T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN İTERASYON ŞEMALARININ SABİT NOKTAYA YAKLAŞIMI

ABDULHAMİT EKİNCİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2020

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN İTERASYON ŞEMALARININ SABİT NOKTAYA YAKLAŞIMI

Abdulhamit EKİNCİ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 23/10/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Seyit TEMİR
Danışman

Prof.Dr. Aydın İZGİ
Üye

Doç.Dr.Faik GÜRSOY
Üye

Doç. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BANACH UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN İTERASYON ŞEMALARININ SABİT NOKTAYA YAKLAŞIMI

Abdulhamit EKİNCİ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Yıl : 2020, Sayfa sayısı: 55

Jüri : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Prof. Dr. Aydın İZGİ
Doç. Dr. Faik GÜRSOY

Bu tezde genişlemeyen ve Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalara yakınsaklıklarını incelemek için yeni iterasyon şeması sunulmaktadır. Bunun yanında sunulan iterasyon sürecinin genişlemeyen ve Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlanmaktadır. Yeni iterasyon sürecinin etkinliğini görmek için nümerik örnek verilmektedir. Ayrıca *(C)* şartını sağlayan dönüşümlerin örnekleri verilmekte ve mevcut iterasyon süreçleri ile yeni sunulan iterasyonun yakınsaklığı nümerik olarak karşılaştırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Genişlemeyen Dönüşüm, Düzgün Konveks Banach uzayı, Suzuki Genelleşmiş Genişlemeyen Dönüşüm, Sabit Nokta, İterasyon Şemaları

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATING FIXED POINTS FOR NONEXPANSIVE MAPPINGS OF ITERATIVE SCHEMES IN BANACH SPACES

Abdulhamit EKİNCİ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Seyit Temir
Year : 2020 , Number of pages: 55

Jury : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Prof. Dr. Aydın İZGİ
Assoc. Prof. Dr. Faik GÜRSOY

The purpose of this thesis is to introduce a new iteration scheme for approximations of fixed points of the nonexpansive mappings and Suzuki generalized nonexpansive mappings. We also prove weak and strong theorems for nonexpansive mapping and Suzuki generalized nonexpansive mappings using our iteration process. Numerical example is given to show the efficiency of new iteration process. We also provide examples of mappings satisfying condition *(C)* and numerically compare the convergence of the proposed iteration process with the existing processes.

Key Words: Nonexpansive Mapping**,** Uniformly Convex Banach Spaces, Suzuki Generalized Nonexpansive Mapping, Fixed Point, Iteration Schemes

BEYAN

“Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümler için iterasyon şemalarının sabit noktaya yaklaşımı” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Abdulhamit EKİNCİ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, bana her şekilde destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Seyit TEMİR'e en içten duygularımla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

(X, d) : Metrik uzay

$d(A)$: A kümesinin çapı

$B(x_0, r)$: x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar

$\bar{B}(x_0, r)$: x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar

$S(x_0, r)$: x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi

$(X, \|\cdot\|)$: Normlu uzay

R_A : Sınırlı A kümesi

$r_\alpha(\cdot, \{x_n\})$: $\{x_n\}$ dizisinin kümeye göre asimptotik çapı

$Z_\alpha(\cdot, \{x_n\})$: $\{x_n\}$ dizisinin kümeye göre asimptotik merkezi

$F(T)$: T'nin sabit noktalarının kümesi

1. GİRİŞ

"Sabit Nokta Teorisi" çalışmaları 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Matematikte sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemde çözümün varlığını göstermek amacıyla kurulmuştur. Sabit nokta teorisi, mühendislik, ekonomi, kimya ve tıp gibi farklı alanlarda uygulamaları olduğunda çoğu problemi çözmek için faydalı sağladığında literatürde büyük bir öneme sahiptir.

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoridir.

Bununla birlikte, bazı dönüşümlerin bir sabit noktasının varlığını ve sabit noktanın değerinin bulunması kolay olmadığından bunları hesaplamak için iterasyon metotları kullanılmaktadır. Bununla ilgili birçok iterasyon süreçleri geliştirilmiştir. En bilinen Banach büzülme teoremi sabit noktaların yaklaşımı için Picard iterasyon[19] sürecini kullanır. Diğer bilenen iterasyon süreçleri Mann [16], Ishikawa[11], Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve Nazir[1], Thakur ve ark.[24,25].

Rhoades [20], azalan fonksiyonlar için Mann iterasyon sürecinin Ishikawa[11] iterasyon sürecinden daha hızlı olduğunu, artan fonksiyonlar için tersi durumun söz konusu olduğundan bahsetmektedir. Bazı yazarlar ise büzülme dönüşümleri için Agarwal ve ark.[2] , Picard iterasyon süreçlerinin Mann iterasyon sürecinden daha iyi olduğunu gözlemlemişlerdir. [1] de (6) ile verilen Abbas ve Nazir 'ın iterasyon metodunun, (5) ile verilen Agarwal ve ark.[2] iterasyon metodundan daha hızlı olduğu incelenmiştir. Thakur ve ark. [24,25] genişlemeyen dönüşümlerin ve Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasını bulmak için yeni geliştirilmiş iterasyon süreçleri oluşturmuşlardır. Bu iterasyon sürecinin literatürde bilinen

Mann[16], Ishikawa[11], Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve Nazir[1] iterasyon süreçlerinden daha hızlı olduğu nümerik örneklerle vermişlerdir.

Bu tezde, Bulgular ve Tartışma bölümünün 1. kısmında yeni sunulan iterasyon süreci (10) yardımıyla genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yakınsaklığı incelenmektedir. Alınan örnekle bu iterasyon sürecinin Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve Nazir [1] , Thakur ve ark. [24,25] ın sunduğu iterasyon süreçlerinden daha hızlı sabit noktaya yaklaştığı nümerik olarak gösterilmektedir. Ayrıca bu bölümün 2. kısmında ise 1. kısımda çalışılan (10) iterasyon süreci yardımıyla genişlemeyen dönüşümleri kapsayan Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin özellikleri incelenmekte ve çalışılan (10) iterasyon süreci yardımıyla Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yakınsaklıkları araştırılmaktadır. Ayrıca genişlemeyen dönüşüm olmayan ancak Suzuki (C) koşulunu sağlayan dönüşümlerin nümerik örnekleri verilmektedir. Alınan örneklerle bu iterasyonun, Thakur ve ark. [25] ın ve Ullah ve Arshad [26] ın sunduğu iterasyon süreçlerinden daha hızlı sabit noktaya yaklaştığı nümerik olarak gösterilmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Birçok lineer olmayan denklemleri sabit nokta problemleri ile çözümlenmektedir. Sabit nokta teorisi literatürde mühendislik, ekonomi vs. farklı alanlarında uygulamaya sahip birçok problemi çözmek için fayda sağlamaktadır.

Bazı dönüşümlerin sabit noktasının varlığı belirlendikten sonra bu sabit noktanın değerini bulmak kolay değildir. Bu yüzden bunları hesaplamak için iterasyon süreçleri kullanılır. Birçok iterasyon süreci geliştirilmiş ve hepsini kapsaması imkansızdır.

Sabit nokta iterasyonu için standart sonuç Banach büzülme teoremidir. İyi bilinen Banach büzülme teoremi, sabit noktaların yaklaşımı için Picard[19] (1) iterasyon süreci kullanılmıştır.

1955'te Krasnoselskii[12], genişlemeyen T dönüşümü için Picard iterasyon (1) sürecinin T'nin tek bir sabit noktası olsa bile T'nin sabit noktasına yakınsamayabileceğini gösterdi. Ancak $\forall n \geq 1$ $\alpha_n = \frac{1}{2}$ için Mann iterasyon dizisinin T'nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Mann iterasyonu (2), Ishikawa iterasyonu (3), Noor iterasyon (4) metotları genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaması problemi literatürde çok çalışılmıştır.

2007'de Agarwal ve ark.[2] yeni iterasyon tanımlayıp bu iterasyonun büzülme dönüşümleri için Mann iterasyonundan daha hızlı ve Picard[19] iterasyonu ile aynı oranda yakınsadığını göstermişlerdir. Abbas ve Nazir[1] ise elde ettikleri iterasyonun Agarwal ve ark.[2]' nın sunduğu iterasyondan daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir. Thakur ve ark. [24,25] genişlemeyen dönüşümlerin ve Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasını bulmak için yeni geliştirilmiş (7) ve (8) iterasyon süreçleri oluşturmuşlardır. [24] de Berinde [5] anlamında daralma dönüşümleri için yeni elde edilen (7) iterasyon sürecinin literatürde bilinen Mann[16], Ishikawa[11], Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve Nazir [1] iterasyon süreçlerinden daha hızlı olduğu gösterilmiş ve ayrıca (7) iterasyonu kullanılarak genişlemeyen dönüşümler için zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlanmıştır. Bununla birlikte nümerik örnekler verilerek (7) iterasyonunun davranışı Mann[16], Ishikawa[11], Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve Nazir[1] iterasyon süreçlerine göre karşılaştırılmıştır.

Suzuki [23], 2008'de genişlemeyen dönüşümlerin daha zayıf ve quasi genişlemeyen dönüşümden daha kuvvetli olan yeni dönüşüm oluşturarak genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü tanımlamıştır. Bu koşulu sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve yakınsaklık teoremleri ispatlamıştır.

