mümkün kılmaktadır. Metrik tensörü $<,>$ olan bir Riemann manifoldu M olsun. Bir $X_p\in T_PM$ tanjant vektörünün uzunluğu

$$\parallel X_p\parallel=\sqrt{<X,X>_P},$$

reel sayısı ile tanımlanır. Sıfırdan farklı iki $X_p,Y_p\in T_PM$ tanjant vektörleri arasındaki θ açısı

$$<X_p,Y_p>=\parallel X_p\parallel\parallel Y_p\parallel\cos\theta,$$

ile tanımlanır. Burada θ ölçüsünün $[0,\pi]$ kapalı aralığında kalacağını

$$\left|<X_p,Y_p>\right|\leq\parallel X_p\parallel\parallel Y_p\parallel,$$

ile verilen Schwarz eşitsizliğinden biliyoruz. V ve W Riemann manifoldu M üzerinde vektör alanları ise

$$g(V,W)=g(dx^i(V)\frac{\partial}{\partial x_i},dx^j(W)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

dır. Bu durumda $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=g_{ij}$ olmak üzere

$$g(V,W) = g_{ij}dx^i(V)dx^j(W),$$

yazılır. Bu ifade keyfi her V ve W için doğru olduğundan

$$g = g_{ij}dx^i dx^j,$$

olur [27].

Örnek 2.1.4. $\mathbb{R}^n$ de tanımlanan metrik yukarıdaki notasyona göre

$$g = \delta^i_j dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2,$$

olur [28].

Eğer $X_1, \ldots, X_n$, M Riemann manifoldu üzerinde çatı ve $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ dual çatı ise yukarıdaki notasyon $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ olmak üzere

$$g = g_{ij}\sigma^i\sigma^j$$

olur.

Tanım 2.1.5. Metrik tensörü $<,>$ olan bir Riemann manifoldu M olsun.$\{([a,b],\alpha)\}$ atlası ile verilen eğrinin teğet vektör alanı T ise $\alpha([a,b]) \subset M$ eğirisinin $\alpha(a)$ dan $\alpha(b)$ ye kadar olan yayının uzunluğu

$$|\alpha|_a^b = \int_a^b \sqrt{< T(t), T(t) >}\, dt, \qquad t \in I,$$

olarak tanımlanır [28].

Yukarıda verilen uzunluk ds ile gösterilir ve bu durumda metrik tensör

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

ile verilir.

Teorem 2.1.6. Riemann manifoldu üzerinde bir eğrinin yay uzunluğu atlas seçiminden bağımsızdır [28].

Aşağıdaki teorem bir Riemann manifoldu üzerinde özel bir lineer konneksiyonunun varlığını garanti etmektedir.

Teorem 2.1.7. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu ($\nabla g = 0$) bir tek ∇ lineer konneksiyon vardır [28].

İspat. (Teklik). Kabul edelim ki $T = 0$ ve $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyonu varolsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için $T(X,Y) = 0$ olduğundan

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \qquad (2.1.1)$$

dır. Diğer taraftan $Z \in \chi(M)$ için $(\nabla_X g)(Y,Z) = 0$ olduğundan

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \tag{2.1.2}$$

olur. (2.1.1) ve (2.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_Z X) + g([Z,X], Y)$$

olur. Bu işlem devam ettirilirse

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X])$$
$$-g(X,[Y,Z]) - g(\nabla_X Y, Z)$$

elde edilir. Buradan Koszul formülü adı verilen

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ +g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \end{Bmatrix} \tag{2.1.3}$$

denklemi bulunur. Bu ifadede M üzerinde ilk iki denklem şartlarını sağlayan her ∇ konneksiyonu için sağlandığından ve g Riemann metriği poztif tanımlı oluğundan ∇ tektir.

(Varlık). X ve Y seçilmiş vektör alanları olmak üzere ∇ konneksiyonu (2.1.3) ile tanımlayalım. Bu durumda kolayca görülür ki ∇ lineerdir. Doğrudan işlemlerle (2.1.1) ve (2.1.2) şartlarının sağlandığı da görülür.

Teorem 2.1.7 de verilen konneksiyona Levi-Civita konneksiyon, Riemann konneksiyon veya metrik konneksiyon adı verilir.

M bir Riemann manifoldu ve $x^1, \dots, x^n$, M manifoldunun bir U komşuluğunda koordinat sitemi, koordinat sisteminin belirlediği çatı $\{X_1, \dots, X_n\}$. Bu durumda

$$\nabla_{X_k} X_j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{kj}^{i} X_i$$

olmak üzere

$$\Gamma_{kj}^{i} : U \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonları ile tanımlayalım. Bu fonksiyonlara Christoffel sembolleri denir. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olduğundan

$$\Gamma_{ji}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left\{\frac{\partial g_{rj}}{\partial X_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial X_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X_r}\right\}$$

olur. Bu ifade Christoffel sembollerini dolayısıyla Levi-Civita konneksiyonunun metrik tensörün bileşenleri türünden elde edileceğini göstermektedir [27].

2.2. Eğrilikler

Tanım 2.2.1. (M, g) bir Riemann manifoldu ve R, M üzerinde tanımlı eğrilik tensör alanı olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için $K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ ile tanımlı tensör alanına Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı adı verilir [28].

Aşağıdaki lemmada Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanının özellikleri sıralanmaktadır.

Lemma 2.2.2. (M, g) bir Riemann manifoldu ve K Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı olsun. Bu durumda $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0, \qquad (2.2.1)$$

$$K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z), \qquad (2.2.2)$$

$$K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y), \qquad (2.2.3)$$

dir [28].

Tanım 2.2.3. (M, g) n- boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortonormal vektör alanları $e_1, \ldots, e_n$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \quad \rightarrow \quad S(X, Y) = izR(., X)$$

dönüşümü ile tanımlı $(2,0) -$ mertebeli

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \qquad (2.2.4)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun Ricci tensörü adı verilir. M manifoldunun Ricci operatörü Ric ise ,

$$g(RicX, Y) = S(X, Y)$$

ile tanımlanır (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.4) ve kullanılırsa

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(Y, e_i)e_i, X) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, Y)X, e_i) = S(Y, X)$$

elde edilir, yani Ricci tensörü simetriktir [28].

Tanım 2.2.4. (M, g) n- boyutlu Riemann manifoldu ve M manifoldunu bir p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. T_pM uzayının 2-boyutlu bir altuzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler x ve y olmak üzere

$$K(P) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2} \tag{2.2.5}$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği denir. Kolayca görülür ki kesit eğriliği P düzlemi için seçilen bazlardan bağımsızdır [28].

Tanım 2.2.5. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM uzayının $2-$ boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun skaler eğriliği denir ve r ile gösterilir. Buna göre T_pM uzayının ortonormal bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$ olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

dır. Diğer taraftan manifoldun X doğrultusundaki Ricci eğriliği $k(X)$

$$k(X) = \frac{S(X, X)}{g(X, X)}$$

ile tanımlanır [28].

Teorem 2.2.6. (M, g) Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. Eğer p noktasındaki bütün kesit eğrilikleri biliniyorsa p noktasındaki Riemann-Christoffel eğrilik tensörü tek olarak belirlidir [28].

Teorem 2.2.6, T_pM de bütün P düzlemleri için elde edilen kesit eğriliğinin manifoldun eğrilik tensörünü belirlediğini ifade etmektedir. Kesit eğriliği 2. mertebeden kovaryant tensör olduğundan, 4. mertebeden olan eğrilik tensörüne göre büyük kolaylık sağlar. Eğer her $p \in M$ ve her P düzlemi için $K(P)$ sabit ise manifolda sabit eğrilikli uzay veya sadece uzay form denir. Öklidyen uzayda kesit eğriliği Gauss eğriliğine karşılık geldiğinden aşağıdaki iki örnek sıralanabilir.

Örnek 2.2.7. Öklidyen uzay $\mathbb{R}^n$, 0 kesit eğrilikli uzay formdur [28].

Örnek 2.2.8. $\mathbb{R}^{n+1}$ de $S^n(r)$ küresi, $\frac{1}{e^2}$ eğrilikli bir uzay formdur [28].

Sonuç 2.2.9. (M, g) Riemann manifold olsun. Eğer M, c sabit kesit eğrilikli ise, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Z,X)Y - g(Y,Z),X\} \tag{2.2.6}$$

dir [28].

2.3. Riemann Altmanifoldları

2.3.1. İndirgenmiş Konneksiyon ve Altmanifoldun İkinci Temel Formu

$(\bar{M}, g)$ ve M sırası ile m boyutlu Riemann manifoldu ve n boyutlu keyfi manifold olsun. Bu durumda $i: M \longrightarrow \bar{M}$ immersiyonunu gözönüne alalım. i immersiyonu M üzerine i^*g ile tanımlı simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı form, yani Riemann metriği indirger. Bu formu da g ile gösterelim. Bu durumda (M, g) bir Riemann manifoldu ve i de izometrik immersiyon olur. $m - n$ sayısına M altmanifoldunun ek boyutu denir. Biz i immersiyonunu inclusion dönüşümü olarak alacağımızdan $i(p)$ ile p ve $i_*(X)$ ile $X \in \chi(M)$ özdeş kabul edilecektir.$p \in M$ noktasında altmanifoldun tanjant uzayı T_pM olsun. Bu durumda T_pM, $T_p\bar{M}$ tanjant uzayının altvektör uzayıdır. p noktasında T_pM uzayına dik olan tamamlayan uzayı $T_pM^\perp$ ile gösterelim. $T_pM^\perp$ uzayına normal uzay ve bu uzayın meydana getirdiği $TM^\perp$ tanjant demete normal demet denir. Böylece $T_p\bar{M}$ uzayı için

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp \tag{2.3.1.1}$$

veya

$$T\bar{M} = TM \oplus TM^\perp \tag{2.3.1.2}$$

ayrışımı geçerlidir. $V \in T_pM^\perp$ vektörüne normal vektör ve birim normal vektöre de normal kesit denir. Normal vektör alanlarının kümesi $\chi(M)^\perp$ veya $\Gamma(TM^\perp)$ ile gösterilir. Şimdi $\bar{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\bar{\nabla}$ ile gösterelim ve $X, Y \in \chi(M)$, $V \in \chi(M)^\perp$ için

$$(\bar{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y\,, (\bar{\nabla}_X V)^\perp = \nabla_X^\perp V$$

tanımlayalım, burada T ve $\perp$ sırası ile altmanifoldun tanjant demeti ve normal demeti üzerindeki projeksiyonları göstermektedir. Diğer taraftan

$$(\bar{\nabla}_X Y)^\perp = h(X,Y) \tag{2.3.1.3}$$

ve

$$(\bar{\nabla}_X V)^T = -A_V X \tag{2.3.1.4}$$

tanımlayalım. Bu durumda kolayca görülür ki h simetrik ve bilineerdir. Böylece

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.3.1.5}$$

ve

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^{\perp} V \tag{2.3.1.6}$$

elde edilir [28].

Şimdi yukarıda verilen $\nabla, \nabla^{\perp}, h$ ve A_V operatörlerinin özelliklerini inceleyelim.

Lemma 2.3.1.1. ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonudur [28].

İspat. ∇ operatörünün bir lineer konneksiyon olduğu açıktır. Biz Levi-Civita konneksiyonu olduğunu göstereceğiz. Öncelikle $Xg(Y,Z)$ açılımı $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre yapılırsa

$$Xg(Y,Z) = g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z)$$

olur. Burada $(2.3.1.5)$ kullanılırsa

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y + h(X,Y), Z) + g(Y, \nabla_X Z + h(X,Z))$$

elde edilir. Böylece $(2.3.1.1)$ ayrışımından $h(X,Y)$ ile $\nabla_X Y$ vektör alanları birbirine dik olduğundan

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

olur. Yani $(\nabla_X g)(Y,Z) = 0$ dır. Şimdi torsiyonsuz olduğunu gösterelim. $[X,Y]$ Lie braketinin $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre açılımından

$$[X,Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X$$

olur. Burada tekrar $(2.3.1.5)$ kullanılırsa

$$[X,Y] = \nabla_X Y + h(X,Y) - \nabla_Y X - h(Y,X)$$

dır. Bu son denklemin altmanifoldun tanjant demeti ve normal demeti üzerindeki bileşenleri eşlenirse

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$
$$h(X,Y) = h(Y,X) \tag{2.3.1.7}$$

elde edilir. Böylece ilk denklem ∇ konneksiyonunun torsiyonsuz olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

$(2.3.1.7)$ den h simetriktir. $h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^{\perp}$ ile tanımlı h dönüşümüne ikinci temel form ve ∇ Levi-Civita konneksiyonua indirgenmiş konneksiyon denir. Ayrıca Lemma 2.3.1.1 dekine benzer olarak kolayca görülür ki $\nabla^{\perp}$, normal demet üzerinde metrik konneksiyondur, yani $(\nabla^{\perp}_X g)(V,W) = 0, W \in \Gamma(TM^{\perp})$ dır. $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna normal konneksiyon ve $A_V : \chi(M) \to \chi(M)$ ile tanımlı operatöre Weingarten temel tensör denir [28].

Aşağıdaki lemma ikinci temel form ile Weingarten temel tensörü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Lemma 2.3.1.2. $(\overline{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ manifoldunun alt manifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$g(A_V X, Y) = g(h(X,Y), V) \tag{2.3.1.8}$$

dir [28].

İspat. $Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için $g(Y,V) = 0$ dır. Bu ifadenin her iki tarafına $\overline{\nabla}$ kovaryant türevi uygulanırsa

$$g(\overline{\nabla}_X Y, V) + g(Y, \overline{\nabla}_X V) = 0$$

elde edilir. Burada $(2.3.1.5)$ ve $(2.3.1.6)$ denklemleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y + h(X,Y), V) + g(Y, -A_V X + \nabla^{\perp}_X V) = 0$$

olur. Burada (2.3.1.2) deki ayrışım kullanılırsa (2.3.1.8) elde edilir. h simetrik ve bilineer olduğundan (2.3.1.8) ifadesinden A_V operatörünün simetrik ve lineer olduğu elde edilir. (2.3.1.5) ve (2.3.1.6) denklemlerine sırasıyla Gauss formülü ve Weingarten formülü denir.

Eğer ek boyut $m - n = 1$ ise altmanifolda hiperyüzey denir. Bu durumda $\chi(M)^{\perp}$, $1-$ boyutlu olduğundan $\chi(M)^{\perp}$ uzayını geren birim normal vektör alanı N olmak üzere $X, Y \in \chi(M)$ için $h(X,Y) = \lambda N$ yazılabilir. Lemma 2.3.1.2 kullanılırsa $\lambda = g(A_N X, Y)$ elde edilir. Böylece (2.3.1.5) Gauss formülü

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(A_N X, Y) N \tag{2.3.1.9}$$

olur. Diğer taraftan M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$g(\nabla^{\perp}_X N, N) = g(\overline{\nabla}_X N, N) = 0$$

olur. Buradan (2.3.1.6) Weingarten formülü

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X \tag{2.3.1.10}$$

dir [28].

Tanım 2.3.1.3. $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu olsun ve M, $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu

$\{e_1, \dots, e_n\}$ altmanifoldun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda

$$H = \frac{1}{n} izh = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \qquad (2.3.1.11)$$

ile tanımlı H vektör alanına, ki bu vektör alanı normal demetin kesitidir, ortalama eğrilik vektör alanı denir. Kolayca görülürki ortalama eğrilik vektör alanı baz seçiminden bağımsızdır [28].

Bir altmanifoldun kesit eğriliği veya yüzeyler için Gauss eğriliği içsel bir ölçüt (intrinsic) olmasına karşın ortalama eğrilik vektör alanı dışsal (extrinsic) bir ölçüttür. (2.3.1.8) bağıntısından aşağıdaki ifade elde edilir.

Lemma 2.3.1.4. $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu olsun ve M, $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu ve $\{n_1, \dots, n_m\}$ altmanifoldun normal uzayının bir bazı olsun. Bu durumda

$$H = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \left(izA_{n_j}\right) n_j \qquad (2.3.1.12)$$

dir [28].

İspat. $\{e_1, \dots, e_n\}$, M manifoldunun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} g\big(h(e_i, e_i), n_j\big)\, n_j$$

dır. Burada (2.3.1.8) kullanılırsa

$$H = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} g\left(A_{n_j} e_i, e_i\right) n_j$$

elde edilir. Bu ise (2.3.1.12) dir.