Thakur ve ark.[25] de yeni elde edilen (8) iterasyon sürecinin Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı için literatürde bilinen Mann[16], Ishikawa[11], Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve Nazir [1] iterasyon süreçlerinden daha hızlı olduğu nümerik örnekle gösterilmiş ve (8) iterasyonu kullanılarak Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlanmıştır.

Ullah ve Arshad [26] da yine yeni elde edilen (9) iterasyon sürecinin Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı için literatürde bilinen Mann[16], Ishikawa[11], Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve Nazir[1] ve Thakur ve ark.[25] iterasyon süreçlerinden daha hızlı olduğu nümerik örnekle gösterilmiş ve (9) iterasyonu kullanılarak Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlanmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir

3.1 Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1.

X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna, her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x,y) \geq 0$

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir metrik adı verilir. (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 3.1.2.

Bir (X,d) metrik uzayı ile bu uzayın bir x_0 noktası ve pozitif bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B}(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 3.1.3.

X bir metrik uzay ve A bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının A kümesine uzaklığı bu noktanın A nın tüm noktalarına uzaklıklarının infimumudur.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Tanım 3.1.4.

X bir metrik uzay ve A ile B birer alt kümesi olsun. İki A ve B kümesinin birbirine uzaklığı, $x \in A$ ve $y \in B$ için

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

dir. Bu tanımda $d(A, B) = d(B, A)$ olduğu açıktır.

İki küme arasındaki uzaklığın sıfır olmasının bu kümelerin aynı olduğunu ifade etmediği açıktır.

Tanım 3.1.5.

X bir metrik uzay ve A bir alt kümesi olsun. $x, y \in A$ için bir A alt kümesinin çapı,

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1.6. (Yakınsak Dizi)

(X, d) bir metrik uzay (x_n), X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsak ve x e de dizinin limiti denir. (x_n) dizisi yakınsak ve limiti x ise bu, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \longrightarrow x$ veya $n \longrightarrow \infty$ için $x_n \longrightarrow x$ sembollerinde biri ile ifade edilir. (x_n) yakınsak değilse (x_n) ye ıraksak denir.

Teorem 3.1.7.

(X, d) bir metrik uzay, A, X in boş olmayan bir alt cümlesi ve $\bar{A}, A$ nın kapanışı olsun.

1) $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \longrightarrow x$ olacak şekilde A da bir (x_n) dizisi olmasıdır.

2) A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $x_n \in A$ ve $x_n \longrightarrow x$ olması halinde $x \in A$ olmasıdır. [4]

Tanım 3.1.8. (Cauchy dizisi ve Tamlık)

$X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi (veya esas dizi) denir. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \longrightarrow x \in X$ metrik uzayına tam denir.

Örnek 3.1.9.

$\mathbb{R}$ deki mutlak değer metriğine göre $\mathbb{R} - \{x\}$ ve (a, b) aralığı tam değildir. Aynı zamanda $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cümlesi de tam değildir. Çünkü

$$1, 1.4, 1.41, \ldots, \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

(X, d) metrik uzayı tam olma olmayabileceğinden (2.36) şartı yakınsaklık için yeter bir şart olmayabilir. Mesela $X = (0,1]$ uzayında $d(x, y) = |x - y|$ metriğini düşünelim. X de $x_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Çünkü $m, n \longrightarrow \infty$ iken $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \rightarrow 0$ dır. Fakat yakınsak değildir. Çünkü dizinin yakınsamak istediği 0 noktası X e ait değildir.

Her ne kadar (3.1) şartı yakınsaklık için yeterli değilse de gerekli bir şarttır. Aşağıdaki teorem bu hususla ilgilidir.

Teorem 3.1.10.[4]

(X, d) metrik uzay olsun. Bu takdirde

1) (X, d) de yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

2) (X, d) de her Cauchy dizisi sınırlıdır.

3) (x_n) ve (y_n) Cauchy dizisi ise $(d((x_n, y_n))$ reel dizisi yakınsaktır.

Tanım 3.1.11. (Kompaktlık)

X metrik uzay olsun. X deki her bir dizi yakınsak alt diziye sahipse X'e kompakt denir. X'in A alt kümesi X'in bir alt uzayı olarak kompakt ise yani A daki her bir dizi A'da yakınsak bir alt diziye sahipse A ya da kompakt denir.

3.2. Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 3.2.1.

X bir lineer uzay olsun. $N: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \boldsymbol{F}$ için

N1) $N_{(x)} \geq 0$ ve $N_{(x)} = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $N_{(\alpha \cdot x)} = |\alpha| \cdot N_{(x)}$

N3) $N_{(x+y)} = N_{(x)} + N_{(y)}$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme norm ve üzerinde bir norm tanımlanmış olan X lineer uzayına da normlu lineer uzay denir. Genel olarak, N norm dönüşümü yerine $\|\cdot\|$ sembolü kullanılır.

X normlu bir lineer uzay olmak üzere,

$d: X \times X \to \mathbb{R};\ d(x, y) = \|x - y\|$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır [13,14].

Tanım 3.2.2.

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayının alt kümesi A olsun. Eğer

$R_A = \sup\{\|x - y\| : x \in A, y \in A\} < \infty$

oluyorsa A kümesine X içinde sınırlı küme denir.

Tanım 3.2.3.

$(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.2.4.

$(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir[14].

Tanım 3.2.5.

$(X, \| \cdot \|)$ bir normlu lineer uzay ve bu uzay içinde bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n, m$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.2.6. Tam Normlu Uzay (Banach Uzayı)

Bir (X, ‖ . ‖) normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu (X,‖.‖) normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 3.2.7. (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç çarpım Uzayı)

X, **F** cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle\ \rangle : X \times X \to \mathbf{F}$ fonksiyonu

$\dot{I}_1$. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$\dot{I}_2$. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

$\dot{I}_3$. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$\dot{I}_4$. $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, iç çarpım fonksiyonu denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı lineer uzaya iç çarpım uzayı denir ve $(X, \langle\,\rangle)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.2.8. (Hilbert Uzayı)

X bir iç çarpım uzayı ve $\|.\|$ iç çarpım normu olsun. $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ olarak tanımlanırsa (X,d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X e Hilbert uzayı denir. Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

Tanım 3.2.9.$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu lineer uzaylar, $x_0 \in X$ ve X uzayından Y uzayının içine bir f fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ ya da buna denk olarak $f\left(B(x_0,\delta)\right) \subset B\left(f(x_0),\varepsilon\right)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayının her noktasında sürekli olan f fonksiyonuna X üzerinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 3.2.10. (Konveks Küme)

X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$B = \{z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha)y.\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$ oluyorsa A'ya konveks denir. Burada B'nin uç noktaları x ve y olan (kapalı) bir doğru parçasıdır.

Tanım 3.2.11. (Düzgün Konveks Uzay)

X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ $için$ $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \geq 0$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir.

Teorem 3.2.12.

X Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_x(\varepsilon) > 0$ olmasıdır [3].

Örnek 3.2.13.

Her X Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in X$ için paralelkenar kuralından

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2$$

dir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_x$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x-y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x-y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde, X düzgün konveks bir uzaydır.

Tanım 3.2.14.

X ve Y aynı bir $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \boldsymbol{F}$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$, $T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$

ya da buna denk olarak her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ için $T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(y)$ şartını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer dönüşüm denir. Eğer T dönüşümü yukarıdaki şartlardan herhangi birini gerçeklemezse T dönüşümüne lineer olmayan dönüşüm denir.

Tanım 3.2.15. (Normlu Dual)

X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $\mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $\mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R}) = \{\mathrm{T}: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ lineer ve sürekli $\}$ olsun. Her $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ ve $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{T}_1(\mathrm{x}) + \mathrm{T}_2(\mathrm{x}) \\ \quad (\alpha \mathrm{T}_1)(\mathrm{x}) = \alpha \mathrm{T}_1(\mathrm{x}) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $B(X,\mathbb{R})$ bir lineer uzaydır. Bu $B(X,\mathbb{R})$ uzayına X in normlu duali denir ve X^* ile gösterilir. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.16. (Kuvvetli Yakınsaklık)

X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer;

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

veya kısaca $\mathbf{x_n} \xrightarrow{\mathbf{k}} \mathbf{x}$ ile gösterilir. Burada x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 3.2.17. (Zayıf Yakınsaklık)

X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \xrightarrow{z} x$ veya $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

3.3. Bazı Dönüşüm Sınıfları ve Sabit Nokta Kavramı

Tanım 3.3.1. (Sabit Nokta)

X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer Tx=x olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir. O halde Tx=x denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir.

Örnekler 3.3.2.

1. $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $T: X \to X$, Tx=$\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ için $F(T)$=$\{\sqrt{3}\}$ tür.
2. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ özdeş dönüşümü için X in her noktası sabit bir noktadır.
3. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = \alpha + x$ şeklindeki öteleme dönüşümlerinin sabit noktası yoktur.
4. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 18$ dönüşümü için $F(T) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\}$ tür.
5. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ dönüşümünün sabit noktalarından biri,

$$g\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

dir.

6. Eğer X=$\mathbb{R}$ ve T(x) = x^2+5x+4olursa F(T) yi inceleyelim. T(x)= x olmak üzere T(x) = x^2+5x+4=x ise x^2+4x+4=0 $\Rightarrow$ $(x+2)^2$=0 $\Rightarrow$ x=-2 $\Rightarrow$ F(T)={-2}olur.