2.3.2. Riemann Altmanifoldların Eğrilikleri

Bu altbölümde bir Riemann manifoldu ile onun altmanifoldunun eğrilikleri arasındaki bağıntılar sunulmaktadır. Bu bağıntılar bir Riemann manifoldunu altmanifoldunun geometrisi incelenirken çok önemli araçlar olarak kullanılmaktadır. $\overline{M}$ manifoldunun eğrilik tensör alanı $\overline{R}$ ve M altmanifoldunun eğrilik tensör alanı R olsun. h ikinci temel formun kovaryant türevi $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp} h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2.3.2.1}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda A_V Weingarten tensörünün türevi

$$(\nabla_X A)_V Y = \nabla_X A_V Y - A_{\nabla_X^{\perp} V} Y - A_V \nabla_X Y \tag{2.3.2.2}$$

olur. Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\ &= \overline{\nabla}_X\big(\nabla_Y Z + h(Y,Z)\big) - \overline{\nabla}_Y\big(\nabla_X Z + h(X,Z)\big) - \nabla_{[X,Y]} Z - h([X,Y],Z) \end{aligned}$$

olur. Tekrar Gauss ve Weingarten formülleri kullanılır, braket açılımı yapılır ve (2.3.2.1) uygulanırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)} X + A_{h(X,Z)} Y \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \end{aligned} \tag{2.3.2.3}$$

elde edilir. (2.3.1.8) kullanılırsa (2.3.2.3) ifadesi $T \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X,Y)Z,T) &= g(R(X,Y)Z,T) - g\big(h(Y,Z),h(X,T)\big) \\ &\quad + g(h(X,Z),h(Y,T)) \end{aligned} \tag{2.3.2.4}$$

olur. (2.3.2.4) ifadesine Gauss denklemi denir. (2.3.2.3) ifadesinin normal uzaya ait olan bileşenleri gözönüne alınırsa

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \tag{2.3.2.5}$$

elde edilir. (2.3.2.5) denklemine Codazzi denklemi denir. $X, Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^{\perp}$ olmak üzere $R^{\perp}$ eğrilik tensörünü

$$R^{\perp}(X,Y)V = \nabla_X^{\perp} \nabla_Y^{\perp} V - \nabla_Y^{\perp} \nabla_X^{\perp} V - \nabla_{[X,Y]}^{\perp} V$$

tanımlayalım. Yukarıdaki işlemler tekrarlanır ve (2.3.2.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)V &= R^{\perp}(X,Y)V - h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X) \\ &\quad - (\nabla_X A)_V Y + (\nabla_Y A)_V X \end{aligned} \tag{2.3.2.6}$$

olur. Bu ifade $U \in \chi(M)^{\perp}$ için

$$g(\bar{R}(X,Y)V,U) = g(R^{\perp}(X,Y)V,U) + g([A_U,A_V]X,Y) \tag{2.3.2.7}$$

dir, burada $[A_U, A_V] = A_U A_V - A_V A_U$ ile tanımlanır. (2.3.2.7) denklemine Ricci denklemi denir. Eğer $R^{\perp} = 0$ ise normal koleksiyona flattır denir [28].

2.3.3. Özel Altmanifoldlar

Bu altbölümde tamamen jeodezik altmanifoldlar, tamamen umbilik altmanifoldlar ve minimal altmanifoldlar tanıtılmakta, karakterizasyonları verilmekte ve geometrik yorumları sunulmaktadır [28].

Tanım 2.3.3.1. $(\bar{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve M, $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Eğer h ikinci temel form sıfır ise altmanifolda tamamen jeodeziktir denir [28].

(2.3.1.5) Gauss formülü tamamen jeodeziklik kavramının geometrik olarak ne anlama geldiğini söylemektedir. Gerçekten Gauss formülünden, bir altmanifoldun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart M altmanifoldundaki her jeodeziğin aynı zamanda $\bar{M}$ manifoldunda da jeodezik olmasıdır. Tamamen jeodezik altmanifoldlar en basit altmanifoldlardır. Örneğin düzlem (doğru veya hiper düzlem) bir tamamen jeodezik altmanifolddur [28].

$V \in \chi(M)^{\perp}$ ve $\lambda \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere $A_V = \lambda I$ ise M altmanifoldu V vektör alanına göre umbiliktir denir. Eğer M altmanifoldu her normal vektör alanına göre umbilik ise M altmanifolduna tamamen umbilik altmanifold denir. Tamamen umbilik altmanifoldlar tamamen jeodezik altmanifoldlarına en yakın altmanifoldlardır [28].

Aşağıdaki teorem tamamen umbilik altmanifoldlar için kullanışlı bir karakterizasyon sunmaktadır.

Teorem 2.3.3.2. $\bar{M}$ bir Riemann manifoldu ve $M, \bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda H altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere M altmanifoldunun tamamen umbilik olması için gerek ve yeter $X, Y \in \chi(M)$ için

$$h(X, Y) = g(X, Y)H \qquad (2.3.3.1)$$

olmasıdır [28].

İspat. $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ kümesi, $\{e_1, \dots, e_m\}$ kümesi $\chi(M)$ uzayının bazı ve $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$, $\chi(M)^{\perp}$ uzayının bazı olacak şekilde $\bar{M}$ manifoldunun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda $A_V e_i = \lambda e_i$ dır. Buradan $V \in \chi(M)^{\perp}$ için $\sum_{i=1}^{m} g(A_V e_i, e_i) = m\lambda$ olur. Böylece $\lambda = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g(A_V e_i, e_i)$ elde edilir. Burada (2.3.1.8) kullanılırsa $\lambda = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g(h(e_i, e_i), V)$ dir. Buradan $\lambda = g(H, V)$ olur. Böylece $A_V X = \lambda X$ olması için gerek ve yeter şart $A_V X = g(H, V)X$ olmasıdır. Buradan $g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V) = g(X, Y)g(H, V)$ elde edilir. Bu ifade keyfi her V normal vektör alanı için geçerli olduğundan ispat biter.

Teoremin ispatından görülmektedir ki bir M altmanifoldunun tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^{\perp}$ için

$$A_V X = g(H,V)X$$

olmasıdır.

Örnek 2.3.3.3. Aşağıda φ dönüşümü ile verilen

$$\varphi: \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \ \mathbb{R}^4$$

$$(x_1,x_2) \ \rightarrow \ \phi(x_1,x_2) = \left(x_1,x_2,\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)},0\right), x_1^2+x_2^2<1$$

M altmanifoldunu gözönüne alalım. Bu durumda altmanifoldun tanjant demeti

$$Z_1 = \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$Z_2 = \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

ile normal demet $TM^{\perp}$

$$W_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\frac{\partial}{\partial x_3}, W_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}$$

ile gerilir. $\overline{\nabla}$, $\mathbb{R}^4$ uzayının Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\overline{\nabla}_{Z_1}Z_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\overline{\nabla}_{Z_1}Z_2 = -\frac{x_1}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\overline{\nabla}_{Z_2}Z_2 = -\frac{x_2}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}$$

dır. Buradan

$$h(Z_1,Z_1) = \frac{(-1+x_2^2)}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}W_1 = g(Z_1,Z_1)H$$

$$h(Z_1,Z_2) = \frac{-x_1x_2}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}W_1 = g(Z_1,Z_2)H$$

$$h(Z_2,Z_2) = \frac{(-1+x_2^2)}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}W_1 = g(Z_2,Z_2)H$$

elde edilir, burada $H = \frac{-1}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}W_1$ dir. Sonuç olarak M tamamen umbilik bir altmanifolddur. Bir Riemann manifoldun altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı sıfır ise altmanifolda minimaldir denir [28].

2.3.4. Sabit Kesit Eğrilikli Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları

Bu altbölümde sabit kesit eğrilikli manifoldlara olan immersiyonların geometrisi çalışılmaktadır. Eğer $\bar{M}$ sabit kesit eğrilikli ise (2.2.6) ve (2.3.2.3) denklemlerinden $\bar{R}(X,Y)Z$ altmanifolda teğettir. Bu nedenle (2.3.2.3) denkleminden Codazzi denklemi $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z) \qquad (2.3.4.1)$$

olur. Eğer $\bar{M}$, sabit c kesit eğrilikli uzay form ise $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için Gauss denklemi

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= c[g(Y,Z)g(X,W) - g(Y,W)g(X,Z)] \\ &\quad + g\big(h(Y,Z),h(X,W)\big) - g(h(X,Z),h(Y,W)) \end{aligned} \qquad (2.3.4.2)$$

Elde edilir. $\{n_1,\dots,n_r\}$ normal uzayın ortonormal çatısı olmak üzere

$$g\big(h(Y,Z),h(X,W)\big) = \sum_{i=1}^{r} g(g(h(Y,Z),n_i)n_i, h(X,W))$$

olduğundan

$$g\big(h(Y,Z),h(X,W)\big) = \sum_{i=1}^{r} g(h(Y,Z),n_i)g(h(X,W),n_i)$$

dır. Burada (2.3.1.8) kullanılırsa

$$g\big(h(Y,Z),h(X,W)\big) = \sum_{i=1}^{r} g\big(A_{n_i}Y,Z\big)g\big(A_{n_i}X,W\big) \qquad (2.3.4.3)$$

olur. (2.3.4.3) ifadesi (2.3.4.2) Gauss denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= c[g(Y,Z)g(X,W) - g(Y,W)g(X,Z)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} g\big(A_{n_i}Y,Z\big)g\big(A_{n_i}X,W\big) - g\big(A_{n_i}X,Z\big)g\big(A_{n_i}Y,W\big) \end{aligned} \qquad (2.3.4.4)$$

dır. $\{e_1,\dots,e_m\}$, M altmanifoldunun ortonormal çatısı olmak üzere (2.2.4) ve (2.3.4.4) denklemlerinden altmanifoldun Ricci tensörü $X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y)=\sum_{j=1}^{m}c\left[g(X,Y)g(e_j,e_j)-g(X,e_j)g(e_j,Y)\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{r}g(A_{n_i}X,Y)g(A_{n_i}e_j,e_j)-g(A_{n_i}e_j,Y)g(A_{n_i}X,e_j)$$

olur. Burada A_{n_i}, g metriğine göre simetrik olduğundan

$$S(X,Y)=c\left[mg(X,Y)-\sum_{j=1}^{m}g\left(X,g(Y,e_j)e_j\right)\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{r}g(A_{n_i}X,Y)\,izA_{n_i}-g(A_{n_i}X,g(e_j,A_{n_i}Y)e_j)$$

elde edilir. Böylece bir uzay formun altmanifoldunun Ricci tensörü

$$S(X,Y)=c(m-1)g(X,Y)+\sum_{i=1}^{r}g(A_{n_i}X,Y)\,izA_{n_i}-g(A_{n_i}X,A_{n_i}Y) \quad (2.3.4.5)$$

elde edilir. diğer taraftan Tanım 2.2.5. ve (2.3.4.5) denkleminden

$$r=c\sum_{j=1}^{m}(m-1)g(e_j,e_j)+\sum_{i=1}^{r}g(A_{n_i}e_j,e_j)izA_{n_i} \quad (2.3.4.6)$$

dır. Böylece altmanifoldun skaler eğriliği

$$r=cm(m-1)+\sum_{i=1}^{r}(izA_{n_i})^2-izA_{n_i}{}^2 \quad (2.3.4.7)$$

olur. Burada $\sum_{i=1}^{r}izA_{n_i}{}^2$ ifadesi M altmanifoldunun ikinci temel formunun karesidir ve $\|A\|^2$ ile de gösterilir. İkinci temel formun uzunluğunun karesi

$$\|h\|^2=\sum_{i,j=1}^{m}g\left(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)\right)=\|A\|^2$$

olarak ifade edilir [28].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Altın Oran ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. Sürekli bir kesir, payları 1 olan iç içe kesirler ile sayıyı temsil eden bir formdur. Örneğin; $\frac{9}{7}$ için sürekli kesir

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$$

dir. Bu sürekli kesrin kısaca gösterimi $\{1;3,2\}$ dir [19].

Bir sayının sürekli kesrinin sonlu olabilmesi için gerek ve yeter şart bu sayının rasyonel olmasıdır [19].

İkinci dereceden bir irrasyonel veya ikinci dereceden bir rasyonel olmayan sayı rasyonel katsayılı bir denklemin çözümü olan bir sayıdır [19].

Bir sayının sürekli kesrinin periyodik olması için gerek ve yeter şart bu sayının kuadratik irrasyonel olmasıdır. Periyodik sürekli bir kesrin yinelenen bloğu bir çizgi ile gösterilir [19].

İrrasyonel sayı, 1 den büyük ve eşleniği -1 den büyük olan 0 dan küçük bir sayıdır [19].

Bir yakınsak, sürekli bir kesrin kesilmesidir. Örneğin; $\{3;2,5,6,8\}$ in 2. Yakınsağı $\{3;2\}$ olacaktır [19].

Fibonacci sayıları,

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \tag{3.1.1}$$

yinelemesiyle tanımlanan bir dizidir öyle ki; $F_0=0$ ve $F_1=1$ dir.

Lucas sayıları,

$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n \tag{3.1.2}$$

yinelemesiyle tanımlanan bir dizidir, öyle ki; $L_0=2$ ve $L_1=1$ dir.

Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranları, terim numarası arttıkça yakınsak bir dizi oluşturur. Yakınsanan sayının bulunabilmesi için dizinin ardışık terimleri oranlanırsa

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

elde edilir. Buradan $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right)$ eşitliği dikkate alınarak her iki tarafın limiti alınırsa

$$\phi := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}\right) = 1 + \frac{1}{\phi}$$

olup, buradan

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

eşitliği elde edilir. Limit değeri pozitif olacağı için

$$\phi = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989 \ldots$$

sonucuna ulaşılır. Bu sayı ise altın oran olarak adlandırılır [29].

Altın oran $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir. Gümüş oranlar $S_m = \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$ dir. Gümüş oranın altın orana benzerliği $S_1 = \phi$ şeklindedir.

Lucas dizileri 2 çift tipli serilerin oluşturduğu bir seri ailesidir. $U_n(P,Q)$ veya sadece U_n ile gösterilen U serileri

$$U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n \tag{3.1.3}$$

yinelemesi ile tanımlanır, öyle ki $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ dir. $V_n(P,Q)$ veya sadece V_n ile gösterilen V serileri ise

$$V_{n+2} = PV_{n+1} - QV_n \tag{3.1.4}$$

yinelemesi ile tanımlanır, öyle ki $V_0 = 2$ ve $V_1 = P$ dir. Lucas dizileri Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirilmiş halidir. Yani $U_n(1,-1) = F_n$ ve $V_n(1,-1) = L_n$ dir [19].

Tanım 3.1.2. Gümüş Fibonacci sayıları $\left(F_{m,n}\right)$

$$F_{m,n+2} = mF_{m,n+1} + F_{m,n} \tag{3.1.5}$$

yinelemesiyle tanımlanan dizilerin bir ailesidir öyle ki, $F_{m,0} = 0$ ve $F_{m,1} = 1$ dir [19].

Gümüş Fibonacci sayıları Fibonacci sayılarının $F_{1,n} = F_n$ gibi genelleştirilmiş halidir.

Gümüş Lucas sayıları $\left(L_{m,n}\right)$

$$L_{m,n+2} = mL_{m,n+1} + L_{m,n} \qquad (3.1.6)$$

yinelemesi şeklinde tanımlanan dizilerin bir ailesidir öyle ki, $L_{m,0} = 2$ ve $L_{m,1} = m$ dir. Gümüş Lucas sayıları, Lucas sayılarının $L_{1,n} = L_n$ gibi genelleştirilmiş halidir [19].

Bronz Fibonacci sayıları $\left(f_{m,n}\right)$

$$f_{m,n+2} = mf_{m,n+1} - f_{m,n} \qquad (3.1.7)$$

yinelemesiyle tanımlanan dizilerin bir ailesidir. Burada $f_{m,0} = 0$ ve $f_{m,1} = 1$ dir [19].

Bronz Lucas sayıları $\left(l_{m,n}\right)$ ise

$$l_{m,n+2} = ml_{m,n+1} - l_{m,n} \qquad (3.1.8)$$

yinelemesiyle tanımlanan dizilerin bir ailesidir. Burada $l_{m,0} = 2$ ve $l_{m,1} = m$ dir. Bronz oranlar $(B_m) = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ dir [19].

Lucas sabitleri $(C(P,Q)$ veya $C)$, $\frac{P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}$ ile tanımlanır. Lucas sabitleri $\mathrm{C}(1,-1) = \phi$ olmak üzere altın oranı verir. Ayrıca Gümüş ve Bronz oranın genelleştirilmesi $\mathrm{C}(m,-1) = S_m$ ve $\mathrm{C}(m,1) = B_m$ dir. Eğer $P^2 - 4Q$ bir tam kare ise Lucas sabiti dejeneredir denir [19].

Fibonaacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oran ile ilgili bilinen bazı özellikler aşağıdaki gibi verilebilir [19]:

1. $L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = 2F_{n+1} - F_n$ dir.
2. ${F_n}^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$ dir.
3. Altın oran için sürekli kesir $\{1; \overline{1}\}$ dir.
4. $\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$ dir.
5. $\phi^n = \frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2}$ dir.
6. $\phi\bar{\phi} = -1$ dir.
7. $F_n = \frac{\phi^n-\bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ dir.

3.2. Altın Oran ve Sürekli Kesirler

Altın oran ile sürekli kesirler arasındaki ilişki üç özellikte ele alınabilir. İlki ve yaygın olarak bilineni altın oran ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkisidir. İkincisi fakat yaygın olmayan, altın oranın kuvvetleri ile Lucas sayıları arasındaki ilişkisidir. Son özellik ise altın oranın kuvvetlerinin yakınsaklığıyla ilgilidir [19].

3.2.1. Altın Oranın Yakınsakları

Teorem 3.2.1.1. Altın oranın n yinci yakınsaması $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ dir [19].

İspat. Açık olarak bu birinci yakınsak 1 ve $\frac{F_2}{F_1} = 1$ olduğundan $n = 1$ durumu için iddia sağlanır. n yinci yakısağının $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ olduğunu varsayarsak $(n + 1)$ inci yakınsağı

$$1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

olur ve ispat tamamlanır.

3.2.2. Altın Oranın Kuvvetleri

Teorem 3.2.2.1. $\boldsymbol{n}$ tek ise sürekli kesir $\boldsymbol{\phi^n} = \{\boldsymbol{L_n}; \overline{\boldsymbol{L_n}}\}$, $\boldsymbol{n}$ çift ise sürekli kesirler $\boldsymbol{\phi^n} = \{\boldsymbol{L_n - 1}; \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{L_n - 2}}\}$ dir [19].