Tanım 3.3.3.

$\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu 0 da sürekli, artan bir fonksiyon olsun ve $\phi(0) = 0$ koşulunu sağlasın. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar olmak üzere $f: X \to Y$ fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \leq \phi\left(d(x_1, x_2)\right)$$

bağıntısını gerçeklerse ϕ ye f fonksiyonun bir süreklilik modülü adı verilir.

Tanım 3.3.4.

$k>0$ bir sabit olmak üzere süreklilik modülü $\phi(d)=k\cdot d$ şeklinde olan fonksiyonlar Lipschitz sınıfını oluşturur ve her $x_1,x_2\in X$ için

$$d\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)\leq k\cdot d\left(x_1,x_2\right)$$

olduğundan Lipschitz sürekli fonksiyonlar olarak adlandırılır. k sayısına Lipschitz sabiti adı verilir.

Tanım 3.3.5.(Düzgün *L*-Lipschitz dönüşüm)

X Banach uzayı, C , X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü her $x,y\in C$ ve $n\geq 1$ için

$$\left\|T^n x-T^n y\right\|\leq L\left\|x-y\right\|$$

olacak şekilde L>0 sabiti varsa T dönüşümüne düzgün L-Lipschitzian adı verilir.

Tanım 3.3.6.

(X,d) bit metrik uzay olsun ve $f:X\to X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine dönüştürsün. Her $x,y\in X$ nokta çifti ve $0<k<1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için $\rho\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq k\cdot d\left(x,y\right)$ koşulu sağlanıyorsa f ye bir daralma dönüşümü adı verilir. Bir büzülme dönüşümünün Lipschitz sürekli bir fonksiyon olduğu açıktır. k, Lipschitz sabiti bu durumda büzülme sabiti olarak adlandırılır.

Teorem 3.3.7.

Tam metrik uzay üzerinde her büzülme dönüşümü, bir sabit noktaya sahiptir. [14]

İspat: $x_0\in X$ ve $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1,\ x_3=Tx_2,\ \dots,\ x_n=Tx_{n-1},\ \dots$$

x_n dizisine iterasyon dizisi adı verilir.

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \le k \cdot d(x_0, x_1) = k^1 \cdot d(x_0, T(x_0))$$

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \le k \cdot d(x_1, x_2) = k^2 \cdot d(x_0, T(x_0))$$

$$d(x_3, x_4) = d(T(x_2), T(x_3)) \le k \cdot d(x_2, x_3) = k^3 \cdot d(x_0, T(x_0))$$

$\ldots$

$\ldots$

$\ldots$

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \le k \cdot d(x_{n-1}, x_n) = k^n \cdot d(x_0, T(x_0))$$

dir. Herhangi bir m pozitif tam sayısı için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\le k^n d(x_0, T(x_0)) + k^{n+1} d(x_0, T(x_0)) + \ldots + k^{m-1} d(x_0, T(x_0)) \\ &\le (k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1}) \cdot d(x_0, T(x_0)) \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} \cdot d(x_0, T(x_0)) \\ &< \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, T(x_0)) \end{aligned}$$

ve $0 < k < 1$dir.

Bu sebeple $n \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to 0$ dır. Böylece $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. X tam olduğu için $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır. x, T nin sabit bir noktası olsun. Yani $T(x) = x$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\le d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\ &\le d(x, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(x)) \\ &\le d(x, x_n) + k \cdot d(x_{n-1}, x) \end{aligned}$$

$n \to \infty$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğu için $d\left(x,T\left(x\right)\right) \to 0$ dır. Böylece $T\left(x\right) = x$ olur. Yani x, T nin sabit bir noktasıdır.

$T\left(y\right) = y$ olacak şekilde $y \in X$ olsun.

$$d\left(x,y\right) = d\left(T\left(x\right),T\left(y\right)\right) = k \cdot d\left(x,y\right)$$

olur. Eğer $x \neq y$ ise $d\left(x,y\right) > 0$ dır. $c \geq 1$, $0 < c < 1$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki $x = y$ olduğunu gösterir. Böylece tek sabit nokta mevcuttur.

$\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay ve f bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır. Büzülme olmayan dönüşümlerin de sabit noktası vardır, hatta tek olabilir.

Büzülme dönüşüm prensibi Banach uzayları için de benzer şekilde ispat edilir.

Tanım 3.3.8.(Genişlemeyen Dönüşüm)

Lipschitz sabiti $k = 1$ olarak alınırsa bu dönüşüme genişlemeyen dönüşüm adı verilir. Bu tanım aşağıdaki gibi yazılabilir.

X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C$ lineer olmayan dönüşümü her $x, y \in C$ için

$$\left\|T\left(x\right) - T\left(y\right)\right\| \leq \left\|x - y\right\|$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde genişlemeyen dönüşüm denir.

Tanım 3.3.9. (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm)

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme olsun ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in C$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise, T ye qusi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 3.3.10.

X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü, $T(x)=\dfrac{x}{2}+a$, $(a\neq 0)$ şeklinde tanımlansın. O zaman T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten her $x,y\in C$ ve $y\neq 0$ için

$$\|T(x)-T(y)\|=\left\|\frac{x}{2}+a-\left(\frac{y}{2}+a\right)\right\|=\left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|=\frac{\|x-y\|}{2}\leq\|x-y\|$$

dir.

Örnek 3.3.11.

$$T:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad T(x)=\begin{cases}0 & eğer \quad x\neq 2\\ 1 & eğer \quad x=2\end{cases}$$

tanımlansın. Aşikar olarak T, $x=0$ da bir sabit noktaya sahiptir. Eğer $x=1.2, y=2$ alınırsa $\|Tx-Ty\|=1\nless 0.8=\|x-y\|$. T sürekli değildir. Dolayısıyla genişlemeyen dönüşüm de değildir.

Örnek 3.3.12.

T, [0,4] üzerinde bir dönüşüm $T(x)=\begin{cases}0 & eğer \quad x\neq 4\\ 3 & eğer \quad x=4\end{cases}$

tanımlansın. Açık olarak T, $x=0$ da bir sabit noktaya sahiptir. T sürekli değildir. Dolayısıyla genişlemeyen dönüşüm de değildir. Ayrıca $\|T(x)\|\leq\|x\|, \forall x\in[0,4]$ olduğundan, T quasi-genişlemeyen dönüşüm olur.

Örnek 3.3.13.

$T:\ [0,2]\longrightarrow[0,2]$ dönüşümü, $T(x)=\begin{cases}0 & eğer \quad x\neq 2\\ 1 & eğer \quad x=2\end{cases}$

şeklinde tanımlansın. T, quasi genişlemeyen dönüşümdür ancak alışılmış norm altında T dönüşümü sürekli değildir. Açık olarak 0, T' nin tek sabit noktasıdır ve tüm $x \in [0, 2]$ için $|Tx - T0| = |Tx| \leq |x| = |x - 0|$. Bu yüzden, T quasi-nonexpansive genişlemeyen dönüşümdür ancak T, sürekli değildir. Çünkü $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\} \subset [0, 2]$ ve $2 - \frac{1}{n} \to 2$ fakat $T\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 0 \nrightarrow 1 = T(2)$.

Örnek 3.3.14.

$$T: [-1;\ 1] \to [-1;\ 1], Tx = \begin{cases} \frac{2x}{3} \sin\frac{1}{x} & eğer \quad x \neq 0 \\ 0 & eğer \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T sürekli ve quasi genişlemeyen dönüşümdür. Ancak T genişlemeyen dönüşüm değildir.

Açık olarak T süreklidir ve 0, T ‘nin bir tek sabit noktasıdır. Eğer $x \neq 0$ ve $Tx = x$ ise , o zaman $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için $x = \frac{2x}{3} \sin\frac{1}{x}$ olur. Bu da $\sin\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ olması bu mümkün değildir. Çünkü $|Tx - 0| = \frac{2|x|}{3}\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq \frac{2|x|}{3}$. Bü yüzden tüm $x \in [-1,1]$ için $|Tx - 0| < |x - 0|$ olur. Böylece T quasi genişlemeyen dönüşümdür. Bununla birlikte T genişlemeyen dönüşüm değildir. Bunu doğrulamak için $x = \frac{2}{\pi}, y = \frac{2}{3\pi}$ alınsın. O zaman

$$|Tx - Ty| = \frac{2}{3}\left|\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}\right| = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi}\right) = \frac{4}{3\pi}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{9\pi},$$

$|x - y| = \left|\frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi}\right| = \frac{4}{3\pi}$ elde edilir ve $\frac{16}{9\pi} > \frac{4}{3\pi}$ olur. Buradan T'nin genişlemeyen dönüşüm olmadığını görülür.

Böylece quasi genişlemeyen dönüşümler genişlemeyen dönüşümlerden daha geneldir. En az bir sabit noktası olan bir genişlemeyen dönüşüm quasi genişlemeyen dönüşüm olur.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

4.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktaları bulunurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir;

4.1.1. (Picard iterasyonu) [19]:

Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklıkların dizisi (sequence of succesive approximations) olarak da adlandırılır. X bir düzgün konveks Banach uzayı, C de X nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $x \in C$, $n \geq 1$ pozitif tamsayı için

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad (1)$$

$\{x_n\}$ dizisini oluşturalım. (1) ile üretilen diziye Picard iterasyon dizileri denir. 1955 yılında Krasnoselski; T sabit noktaya sahip olsa bile T genişlemeyen dönüşümü için Picard iterasyonunun T nin sabit noktasına yakınsamadığını gösterdi. Ancak $\alpha_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$ için Mann iterasyonun T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsandığını gösterdi.