İspat. $x = \{L_n; \overline{L_n}\}$ ve n' nin tek olduğunu varsayalım;

$$x = L_n + \frac{1}{x} \Rightarrow x - L_n - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - L_n x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{L_n + \sqrt{{L_n}^2 + 4}}{2} = \frac{L_n + \sqrt{(2F_{n+1} - F_n)^2 + 4}}{2}$$

$$= \frac{L_n + \sqrt{4{F_{n+1}}^2 - 4F_{n+1}F_n + {F_n}^2 + 4}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4F_{n+1}(F_{n+1}-F_n)+{F_n}^2+4}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4F_{n+1}F_{n-1}+{F_n}^2+4}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4(F_{n+1}F_{n-1}+1)+{F_n}^2}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4(F_{n+1}F_{n-1}-(-1)^n)+{F_n}^2}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4{F_n}^2+{F_n}^2}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{5{F_n}^2}}{2}=\frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2}=\phi^n$$

olur. Şimdi $x=\{L_n-1;\overline{1,L_n-2}\}$ ve n' nin çift olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$x=L_n-1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}=L_n-1+\frac{x-1}{x}=L_n-\frac{1}{x}$$

$$x=L_n-\frac{1}{x}\Rightarrow x^2-L_nx+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{L_n+\sqrt{{L_n}^2-4}}{2}=\frac{L_n+\sqrt{(2F_{n+1}-F_n)^2-4}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4{F_{n+1}}^2-4F_{n+1}F_n+{F_n}^2-4}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4F_{n+1}(F_{n+1}-F_n)+{F_n}^2-4}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4F_{n+1}F_{n-1}+{F_n}^2-4}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4(F_{n+1}F_{n-1}-1)+{F_n}^2}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4(F_{n+1}F_{n-1}-(-1)^n)+{F_n}^2}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{4{F_n}^2+{F_n}^2}}{2}$$

$$=\frac{L_n+\sqrt{5{F_n}^2}}{2}=\frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2}=\phi^n$$

olur ve ispat tamamlanır.

3.2.3. Altın Oranın Kuvvetlerinin Yakınsaklıkları

Lemma 3.2.3.1. Eğer a tek ise

$$F_{a(n+2)}=L_aF_{a(n+1)}+F_{an} \qquad (3.2.3.1)$$

dir [19].

İspat. $g_0=0$ ve $g_1=1$ için $g_{n+2}=L_ag_{n+1}+g_n$ olmak üzere $G=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\,x^n$ olsun. Böylece,

$g_0=0$

$g_1=1$

$g_2=L_ag_1+g_0=L_a$

$g_3=L_ag_2+g_1={L_a}^2+1$

$g_4=L_ag_3+g_2=L_a({L_a}^2+1)+L_a={L_a}^3+2L_a$

$g_5=L_ag_4+g_3=L_a({L_a}^3+2L_a)+{L_a}^2+1={L_a}^4+3{L_a}^2+1$

$\vdots$

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\,x^n=g_0x^0+g_1x^1+g_2x^2+g_3x^3+g_4x^4+g_5x^5+\cdots$$

$$=x+L_ax^2+({L_a}^2+1)x^3+({L_a}^3+2L_a)x^4+({L_a}^4+3{L_a}^2+1)x^5+\cdots$$

$$=x+L_ax^2+{L_a}^2x^3+x^3+{L_a}^3x^4+2L_ax^4+{L_a}^4x^5+3{L_a}^2x^5+x^5+\cdots$$

$$=x+L_ax\big(x+L_ax^2+({L_a}^2+1)x^3+({L_a}^3+2L_a)x^4+({L_a}^4+3{L_a}^2+1)x^5+\cdots\big)$$

$$+x^2\big(x+L_ax^2+({L_a}^2+1)x^3+({L_a}^3+2L_a)x^4+({L_a}^4+3{L_a}^2+1)x^5+\cdots\big)$$

$$= x + L_a x\, G + x^2 G$$

elde edilir. Buradan

$$G = x + L_a x\, G + x^2 G \Rightarrow G - L_a x\, G - x^2 G = x \Rightarrow G = \frac{x}{1 - L_a x - x^2}$$

olur. Paydayı sıfır yapan değerler $\frac{-L_a \pm \sqrt{{L_a}^2 - 4}}{2}$ olup önceki ispatın birinci bölümünde kullanılan metotlara benzer yöntemlerle $-\bar{\phi}^a$ ve $-\phi^a$ ifadelerine eşit olduğunu görürüz. Böylece,

$$G = -\frac{x}{(\bar{\phi}^a + x)(\phi^a + x)} = \frac{\frac{\bar{\phi}^a}{\bar{\phi}^a + x} - \frac{\phi^a}{\phi^a + x}}{F_a\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{1 + \frac{x}{\bar{\phi}^a}} - \frac{1}{1 + \frac{x}{\phi^a}}}{F_a\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 - \phi^a x} - \frac{1}{1 - \bar{\phi}^a x}}{F_a\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow g_n = \frac{\phi^{an} - \bar{\phi}^{an}}{F_a\sqrt{5}} = \frac{F_{an}}{F_a}$$

olur. $\frac{F_{an}}{F_a}$ sağladığından F_{an} de sağlar.

Lemma 3.2.3.2. Eğer a çift ise

$$F_{a(n+2)} = L_a F_{a(n+1)} - F_{an} \qquad (3.2.3.2)$$

dır [19].

İspat. $g_0 = 0$ ve $g_1 = 1$ için $g_{n+2} = L_a g_{n+1} - g_n$ olmak üzere $G = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$ olsun. Böylece,

$g_0 = 0$

$g_1 = 1$

$g_2 = L_a g_1 - g_0 = L_a$

$g_3 = L_a g_2 - g_1 = {L_a}^2 - 1$

$g_4 = L_a g_3 - g_2 = L_a({L_a}^2 - 1) - L_a = {L_a}^3 - 2L_a$

$g_5 = L_a g_4 - g_3 = L_a({L_a}^3 - 2L_a) - {L_a}^2 - 1 = {L_a}^4 - 3{L_a}^2 + 1$

$\vdots$

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n = g_0 x^0 + g_1 x^1 + g_2 x^2 + g_3 x^3 + g_4 x^4 + g_5 x^5 + \cdots$$

$$= x + L_a x^2 + ({L_a}^2 - 1)x^3 + ({L_a}^3 - 2L_a)x^4 + ({L_a}^4 - 3{L_a}^2 + 1)x^5 + \cdots$$
$$= x + L_a x^2 + {L_a}^2 x^3 - x^3 + {L_a}^3 x^4 - 2L_a x^4 + {L_a}^4 x^5 - 3{L_a}^2 x^5 + x^5 + \cdots$$
$$= x + L_a x\big(x + L_a x^2 + ({L_a}^2 - 1)x^3 + ({L_a}^3 - 2L_a)x^4 + ({L_a}^4 - 3{L_a}^2 + 1)x^5 + \cdots\big)$$
$$-x^2\big(x + L_a x^2 + ({L_a}^2 - 1)x^3 + ({L_a}^3 - 2L_a)x^4 + ({L_a}^4 - 3{L_a}^2 + 1)x^5 + \cdots\big)$$
$$= x + L_a x\, G - x^2 G$$

elde edilir. Buradan

$$G = x + L_a x\, G - x^2 G \Rightarrow G - L_a x\, G + x^2 G = x \Rightarrow G = \frac{x}{1 - L_a x + x^2}$$

olur. Payda çözülerek kökleri $\bar{\phi}^a$ ve ϕ^a olan $\frac{L_a \pm \sqrt{{L_a}^2 - 4}}{2}$ olduğunu kolayca görebiliriz. Böylece,

$$G = -\frac{x}{(\bar{\phi}^a - x)(\phi^a - x)} = \frac{\frac{\bar{\phi}^a}{\bar{\phi}^a - x} - \frac{\phi^a}{\phi^a - x}}{F_a\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\frac{1}{1 - \frac{x}{\bar{\phi}^a}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{\phi^a}}}{F_a\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{1 - \phi^a x} - \frac{1}{1 - \bar{\phi}^a x}}{F_a\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow g_n = \frac{\phi^{an} - \bar{\phi}^{an}}{F_a\sqrt{5}} = \frac{F_{an}}{F_a}$$

olur. $\frac{F_{an}}{F_a}$ eşitliği sağladığından F_{an} de eşitliği sağlar.

Teorem 3.2.3.3. Eğer a tek ise ϕ^a nın n yinci yakınsaklığı $\frac{F_{a(n+1)}}{F_{an}}$ ve eğer a çift ise ϕ^a nın $2n$ yinci yakınsaklığı $\frac{F_{a(n+1)}}{F_{an}}$ dır [12].

İspat. Bunu tümevarım yöntemi ile kolayca ispatlayabiliriz. a tek için, $\mathrm{n} = 1$ durumu $\phi^a = \{L_a; \overline{L_a}\}$ nın birinci yakınsaklığı olan $\frac{F_{2a}}{F_a} = L_a$ değerini verir. n yinci yakınsaklığının $\frac{F_{a(n+1)}}{F_{an}}$ olduğunu varsayalım. Böylece $(n+1)$ inci yakınsaklığı

$$L_a + \frac{1}{\frac{F_{a(n+1)}}{F_{an}}} = L_a + \frac{F_{an}}{F_{a(n+1)}} = \frac{L_a F_{a(n+1)} + F_{an}}{F_{a(n+1)}} = \frac{F_{a(n+2)}}{F_{a(n+1)}}$$

elde edilir.

a çift için, n $= 1$ durumu $\phi^a = \{L_a - 1; \overline{L_a - 2}\}$ nin ikinci yakınsaklığı olan $\frac{F_{2a}}{F_a} = L_a$ değerini verir. $2n$ yinci yakınsaklığının $\frac{F_{a(n+1)}}{F_{an}}$ olduğunu varsayalım. Böylece $2(n+1)$ inci yakınsaklığı

$$L_a - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{a(n+1)}}{F_{an}} - 1}} = L_a - 1 + \frac{1}{1 + \frac{F_{an}}{F_{a(n+1)-F_{an}}}} = L_a - 1 + \frac{F_{a(n+1)} - F_{an}}{F_{a(n+1)}}$$

$$= \frac{L_a F_{a(n+1)} - F_{a(n+1)} + F_{a(n+1)} - F_{an}}{F_{a(n+1)}} = \frac{L_a F_{a(n+1)} - F_{an}}{F_{a(n+1)}} = \frac{F_{a(n+2)}}{F_{a(n+1)}}$$

elde edilir.

3.3. Gümüş ve Bronz Oranlar

Altın oran ve sürekli kesirler ile ilgili bulduğumuz özellikler gümüş oranlar olarak bilinen benzer sayılar ailesine genelleştirilebilir. Altın oranın sürekli kısmı $\{1; \overline{1}\}$ iken gümüş oranların sürekli kısmı $\{m; \overline{m}\}$ dir. Fibonacci ve Lucas sayıları altın oranla ilişkili iken gümüş Fibonacci ve gümüş Lucas sayıları olarak adlandıracağımız dizilerin ailesi de altın oranla benzer şekilde ilişkilidir. Genelleştirmeyi tamamlamak için sabitlerin başka bir ailesini ve dizilerin farklı iki ailesini tanımlamalıyız, bunları bronz oran ve bronz Fibonacci ve Lucas sayıları olarak adlandıracağız. Tanımlanan bu terimlerle Teorem 3.2.1.1, Teorem 3.2.2.1 ve Teorem 3.2.3.3 ü genelleştirebiliriz [19].

Lemma 3.3.1.

$$L_{m,n} = F_{m,n+1} + F_{m,n-1} = 2F_{m,n+1} - mF_{m,n} \tag{3.3.1}$$

dir. Benzer şekilde

$$l_{m,n} = f_{m,n+1} - f_{m,n-1} = 2f_{m,n+1} - mf_{m,n} \tag{3.3.2}$$

dir [19].

İspat. (3.3.1) ve (3.3.2) denklemlerinin her iki tarafı da aynı tekrarı paylaştığından dolayı sadece $n = 1$ ve $n = 2$ durumları için sağladığını göstermemiz gerekir.

$n = 1$ için,

$$F_{m,2} + F_{m,0} = m + 0 = L_{m,1}.$$

$$f_{m,2} - f_{m,0} = m - 0 = l_{m,1}.$$

$n = 2$ için,

$$F_{m,3} + F_{m,1} = m^2 + 1 + 1 = m^2 + 2 = L_{m,2}.$$
$$f_{m,3} - f_{m,1} = m^2 - 1 - 1 = m^2 - 2 = l_{m,2}.$$

Lemma 3.3.2.

$$F^2{}_{m,n} - F_{m,n+1}F_{m,n-1} = (-1)^{n-1} \tag{3.3.3}$$

ve

$$f^2{}_{m,n} - f_{m,n+1}f_{m,n-1} = 1 \tag{3.3.4}$$

dir [19].

İspat. Bunu tümevarım yardımıyla kolayca ispatlayabiliriz.

$n = 1$ için,

$F^2{}_{m,1} - F_{m,2}F_{m,0} = 1 - 0 = 1 = (-1)^0$ ve $f^2{}_{m,1} - f_{m,2}f_{m,0} = 1 - 0 = 1$ olur.

Özelliğin n için doğru olduğunu varsayalım. Eğer $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$$\begin{aligned}
F^2{}_{m,n+1} - F_{m,n+2}F_{m,n} &= F^2{}_{m,n+1} - \left(mF_{m,n+1} + F_{m,n}\right)F_{m,n} \\
&= F^2{}_{m,n+1} - mF_{m,n+1}F_{m,n} - F^2{}_{m,n} \\
&= F_{m,n+1}\left(F_{m,n+1} - mF_{m,n}\right) - F^2{}_{m,n} \\
&= F_{m,n+1}F_{m,n-1} - F^2{}_{m,n} \\
&= -\left(F^2{}_{m,n} - F_{m,n+1}F_{m,n-1}\right) \\
&= -(-1)^{n-1} \\
&= -(-1)^n(-1)^{-1} \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f^2{}_{m,n+1} - f_{m,n+2}f_{m,n} &= f^2{}_{m,n+1} - \left(mf_{m,n+1} - f_{m,n}\right)f_{m,n} \\
&= f^2{}_{m,n+1} - mf_{m,n+1}f_{m,n} + f^2{}_{m,n} \\
&= f_{m,n+1}\left(f_{m,n+1} - mf_{m,n}\right) + f^2{}_{m,n} \\
&= f^2{}_{m,n} - f_{m,n+1}f_{m,n-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.3. Bronz oranlar için sürekli kesirler $x = \{m - 1; \overline{1, m - 2}\}$ dir [19].

İspat. $x = \{m-1; \overline{1, m-2}\}$ alalım. Buradan

$$x = m - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x-1}}$$
$$= m - 1 + \frac{x-1}{x}$$
$$= m - 1 + 1 - \frac{1}{x}$$
$$= m - \frac{1}{x}$$

yazılabilir. O halde

$$x = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} = B_m$$

elde edilir.

Lemma 3.3.4.

$$B^{n+2}{}_m = mB^{n+1}{}_m - B^n{}_m \qquad (3.3.5)$$

dir [19].

İspat. Bronz oran

$$B_m = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

olduğundan

$$B^2{}_m = \frac{m^2 + 2m\sqrt{m^2 - 4} + m^2 - 4}{4}$$

$$= \frac{2m^2 - 4 + 2m\sqrt{m^2 - 4}}{4}$$
$$= \frac{m^2 + m\sqrt{m^2 - 4}}{2} - 1$$
$$= m\left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right) - 1$$

elde edilir ki bu durumda $B^2{}_m = mB_m - 1$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $B^n{}_m$ ile çarpılırsa, (3.3.5) eşitliğine ulaşılır.

Lemma 3.3.5.

$$B^n{}_m = \frac{l_{m,n} + f_{m,n}\sqrt{m^2-4}}{2} \tag{3.3.6}$$

dir [19].

İspat. Denklemin her iki tarafı aynı tekrarı paylaştığı için sadece $n = 0$ ve $n = 1$ durumları için sağladığını göstermemiz yeterlidir:

$n = 0$ için,

$$\frac{l_{m,0} + f_{m,0}\sqrt{m^2-4}}{2} = \frac{2 + 0\sqrt{m^2-4}}{2} = 1 = B^0{}_m$$

ve $n = 1$ için,

$$\frac{l_{m,1} + f_{m,1}\sqrt{m^2-4}}{2} = \frac{m + 1 \cdot \sqrt{m^2-4}}{2} = 1 = B^1{}_m$$

dir.

Lemma 3.3.6. $B_m\overline{B_m} = 1$ dir [19].

İspat.

$$B_m\overline{B_m} = \frac{m + \sqrt{m^2-4}}{2} \cdot \frac{m - \sqrt{m^2-4}}{2} = \frac{m^2 - m^2 + 4}{4} = 1.$$

Lemma 3.3.7. $f_{m,n} = \frac{B^n{}_m - \overline{B^n{}_m}}{\sqrt{m^2-4}}$ dir [19].

İspat.

$$\frac{B^n{}_m - \overline{B^n{}_m}}{\sqrt{m^2-4}} = \frac{\frac{l_{m,n} + f_{m,n}\sqrt{m^2-4}}{2} - \frac{l_{m,n} - f_{m,n}\sqrt{m^2-4}}{2}}{\sqrt{m^2-4}} = \frac{f_{m,n}\sqrt{m^2-4}}{\sqrt{m^2-4}} = f_{m,n}.$$

Teorem 3.3.8. Bronz oranın $2n$ yinci yakınsaklığı $\frac{f_{m,n+1}}{f_{m,n}}$ dir [19].