4.1.2. (Mann iterasyonu) [16]:

1953 yılında Mann[16] tarafından oluşturulmuştur. Banach büzülme teoremini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarının bulunmasında kullanılmıştır. X bir normlu uzay ve C , X'in boştan farklı konveks bir altkümesi, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ olmak üzere Mann iterasyonu aşağıdaki gibi olur;

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \qquad (2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, (0,1)$ aralığında bir dizidir.

4.1.3. (Ishikawa iterasyonu) [11]:

Bu iterasyon 1974 yılında S. Ishikawa [11] tarafından kurulmuş ve Mann iterasyonunun yetersiz kaldığı durumlarda kullanılmak üzere oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt bir altkümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümün sabit bir noktaya kuvvetli yakınsamasını kurmak için kullanıldı.

X Banach uzayı, C, X in konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ olmak üzere

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n$$

$$y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \qquad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$.

Yukarıdaki eşitlikte verilmiş iterasyonda β_n= 0 alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir.

Buna rağmen Mann [16] ile Ishikawa [11] iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur.

4.1.4. (Noor iterasyonu) [17]:

Noor iterasyon metodu 2000 yılında M. A. Noor [17] tarafından kurulmuştur. Bu iterasyon ise, çözümler yineleyen değişik teknikler kullanarak Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu analiz etmiş ve tanıtmıştır. 2000 yılında Noor [17] (0,1) aralığında olan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri için

$$\begin{gathered} x = x_0 \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{gathered} \qquad (4)$$

iterasyon şemasını tanımladı.

4.1.5 (Agarwal ve ark. iterasyonu) [2]:

2007 yılında Agarwal, D. O'Regan, D. R. Sahu [2] $x_0 \in C$ keyfi elemanı ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, (0,1)$ aralığındaki diziler için

$$\left.\begin{array}{r}x = x_0 \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n\end{array}\right\} \tag{5}$$

iterasyon şemasını çalıştılar.

Agarwal, D. O'Regan, D. R. Sahu [2] bu şemanın Picard'ın şeması(1) ile aynı oranda yakınsadığı dönüşümler için Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını gösterdiler.

4.1.6 (Abbas ve Nazir iterasyonu) [1]:

Abbas ve ark. [1], $x_0 \in C, (0,1)$ aralığındaki $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri için

$$\begin{array}{r}x = x_0 \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n \\ y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n\end{array} \tag{6}$$

iterasyon şemasını sundular ve bu iterasyon şemasının Agarwal ve arkadaşları [2]'nın sunduğu iterasyon şemasına göre daha hızlı yakınsadığını gösterdiler.

4.1.7 (Thakur ve ark. iterasyonu) [24]:

Son zamanlarda Thakur ve arkadaşları [24] $x_0 \in C, (0,1)$ aralığındaki $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri için

$$\begin{array}{r}x = x_0 \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)z_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n\end{array} \tag{7}$$

iterasyonunu oluşturdular ve bu iterasyonu kullanarak genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık sonuçlarını ispatladılar. Ayrıca tanımlanan (7) iterasyonun Picard, Mann, Ishikawa, Noor, Agarwal, Abbas ve ark. oluşturdukları iterasyondan azalan dönüşümler için daha hızlı sabit noktaya yakınsadığını örnekle gösterdiler.

4.1.8 (Thakur ve ark. iterasyonu) [25]: Thakur ve ark. [25], $x_0 \in C, (0,1)$ aralığındaki $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri için

$$\begin{gathered} x = x_0 \\ x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = T((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z_n) \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{gathered} \tag{8}$$

iterasyonunu oluşturdular ve bu iterasyonu kullanarak genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık sonuçlarını ispatladılar

4.1.9 (Ullah ve Arshad iterasyonu)[26]:

Ullah ve Arshad [27] $x_0 \in C, (0,1)$ aralığındaki $\{\alpha_n\}$ dizi için

$$\begin{gathered} x = x_0 \\ x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = Tz_n \\ z_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{gathered} \tag{9}$$

iterasyonunu oluşturdular ve bu iterasyonu kullanarak genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık sonuçlarını ispatladılar.

4.2. Bazı Önemli Tanımlar ve Notasyonlar

Tanım 4.2.1. (Opial şartı)

X bir Banach uzayı olsun. $x \in X$ ve bu x elemanına zayıf yakınsayan herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi ile her x≠y için

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

ise o zaman X Opial şartını sağlar denir [18].

Tanım 4.2.2.(Demi-closed (yarı kapalı)) :

X bir Banach uzayı ,C kümesi de X'in boştan farklı kapalı bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ ye dönüşümü tanımlansın. C içinde $\{x_n\}$ sınırlı dizisi $\{x_n\}$, $x^* \in C$ zayıf yakınsak *ve* Tx_n 0'a kuvvetli yakınsar şartları $Tx = 0$ olmasını gerçeklerse T dönüşümüne 0 da yarı kapalı(demi-closed) dönüşüm denir.

Tanım 4.2.3. (Semi-compact(yarı kompakt)):

X Banach uzayı C , X in kapalı bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ ye dönüşümü tanımlansın. C içinde $\{x_n\}$ sınırlı dizisi ile $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ verilsin.

$x_{n_i} \to x^* \in C$ (kuvvetli yakınsak) olacak şekilde $\{x_n\}$ in bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$ mevcutsa o zaman T dönüşümüne yarı kompakt(semi-compact) denir.

Tanım 4.2.4.(Tamamen sürekli dönüşüm) :

$T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi var ve $\{Tx_{n_j}\}$ dizisi T nin görüntü kümesinde yakınsak ise, T dönüşümüne tamamen süreklidir denir.

Tanım 4.2.5. (A Şartı):

X düzgün konveks Banach uzayı ve C, X in boştan farklı konveks alt kümesi ayrıca $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. her $k > 0$ için $f(k) > 0$, $f(0) = 0$ olacak olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her

$x \in C$ için $\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T)))$ ise, T ye (A) şartını sağlar denir [22]. Burada $d(x, F(T)) = \inf_{y \in F(T)} d(x, y)$ dir. (A) şartı, C nin kompaktlığından daha zayıftır.

Lemma 4.2.6:

X bir düzgün konveks Banach uzayı ve bütün pozitif tamsayılar için $0 < p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. Ayrıca $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de bazı $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq r, \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq r \text{ ve}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|t_n x_n + (1 - t_n) y_n\| = r$$

şartlarını sağlayan iki dizi olsun.Bu durumda

$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ olur [21].

Tanım 4.2.7. (Asimptotik Yarıçap ve Asimptotik Merkez):

C, X Banach uzayının bir alt kümesi ve $\{x_n\}$, X te sınırlı bir dizi olsun. $x \in X$ olmak üzere

$$r_\alpha(x, \{x_n\}) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$$

kuralı ile verilen $r_\alpha(., \{x_n\})$ fonksiyonunun infumumuna $\{x_n\}$ dizisinin C ya göre asimptotik çapı denir ve $r_\alpha(C, \{x_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik yarıçap

$$r_\alpha(C, \{x_n\}) = inf\{r_\alpha(x, \{x_n\}) : x \in C\}$$

dir.

$z \in C$ olmak üzere

$$r_\alpha(z, \{x_n\}) = inf\{r_\alpha(x, \{x_n\}) : x \in C\} = r_\alpha(C, \{x_n\})$$

oluyorsa $z \in C$ noktasına $\{\mathrm{x_n}\}$ dizisinin C ye asimptotik merkez denir. $\{\mathrm{x_n}\}$ dizisinin K ya göre asimptotik merkezlerinin sınıfı $Z_\alpha(C, \{x_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik merkez

$$Z_\alpha(C, \{x_n\}) = \{z \in C : r_\alpha(z, \{x_n\})\} = r_\alpha(C, \{x_n\})$$

dir .

$Z_\alpha(C, \{x_n\})$ boş küme olabildiği gibi tek ya da çok elemanlı da olabilir. Edelstein [8] de C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve X deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $Z_\alpha(C, \{x_n\})$ kümesinin tek elemana sahip olduğunu aşağıdaki teoremle gösterdi.

Teorem 4.2.8.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. X deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi C ye göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir. Yani

$$Z_\alpha(C, \{x_n\}) \ = \{z\}$$

ve $x \neq z$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} sup \, \|\mathrm{x}_n - \mathrm{z}\| < \lim_{n\to\infty} sup \, \|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\|$$

dir [8].

Sonuç 4.2.9.

1. Eğer K zayıf kompakt ise $Z_\alpha(C, \{x_n\})$ boş olmayan bir kümedir.
2. Eğer K kapalı ise $Z_\alpha(C, \{x_n\})$ de kapalıdır.
3. Eğer K konveks ise $Z_\alpha(C, \{x_n\})$ de konvekstir. [3]

Teorem 4.2.10.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{x_n\}$, C de $Z_\alpha(C, \{x_n\}) = \{z\}$ olacak şekilde sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\{y_m\}$, C de $\lim_{n\to\infty} r_\alpha(y_m, \{x_n\}) = r_\alpha(C, \{x_n\})$ şartını sağlayan bir dizi ise $\lim_{n\to\infty} y_m = z$ dir [3].

5.BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde aşağıda (10) ile tanımlanan yeni iterasyon süreci yardımıyla genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yakınsaklığı incelenmektedir.

$x \in C$ $için$, (0,1) aralığında $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri için

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)T(Ty_n) + \alpha_n T(Tz_n)$$

$$y_n = T((1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n)$$

$$z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \qquad (10)$$

Bu bölümün 1. kısmında, genişlemeyen dönüşümler için (10) iterasyon dizisinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları ispatlanmakta ve (10) iterasyon dizisinin (4), (5), (6) ve (7) iterasyonlarına göre nümerik olarak genişlemeyen dönüşümler için sabit noktalarına daha hızlı yakınsadığı gösterilmektedir.

5.1. Genişlemeyen Dönüşümler İçin İterasyon Dizisinin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık Teoremleri

İlk olarak (10) iterasyonu için zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerini verelim.

Lemma 5.1.1.

X bir düzgün konveks Banach uzayı, C de X nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşüm ve $\{x_n\}$ dizisini (10) ile tanımlayalım. O zaman tüm $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur.

İspat:

$$\|z_n - p\| = \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n - p\|$$

$$= \|(1-\gamma_n)(x_n - p) + \gamma_n(Tx_n - p)\|$$

$$\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|Tx_n - p\| \leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|x_n - p\|$$

$$= \|x_n - p\| \tag{5.1}$$

$$\|y_n - p\| = \|T(1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n - p\|$$

$$\leq \|(1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n - p\|$$

$$= \|(1-\beta_n)(Tx_n - p) + \beta_n(Tz_n - p)\|$$

$$\leq (1-\beta_n)\|Tx_n - p\| + \beta_n\|Tz_n - p\|$$

$$\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|z_n - p\|$$

$$\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|x_n - p\|$$

$$= \|x_n - p\| \tag{5.2}$$

(10), (5.1) ve (5.2) den

$$\|x_{n+1} - p\| = \|\alpha_n T(Tz_n) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p\|$$

$$= \|(\alpha_n)T(Tz_n) - p) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p)\|$$

$$\leq (\alpha_n)\|T(Tz_n) - p\| + (1-\alpha_n)\|\, T(Ty_n) - p\|$$

$$= (\alpha_n)\|Tz - p\| + (1-\alpha_n)\|\, Ty_n - p\|$$

$$\leq (\alpha_n)\|z_n - p\| + (1-\alpha_n)\|\, y_n - p\|$$

$$\leq (\alpha_n)\|x_n - p\| + (1-\alpha_n)\|\, x_n - p\|$$

$$= \|\, x_n - p\|$$

olur. $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-p\| \leq \lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ elde edilir.

Tüm $p \in F(T)$ için $\{\|x_n-p\|\}$ sınırlı ve artmayan olduğunu gösterir. Böylece $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ mevcuttur.

Lemma 5.1.2.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Keyfi $x_0 \in C$ seçimi ve $\forall n \geq 1$ için (10) ile üretilen $\{x_n\}$ dizisini alalım. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$, $0 < a \leq b < 1$ ile herhangi a, b için $[a, b]$ aralığında reel sayıların dizileri ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty}\| x_n - Tx_n\| = 0$ olur.

İspat: Lemma 5.1.1' den $\lim_{n\to\infty}\| x_n - p\|$ mevcuttur. Kabul edelim ki $\lim_{n\to\infty}\| x_n - p\| = r$ olduğunu kabul edelim. (5.1) ve (5.2) den

$\| z_n - p\| \leq \| x_n - p\|$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} sup \| z_n - p\| \leq r \tag{5.3}$$

ve

$\| y_n - p\| \leq \| x_n - p\|$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} sup \| y_n - p\| \leq r \tag{5.4}$$

olur. T genişlemeyen dönüşüm olduğundan

$\| Ty_n - p\| \leq \| y_n - p\|$ ise

$$\lim_{n\to\infty} sup \| Ty_n - p\| \leq r \tag{5.5}$$

$\| Tz_n - p\| \leq \| z_n - p\|$ ise

$$\lim_{n\to\infty} sup \| Tz_n - p\| \leq r \tag{5.6}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\| T(Tz_n) - p\| \le \lim_{n\to\infty}\| Tz_n - p\|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\| z_n - p\|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\| x_n - p\| = r \qquad (5.7)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\| T(Ty_n) - p\| \le \lim_{n\to\infty}\| Ty_n - p\|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\| y_n - p\|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\| x_n - p\| = r \qquad (5.8)$$

elde edilir.

Üstelik

$$r = \lim_{n\to\infty}\| x_{n+1} - p\| = \lim_{n\to\infty}\| (\alpha_n)T(Tz_n) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p\|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\| (\alpha_n)T(Tz_n) - p) + (1-\alpha_n)(T(Ty_n) - p)\|$$

Lemma 4.2.6 kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}\|T(Tz_n) - T(Ty_n)\| = 0 \qquad (5.9)$$

elde edilir. Şimdi

$$\|x_{n+1} - p\| = \|(\alpha_n)T(Tz_n) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p\|$$

$$= \|T(Ty_n) - p) + \alpha_n(T(Ty_n) - T(Tz_n))\|$$

$$\le \|(T(Ty_n) - p) + \alpha_n(T(Ty_n) - T(Tz_n))\|$$

olduğu görülür.

Her iki tarafın limiti alınırsa (5.9) dan

$$r = \lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - p\| \le \lim_{n\to\infty} (\| T(Ty_n) - p\| + \alpha_n \|T(Ty_n) - T(Tz_n)\|)$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \| T(Ty_n) - p\|$$

elde edilir. (5.8) den $\lim_{n\to\infty} \| T(Ty_n) - p\| = r$ olduğu görülür.

Buradan

$$\| T(Ty_n) - p\| \le \|T(Ty_n) - T(Tz_n)\| + \| T(Tz_n) - p\|$$

$$\le \|T(Ty_n) - T(Tz_n)\| + \| z_n - p\|$$

olduğundan her iki tarafın limiti alınırsa (5.9) dan $r \le \lim_{n\to\infty} \| z_n - p\|$ elde edilir.

(5.3) ten $\lim_{n\to\infty} \| z_n - p\| = r$ olur.

Böylece $r = \lim_{n\to\infty} \| z_n - p\| = \lim_{n\to\infty} \| (1 - \alpha_n)(x_n - p) + \alpha_n(Tx_n - p)\|$ olur.

Lemma 4.2.6 gereği $\lim_{n\to\infty} \| x_n - Tx_n\| = 0$ (5.10)

elde edilir.

Teorem 5.1.3.

X, Opial koşulunu sağlayan reel düzgün konveks Banach uzayı olsun. C olmayan kapalı ve konveks X nin bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ bir genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi iterasyon süreci (10) ile tanımlanan bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf olarak yakınsar.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ vardır. $\{x_n\}$ dizisinin $F(T)$'de tek zayıf alt dizisel limiti olduğunu gösterilecektir. Bunun için u ve v $\{x_n\}$ dizisinin sırasıyla $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizilerinin limitleri olsun. $\lim_{n\to\infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$

ve Lemma 5.1.2'ten sıfıra göre demiclosed olduğundan $T_u = u$ elde ederiz. Benzer olarak $v \in F(T)$ olduğunu gösterebiliriz.

Lemma 5.1.2'den $\lim_{n\to\infty} \|x_n - v\|$ vardır.

$u \neq v$ olduğunu kabul edelim. Opial koşulundan

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\| = \lim_{n_i\to\infty} \left\|x_{n_i} - u\right\| < \lim_{n_i\to\infty} \left\|x_{n_i} - v\right\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - v\|$$

$$= \lim_{n_j\to\infty} \left\|x_{n_j} - v\right\| < \lim_{n_j\to\infty} \left\|x_{n_j} - u\right\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - u\|$$

olur. Buradan bir çelişki elde edilir. O zaman $u = v$ olur.

Böylece $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir zayıf noktasına zayıf olarak yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.4.

X, düzgün konveks Banach uzayı C, T ve $\{x_n\}$ Lemma 5.1.2 içinde tanımlandığı gibi kabul edilsin. Eğer T semicompact ve $F(T) \neq \emptyset$ ise o zaman $\{x_n\}$ dizisi T' nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 5.1.2'ten $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ elde edilir. T semicompact olduğundan $\{x_n\}$ C kapalı olduğundan $p \in C$ noktasına yakınsayan bir alt diziye sahiptir. T'nin sürekliliği $\lim_{j\to\infty} \left\|Tx_{n_j} - Tp\right\| \to 0$ olduğunu verir. O zaman Lemma 5.1.2'ten $\|Tp - p\| = 0$ olur. Böylece $p \in F(T)$ olur. Lemma 5.1.1'den tüm $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ vardır. Bu yüzden $\{x_n\}$, $p \in F(T)$ noktasına yakınsar.

Teorem 5.1.5.

X, düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşüm $\{x_n\}$ (10) ile tanımlanmış bir iterasyon dizisi ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu nedenle $\{x_n\}$, $F(T)$ noktasına yakınsar, ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ olur. Bu durumda $d\big(x_n, F(T)\big) = \inf\|x_n - p\|$, $p \in F(T)$.