İspat. Bunu tümevarım yoluyla kolayca ispatlayabiliriz. $n = 1$ durumu için sağlandığı açık olup, $(n + 1)$ inci yakınsaklığı,

$$m - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{m,n+1}}{f_{m,n}} - 1}} = m - 1 + \frac{1}{\frac{f_{m,n+1}}{f_{m,n+1} - f_{m,n}}}$$

$$= m - 1 + \frac{f_{m,n+1} - f_{m,n}}{f_{m,n+1}}$$

$$= \frac{mf_{m,n+1} - f_{m,n}}{f_{m,n+1}} = \frac{f_{m,n+2}}{f_{m,n+1}}$$

olarak elde edilir.

4. HEMEN HEMEN POLY-NORDEN METRİK MANİFOLDLAR ve ALTMANİFOLDLARI

4.1. Hemen Hemen Poly-Norden Metrik Manifoldlar

Tanım 4.1.1. M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde

$$\Phi^2 = \mathrm{m}\Phi - \mathrm{I} \qquad (4.1.1)$$

eşitliğini sağlayan $(1,1)$ tipindeki tensör alanına bir poly-Norden yapı denir. Burada I, M diferansiyellenebilir manifold üzerindeki vektör alanlarının $\chi(M)$ Lie cebiri üzerinde özdeşlik (birim) operatörüdür. Bu durumda (M, Φ) ikilisine bir hemen-hemen poly-Norden manifold denir [25].

Örnek 4.1.2. $\mathbb{R}^4$ reel uzayını göz önüne alalım ve

$$\Phi: \begin{matrix} \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^4 \\ (B_m x_1, B_m x_2, \bar{B}_m y_1, \bar{B}_m y_2) \end{matrix} \qquad (4.1.2)$$

ifadesini tanımlayalım. Burada $B_m = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ ve $\bar{B}_m = m - B_m$ dir. Φ nin (4.1.1) eşitliğini sağladığı aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \Phi^2(X) &= (m\Phi - \mathrm{I})(X) \\ &\Rightarrow \Phi^2(X) = \Phi^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Phi\big(\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2)\big) \\ &= \Phi(B_m x_1, B_m x_2, \bar{B}_m y_1, \bar{B}_m y_2) \\ &= \left({B_m}^2 x_1, {B_m}^2 x_2, {\bar{B}_m}^2 y_1, {\bar{B}_m}^2 y_2\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (m\Phi - \mathrm{I})(X) &= m\Phi(X) - I(X) = m\Phi(X) - X \\ &= m(B_m x_1, B_m x_2, \bar{B}_m y_1, \bar{B}_m y_2) - (x_1, x_2, y_1, y_2) \\ &= \big((mB_m - 1)x_1, (mB_m - 1)x_2, (m\bar{B}_m - 1)y_1, (m\bar{B}_m - 1)y_2\big) \end{aligned}$$

dir. Buradan $B_m = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ ve $\bar{B}_m = m - B_m = \frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ olduğundan,

$${B_m}^2 = \frac{m^2 + 2m\sqrt{m^2-4} + m^2 - 4}{4} = \frac{m^2 + m\sqrt{m^2-4} - 2}{2},$$

$$mB_m - 1 = \frac{m\big(m + \sqrt{m^2-4}\big)}{2} - 1 = \frac{m^2 + m\sqrt{m^2-4} - 2}{2},$$

$$\bar{B}_m{}^2 = \frac{m^2 - 2m\sqrt{m^2-4} + m^2 - 4}{4} = \frac{m^2 - m\sqrt{m^2-4} - 2}{2},$$

$$m\bar{B}_m - 1 = \frac{m\left(m - \sqrt{m^2-4}\right)}{2} - 1 = \frac{m^2 - m\sqrt{m^2-4} - 2}{2}$$

olur. Yani $B_m{}^2 = mB_m - 1$ ve $\bar{B}_m{}^2 = m\bar{B}_m - 1$ dir. Böylece $\Phi^2 = m\Phi - \mathrm{I}$ olduğu kolayca görülür ve $(\mathbb{R}^4, \Phi)$ ikilisi bir hemen-hemen poly-Norden manifold olur [25].

Tanım 4.1.3. (M, Φ) bir hemen hemen poly-Norden manifold olsun. g, M üzerinde bir semi-Riemann metrik olmak üzere eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\Phi X, \Phi Y) = mg(\Phi X, Y) - g(X, Y) \tag{4.1.3}$$

ise g ye, Φ ile uyumlu bir semi-Riemann metriktir denir [25].

Lemma 4.1.4. Φ self-adjointtir [25].

İspat. g, Φ ile uyumlu olduğundan (4.1.3) eşitliğinde $X = \Phi(X)$ alınırsa

$$g\big(\Phi(\Phi(X)), \Phi Y\big) = mg\big(\Phi(\Phi(X)), Y\big) - g(\Phi X, Y)$$

$$g(\Phi^2(X), \Phi Y) = mg(\Phi^2(X), Y) - g(\Phi X, Y)$$

$$g(m\Phi X - X, \Phi Y) = mg(m\Phi X - X, Y) - g(\Phi X, Y)$$

$$mg(\Phi X, \Phi Y) - g(X, \Phi Y) = m^2 g(\Phi X, Y) - mg(X, Y) - g(\Phi X, Y)$$

yazılabilir. Burada (4.3) yeniden kullanılırsa

$$m\big(mg(\Phi X, Y) - g(X, Y)\big) - g(X, \Phi Y) = m^2 g(\Phi X, Y) - mg(X, Y) - g(\Phi X, Y)$$

$$m^2 g(\Phi X, Y) - mg(X, Y) - g(X, \Phi Y) = m^2 g(\Phi X, Y) - mg(X, Y) - g(\Phi X, Y)$$

$$g(X, \Phi Y) = g(\Phi X, Y)$$

elde edilir. Buradan Φ nin g ile uyumlu bir self-adjoint operatör olduğu, yani

$$g(\Phi X, Y) = g(X, \Phi Y)$$

olduğu sonucuna varılır.

Tanım 4.1.5. (M, g) bir semi-Riemann manifoldu Φ poly-Norden yapısı ile verilsin. Böylece g semi-Rieman metriği hemen hemen poly-Norden yapı olarak adlandırılan Φ ile uyumlu ise (g, Φ) ikilisine M üzerinde bir hemen-hemen poly-Norden semi-Riemann yapı denir [25].

Tanım 4.1.6. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\mathrm{J}: \Gamma(\mathrm{TM}) \to \Gamma(\mathrm{TM})$$

$$X \to JX \tag{4.1.4}$$

ile tanımlanan dönüşüm $\forall X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için $J^2X = -X$ şartını sağlıyor ise (M, J) ikilisine bir hemen hemen kompleks manifold denir [27].

Eğer (M, J) üzerinde

$$g(JX, JY) = -g(X, Y) \tag{4.1.5}$$

eşitliğini sağlayan bir g metriği varsa g ye bir Norden metrik ve (M, J, g) üçlüsüne de bir hemen hemen Norden manifold denir. Eğer J integrallenebilir ise (M, J, g) üçlüsü bir Norden manifold olarak adlandırılır [30].

Örnek 4.1.7. M, hemen-hemen kompleks J yapısına sahip bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Her hemen hemen Norden manifoldu $m = 0$ ile beraber bir poly-Norden semi-Riemann manifolddur [25].

Bundan sonra çalışmamız boyunca m sayısının sıfırdan farklı olduğunu kabul edeceğiz.

Önerme 4.1.8. Bir hemen-hemen poly-Norden yapı olan Φ nin özdeğerleri, $\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ ve $\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ dir [25].

İspat. $\forall X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için $\Phi \mathrm{X} = \lambda X$ olsun. Buradan

$$\Phi^2(X) = \lambda\Phi(X)$$
$$m\Phi(X) - \mathrm{I}(X) = \lambda\Phi(X)$$
$$m\lambda X - \mathrm{X} = \lambda^2 X$$
$$\lambda^2 X - m\lambda X + \mathrm{X} = 0$$
$$(\lambda^2 - m\lambda + 1)X = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.9. Bir hemen-hemen poly-Norden yapı olan Φ, M nin bir tanjant uzayı üzerinde bir izomorfizmdir. Φ nin tersini $\widetilde{\Phi}$ olmak üzere

$$\widetilde{\Phi} = -\Phi + mI \tag{4.1.6}$$

dir [25].

İspat. Φ nin birebir olduğunu gösterelim: $X, Y \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için $\Phi(X) = \Phi(Y)$ olsun. Bu durumda

$$\Phi(X) = \Phi(Y) \Rightarrow \Phi\big(\Phi(X)\big) = \Phi\big(\Phi(Y)\big) \Rightarrow \Phi^2(X) = \Phi^2(Y)$$

$$\Rightarrow m\Phi(X) - \mathrm{I}(X) = m\Phi(Y) - I(Y) \Rightarrow X = Y$$

olur. Şimdi $\widetilde{\Phi} \circ \Phi = I = \Phi \circ \widetilde{\Phi}$ eşitliğini göz önüne alalım. Buradan

$$\Phi \circ \widetilde{\Phi}(X) = I(X) \Rightarrow \Phi\left(\Phi\left(\widetilde{\Phi}(X)\right)\right) = \Phi\big(I(X)\big) \Rightarrow \Phi^2\left(\widetilde{\Phi}(X)\right) = \Phi(X)$$

$$\Rightarrow m\Phi\left(\widetilde{\Phi}(X)\right) - \mathrm{I}\left(\widetilde{\Phi}(X)\right) = \Phi(X) \Rightarrow mI(X) - \widetilde{\Phi}(X) = \Phi(X)$$

$$\Rightarrow \widetilde{\Phi} = -\Phi + mI$$

elde edilir.

Önerme 4.1.10. $\widetilde{\Phi}$, M de bir poly-Norden yapı değildir. Yani

$$\widetilde{\Phi}^2 \neq m\widetilde{\Phi} - I \tag{4.1.7}$$

dir [25].

İspat. $\forall X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için

$$\widetilde{\Phi}^2(X) = \widetilde{\Phi}\left(\widetilde{\Phi}(X)\right) = \widetilde{\Phi}\big((-\Phi + mI)(X)\big) = \widetilde{\Phi}\big(-\Phi(X)\big) + m\widetilde{\Phi}\big(I(X)\big)$$

$$= \big(-I + m\widetilde{\Phi}\big)(X)$$

ve

$$\big(m\widetilde{\Phi} - I\big)(X) = m\widetilde{\Phi}(X) - I(X) = m\big((-\Phi + mI)(X)\big) - I(X)$$

$$= -m\Phi(X) + m^2 I(X) - I(X)$$

olduğundan (4.1.7) nin varlığı kolayca görülür.

Önerme 4.1.11. Bir semi-Riemann manifold üzerindeki her kompleks yapı,

$$\Phi_1 = \frac{m}{2}I + \frac{\sqrt{4 - m^2}}{2}J,$$

$$\Phi_2 = \frac{m}{2}I - \frac{\sqrt{4 - m^2}}{2}J, \quad -2 < m < 2 \tag{4.1.8}$$

ile verilen iki poly-Norden yapıyı oluşturur [25].

İspat. ${\Phi_1}^2 = m\Phi_1 - \mathrm{I}$ olduğunu gösterelim: $\forall X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için

$${\Phi_1}^2(X) = \Phi_1\big(\Phi_1(X)\big) = \Phi_1\left(\frac{m}{2}I(X) + \frac{\sqrt{4 - m^2}}{2}J(X)\right)$$

$$= \frac{m}{2}I(X)\left(\frac{m}{2}I(X) + \frac{\sqrt{4 - m^2}}{2}J(X)\right)$$

$$+\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)\left(\frac{m}{2}I(X)+\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)\right)$$

$$=\frac{m^2}{4}I^2(X)+\frac{m\sqrt{4-m^2}}{4}J(X)I(X)+\frac{m\sqrt{4-m^2}}{4}J(X)I(X)$$

$$+\frac{4-m^2}{4}J^2(X)$$

$$=\frac{m^2-2}{2}+\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)$$

ve

$$m\Phi_1-\mathrm{I}=m\left(\frac{m}{2}I(X)+\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)\right)-I(X)$$

$$=\frac{m^2}{2}+\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)-I$$

$$=\frac{m^2-2}{2}+\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)$$

dir. Bu ise ${\Phi_1}^2=m\Phi_1-\mathrm{I}$ olduğunu gösterir.

Şimdi de ${\Phi_2}^2=m\Phi_2-\mathrm{I}$ olduğunu gösterelim:

$${\Phi_2}^2(X)=\Phi_2\big(\Phi_2(X)\big)=\Phi_2\left(\frac{m}{2}I(X)-\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)\right)$$

$$=\frac{m}{2}I\left(\frac{m}{2}I(X)-\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)\right)-\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J\left(\frac{m}{2}I(X)-\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)\right)$$

$$=\frac{m^2}{4}-\frac{m\sqrt{4-m^2}}{4}J(X)-\frac{m\sqrt{4-m^2}}{4}J(X)+\frac{4-m^2}{4}J^2(X)$$

$$=\frac{m^2-2}{2}-\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)$$

ve

$$m\Phi_2-\mathrm{I}=m\left(\frac{m}{2}I(X)-\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J(X)\right)-I(X)$$

$$= \frac{m^2}{2} - \frac{m\sqrt{4-m^2}}{2} J(X) - I$$
$$= \frac{m^2-2}{2} - \frac{m\sqrt{4-m^2}}{2} J(X)$$

dir. Bu ise ${\Phi_2}^2 = m\Phi_2 - \mathrm{I}$ olduğunu gösterir.

Önerme 4.1.12. Bir semi-Riemann manifold üzerindeki her hemen hemen poly-Norden yapı,

$$J_1 = \frac{-m}{\sqrt{4-m^2}} I + \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi,$$
$$J_2 = \frac{m}{\sqrt{4-m^2}} I - \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi, \quad -2 < m < 2 \tag{4.1.9}$$

ile verilen iki hemen hemen kompleks yapıyı oluşturur [25].

İspat. ${J_1}^2 = -I$ ve ${J_2}^2 = -I$ olduğunu göstereceğiz:

$${J_1}^2(X) = J_1\big(J_1(X)\big) = J_1\left(\frac{-m}{\sqrt{4-m^2}} I + \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\right)$$
$$= \frac{-m}{\sqrt{4-m^2}} I\left(\frac{-m}{\sqrt{4-m^2}} I + \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\right)$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\left(\frac{-m}{\sqrt{4-m^2}} I + \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\right)$$
$$= \frac{m^2}{4-m^2} - \frac{2m}{4-m^2}\Phi(X) - \frac{2m}{4-m^2}\Phi(X) + \frac{4}{4-m^2}\Phi^2(X)$$
$$= \frac{m^2}{4-m^2} - \frac{4m}{4-m^2}\Phi(X) + \frac{4}{4-m^2}\big(m\Phi(X) - I(X)\big)$$
$$= \frac{m^2}{4-m^2} - \frac{4m}{4-m^2}\Phi(X) + \frac{4m}{4-m^2}\Phi(X) - \frac{4}{4-m^2}$$
$$= \frac{m^2-4}{4-m^2} = -I$$

elde edilir. Ayrıca

$${J_2}^2(X) = J_2\big(J_2(X)\big) = J_2\left(\frac{m}{\sqrt{4-m^2}} I - \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\right)$$
$$= \frac{m}{\sqrt{4-m^2}} I\left(\frac{m}{\sqrt{4-m^2}} I - \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\right)$$
$$- \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\left(\frac{m}{\sqrt{4-m^2}} I - \frac{2}{\sqrt{4-m^2}} \Phi\right)$$

$$= \frac{m^2}{4-m^2} - \frac{2m}{4-m^2}\Phi(X) - \frac{2m}{4-m^2}\Phi(X) + \frac{4}{4-m^2}\Phi^2(X)$$
$$= \frac{m^2}{4-m^2} - \frac{4m}{4-m^2}\Phi(X) + \frac{4}{4-m^2}\big(m\Phi(X) - I(X)\big)$$
$$= \frac{m^2}{4-m^2} - \frac{4m}{4-m^2}\Phi(X) + \frac{4m}{4-m^2}\Phi(X) - \frac{4}{4-m^2}$$
$$= \frac{m^2-4}{4-m^2} = -I$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.1.13. (M, Φ, g) bir hemen hemen poly-Norden semi-Riemann manifold olsun. Eğer Φ hemen hemen poly-Norden yapısı, M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonuna göre paralel ise (M, Φ, g) üçlüsüne bir poly-Norden semi-Riemann manifold denir [25].

4.2. Hemen Hemen Poly-Norden Riemann Manifoldların Altmanifoldları

Bu bölümde öncelikle hemen hemen poly-Norden Riemannian manifoldlarının altmanifoldları için [26] da elde edilmiş sonuçları sunacağız.

$(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. Burada M üzerine indirgenen Riemann metriği de g ile göstereceğiz.

Her $X \in \Gamma(TM)$ ve $U \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\widetilde{\Phi}X = fX + wX, \tag{4.2.1}$$
$$\widetilde{\Phi}U = BU + CU, \tag{4.2.2}$$

olmak üzere (4.2.1) ve (4.2.2) den

$$g(fX, Y) = g(X, fY)\,, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), \tag{4.2.3}$$
$$g(CU, V) = g(U, CV), \quad \forall U, V \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{4.2.4}$$

elde edilir. Burada

$$f\colon \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \qquad B\colon \Gamma(TM^{\perp}) \to \Gamma(TM),$$
$$w\colon \Gamma(TM) \to \Gamma(TM^{\perp}), \qquad C\colon \Gamma(TM^{\perp}) \to \Gamma(TM^{\perp}),$$

ve

$$fX = (\widetilde{\Phi}\mathrm{X})^T, \qquad BU = (\widetilde{\Phi}\mathrm{U})^T,$$

$$wX = (\widetilde{\Phi}\mathrm{X})^{\perp}, \qquad CU = (\widetilde{\Phi}\mathrm{U})^{\perp},$$

dir. Ayrıca w ve B projeksiyon dönüşümleri arasında

$$g(wX, U) = g(X, BU),$$

ilişkisi vardır.

Önerme 4.2.1. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın bir alt manifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$f([X, Y]) = \nabla_X fY - \nabla_Y fX - A_{wY}X + A_{wX}Y \tag{4.2.5}$$

ve

$$w([X, Y]) = h(X, fY) - h(fX, Y) + \nabla_X^{\perp} wY - \nabla_Y^{\perp} wX \tag{4.2.6}$$

dir. Burada ∇, M üzerindeki indirgenmiş konneksiyonudur [26].

İspat. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir poly-Norden Riemann manifold ve $\widetilde{\nabla}$ da $\widetilde{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\Phi})Y = 0$ olacağından

$$\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\Phi} Y = \widetilde{\Phi}(\widetilde{\nabla}_X Y)$$

yazılır. Böylece Gauss-Weingarten formülleri ve (4.1.1) kullanılırsa

$$\widetilde{\nabla}_X(fY + wY) = \widetilde{\Phi}(\nabla_X Y + h(X, Y))$$

$$\widetilde{\nabla}_X fY + \widetilde{\nabla}_X wY = \widetilde{\Phi}\nabla_X Y + \widetilde{\Phi} h(X, Y)$$

$$\nabla_X fY + h(X, fY) - A_{wY}X + \nabla_X^{\perp} wY = f(\nabla_X Y) + w(\nabla_X Y) + Bh(X, Y) + Ch(X, Y)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının teğet ve normal bileşenleri karşılıklı olarak eşitlenirse

$$\nabla_X fY - f(\nabla_X Y) = A_{wY}X + Bh(X, Y) \tag{4.2.7}$$

ve

$$w(\nabla_X Y) - \nabla_X^{\perp} wY = h(X, fY) - Ch(X, Y) \tag{4.2.8}$$

bulunur. (4.2.7) de X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$\nabla_Y fX - f(\nabla_Y X) = A_{wX}Y + Bh(Y, X) \tag{4.2.9}$$

olur. Böylece (4.2.7) ve (4.2.9) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$f(\nabla_Y X - \nabla_X Y) - (\nabla_Y fX - \nabla_X fY) = A_{wY}X - A_{wX}Y$$

$$f[X, Y] = \nabla_X fY - \nabla_Y fX - A_{wY}X + A_{wX}Y$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.8) de X ve Y nin rolleri değiştirilir ve elde edilen

$$w(\nabla_Y X) - \nabla_Y^{\perp} wX = h(Y, fX) - Ch(Y, X) \tag{4.2.10}$$

eşitliği ve (4.2.8) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$w(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - (\nabla_X^{\perp} wY - \nabla_Y^{\perp} wX) = h(X, fY) - h(Y, fX)$$

$$w[X, Y] = h(X, fY) - h(Y, fX) + \nabla_X^{\perp} wY - \nabla_Y^{\perp} wX$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.2. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın bir alt manifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X f)Y = A_{wY}X + Bh(X, Y),$$

$$(\widetilde{\nabla}_X w)Y = Ch(X, Y) - h(X, fY), \tag{4.2.11}$$

$$(\nabla_X B)U = A_{CU}X - fA_U X$$

$$(\widetilde{\nabla}_X C)U = -h(X, BU) - wA_U X \tag{4.2.12}$$

dir [26].

Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $TM^{\perp}$ in bir ortonormal $\{N_1, N_2, N_3, \dots, N_k\}$ bazı için Gauss ve Weingarten formülleri

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{\beta=1}^{k} h_\beta\,(X, Y) N_\beta \tag{4.2.13}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N_\beta = -A_{N_\beta} X + \sum_{\gamma=1}^{k} \sigma_{\beta\gamma}\,(X) N_\gamma \tag{4.2.14}$$

şeklinde verilebilir. Burada ∇ ve $\widetilde{\nabla}$, sırasıyla M ve $\widetilde{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları ve $\beta, \gamma \in \{1,2, \dots, k\}$ dır. Burada h_β, ($\beta \in \{1,2, \dots, k\}$), M nin ikinci temel formunu tanımlayan ikinci temel tensörlerdir, öyle ki

$$h(X, Y) = \sum_{\beta=1}^{k} h_\beta\,(X, Y) N_\beta$$

dır. A_{N_β}, ($\beta \in \{1,2, \dots, k\}$), dönüşümü $g\left(A_{N_\beta} X, Y\right) = h_\beta(X, Y)$ ile verilen N_β doğrultusundaki şekil operatörünü ve $\sigma_{\beta\gamma}$, ($\beta, \gamma \in \{1,2, \dots, k\}$), ise M alt manifoldu üzerinde

$$\nabla_X^{\perp} N_\beta = \sum_{\gamma=1}^{k} \sigma_{\beta\gamma}\,(X) N_\gamma$$

eşitliğini sağlayan 1-formları göstermektedir.

$\beta, \gamma \in \{1,2, \dots, k\}$ için $g(N_\beta, N_\gamma) = \delta_{\beta\gamma}$ ifadesinde eşitliğin her iki tarafının $X \in \Gamma(TM)$ için türevi alınırsa

$$\sigma_{\beta\gamma} = -\sigma_{\gamma\beta}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.3. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\forall\, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$g\left((\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}} \widetilde{\Phi})\tilde{Y}, \tilde{Z}\right) = g\left(\tilde{Y}, (\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}} \widetilde{\Phi})\tilde{Z}\right), \tag{4.2.15}$$

dir [26].

Önerme 4.2.4. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda her $\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g\big((\nabla_X f)Y, Z\big) = g(Y, (\nabla_X f)Z) \tag{4.2.16}$$

dir [26].

İspat. (4.2.1), (4.2.2), (4.2.13) ve (4.2.14) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\Phi})Y &= \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\Phi} Y - \widetilde{\Phi}(\widetilde{\nabla}_X Y) \\
&= \widetilde{\nabla}_X fY + \widetilde{\nabla}_X wY - \widetilde{\Phi} \nabla_X Y - \sum_{\beta=1}^{k} h_\beta(X,Y)\, \widetilde{\Phi} N_\beta \\
&= (\nabla_X f)Y - \sum_{\beta=1}^{k} g(wY, N_\beta) A_{N_\beta} X - \sum_{\beta=1}^{k} h_\beta\,(X,Y) B N_\beta \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ h_\beta(X, fY) + X\left(g(wY, N_\beta)\right) - g(wY, N_\gamma \sigma_{\beta\gamma}(X) \right\} N_\beta \\
&\quad - \sum_{\beta=1}^{k} h_\beta(X,Y) C N_\beta - w \nabla_X Y
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

yazılabilir. $\beta \in \{1,2, \dots, k\}$ için $g(wX, N_\beta) = g(X, \widetilde{\Phi} N_\beta)$ eşitliği göz önüne alınırsa, son denklem,

$$g\left((\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\Phi})Y, Z\right) = g\big((\nabla_X f)Y, Z\big) - \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{array}{l} h_\beta(X,Z) g(Y, \widetilde{\Phi} N_\beta) \\ + h_\beta(X,Y) g(Z, \widetilde{\Phi} N_\beta) \end{array} \right\} \tag{4.2.18}$$

halini alır. (4.2.18) eşitliğinde Y ve Z nin rolleri değiştirilirse ispat tamamlanır.

Şimdi $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin $(n+k)$-boyutlu bir poly-Norden Riemann manifoldu ve M nin de $\widetilde{M}$ da n -boyutlu bir altmanifold olduğunu gözönünde bulunduralım. Buna göre $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X wY = \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{matrix} X\left(g(wY, N_\beta)\right) N_\beta - g(wY, N_\beta) A_{N_\beta} X \\ + \sum_{\gamma=1}^{k} \sigma_{\beta\gamma}(X) g(wY, N_\beta) N_\gamma \end{matrix} \right\} \tag{4.2.19}$$

yazılır.

$\widetilde{M}$ bir poly-Norden Riemann manifold olduğu için $\widetilde{\nabla}\widetilde{\Phi} = 0$ eşitliğinde (4.2.1), (4.2.2), (4.2.13) ve (4.2.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\nabla_X fY + \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{matrix} h_\beta(X, fY) N_\beta \\ -g(wY, N_\beta) A_{N_\beta} X \end{matrix} \right\} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ X\left(g(wY, N_\beta)\right) - \sum_{\gamma=1}^{k} \sigma_{\beta\gamma}(X) g(wY, N_\beta) N_\gamma \right\} \\ &= f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ h_\beta(X, Y) BN_\beta + h_\beta(X, Y) CN_\beta \right\} \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

bulunur. Öte yandan her $X \in \Gamma(TM)$ ve $U \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X U = \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{matrix} X\left(g(U, N_\beta)\right) N_\beta - g(U, N_\beta) A_{N_\beta} X \\ + \sum_{\gamma=1}^{k} \sigma_{\beta\gamma}(X) g(U, N_\beta) N_\gamma \end{matrix} \right\} \tag{4.2.21}$$

yazılabilir. (4.2.21) eşitliğinin her iki tarafına $\widetilde{\Phi}$ uygulanır ve $\widetilde{M}$ nin bir poly-Norden Riemann manifold olduğu göz önüne alınırsa (4.2.1), (4.2.2), (4.2.13) ve (4.2.14) ile

$$\begin{aligned} &\nabla_X BU + \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ h_\beta(X, BU) + X(g(CU, N_\beta)) \right\} N_\beta \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{matrix} -g(CU, N_\beta) A_{N_\beta} X \\ + \sum_{\gamma=1}^{k} g(CU, N_\beta) \sigma_{\beta\gamma}(X) N_\gamma \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{array}{c} X\left(g\left(U,N_\beta\right)\right) BN_\beta + X\left(g\left(U,N_\beta\right)\right) CN_\beta \\ -g\left(U,N_\beta\right) f A_{N_\beta} X - g\left(U,N_\beta\right) w A_{N_\beta} X \end{array} \right\}$$

$$+ \sum_{\beta,\gamma=1}^{k} \left\{ g\left(U,N_\beta\right)\sigma_{\beta\gamma}(X) BN_\gamma + g\left(U,N_\beta\right)\sigma_{\beta\gamma}(X) CN_\gamma \right\} \quad (4.2.22)$$

elde edilir [26].

Böylece aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 4.2.5. M, $(n+k)$-boyutlu bir poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n- boyutlu bir altmanifoldu olsun. Buna göre,

$$(\nabla_X f)Y = \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ g\left(wY, N_\beta\right) A_{N_\beta} X + h_\beta(X,Y) BN_\beta \right\}$$

$$\sum_{\beta=1}^{k} g\left(wY, N_\gamma\right) \nabla_X^{\perp} N_\beta = w\nabla_X Y + \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{array}{c} h_\beta(X,Y) CN_\beta - h_\beta(X, fY) N_\beta \\ -X(g\left(wY, N_\beta\right)) \end{array} \right\}$$

$$\nabla_X BU = \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{array}{c} g\left(CU, N_\beta\right) A_{N_\beta} X - g\left(U, N_\beta\right) f\left(A_{N_\beta} X\right) \\ +X\left(g\left(U, N_\beta\right)\right) BN_\beta + \sum_{\gamma=1}^{k} \sigma_{\beta\gamma}(X) g\left(U, N_\beta\right) BN_\gamma \end{array} \right\}$$

$$\sum_{\beta=1}^{k} g\left(CU, N_\beta\right) \nabla_X^{\perp} N_\beta = \sum_{\gamma=1}^{k} \left\{ \begin{array}{c} -\left[X\left(g\left(CU, N_\beta\right)\right) + h_\beta(X, BU)\right] N_\beta \\ -g\left(U, N_\beta\right) w\left(A_{N_\beta} X\right) + X\left(g\left(U, N_\beta\right)\right) CN_\beta \\ +\sum_{\gamma=1}^{k} \sigma_{\beta\gamma}(X) g\left(U, N_\beta\right) CN_\gamma \end{array} \right\}$$

dır [26].

M, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n- boyutlu bir altmanifoldu ve $\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ ise M nin normal uzayı $TM^{\perp}$ in ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için $\beta \in \{1,2,\dots,k\}$ olmak üzere

$$\widetilde{\Phi} X = fX + \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X) N_\beta \quad (4.2.23)$$

$$\widetilde{\Phi}N_\beta = \varsigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^{k} \theta_{\beta\gamma} N_\gamma \tag{4.2.24}$$

yazılabilir. Burada f, M üzerindeki X tanjant vektörünü $\widetilde{\Phi}X$ in teğet bileşenine dönüştüren $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı; v_β, ($\beta \in \{1,2,\dots,k\}$), reel 1-formlar ve ς_β, ($\beta \in \{1,2,\dots,k\}$), ise M üzerinde vektör alanlarıdır. Ayrıca M altmanifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir reel değerli $\theta_{\beta\gamma}$ fonksiyonları $\left(\theta_{\beta\gamma}\right)_{1\le\beta,\gamma\le k}$ ile gösterilen $k \times k$ tipinde bir matris oluştururlar.

$\widetilde{\Phi}$ nın g ile uyumlu bir self-adjoint operatör olduğu göz önüne alınarak

$g\left(\widetilde{\Phi}X, N_\beta\right) = g(X, \widetilde{\Phi}N_\beta)$ ve $g\left(\widetilde{\Phi}N_\beta, N_\gamma\right) = g(N_\beta, \widetilde{\Phi}N_\gamma)$

yazılabileceğinden (4.2.3) kullanılarak aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 4.2.6. $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu M için $\beta, \gamma \in \{1,2,\dots,k\}$ olmak üzere

$$v_\beta(X) = \; g\left(\widetilde{\Phi}X, N_\beta\right) = \; g\left(X, \varsigma_\beta\right), \tag{4.2.25}$$

$$g(fX, fY) = mg(X, fY) - g(X,Y) - \sum_{\beta,\gamma=1}^{k} v_\beta(X) v_\beta(Y)\;, \tag{4.2.26}$$

$$\theta_{\beta\gamma} = \theta_{\gamma\beta} \tag{4.2.27}$$

dır [26].

Önerme 4.2.7. $\left(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g\right)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\widetilde{M}$ nın üzerinde tanımlı olan hemen hemen poly-Norden yapının M üzerine indirgediği ve her $\Gamma(TM)$ için,

$$f^2 X = mfX - X - \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)\, \varsigma_\beta, \tag{4.2.28}$$

$$v_\beta(fX) = mv_\beta(X) - \sum_{\gamma=1}^{k} \theta_{\beta\gamma} v_\gamma(X), \tag{4.2.29}$$

$$v_\gamma\left(\varsigma_\beta\right) = m\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} - \sum_{\lambda=1}^{k} \theta_{\beta\lambda}\, \theta_{\lambda\gamma}, \tag{4.2.30}$$

$$f\varsigma_\beta = m\varsigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^{k} \theta_{\beta\gamma}\,\varsigma_\gamma \qquad (4.2.31)$$

eşitliklerini sağlayan bir $(f, g, v_{\beta,}\varsigma_\beta, (\theta_{\beta\gamma})_{k\times k})$ yapısı vardır [26].

İspat. (4.2.23) denkleminin her iki tarafına $\widetilde{\Phi}$ uygulanırsa

$$m\widetilde{\Phi}X - X = \widetilde{\Phi}(fX) + \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)\,\widetilde{\Phi}N_\beta,$$

eşitliği elde edilir. Yani,

$$mfX + m\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)\,N_\beta - X$$

$$= f^2X + \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(fX)N_\beta + \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)\left(\varsigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\beta\gamma}\,N_\gamma\right)$$

olur. Eğer son denklemin her iki tarafındaki teğet ve normal bileşenler karşılıklı olarak eşitlenirse, sırasıyla (4.2.28) ve (4.2.29) elde edilir. (4.2.24) eşitliğinden,

$$g(\widetilde{\Phi}N_\beta, \widetilde{\Phi}N_\gamma) = g(\varsigma_\beta, \varsigma_\gamma) + \sum_{\lambda=1}^{k}\theta_{\beta\lambda}\theta_{\gamma\lambda} \qquad (4.2.32)$$

ve

$$g(\widetilde{\Phi}N_\beta, \widetilde{\Phi}N_\gamma) = m\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} \qquad (4.2.33)$$

yazılabilir. Bu durumda (4.2.27), (4.2.32) ve (4.2.33) eşitlikleri kullanılarak (4.2.30) elde edilir. Son olarak, (4.2.30) de $X = \varsigma_\beta$ alınırsa (4.2.31) eşitliğine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.8. $(n+k)$-boyutlu bir poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda

$$fA_{N_\beta}X + \nabla_X\varsigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\beta\gamma}A_{N_\gamma}X - \sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\beta\gamma}(X)\,\varsigma_\gamma = 0,$$

$$X(\theta_{\beta\lambda}) + h_\lambda(X, \varsigma_\beta) + h_\beta(X, \varsigma_\lambda) + \sum_{\gamma=1}^{k}(\theta_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\lambda}(X) - \theta_{\gamma\lambda}\sigma_{\beta\gamma}(X)) = 0$$

dır [26].