İspat: Gereklilik aşikardır. Yeterlilik için $\liminf_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ olsun.

Lemma 5.1.1'den tüm $w \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\|$ mevcuttur. Böylece $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big)$ vardır. Fakat hipotez gereği $\liminf_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ dır.

Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big)$ elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi C de bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ için olmak üzere n_0 doğal sayısı vardır. Özellikle $\inf\left\{\left\|x_{n_0} - p\right\| : p \in F(T)\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Böylece $\left\|x_{n_0} - p^*\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $p^* \in F(T)$ vardır.

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \|x_{n+m} - p^*\| + \|x_n - p^*\| \leq 2\left\|x_{n_0} - p^*\right\| < \varepsilon$$

olur. Buradan $\{x_n\}$ dizisi C de bir Cauchy dizisidir.

X, Banach uzayında C kümesi kapalı olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ olacak şekilde C içine bir p noktası vardır. $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ olması $d\big(p, F(T)\big) = 0$ olduğunu verir. $F(T)$ kapalı olduğundan $p \in F(T)$ olur.

Teorem 5.1.6.

X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi C olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm $\{x_n\}$ dizisi (10) iterasyon süreci ile tanımlansın ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. T dönüşümü (A) şartını sağlasın. O zaman $\{x_n\}$, T nin bir sabit noktasına kuvvetli olarak yakınsar.

İspat: Lemma 5.1.2'ten $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olduğu gösterildi. (A) şartından ve (5.10)'dan $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F(T)) \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$

elde edilir.

Yani $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, f(T)) = 0$ olur.

$f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ $f(0) = 0$, tüm $r \in (0,\infty)$ için $f(r) > 0$ şartını sağlayan, azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, f(T)) = 0$ elde edilir.

Teorem 5.1.4'den $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir noktasına kuvvetli yakınsar. Tüm $y \in (0,\infty)$ için $f(y) > 0$ sağlayan, azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F(T)) = 0$ elde edilir. Teorem 5.1.4'den $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir noktasına kuvvetli yakınsar.

Örnek 5.1.7.

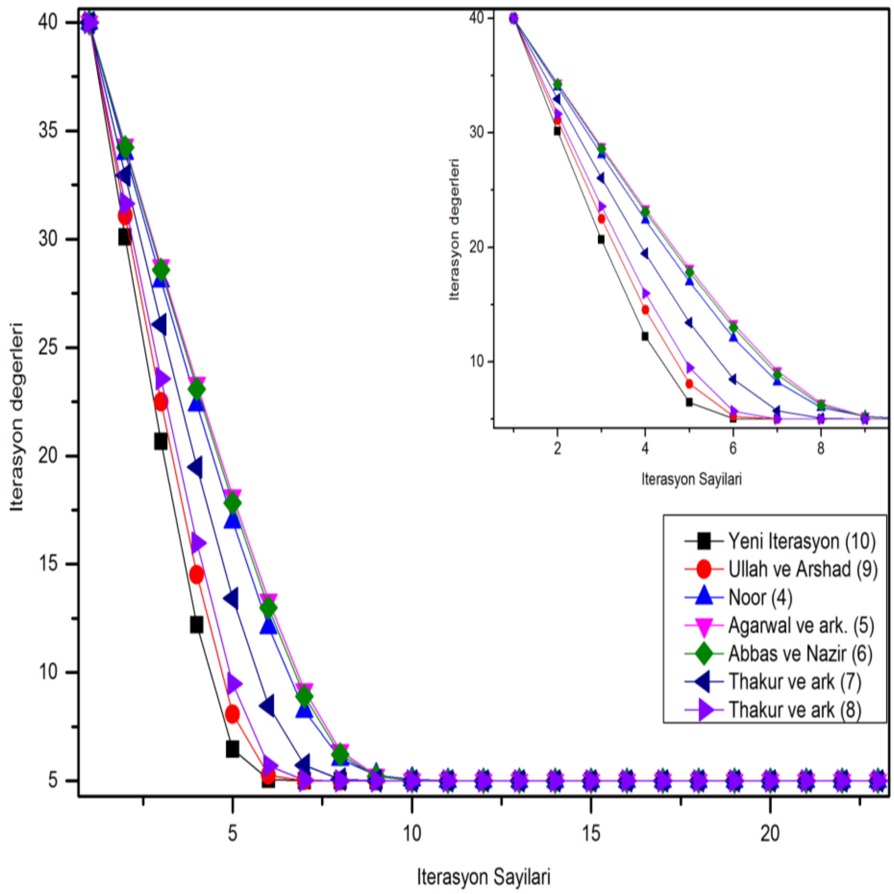
$x_0 = 40$, $\alpha_n = 0{,}85$, $\beta_n = 0{,}65$, $\gamma_n = 0{,}45$ olarak alalım. T dönüşümünü ise

$Tx = \sqrt{x^2 - 8x + 40}$ olsun. $x^* = 5$ alalım.

Bu örnekle Agarwal ve ark.[2], Noor[17], Abbas ve ark.[1] , Thakur ve ark. [24,25] iterasyonlarının ve bu çalışmada verilen (10) iterasyon dizilerinin yakınsaklık davranışları aşağıda verilmektedir.

İter . No.	Yeni İterasyon (10)	Ullah ve Arshad (9)	Noor (4)	Agarwall ve ark (5)	Abbas ve Nazir (6)	Thakur ve ark (7)	Thakur ve ark (8)
1	4E+01	4E+01	4E+01	4E+01	4E+01	4E+01	4E+01
2	3.01088E+01	3.10854E+01	3.39816E+01	3.43249E+01	3.424E+01	3.29459E+01	3.16503E+01
3	2.0659E+01	2.24899E+01	2.80883E+01	2.87529E+01	2.86874E+01	2.60697E+01	2.35684E+01
4	1.2206E+01	1.4521E+01	2.23812E+01	2.3329E+01	2.30905E+01	1.94826E+01	1.59797E+01
5	6.46458E+00	8.0845E+00	1.69736E+01	1.81322E+01	1.78351E+01	1.34242E+01	9.48774E+00
6	5.05887E+00	5.26038E+00	1.20962E+01	1.33147E+01	1.29887E+01	8.47459E+00	5.69487E+00
7	5.00133E+00	5.00745E+00	8.22893E+00	9.19393E+00	8.90324E+00	5.72797E+00	5.02918E+00
8	5.00003E+00	5.00019E+00	6.01821E+00	6.37173E+00	6.21237E+00	5.07651E+00	5.00091E+00
9	5E+00	5E+00	5.2517E+00	5.24344E+00	5.20647E+00	5.00647E+00	5.0003E+00
10	5E+00	5E+00	5.05764E+00	5.02981E+00	5.02528E+00	5.00053E+00	5E+00
11	5E+00	5E+00	5.01296E+00	5.00337E+00	5.00289E+00	5.00004E+00	5E+00
12	5E+00	5E+00	5.0029E+00	5.00038E+00	5.00033E+00	5E+00	5E+00
13	5E+00	5E+00	5.00065E+00	5.00004E+00	5.00004E+00	5E+00	5E+00
14	5E+00	5E+00	5.00015E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
15	5E+00	5E+00	5.00003E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
16	5E+00	5E+00	5.00001E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
17	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
18	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
19	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
20	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
21	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
22	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
23	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00	5E+00
⋮	⋮						

Çizelge 5.1.1 İterasyon Algoritmasının Yakınsaklık Davranışı-1



Şekil 5.1.1 İterasyon Yaklaşımı-1

Çizelge 5.1.1 ve Şekil 5.1.1 deki iterasyon adımları ve iterasyon yaklaşımında görüldüğü gibi yeni sunulan iterasyon (10) sürecinin literatürde verilen Noor[17], Agarwal ve ark.[2], Abbas ve Nazir[1] ve Thakur ve ark.[24,25] sunulan iterasyon süreçlerinden daha hızlı yaklaştığı yukarıdaki nümerik olarak verilen örnekle gösterilmektedir.

5.2. Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümlerin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık Teoremleri

Bu kısımda, Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için (10) iterasyon dizisinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları ispatlanmakta ve (10) iterasyon dizisinin (8) ve (9) iterasyonlarına göre nümerik olarak Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için sabit noktalarına daha hızlı yakınsadığı gösterilmektedir.

Tanım 5.2.1

$T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C \qquad (5.11)$$

ise T dönüşümüne C üzerinde (C) şartını sağlar denir.

(C) şartını sağlayan T dönüşümü Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümdür.

Önerme 5.2.2. ([23]).

C, X Banach uzayının boş olmayan bir altkümesi ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun.

(i) Eğer T genişlemeyen dönüşüm ise o zaman T dönüşümü (C) şartını sağlar.

(ii) Sabit noktaya sahip olan ve (C) şartını sağlayan her dönüşüm quasi genişlemeyen dönüşümdür.

(iii) Eğer T dönüşümü (C) şartını sağlıyorsa, o zaman

$$\|x - Ty\| \leq 3\|Tx - y\| + \|x - y\|, \forall x, y \in C.$$

Lemma 5.2.3. ([23]).

C, X Banach uzayının boş olmayan bir altkümesi ve $T: C \to C$ Opial şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. T'nin,(C) şartını sağladığı kabul edilsin. Eğer $\{x_n\}$, z'ye zayıf yakınsarsa ve $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ ise o zaman $Tz = z$. Yani, $I - T$ sıfırda demiclosed olur.