İspat. (4.2.5), (4.2.6), (4.2.23) ve (4.2.25) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\Phi})N_\beta &= \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\Phi}N_\beta - \widetilde{\Phi}(\widetilde{\nabla}_X N_\beta)\\
&= \widetilde{\nabla}_X\left(\varsigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\beta\gamma}N_\gamma\right) - \widetilde{\Phi}\left(-A_{N_\beta}X + \sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\beta\gamma}(X)N_\gamma\right)\\
&= \nabla_X\varsigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^{k}X(\theta_{\beta\gamma})N_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\beta\gamma}(-A_{N_\gamma}X + \sum_{\lambda=1}^{k}\sigma_{\gamma\lambda}(X)N_\lambda)\\
&\quad + fA_{N_\beta}X + wA_{N_\beta}X - \sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\beta\gamma}(X)\left(\varsigma_\gamma + \sum_{\lambda=1}^{k}\theta_{\gamma\lambda}N_\lambda\right)\\
&= fA_{N_\beta}X + \nabla_X\varsigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\beta\gamma}A_{N_\gamma}X - \sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\beta\gamma}(X)\varsigma_\gamma\\
&\quad + \sum_{\gamma=1}^{k}X(\theta_{\beta\gamma})N_\gamma + \sum_{\gamma,\lambda=1}^{k}\theta_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\lambda}(X)N_\lambda\\
&\quad + wA_{N_\beta}X - \sum_{\gamma,\lambda=1}^{k}\sigma_{\beta\gamma}(X)\theta_{\gamma\lambda}N_\lambda,
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\widetilde{M}$ bir poly-Norden manifold iken her $X \in \Gamma(TM)$ için $(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\Phi})N_\beta = 0$ dır. Yukarıdaki son denklemin teğet ve normal bileşenleri karşılıklı eşitlenerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.9. M, $(n+k)$-boyutlu bir poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer ς_β, $\beta \in \{1,2,\dots,k\}$, vektör alanları lineer bağımsız ve f, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise M tamamen jeodeziktir [26].

İspat. Önerme (4.2.7) deki ilk denklemden $\forall\, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\sum_{\beta=1}^{k}\left\{g(wY, N_\beta)g\left(A_{N_\beta}X, Z\right) + h_\beta(X,Y)g(BN_\beta, Z)\right\} = 0,$$

yazılabilir. Böylece (4.2.25) göz önüne alınarak

$$\sum_{\beta=1}^{k}v_\beta(Y)h_\beta(X,Z) = -\sum_{\beta=1}^{k}v_\beta(Z)h_\beta(X,Y),$$

olur. Son denklemde X ve Z nin rolleri değiştirilirse

$$\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(Y)\, h_\beta(X,Z) = -\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)\, h_\beta(Y,Z),$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(Y) h_\beta(X,Z)$$

ifadesinin X ve Y için hem simetrik hem de anti-simetrik olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(Y) h_\beta(X,Z) = 0,$$

yani

$$\sum_{\beta=1}^{k} g\big(Y, h_\beta(X,Z) BN_\beta\big) = 0$$

yazılır. Böylece $\beta \in \{1,2,\dots,k\}$ için $BN_\beta = \varsigma_\beta$ ve kabul gereği ς_β lar lineer bağımsız olduğundan ispat tamamlanır.

4.3. Hemen Hemen Poly-Norden Riemann Manifoldların İnvaryant Altmanifoldları

Tanım 4.3.1. M, $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer her $p \in M$ noktası için $\widetilde{\Phi}\big(T_pM\big) \subset T_pM$ ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir invaryant altmanifoldu denir [26].

Kabul edelim ki M, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n- boyutlu bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda, (4.2.23) den her $1 \leq \beta \leq k$ için $v_\beta = 0$ (veya denk olarak $\varsigma_\beta = 0$) elde edilir. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

Önerme 4.3.2. M, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n- boyutlu bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\widetilde{M}$ nın üzerinde tanımlı olan hemen hemen poly-Norden yapının M üzerine indirgediği $(f, g, v_\beta, \varsigma_\beta, \left(\theta_{\beta\gamma}\right)_{k\times k})$ yapısına ait $\ominus = \left(\theta_{\beta\gamma}\right)_{k\times k}$ matrisi bir hemen hemen poly-

Norden matristir. Yani $\ominus^2 = m\ominus - I_k$ dır. Burada I_k, k-yıncı mertebeden birim matrisi gösterir [26].

İspat. M bir n-boyutlu invaryant altmanifold olduğu için (4.2.30) dan $1 \leq \beta, \gamma \leq k$ için

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \theta_{\beta\lambda}\,\theta_{\lambda\gamma} = m\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma},$$

yazılır. Böylece $\left(\theta_{\beta\gamma}\right)_{k\times k}$ matrisi $\ominus$ ile gösterilir ve matris çarpımı tanımı göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Önerme 4.3.3. M, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu ve $(f, g, v_{\beta,}\varsigma_\beta, \left(\theta_{\beta\gamma}\right)_{k\times k})$ beşlisi de $\widetilde{M}$ üzerinde tanımlı olan hemen hemen poly-Norden yapıdan M üzerine indirgenmiş yapı olsun. Bu durumda M nin bir invaryant altmanifold olması için gerek ve yeter şart (f, g) indirgenmiş yapısının M üzerinde bir hemen hemen poly-Norden Riemann yapı olmasıdır [26].

İspat. M, hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ nin bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $v_\beta = 0$ (veya denk olarak $\varsigma_\beta = 0$) olduğu için $1 \leq \beta \leq k$ olmak üzere (4.2.26) ve (4.2.28) den

$$f^2X = mfX - X,$$
$$g(fX, fY) = mg(X, fY) - g(X, Y),$$

olur. Bu ise (f, g) nin M üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapı olduğunu gösterir.

Tersine, (f, g), M üzerinde bir hemen hemen poly-Norden Riemann yapı olsun. Bu durumda (4.2.28) den

$$\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)\varsigma_\beta = 0$$

yazılabilir. Bu ise $v_\beta(X) = 0$ yani M nin bir invaryant altmanifold olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Örnek 4.3.4. R^4, (x_1, x_2, y_1, y_2) koordinat sistemi ile verilen 4-boyutlu Öklid uzayı olsun.

$$\widetilde{\Phi}: R^{\mathbf{4}} \to R^{\mathbf{4}},$$

dönüşümünü

$$\widetilde{\Phi}(x_1, x_2, y_1, y_2) = (B_m x_1, (m - B_m)x_2, B_m y_1, (m - B_m)y_2),$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}^2(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \widetilde{\Phi}\left(\widetilde{\Phi}(x_1, x_2, y_1, y_2)\right)\\ &= \widetilde{\Phi}(B_m x_1, (m - B_m)x_2, B_m y_1, (m - B_m)y_2)\\ &= (B_m^2 x_1, (m - B_m)^2 x_2, B_m^2 y_1, (m - B_m)^2 y_2),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(m\widetilde{\Phi} - I)(x_1, x_2, y_1, y_2) &= m\widetilde{\Phi}(x_1, x_2, y_1, y_2) - (x_1, x_2, y_1, y_2)\\ &= \left((mB_m - 1)x_1, (m\bar{B}_m - 1)x_2, (mB_m - 1)y_1, (m\bar{B}_m - 1)y_2\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$mB_m - 1 = m\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} - 1 = \frac{m^2 + m\sqrt{m^2 - 4} - 2}{2} = B_m^2$$

$$m\bar{B}_m - 1 = m\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} - 1 = \frac{m^2 - m\sqrt{m^2 - 4} - 2}{2} = \bar{B}_m^2$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\widetilde{\Phi}^2 = m\widetilde{\Phi} - I,$$

elde edilir. Ayrıca

$$\widetilde{\Phi}X = (B_m x_1, (m - B_m)x_2, B_m x_3, (m - B_m)x_4),$$

$$\widetilde{\Phi}Y = (B_m y_1, (m - B_m)y_2, B_m y_3, (m - B_m)y_4),$$

olmak üzere

$$g(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y) = B_m^2 x_1 y_1 + (m - B_m)^2 x_2 y_2 + B_m^2 x_3 y_3 + (m - B_m)^2 x_4 y_4$$

ve

$$mg\big(X, \widetilde{\Phi}Y\big) = mB_m x_1 y_1 + m(m - B_m)x_2 y_2 + mB_m x_3 y_3 + m(m - B_m)x_4 y_4$$

$$g(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

tür. Buradan $\widetilde{\Phi}$ ile g nin bağdaşabilirliği yani

$$g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y\big) = mg\big(X, \widetilde{\Phi}Y\big) - g(X, Y)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece $(\widetilde{M} = R^4, \widetilde{\Phi}, g)$ bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu olur [26].

Şimdi $(\widetilde{M} = R^4, \widetilde{\Phi}, g)$ manifoldunun

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2,$$

ile tanımlanan M alt manifoldunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$U_1 = (1,0,1,0), \qquad U_2 = (0,1,0,1),$$

olmak üzere $TM = Sp\{U_1, U_2\}$ dir. Ayrıca

$$\widetilde{\Phi}U_1 = B_m U_1, \qquad \widetilde{\Phi}U_2 = (m - B_m)U_2,$$

olduğundan M, $(\widetilde{M} = R^4, \widetilde{\Phi}, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun bir invaryant altmanifoldudur.

4.4. Hemen Hemen Poly-Norden Riemann Manifoldlarının Anti-İnvaryant Altmanifoldları

Tanım 4.4.1. M, $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer herhangi bir $p \in M$ noktasında $\widetilde{\Phi}(T_pM) \subset T_pM^{\perp}$ ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir anti-invaryant altmanifoldu denir [26].

M, $(n+k)$-boyutlu bir $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun n-boyutlu bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda (4.2.15) ve (4.2.16) eşitliklerinden, $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $\widetilde{\Phi}X$ ve $\widetilde{\Phi}N_\beta$, $(1 \leq \beta \leq k)$, için sırasıyla

$$\widetilde{\Phi}X = \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)N_\beta, \tag{4.4.1}$$

$$\widetilde{\Phi}N_\beta = \varsigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^{k} \theta_{\beta\gamma}N_{\gamma,} \tag{4.4.2}$$

yazılabilir.

Önerme 4.4.2. M, $(n+k)$-boyutlu $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun n-boyutlu bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\sum_{\beta=1}^{k} g(\widetilde{\Phi}\,Y, N_\beta)A_{N_\beta}X = \sum_{\beta=1}^{k} -h_\beta(X,Y)BN_\beta,$$

$$\sum_{\beta=1}^{k} g(\widetilde{\Phi}\,Y, N_\beta)\nabla_X^{\perp}N_\beta = w\nabla_X Y + \sum_{\beta=1}^{k} \begin{Bmatrix} h_\beta(X,Y)CN_\beta \\ -X(g(wY, N_\beta))N_\beta \end{Bmatrix}$$

dır [26].

Önerme 4.4.3. $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\widetilde{M}$ nın üzerinde tanımlı olan hemen hemen poly-Norden yapının M üzerine indirgediği bir $\left(g, v_\beta, \varsigma_\beta, (\theta_{\beta\gamma})_{k\times k}\right)$ yapısı vardır ve her $X \in \Gamma(TM)$ için,

$$X = -\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X)\,\varsigma_\beta,$$

$$v_\beta(X) = \frac{1}{m}\sum_{\gamma=1}^{k} \theta_{\beta\gamma} v_\gamma(X),$$

$$v_\gamma(\varsigma_\beta) = m\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} - \sum_{\lambda=1}^{k} \theta_{\beta\lambda}\,\theta_{\lambda\gamma},$$

$$\varsigma_\beta = \frac{1}{m}\sum_{\gamma=1}^{k} \theta_{\beta\gamma}\varsigma_\gamma, \tag{4.4.3}$$

$$g(X,Y) = -\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta(X) v_\beta(Y),$$

$$\nabla_X \varsigma_\beta = \sum_{\gamma=1}^{k}\left(\theta_{\beta\gamma} A_{N_\gamma} X + \sigma_{\beta\gamma}(X)\varsigma_\gamma\right),$$

$$X(\theta_{\beta\lambda}) + h_\lambda(X,\varsigma_\beta) + h_\lambda(X,\varsigma_\lambda) = -\sum_{\gamma=1}^{k}\left(\theta_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\lambda}(X) - \theta_{\gamma\lambda}\sigma_{\beta\gamma}(X)\right),$$

dir [26].

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

5.1. Hemen Hemen Poly-Norden Riemann Manifoldların Slant Altmanifoldları

$(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|g(\widetilde{\Phi}X, fX)\right| \leq \left\|\widetilde{\Phi}X\right\| \|fX\|, \tag{5.1.1}$$

yazılabilir. Böylece $x \in M$ ve $\theta: \Gamma(T_xM) \longrightarrow [0, \pi]$ fonksiyonu için

$$g\left(\widetilde{\Phi}X_x, fX_x\right) = \cos\theta\,(X_x)\left\|\widetilde{\Phi}X_x\right\| \|fX_x\| \tag{5.1.2}$$

olur.

Her $x \in M$ ve sıfırdan farklı teğet vektör $X_x \in \Gamma(T_xM)$ için $\widetilde{\Phi}X_x$ ve fX_x arasındaki $\theta(X_x)$ açısına X in Wirtinger açısı denir ve

$$\cos\theta(X_x) = \frac{g(\widetilde{\Phi}X_x, fX_x)}{\|fX_x\| \left\|\widetilde{\Phi}X_x\right\|}, \tag{5.1.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.1.1. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer $\widetilde{\Phi}X_x$ ve fX_x arasındaki $\theta(X_x)$ açısı herhangi bir $x \in M$ ve $X_x \in T_xM$ için sabit ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir slant altmanifoldu denir. Bu durumda $\theta =: \theta(X_x)$ açısı M nin slant açısı olarak adlandırılır ve

$$\cos\theta = \frac{g(\widetilde{\Phi}X, fX)}{\left\|\widetilde{\Phi}X\right\| \|fX\|} = \frac{\|fX\|}{\left\|\widetilde{\Phi}X\right\|} \tag{5.1.4}$$

şeklinde tanımlanır.

$(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$, hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları, slant açısı sırasıyla $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ olan slant alt manifoldlardır. İnvaryant veya anti-invaryant olmayan slant altmanifoldlar proper (has, öz) slant altmanifoldlar olarak adlandırılır.

Hatırlatma 5.1.2. I, $\Gamma(TM)$ de birim olmak üzere

$$\sin^2\theta\,(mf - I) = \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta \otimes \varsigma_\beta \tag{5.1.5}$$

yazılabilir.

Önerme 5.1.3. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer M slant ise her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(fX, fY) = \cos^2\theta\left\{mg\big(X, \widetilde{\Phi}Y\big) - g(X,Y)\right\},$$
$$g(wX, wY) = \sin^2\theta\left\{mg\big(X, \widetilde{\Phi}Y\big) - g(X,Y)\right\},$$

dir.

İspat. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın bir slant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\cos\theta = \frac{\parallel fX \parallel}{\parallel \widetilde{\Phi}X \parallel},$$

olduğundan

$$\cos^2\theta \parallel \widetilde{\Phi}X \parallel^2 = \parallel fX \parallel^2,$$

yani

$$\cos^2\theta\, g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}X\big) = g(fX, fX)$$

yazılabilir. Burada X yerine $X + Y$ yazılır, bir önceki eşitlik ve (4.1.3) kullanılırsa

$$\cos^2\theta\, g\big(\widetilde{\Phi}X + \widetilde{\Phi}Y, \widetilde{\Phi}X + \widetilde{\Phi}Y\big) = g(fX + fY, fX + fY)$$
$$\Rightarrow \cos^2\theta\left(g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}X\big) + 2g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y\big) + g\big(\widetilde{\Phi}Y, \widetilde{\Phi}Y\big)\right)$$
$$= g(fX, fX) + 2g(fX, fY) + g(fY, fY)$$
$$\Rightarrow \cos^2\theta\, g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y\big) = g(fX, fY)$$
$$\Rightarrow \cos^2\theta\left(mg\big(X, \widetilde{\Phi}Y\big) - g(X,Y)\right) = g(fX, fY)$$

elde edilir. Ayrıca $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y\big) = g(fX + wX, fY + wY)$$
$$= g(fX, fY) + g(wX, wY),$$

olduğundan

$$g(wX, wY) = g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y\big) - g(fX, fY)$$
$$= g\big(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y\big) - \cos^2\theta\, g(\widetilde{\Phi}X, \widetilde{\Phi}Y)$$

$$= \sin^2\theta\,(mg(X,\widetilde{\Phi}Y) - g(X,Y))$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.4. $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin slant olması için gerek ve yeter şart

$$f^2 = \lambda(mf - I) \tag{5.1.6}$$

olmasıdır.

İspat. $(\Longrightarrow)$ M, $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun bir slant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(f^2X,Y) &= g(f(fX),Y) \\ &= g(\widetilde{\Phi}(fX),Y) \\ &= g(fX,\widetilde{\Phi}Y) \\ &= g(fX,fY) \\ &= \cos^2\theta\left(mg(X,\widetilde{\Phi}Y) - g(X,Y)\right) \\ &= \cos^2\theta\, g(m\widetilde{\Phi}X - X,Y), \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$f^2X = \cos^2\theta\left(m\widetilde{\Phi}X - X\right),$$

elde edilir. Burada $\lambda = \cos^2\theta$ dır.

$(\Longleftarrow)$ Tersine, $f^2 = \lambda(mf - I)$ olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1]$ sayısı var olsun. O halde her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \cos\theta(X) &= \frac{g(\widetilde{\Phi}X,fX)}{\|\widetilde{\Phi}X\|\|fX\|} \\ &= \frac{g(X,f^2X)}{\|\widetilde{\Phi}X\|\|fX\|} \\ &= \frac{g(X,\lambda(m\widetilde{\Phi} - I)X)}{\|\widetilde{\Phi}X\|\|fX\|} \\ &= \lambda\frac{mg(X,\widetilde{\Phi}X) - g(X,X)}{\|\widetilde{\Phi}X\|\|fX\|} \\ &= \lambda\frac{g(\widetilde{\Phi}X,\widetilde{\Phi}Y)}{\|\widetilde{\Phi}X\|\|fX\|} \end{aligned}$$

$$= \lambda \frac{\| \widetilde{\Phi} X \|}{\| fX \|},$$

bulunur. Böylece $\lambda = \cos^2\theta\,(X) = sabit,\ X \in \Gamma(TM),$ elde edilir. Bu ise M nin bir slant altmanifold olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 5.1.5. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın bir altmanifoldu olsun. Eğer M slant ise her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X f^2)Y = m\cos^2\theta\,(\nabla_X f)Y$$

dir.