Lemma 5.2.4. ([23]).

C, X düzgün konveks Banach uzayının zayıf kompakt konveks bir altkümesi ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. T'nin,(C) şartını sağladığı kabul edilsin. O zaman T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Lemma 5.2.5.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ bir Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (10) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman tüm $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur.

İspat: $F(T) \neq \emptyset$, $p \in F(T)$ ve $z \in C$ olsun. T, (C) şartını sağladığından

$\frac{1}{2}\|p - Tp\| = 0 \leq \|p - z\|$ olduğundan $\|Tp - Tz\| \leq \|p - z\|$ olur.

Önerme 5.2.2 (i)'den ve Lemma 5.1.1'den

$\|z_n - p\| \leq \|x_n - p\|$ ve $\|y_n - p\| \leq \|x_n - p\|$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n T(Tz_n) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p\| \\
&= \|(\alpha_n)T(Tz_n) - p) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p)\| \\
&\leq (\alpha_n)\|T(Tz_n) - p\| + (1-\alpha_n)\| T(Ty_n) - p\| \\
&= (\alpha_n)\|Tz - p\| + (1-\alpha_n)\| Ty_n - p\| \\
&\leq (\alpha_n)\|z_n - p\| + (1-\alpha_n)\| y_n - p\| \\
&\leq (\alpha_n)\|x_n - p\| + (1-\alpha_n)\| x_n - p\| \\
&= \| x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - p\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ olur. Buradan tüm $p \in F(T)$ için $\{\|x_n - p\| \}$ sınırlı ve artmayan olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur.

Lemma 5.2.6.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ bir Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (10) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman $p \in F(T)$ ancak ve ancak $\{x_n\}$ sınırlıdır ve $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olur.

İspat: $F(T) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. O zaman Lemma 5.2.5 den $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p\|$ mevcuttur ve $\{x_n\}$ sınırlıdır. $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p\| = r$ olduğunu kabul edelim. Ozaman $\| z_n - p\| \leq \| x_n - p\|$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \| z_n - p\| \leq r$ (5.12)

ve $\| y_n - p\| \leq \| x_n - p\|$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - p\| \leq r \tag{5.13}$$

olur. T Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm olduğundan Önerme 5.2.2 (ii) den sabit noktaya sahip olan ve (C) şartını sağlayan her dönüşüm quasi genişlemeyen dönüşümdür. O halde$\| Ty_n - p\| \leq \| y_n - p\|$ ise

$$\lim_{n\to\infty} sup \| Ty_n - p\| \leq r \tag{5.14}$$

$\| Tz_n - p\| \leq \| z_n - p\|$ ise

$$\lim_{n\to\infty} sup \| Tz_n - p\| \leq r \text{ olur.} \tag{5.15}$$

Buradan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \| T(Tz_n) - p\| &\leq \lim_{n\to\infty} \| Tz_n - p\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \| z_n - p\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \| x_n - p\| = r \qquad (5.16)\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \| T(Ty_n) - p\| \leq \lim_{n\to\infty} \| Ty_n - p\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \| y_n - p\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \| x_n - p\| = r \tag{5.17}$$

elde edilir.

Üstelik

$$r = \lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - p\| = \lim_{n\to\infty} \| (\alpha_n)T(Tz_n) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \| (\alpha_n)T(Tz_n) - p) + (1-\alpha_n)(T(Ty_n) - p)\|$$

Lemma 4.2.6 kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \|T(Tz_n) - T(Ty_n)\| = 0 \tag{5.18}$$

elde edilir. Şimdi

$$\|x_{n+1} - p\| = \|(\alpha_n)T(Tz_n) + (1-\alpha_n)T(Ty_n) - p\|$$

$$= \|T(Ty_n) - p) + \alpha_n(T(Ty_n) - T(Tz_n))\|$$

$$\leq \|(T(Ty_n) - p) + \alpha_n(T(Ty_n) - T(Tz_n))\|$$

olduğu görülür.

Her iki tarafın limiti alınırsa (5.18) dan

$$r = \lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - p\| \leq \lim_{n\to\infty} (\| T(Ty_n) - p\| + \alpha_n\|T(Ty_n) - T(Tz_n)\|)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \| T(Ty_n) - p\|$$

elde edilir. (5.17) den $\lim_{n\to\infty} \| T(Ty_n) - p\| = r$ olduğu görülür.

Buradan

$$\| T(Ty_n) - p\| \leq \|T(Ty_n) - T(Tz_n)\| + \| T(Tz_n) - p\|$$

$$\leq \|T(Ty_n) - T(Tz_n)\| + \| z_n - p\|$$

olduğundan her iki tarafın limiti alınırsa (5.18) dan $r \leq \lim_{n\to\infty} \| z_n - p\|$ elde edilir.

(5.12) ten $\lim_{n\to\infty} \| z_n - p\| = r$ olur.Böylece

$$r = \lim_{n\to\infty} \| z_n - p\| = \lim_{n\to\infty} \| (1-\alpha_n)(x_n - p) + \alpha_n(Tx_n - p)\|$$

olur.Lemma 4.2.6 gereği $\lim_{n\to\infty} \| x_n - Tx_n\| = 0$ elde edilir.

Tersine $\{x_n\}$ sınırlı ve $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olsun.

Önerme 5.2.2'den $p \in Z_\alpha(C, \{x_n\})$ ise

$$r_\alpha(Tp, \{x_n\}) = \lim_{n\to\infty} \sup\|x_n - Tp\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sup(3\|Tx_n - x_n)\| + \|x_n - p\|)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup\|x_n - p\|$$

$$= r_\alpha(p, \{x_n\})$$

Buradan $Tp \in Z_\alpha(C, \{x_n\})$ elde edilir. X düzgün konveks olduğundan , $Z_\alpha(C, \{x_n\})$ tek elemana sahiptir. O halde $Tp = p$ elde edilir.

Teorem 5.2.7.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ bir Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (10) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. X Opial şartını sağlasın. O zaman $\{x_n\}$, $F(T)$'nin bir noktasına zayıf yakınsaktır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ vardır. $\{x_n\}$ dizisinin $F(T)$'de tek zayıf alt dizisel limiti olduğunu gösterilecektir. Bunun için u ve v $\{x_n\}$ dizisinin sırasıyla $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizilerinin limitleri olsun. $\lim_{n\to\infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ ve Lemma 5.2.3'ten sıfıra göre demiclosed olduğundan $T_u = u$ elde ederiz. Benzer olarak $v \in F(T)$ olduğunu gösterebiliriz. Lemma 5.2.5'ten $\lim_{n\to\infty} \|x_n - v\|$ vardır.

$u \neq v$ olduğunu kabul edelim. Opial koşulundan

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\| = \lim_{n_i\to\infty} \|x_{n_i} - u\| < \lim_{n_i\to\infty} \|x_{n_i} - v\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - v\|$$

$$= \lim_{n_j\to\infty} \|x_{n_j} - v\| < \lim_{n_j\to\infty} \|x_{n_j} - u\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - u\| \text{ olur.}$$

Böylece bu bir çelişkidir. O zaman $u = v$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir noktasına zayıf yakınsar. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.8.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ bir Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (10) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman $\{x_n\}$, $F(T)$'nin bir noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 5.2.4'ten, $F(T) \neq \emptyset$ olduğundan ve Lemma 5.2.6'dan $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ elde edilir. C kompakt olduğundan ,

$\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır öyleki bazı $p \in C$ için $x_{n_j} \longrightarrow p$ kuvvetli yakınsar. Önerme 5.2.1 (iii)'den ,

$$\|x_{n_j} - Tp\| \leq 3 \|Tx_{n_j} - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - p\|, \forall j \geq 1.$$

elde edilir. $j \to \infty$ için $x_{n_j} \longrightarrow Tp$ elde edilir. Böylece $Tp = p$ olur , yani, $p \in F(T)$ olur. Ayrıca Lemma 5.2.5'ten , $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur. Sonuç olarak $\{x_n\}$ dizisi o noktasına kuvvetli yakınsar.

Teorem 5.2.9.

C, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ bir Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (10) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman $T: C \to C$ bir Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü (A) şartını sağlarsa $\{x_n\}$, T'nin bir sabit noktasına yakınsar.

İspat: Lemma 5.2.5'ten tüm $p \in F(T)$için, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur ve böylece $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T))$ mevcuttur. $r \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| = r$ olduğunu kabul edelim. Eğer $r = 0$ ise sonuç bulunur. $r > 0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden ve (A) şartından $f(d(x_n, F(T))) \leq \|Tx_n - x_n\|$ (5.19)

elde edilir. $F(T) \neq \emptyset$ olduğundan Lemma5.2.6 dan $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ elde edilir. Bu da $\lim_{n\to\infty} f\left(d\left(x_n, F(T)\right)\right) = 0$ olduğunu verir. f azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, F(T)) = 0$ elde edilir. Böylece tüm $j \in \mathbb{N}$ için $\left\|x_{n_j} - y_j\right\| < \frac{1}{2^j}$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir altdizisi $\left\{x_{n_j}\right\}$ ve $\left\{y_j\right\} \subset F(T)$ dizisine elde ederiz. Ozaman

$$\left\|x_{n_{j+1}} - y_j\right\| \leq \left\|x_{n_j} - y_j\right\| < \frac{1}{2^j}$$

Böylece

$$\left\|y_{j+1} - y_j\right\| \leq \left\|y_{j+1} - x_{j+1}\right\| + \left\|x_{j+1} - y_j\right\|$$

$$\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j}$$

$$< \frac{1}{2^{j-1}} \to 0, n \to \infty\,.$$

Böylece $\{y_j\}$ dizisi $F(T)$ içinde bir Cauchy dizisi olduğu görülür ve dizi bir p noktasına yakınsar. $F(T)$ kapalı olduğundan $p \in F(T)$ olur ve $\{x_{n_j}\}$ p ye kuvvetli yakınsar. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcut olduğundan $\{x_n\} \to p \in F(T)$ elde edilir.