İspat. (5.1.6) eşitliğinden

$$f^2(\nabla_X Y) = \cos^2\theta\,(mf\nabla_X Y - \nabla_X Y)$$

ve

$$\nabla_X f^2 Y = \cos^2\theta\,(m\nabla_X fY - \nabla_X Y)$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}(\nabla_X f^2)Y &= \nabla_X f^2 Y - f^2(\nabla_X Y)\\ &= \cos^2\theta\,(m\nabla_X fY - \nabla_X Y) - \cos^2\theta\,(mf\nabla_X Y - \nabla_X Y)\\ &= m\cos^2\theta\,(\nabla_X fY - f\nabla_X Y)\\ &= m\cos^2\theta\,(\nabla_X f)Y\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Önerme 5.1.6. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir slant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X f^2)Y = m\cos^2\theta \sum_{\beta=1}^{k}\left[v_\beta(Y)A_{N_\beta}X + h_\beta(X,Y)\varsigma_\beta\right]$$

dir.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X f^2)Y = m\cos^2\theta \left(\sum_{\beta=1}^{k}\left\{g\big(wY, N_\beta\big)A_{N_\beta}X + h_\beta(X,Y)BN_\beta\right\}\right),$$

yazılabilir. Burada $v_\beta(Y) = g(\widetilde{\Phi}Y, N_\beta) = g(wY, N_\beta)$ ve $BN_\beta = \varsigma_\beta$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\nabla_X f^2)Y = m\cos^2\theta\left(\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta\,(Y)A_{N_\beta}X + h_\beta(X,Y)\varsigma_\beta\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 5.1.7. M, $(n+k)$- boyutlu hemen hemen poly-Norden Riemann manifold $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ nin n- boyutlu altmanifoldu olsun. M slant ise

$$f^2 = \frac{1}{\tan^2\theta}\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta \otimes \varsigma_\beta$$

dir.

İspat. (5.1.6) dan

$$mf - I_{\Gamma(TM)} = \frac{f^2}{\cos^2\theta},$$

yazılabilir. Burada (4.2.28) kullanılırsa

$$f^2 = \frac{f^2}{\cos^2\theta} - \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta \otimes \varsigma_\beta$$

$$\Rightarrow \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta \otimes \varsigma_\beta = \frac{f^2}{\cos^2\theta} - f^2 = f^2\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = f^2\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow f^2\tan^2\theta = \sum_{\beta=1}^{k} v_\beta \otimes \varsigma_\beta$$

$$\Rightarrow f^2 = \frac{1}{\tan^2\theta}\sum_{\beta=1}^{k} v_\beta \otimes \varsigma_\beta$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 5.1.8. $\mathbb{R}^4$ de (x_1,x_2,y_1,y_2) koordinat sistemini göz önüne alalım.

$$\Phi:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x_1,x_2,y_1,y_2) \longrightarrow \Phi(x_1,x_2,y_1,y_2) = (B_m x_1, B_m x_2, \bar{B}_m y_1, \bar{B}_m y_2)$$

olmak üzere $(\mathbb{R}^4,\Phi)$ ikilisi bir hemen hemen poly-Norden manifolddur. Eğer $\mathbb{R}^4$ üzerindeki alışılmış metrik göz önüne alınırsa $(\mathbb{R}^4,\Phi,\langle,\rangle)$ üçlüsü bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifold olur.

Şimdi

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(u,v) \longrightarrow \varphi(u,v) = (u+v, u-v, \sqrt{2}v, \sqrt{2}u)$$

ile tanımlanan $M = \varphi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda

$$U_1 = (1,1,0,\sqrt{2})$$
$$U_2 = (1,-1,\sqrt{2},0)$$

olmak üzere $TM = Sp\{U_1, U_2\}$ olur.

$$\Phi U_1 = (B_m, B_m, 0, \sqrt{2}\bar{B}_m)$$
$$\Phi U_2 = (B_m, -B_m, \sqrt{2}\bar{B}_m, 0)$$

dır. Burada

$$\langle \Phi U_1, U_1 \rangle = 2B_m + 2\bar{B}_m = 2m; \qquad \|U_1\| = 2 = \|U_2\|,$$
$$\langle \Phi U_2, U_2 \rangle = 2B_m + 2\bar{B}_m = 2m; \qquad \|\Phi U_2\| = \|\Phi U_1\| = \sqrt{2(m^2-2)}$$
$$\frac{\langle \Phi U_1, U_1 \rangle}{\|U_1\|\|\Phi U_1\|} = \frac{2m}{2\sqrt{2(m^2-2)}} = \frac{m}{\sqrt{2(m^2-2)}}$$
$$\frac{\langle \Phi U_2, U_2 \rangle}{\|U_2\|\|\Phi U_2\|} = \frac{2m}{2\sqrt{2(m^2-2)}} = \frac{m}{\sqrt{2(m^2-2)}}$$

dir. O halde M, $(\mathbb{R}^4, \Phi, \langle , \rangle)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun $\theta = \cos^{-1}(\frac{m}{(2(m^2-2))^{1/2}})$; $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ slant açılı bir slant yüzeyidir.

Örnek 5.1.9. $\mathbb{R}^5$ de

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (B_m x_1, B_m x_2, \bar{B}_m x_3, \bar{B}_m x_4, B_m x_5)$$

ile verilen hemen hemen poly-Norden yapı ve g usual metriğini gözönüne alalım.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$
$$(u,v,w) \longrightarrow \varphi(u,v) = (u\cos\theta, u\sin\theta, v, w, 0)$$

ile tanımlanan $M_1 = \varphi(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^5$ altmanifoldu için

$$U_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0,0,0),$$
$$U_2 = (0,0,1,0,0),$$
$$U_3 = (0,0,0,1,0),$$

olmak üzere $TM_1 = Sp\{U_1, U_2, U_3\}$ dır. Burada

$$\varphi U_1 = (B_m \cos\theta, B_m \sin\theta, 0,0,0) = B_m U_1$$
$$\varphi U_2 = (0,0,\bar{B}_m, 0,0) = \bar{B}_m U_2$$
$$\varphi U_3 = (0,0,0,\bar{B}_m, 0) = \bar{B}_m U_3$$

olduğundan M_1 altmanifoldu $(\mathbb{R}^{\mathbf{5}}, \Phi, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldun bir $3-$ boyutlu invaryant altmanifoldu olur.

Şimdi

$\psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

$(u,v) \longrightarrow \psi(u,v) = (\bar{B}_m u\, cos\,\theta, \bar{B}_m v\, cos\,\theta, B_m u\, sin\,\theta, B_m v\, cos\,\theta, 0)$

ile tanımlanan $M_2 = \psi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^5$ altmanifoldu için

$$V_1 = (\bar{B}_m \cos\theta, 0, B_m \sin\theta, 0,0)$$
$$V_2 = (0, \bar{B}_m \cos\theta, 0, B_m \sin\theta, 0)$$

olmak üzere $TM_2 = Sp\{V_1, V_2\}$ dir. Buradan

$$\Phi V_1 = (\cos\theta, 0, \sin\theta, 0,0),$$
$$\Phi V_2 = (0, \cos\theta, 0, \sin\theta, 0)$$

ve

$$g(\Phi V_1, V_1) = \bar{B}_m \cos^2\theta + B_m \sin^2\theta = g(\Phi V_2, V_2),$$
$$\|V_1\| = \sqrt{\bar{B}_m{}^2 \cos^2\theta + B_m{}^2 \sin^2\theta} = \|V_2\|,$$
$$\|\Phi V_1\| = \|\Phi V_2\| = 1$$

olmak üzere

$$\frac{g(\Phi V_1, V_1)}{\|V_1\|\|\Phi V_1\|} = \frac{\bar{B}_m \cos^2\theta + B_m \sin^2\theta}{\sqrt{\bar{B}_m{}^2 \cos^2\theta + B_m{}^2 \sin^2\theta}} = \frac{g(\Phi V_2, V_2)}{\|V_2\|\|\Phi V_2\|}$$

elde edilir. Böylece M_2, $(\mathbb{R}^5, \Phi, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun

$$\cos t = \frac{\bar{B}_m \cos^2\theta + B_m \sin^2\theta}{\sqrt{\bar{B}_m{}^2 \cos^2\theta + B_m{}^2 \sin^2\theta}}$$

açılı 2-boyutlu bir slant altmanifoldu olur.

5.2. Nijenhuis Tensör Alanı ve Normallik

Tanım 5.2.1. $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu olsun. Eğer $\widetilde{\Phi}$ nın her $X,Y\in\Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$N_{\widetilde{\Phi}}(X,Y)=\left[\widetilde{\Phi}X,\widetilde{\Phi}Y\right]+\widetilde{\Phi}^2[X,Y]-\widetilde{\Phi}\left[\widetilde{\Phi}X,Y\right]-\widetilde{\Phi}\left[X,\widetilde{\Phi}Y\right],$$

ya da denk olarak

$$N_{\widetilde{\Phi}}(X,Y)=\left(\tilde{\nabla}_{\widetilde{\Phi}X}\widetilde{\Phi}\right)(Y)-\left(\tilde{\nabla}_{\widetilde{\Phi}Y}\widetilde{\Phi}\right)(X)-\widetilde{\Phi}\left[\left(\tilde{\nabla}_X\widetilde{\Phi}\right)(Y)-\left(\tilde{\nabla}_Y\widetilde{\Phi}\right)(X)\right],$$

şeklinde tanımlanan $N_{\widetilde{\Phi}}$ Nijenhuis tensör alanı sıfır ise $\widetilde{\Phi}$ hemen hemen poly-Norden yapısına integrallenebilirdir denir. Açıktır ki $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olmak üzere, hemen hemen poly-Norden yapı $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonuna göre paralel ise $N_{\widetilde{\Phi}}=0$ olur.

$(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$, $(n+k)$-boyutlu bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\widetilde{M}$ nın üzerinde tanımlı olan hemen hemen poly-Norden yapının M üzerine indirgediği $\sum=\left(f,g,v_\beta,\varsigma_\beta,\theta_{\beta\gamma}\right)$ yapısını göz önüne alalım.

Tanım 5.2.2. $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ bir hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldu ve (M,g) de $\widetilde{M}$ nın boyut farkı k olan bir altmanifoldu olsun. Eğer

$$N_f=2\sum_{\alpha=1}^{k}dv_\alpha\otimes\varsigma_\beta$$

ise bu durumda M üzerine indirgenmiş $\sum$ yapısına normaldir denir.

Teorem 5.2.3. $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ bir poly-Norden Riemann manifoldu ve (M,g) de $\widetilde{M}$ nın boyut farkı k olan bir altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$N_f(X,Y)=\sum_{\beta=1}^{k}\left[g\left(X,\varsigma_\beta\right)B_\beta Y-g\left(Y,\varsigma_\beta\right)B_\beta X-g(B_\beta X,Y)\varsigma_\beta\right],$$

$$2dv_\alpha(X,Y)=-g(B_\alpha X,Y)+\sum\left[\sigma_{\alpha\gamma}(X)g\left(Y,\varsigma_\gamma\right)-\sigma_{\alpha\gamma}(Y)g\left(X,\varsigma_\gamma\right)\right],$$

dır. Burada $\alpha\in\{1,2,\dots,k\}$, $A_\alpha=A_{N_\alpha}$ ve $B_\alpha=fA_\alpha-A_\alpha f$ dir.

İspat. $\widetilde{\Phi}$ dan M altmanifoldu üzerine indirgenmiş olan yapıdaki (1,1)-tipli f tensörünün Nijenhuis torsiyon tensörü

$$N_f(X,Y)=\left(\nabla_{fX}f\right)Y-\left(\nabla_{fY}f\right)X-f[(\nabla_X f)Y-(\nabla_Y f)X],$$

olmak üzere

$$(\nabla_X f)Y = \sum_{\beta=1}^{k} (g(wY, N_\beta)A_{N_\beta}X + h_\beta(X,Y)BN_\beta)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$(\nabla_{fX} f)Y = \sum_{\beta=1}^{k} \left(g(wY, N_\beta)A_{N_\beta}fX + h_\beta(fX,Y)BN_\beta\right),$$

$$(\nabla_{fY} f)Y = \sum_{\beta=1}^{k} \left(g(wX, N_\beta)A_{N_\beta}fY + h_\beta(fY,X)BN_\beta\right),$$

$$(\nabla_Y f)X = \sum_{\beta=1}^{k} (g(wX, N_\beta)A_{N_\beta}Y + h_\beta(Y,X)BN_\beta),$$

olur. Bu eşitlikler $N_f(X,Y)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$N_f(X,Y) = \sum_{\beta=1}^{k} \left\{ \begin{matrix} g(wY, N_\beta)A_{N_\beta}fX + h_\beta(fX,Y)BN_\beta \\ -g(wX, N_\beta)A_{N_\beta}fY - h_\beta(fY,X)BN_\beta \\ -fg(wY, N_\beta)A_{N_\beta}X - fh_\beta(X,Y)BN_\beta \\ +fg(wX, N_\beta)A_{N_\beta}Y + fh_\beta(Y,X)BN_\beta \end{matrix} \right\}$$

$$= g(wY, N_\beta)A_{N_\beta}fX + g\left(A_{N_\beta}fX, Y\right)\varsigma_\beta - g(wX, N_\beta)A_{N_\beta}fY$$

$$-g\left(A_{N_\beta}fY, X\right)\varsigma_\beta - fg(wY, N_\beta)A_{N_\beta}X + fg(wX, N_\beta)A_{N_\beta}Y$$

$$= \varsigma_\beta \left\{g\left(A_{N_\beta}fX, Y\right) - g\left(A_{N_\beta}fY, X\right)\right\} + g(Y, \varsigma_\beta)A_{N_\beta}fX$$

$$-g(X, \varsigma_\beta)A_{N_\beta}fY + fg(X, \varsigma_\beta)A_{N_\beta}Y - fg(Y, \varsigma_\beta)A_{N_\beta}X$$

$$= \varsigma_\beta \left\{g\left(A_{N_\beta}fX, Y\right) - g(fA_{N_\beta}X, Y)\right\}$$

$$+g(X, \varsigma_\beta)\left\{A_{N_\beta}fY - fA_{N_\beta}Y\right\} + g(Y, \varsigma_\beta)\left\{A_{N_\beta}fX - fA_{N_\beta}X\right\}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{k} g\left\{\left(A_{N_\beta}f - fA_{N_\beta}\right)(X), Y\right\}\varsigma_\beta + g(Y, \varsigma_\beta)(A_{N_\beta}f - fA_{N_\beta})(X)$$

$$+g(X, \varsigma_\beta)(fA_{N_\beta} - A_{N_\beta}f)(Y)$$

olur. Buradan $B_\beta = fA_\beta - A_\beta f$ ifadesi son eşitlikte yerine yazılırsa

$$N_f(X,Y)=\sum_{\beta=1}^{k}-\left\{g\left(fA_{N_\beta}-A_{N_\beta}f\right)(X),Y\right\}\varsigma_\beta-g(Y,\varsigma_\beta)(fA_{N_\beta}-A_{N_\beta}f)(X)$$

$$+g(X,\varsigma_\beta)(\,fA_{N_\beta}-A_{N_\beta}f)(Y)$$

$$=\sum_{\beta=1}^{k}\left[g\big(X,\varsigma_\beta\big)B_\beta Y-g\big(Y,\varsigma_\beta\big)B_\beta X-g(B_\beta X,Y)\varsigma_\beta\right] \qquad (5.2.1)$$

elde edilir.

Şimdi

$$2dv_\alpha(X,Y)=X\big(v_\alpha(Y)\big)-Y\big(v_\alpha(X)\big)-v_\alpha([X,Y])$$

$$=X\big(g(Y,\varsigma_\alpha)\big)-Y\big(g(X,\varsigma_\alpha)\big)-g([X,Y],\varsigma_\alpha)$$

$$=g(\nabla_X Y,\varsigma_\alpha)+g(Y,\nabla_X\varsigma_\alpha)-g(\nabla_Y X,\varsigma_\alpha)$$

$$-g(X,\nabla_Y\varsigma_\alpha)-g([X,Y],\varsigma_\alpha)$$

$$=g(Y,\nabla_X\varsigma_\alpha)-g(X,\nabla_Y\varsigma_\alpha)$$

olup Önerme 4.2.4 den

$$\nabla_X\varsigma_\alpha=-fA_{N_\alpha}X+\sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\alpha\gamma}A_{N_\gamma}X+\sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\alpha\gamma}\,(X)\varsigma_\gamma,$$

$$\nabla_Y\varsigma_\alpha=-fA_{N_\alpha}Y+\sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\alpha\gamma}A_{N_\gamma}Y+\sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\alpha\gamma}\,(Y)\varsigma_\gamma$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece

$$g(Y,\nabla_X\varsigma_\alpha)-g(X,\nabla_Y\varsigma_\alpha)=g\left(Y,-fA_{N_\alpha}X+\sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\alpha\gamma}A_{N_\gamma}X+\sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\alpha\gamma}\,(X)\varsigma_\gamma\right)$$

$$-g\left(X,-fA_{N_\alpha}Y+\sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\alpha\gamma}A_{N_\gamma}Y+\sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\alpha\gamma}\,(Y)\varsigma_\gamma\right)$$

$$=g\big(X,fA_{N_\alpha}Y\big)-g(Y,fA_{N_\alpha}X)$$

$$+g\left(Y,\sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\alpha\gamma}A_{N_\gamma}X\right)-g\left(X,\sum_{\gamma=1}^{k}\theta_{\alpha\gamma}A_{N_\gamma}Y\right)$$

$$+g\left(Y,\sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\alpha\gamma}\,(X)\varsigma_{\gamma}\right)-g\left(X,\sum_{\gamma=1}^{k}\sigma_{\alpha\gamma}\,(Y)\varsigma_{\gamma}\right)$$

$$=-g(B_{\alpha}X,Y)+\sum_{\gamma=1}^{k}\left[g\left(A_{N_{\gamma}}X,Y\right)-g(A_{N_{\gamma}}Y,X)\right]\theta_{\alpha\gamma}$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{k}\left[g(Y,\varsigma_{\gamma})\sigma_{\alpha\gamma}(X)-g(X,\varsigma_{\gamma})\sigma_{\alpha\gamma}(Y)\right]$$

olur. Buradan

$$2dv_{\alpha}(X,Y)=-g(B_{\alpha}X,Y)+\sum_{\gamma=1}^{k}\left[\sigma_{\alpha\gamma}(X)g(Y,\varsigma_{\gamma})-\sigma_{\alpha\gamma}(Y)g(X,\varsigma_{\gamma})\right]$$

elde edilir.

Teorem 5.2.4. $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ bir poly-Norden Riemann manifoldu ve (M,g) de $\widetilde{M}$ nın boyut farkı k olan bir altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$N_{f}(X,Y)-2\sum_{\gamma=1}^{k}dv_{\alpha}(X,Y)\varsigma_{\gamma}=\sum_{\beta=1}^{k}\left[g(X,\varsigma_{\beta})B_{\beta}Y-g(Y,\varsigma_{\beta})B_{\beta}X\right]$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{k}\left[\sigma_{\alpha\gamma}(X)g(Y,\varsigma_{\beta})-\sigma_{\alpha\gamma}(Y)g(X,\varsigma_{\beta})\right] \tag{5.2.2}$$

dir.

Eğer M üzerindeki indirgenmiş $\sum$ yapısı normal ve M nin normal konneksiyonu $\nabla^{\perp}$ sıfır (veya denk olarak $\sigma_{\alpha\gamma}=0$) ise Teorem 5.2.3 den

$$\sum_{\beta=1}^{k}\left[g(X,\varsigma_{\beta})B_{\beta}Y-g(Y,\varsigma_{\beta})B_{\beta}X\right]=0$$

yazılır. Burada $B_{\beta}=fA_{\beta}-A_{\beta}f$ olduğundan

$$\sum_{\beta=1}^{k}\left[g(X,\varsigma_{\beta})(fA_{\beta}-A_{\beta}f\,)(\mathrm{Y})\right]=\sum_{\beta=1}^{k}\left[g(Y,\varsigma_{\beta})(fA_{\beta}-A_{\beta}f\,)(\mathrm{X})\right] \tag{5.2.3}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.5. $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ bir poly-Norden Riemann manifoldu ve (M,g) de $\widetilde{M}$ nın boyut farkı k olan bir altmanifoldu olsun. Eğer normal konneksiyon $\nabla^{\perp}$, normal demet

$T^{\perp}M$ üzerinde sıfır ve indirgenmiş tensör f, A_{α} ile bağdaşabilir ise M altmanifoldu üzerine indirgenmiş $\sum$ yapısı normaldir.

Önerme 4.2.10 den bir $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ hemen hemen poly-Norden Riemann manifoldunun bir invaryant M altmanifoldu üzerine indirgenmiş $\sum$ yapısının invaryant altmanifold üzerinde doğurduğu $\ominus = \left(\theta_{\beta\gamma}\right)_{k\times k}$ matrisinin bir hemen hemen poly-Norden matris olduğunu yani $\ominus^2 = m \ominus - I_k$ eşitliğini sağladığını biliyoruz.

Tersine $\ominus = \left(\theta_{\beta\gamma}\right)_{k\times k}$ bir hemen hemen poly-Norden matris olsun. Bu durumda

$$\sum_{\gamma=1}^{r} \theta_{\beta\lambda}\theta_{\lambda\gamma} = m\,\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}$$

olur. Böylece (4.2.29) eşitliğinden

$$v_{\beta}(fX) = mv_{\beta}(X) - \sum_{\gamma=1}^{k} \theta_{\beta\gamma}\, v_{\gamma}(X)$$

olup (4.2.30) dan

$$\begin{aligned} v_{\beta}(\varsigma_{\gamma}) &= m\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} - \sum_{\lambda=1}^{r} \theta_{\beta\lambda}\theta_{\lambda\gamma} \\ &= m\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} - m\theta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $f^2X = mfX - X$ olduğunu gösterir. Ayrıca (4.2.28) den $w = 0$ olduğundan $\widetilde{\Phi}X = fX$ olur. O halde M bir invaryant altmanifolddur.

Teorem 5.2.6. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir poly-Norden Riemann manifold ve M de $\widetilde{M}$ nın ek boyutu 2 den büyük $(k \geq 2)$ olan altmanifoldu olsun. Eğer normal konneksiyon $\nabla^{\perp}$, normal demet $T^{\perp}M$ üzerinde sıfır ve M bir non-invaryant altmanifold ise $\{\varsigma_1, \dots, \varsigma_k\}$ vektör alanları lineer bağımsızdır.

İspat.

$$v_{\gamma}(\varsigma_{\beta}) = m\theta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} - \sum_{\lambda=1}^{k} \theta_{\beta\lambda}\theta_{\lambda\gamma} = g(\varsigma_{\gamma}, \varsigma_{\beta})$$

olmak üzere $c_1\varsigma_1 + c_2\varsigma_2 + \cdots + c_k\varsigma_k = 0$ olsun.

$$g(\varsigma_{\gamma}, c_1\varsigma_1 + c_2\varsigma_2 + \cdots + c_k\varsigma_k) = 0$$

$$c_1 g(\varsigma_\gamma, \varsigma_1) + c_2 g(\varsigma_\gamma, \varsigma_2) + \cdots + c_r g(\varsigma_\gamma, \varsigma_k) = 0,$$

ve

$$c_1 g(\varsigma_\gamma, \varsigma_1) = c_1 \Gamma_{1\gamma},$$
$$c_2 g(\varsigma_\gamma, \varsigma_2) = c_2 \Gamma_{2\gamma},$$
$$\vdots$$
$$c_r g(\varsigma_\gamma, \varsigma_k) = c_k \Gamma_{k\gamma},$$

denilirse

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \Gamma_{ij} = 0,$$

lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Burada $i, j \in \{1,2, \dots, k\}$ olmak üzere $i = j$ için

$$\Gamma_{ii} = g(\varsigma_i, \varsigma_i) = m\theta_{ii} - \delta_{ii} - \sum_{\lambda=1}^{k} \theta_{i\lambda}\theta_{\lambda i}$$
$$= m\theta_{ii} - 1 - \sum_{\lambda=1}^{k} \theta_{i\lambda}^2$$

ve $i \neq j$ için

$$\Gamma_{ij} = g(\varsigma_i, \varsigma_j) = m\theta_{ij} - \sum_{\lambda=1}^{k} \theta_{i\lambda}\theta_{\lambda j}$$

dir. Yukarıdaki lineer homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\mathcal{A} = m \ominus - I_k - \ominus^2,$$

matrisinin determinantıdır. M non-invaryant olduğu için $det\mathcal{A} \neq 0$ dır. O halde lineer homojen denklem sisteminin bir tek çözümü vardır o da aşikar çözümdür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.7. $(\widetilde{M}, \widetilde{\Phi}, g)$ bir poly-Norden Riemann manifold ve M de $\widetilde{M}$ nın ek boyutu 2 den büyük $(k \geq 2)$ olan altmanifoldu olsun. Eğer normal konneksiyon $\nabla^{\perp}$, normal demet $T^{\perp}M$ üzerinde sıfır ve M bir non-invaryant altmanifold ise M üzerine indirgenmiş $\sum$- hemen hemen poly-Norden Riemann yapısının normal olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ için (1,1)-tensör alanı f nin her Weingarten operatörü A_α ile bağdaşabilir (yani $fA_\alpha = A_\alpha f$) olmasıdır.

İspat. ($\Longrightarrow$) M üzerine indirgenmiş $\sum$ yapısı normal olsun. Eğer $\nabla^{\perp}= 0$ (denk olarak $\sigma_{\alpha\beta} = 0$) ise

$$\sum g(X,\varsigma_\alpha)B_\alpha Y = \sum g(Y,\varsigma_\alpha)B_\alpha X$$

eşitliğinden,

$$\sum g(X,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha Y,Z) = \sum g(Y,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha X,Z)$$

yazılabilir. Buradan Y yerine Z alınırsa

$$\sum g(X,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha Z,Y) = \sum g(Z,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha X,Y)$$

elde edilir. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanır ve B_α nın skew-simetrikliği kullanılırsa

$$\sum g(Y,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha X,Z) + \sum g(Z,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha X,Y) = 0$$

olur. Ayrıca

$$\sum g(Y,\varsigma_\alpha)B_\alpha X + g(B_\alpha X,Y)\varsigma_\alpha = 0$$

olmak üzere bu eşitlikte X yerine Y alınırsa

$$\sum g(X,\varsigma_\alpha)B_\alpha Y + g(B_\alpha Y,X)\varsigma_\alpha = 0$$

yazılır. Böylece son iki eşitliğin toplamından

$$\sum g(Y,\varsigma_\alpha)B_\alpha X + \sum g(X,\varsigma_\alpha)B_\alpha Y = 0$$

$$\sum g(Y,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha X,Z) + \sum g(X,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha Y,Z) = 0$$

$$2\sum g(X,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha Y,Z) = 0$$

$$g(Y,\varsigma_\alpha)g(B_\alpha X,Z) = 0$$

elde edilir. Eğer M, bir $(\widetilde{M},\widetilde{\Phi},g)$ poly-Norden Riemann manifoldunun $k \geq 2$ ek boyutlu bir non-invaryant altmanifoldu ve normal konneksiyon $\nabla^{\perp}$ normal demet $T^{\perp}(M)$ üzerinde sıfır ise son lemmadan her $x \in M$ için lineer bağımsız $\{\varsigma_1, \dots, \varsigma_k\}$ vektör alanları elde edilir. Bu durumda $k \leq n$ olur. Böylece bir $Y \in \mathcal{X}(M)$ vektör alanı vardır öyle ki bu vektör alanı $\{\varsigma_1, \dots, \varsigma_r\} - \{\varsigma_\alpha\}$ tarafından gerilen uzayda ortogonaldir ve $g(Y,\varsigma_\alpha) \neq 0$ dır. Bundan dolayı $B_\alpha X = 0$ elde ederiz öyle ki her $\alpha \in \{1,2, \dots, k\}$ için $fA_\alpha = A_\alpha f$ dir. $k = 1$ için $g(Y,\varsigma)BX = 0$ elde edilir. Burada $B =$

$fA - Af$ dir. $Y = \varsigma$ için $g(\varsigma, \varsigma)BX = 0$ dır. M non-invaryant altmanifold olduğundan $g(\varsigma, \varsigma) \neq 0$ dır ve $X \in \mathcal{X}(M)$ için $BX = 0$ elde edilir. Denk olarak $fA = Af$ dir.

($\Leftarrow$) Tersinin ispatı Teorem 5.2.4 den açıktır.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, 2018 yılında tanımlanmış olan hemen hemen poly-Norden metrik manifoldların invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları göz önüne alınarak slant altmanifoldları ilk kez tanıtılmış ve geometrik özellikleri verilmiştir. Ayrıca hemen hemen poly-Norden metrik manifoldların altmanifoldları üzerine indirgenmiş yapının normal olması için gerek ve yeter şartlara ulaşılmıştır.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar bu tez çalışmasında elde edilen sonuçları kullanarak hemen hemen poly-Norden metrik manifoldların değişik tipteki altmanifoldlarını tanımlayarak geometrik özelliklerini inceleyebilirler.

KAYNAKLAR

[1] V.W. de Spinadel, *The family of metalilic means*, Vis., Math., 1999.

[2] V.W. de Spinadel, "On characterization of the onset to chaos", *Chaos, Solitions and Fractals*, vol. 8, no. 10, pp. 1631-1643, 1997.

[3] V.W. de Spinadel, "The metalilic means family and multifractal spectra", *Nonlinear Anal. Ser. B: Real World Appl.*, vol. 36, no. 6, pp. 721-745, 1999.

[4] M. Crasmareanu ve C. E. Hretcanu, "Golden Diferensiyel Geometry", *Chaos, Solitions and Fractal*, vol. 38, no. 5, pp. 1229-1238, 2008.

[5] C.E. Hretcanu ve M. Crasmareanu,"Metallic structures on Riemannian manifolds", *Revista de la Union Matematica Argentina*, vol. 54, no. 2, pp. 15-27, 2013.

[6] C.E. Hretcanu and M. Crasmareanu, "Applications of the Golden Ratio on Riemannian manifolds", *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 33, no. 2, pp. 179-191, 2009.

[7] C.E. Hretcanu ve M. Crasmareanu, "On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure", *Analele Stiintifice Ale Universitatii Al.I. Cuza Dın Iasi (S.N.) Matematica*, vol. 53, pp. 199-211, 2007.

[8] F.E. Erdoğan ve C. Yıldırım, "On a study of the totally umbilical semi-invariant submanifolds of golden Riemannian manifolds", *Journal of Polytechnic*, vol. 21, no.4, pp. 967-970, 2018.

[9] F.E. Erdoğan ve C. Yıldırım, "Semi-invariant submanifolds of golden Riemannian manifolds", in *II. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences-AIP Conference Proceedings*, 1833, 2017.

[10] A. Gezer, N. Cengiz ve A. Salimov, "On integrability of golden Riemannian structures", *Turkish Jornal of Mathematics*, vol. 37, no. 4, pp. 693-703, 2013.

[11] M. Gök, S. Keleş ve E. Kılıç, "Some Characterizations of Semi-Invariant Submanifolds of Golden Riemannian Manifolds", *Mathematics*, vol. 7, no. 12, pp. 1209, 2019.

[12] N.Ö. Poyraz ve E. Yaşar, "Lightlike hypersurfaces of a golden semi-Riemannian manifold", *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 14, no. 5. pp. 20, 2017.

[13] N. Poyraz and E. Yaşar "Lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds", *Journal of Geometry and Physics*, vol. 141, pp. 92-104, 2019.

[14] A.M. Blaga ve C.E. Hretcanu, "Invariant, anti-invariant and slant submanifolds of a metallic Riemannian manifold", *Novi Sad Journal of Mathematics*, vol. 48, no. 2, pp. 57-82, 2018.

[15] C.E. Hretcanu ve A.M. Blaga, "Submanifolds in metallic Riemannian manifolds", *Differential Geometry-Dynamical Systems*, vol. 20, pp. 83-97, 2018.

[16] C.E. Hretcanu ve A.M. Blaga, "Slant and semi-slant submanifolds in metallic Riemannian manifolds", *Journal of Function Spaces*, article ID 2864263, 13 pages, 2018.

[17] F.E. Erdoğan, "Transversal lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian manifolds", *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 6, pp. 3133-3148, 2018.

[18] B.E. Acet, "Lightlike hypersurfaces of metallic semi-Riemannian manifolds", *Int. J. Geom.Methods in Mod. Phys.*, DOI:10.1142/S0219887818502018, 2018.

[19] S. Kalia, "The generalizations of the Golden ratio: their powers, continued fractions",andconvergents.http://math.mit.edu/research/highschool/primes/papers.pp.

[20] A.P. Stachov ve B. Rozin, "The golden algebraic equations", *Chaos, Solitions and Fractals*, vol. 27, no. 5, pp. 1415-1421, 2006.

[21] M.S. El Naschie, "Average symetry, stability and ergodicty of multidimensional Cantor sets", *II Nuovo Cimento* 109 B, pp. 149-157, 1994.

[22] M.S. El Naschie, "Silver mean Hausdorf dimension and Cantor sets", *Chaos, Solitions and Fractals*, vol. 3, pp. 1861-1870, 1994.

[23] M.S. El Naschie, "On the universal behavior and statistical mechanics of multidimensional triadic Cantor sets", *System Analysis Modelling Simulation*, vol. 11, pp. 217-225, 1993.

[24] M.S. El Naschie, "Superstring Knots and non-commutative geometry in E(1) space", *Int. J. Theoret. Phys.*, vol. 37, no. 12, pp. 2935-2951, 1998.

[25] B. Şahin, "Almost Poly-Norden Manifolds", *International Journal of Maps in Mathematics*, vol. 1, pp. 68-79, 2018.

[26] S.Y. Perktaş, "Submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds", *Turk. J. Math.*, vol. 44, pp. 31- 49, 2020.

[27] K. Yano ve M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Sci. Publishing Co. Ptc. Ltd. pp. 508, 1984

[28] B. Şahin, *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel Yayınları, 2012.

[29] T. Kosy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, 652s., Canada, 2001.

[30] A.P. Norden, "On a certain class of four-dimensional A-spaces", *Iz. VUZ*, vol. 4, pp. 145-157, 1960.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Vildan AYHAN

Doğum Yeri : Adıyaman

Doğum Tarihi : 27/11/1989

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : t.vildanayhan@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Geometri	Adıyaman Üniversitesi	-
Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2013
Lise	Sayısal	Adıyaman Lisesi	2007