Örnek.5.2.10

$$Tx = \begin{cases} 1-x & [0, 1/6) \\ \frac{x+5}{6} & \left[\frac{1}{6}, 1\right] \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın. T dönüşümü Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümdür. Fakat genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösterelim.

$x = \frac{3}{19}$ ve $y = \frac{1}{6}$ alınırsa

$$\|x-y\| = \left\|\frac{3}{19} - \frac{1}{6}\right\| = \left|\frac{-1}{114}\right| = 0{,}0087$$

$$\|Tx - Ty\| = \left\|1 - x - \frac{y+5}{6}\right\| = \left\|-\frac{3}{19} - \frac{1/6 + 5}{6}\right\| = \frac{10}{684} = 0{,}0146$$

O zaman $\|Tx - Ty\| > \|x - y\|$ olduğundan $T-$ genişlemeyen dönüşüm değildir. Şimdi T nin suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterelim.

(C) şartını sağlamak için aşağıdaki durumlar incelenecektir.

Durum I

$$x \in \left[0, \frac{1}{6}\right), \frac{1}{2}\|x - Tx\| = \frac{1}{2}\|x - (1-x)\| = \frac{1-2x}{2} \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{1-2x}{2} \leq y - x, \frac{1}{2} - x + x \leq y \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\|Tx - Ty\| = \left\|\frac{y+5}{6} - (1-x)\right\| = \left|\frac{y+5-6+6x}{6}\right| = \left|\frac{y+6x-1}{6}\right| < \frac{1}{6}$$

$$\|x-y\| = |x-y| > \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Buradan

$\frac{1}{2}\|x-Tx\| \leq \|x-y\| \Rightarrow \|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$ elde edilir.

Durum II

$x \in \left[\frac{1}{6}, 1\right]$ olsun.

O zaman $\frac{1}{2}\|x-Tx\| = \frac{1}{2}\left|\frac{x+5}{6} - x\right| = \frac{5-5x}{12} \in \left[0, \frac{25}{72}\right]$

$\frac{1}{2}\|x-Tx\| \leq \|x-y\|$ için $\frac{5-5x}{12} \leq |y-x|$ olmalıdır. Bunun için ise iki durum söz konusudur.

a) $x < y$ ise $\frac{5-5x}{12} \leq |y-x|$ ise $y \geq \frac{5-5x}{12}$ olduğundan $y \in \left[\frac{37}{42}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{6}, 1\right]$ elde edilir.

Böylece $\|Tx-Ty\| = \left|\frac{x+5}{6} - \frac{y+5}{6}\right| = \frac{1}{6}\ \|x-y\| \leq \|x-y\|$ bulunur.

Bu ise $\frac{1}{2}\ \|x-Tx\| \leq \|x-y\| \Rightarrow \|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$ şartını sağlar.

b) $x > y$ olsun. O zaman $\frac{5-5x}{12} \leq x-y \Rightarrow y \leq x - \frac{5-5x}{12} \Rightarrow y \leq \frac{17x-5}{12}$ elde edilir.

Bu durumda $y \in \left[\frac{-13}{72}, 1\right]$ bulunur.

$y \in [0,1]$ olduğundan $y \leq \frac{17x-5}{12} \Rightarrow x \leq \frac{12y-5}{17}$ elde edilir. Buradan da $x \in \left[{}^{5}/_{17}, 1\right]$ bulunur.

Şimdi $x \in \left[\frac{5}{17}, 1\right], y \in \left[\frac{1}{6}, 1\right]$ (a) durumunu içerir.

Böylece $x \in \left[\frac{5}{17}, 1\right]$ ve $y \in \left[\frac{1}{6}, 1\right]$ olduğundan

$\|Tx-Ty\| = \left|\frac{x+5}{6} - (1-y)\right| = \left|\frac{x+6y-1}{6}\right|$ olur.

Bunu sağlamak için ilk olarak $x \in \left[\frac{5}{17}, \frac{1}{2}\right]$ ve $y \in \left[0, \frac{1}{6}\right)$ alınsın.

Buradan $\|Tx - Ty\| = \left|\frac{x+6y-1}{6}\right| \leq \frac{1}{12}$ ve $\|x - y\| > \frac{13}{102}$ olur.

Böylece $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ elde edilir.

Son olarak $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ve $y \in \left[0, \frac{1}{6}\right)$ alınsın.

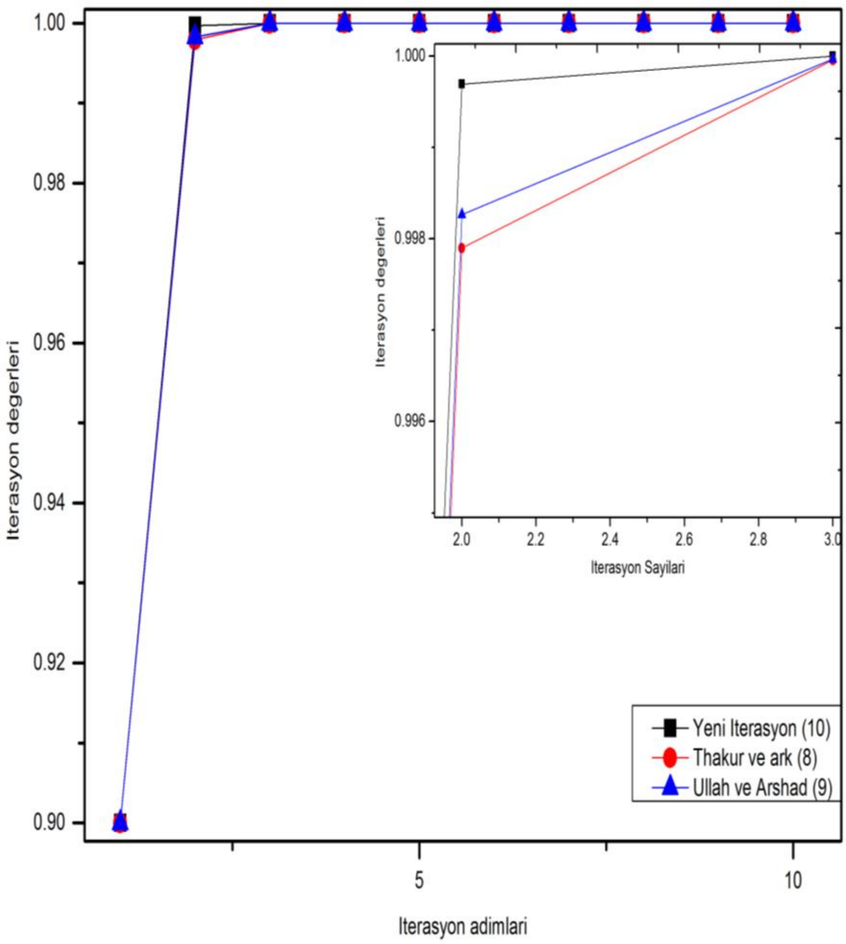
O zaman $\|Tx - Ty\| = \left|\frac{x+6y-1}{6}\right| \leq \frac{1}{16}$ ve $\|x - y\| > \frac{1}{3}$ bulunur.

Buradan da $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ gerçeklenir.

Böylece T bir Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümdür.

İter. No.	Yeni İterasyon	Thakur ve ark (8)	Ullah ve Arshad (9)
1	9E-01	9E-01	9E-01
2	9.99692E-01	9.99899E-01	9.98263E-01
3	1E+00	9.99955E-01	9.99969E-01
4	1E+00	9.99999E-01	9.99999E-01
5	1E+00	9.99999E-01	9.99999E-01
6	1E+00	9.99999E-01	9.99999E-01
7	1E+00	9.99999E-01	9.99999E-01
8	1E+00	9.99999E-01	9.99999E-01
9	1E+00	9.99999E-01	9.99999E-01
10	1E+00	9.99999E-01	9.99999E-01
	--	--	--

Çizelge 5.2.1 İterasyon Algoritmasının Yakınsaklık Davranışı-2



Şekil 5.2.1 İterasyon Yaklaşımı-2

Yukarıda alınan Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm örneği Örnek 5.2.10 için sunulan (10) iterasyon sürecinin Thakur ve ark.[25] ve Ullah ve Arshad [26] de sunulan iterasyon süreçlerinden daha hızlı sabit noktaya yaklaştığı nümerik olarak gösterilmektedir.

Şimdi diğer örneği alalım ve (10) iterasyon dizilerinin yakınsaklık davranışlarını ve sabit noktaya yaklaşımını inceleyelim.

Örnek 5.2.11. $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$,

$$Tx = \begin{cases} 1 - x & x \in \left[0, \frac{1}{8}\right) \\ \frac{x+7}{8} & x \in \left[\frac{1}{8}, 1\right] \end{cases}$$

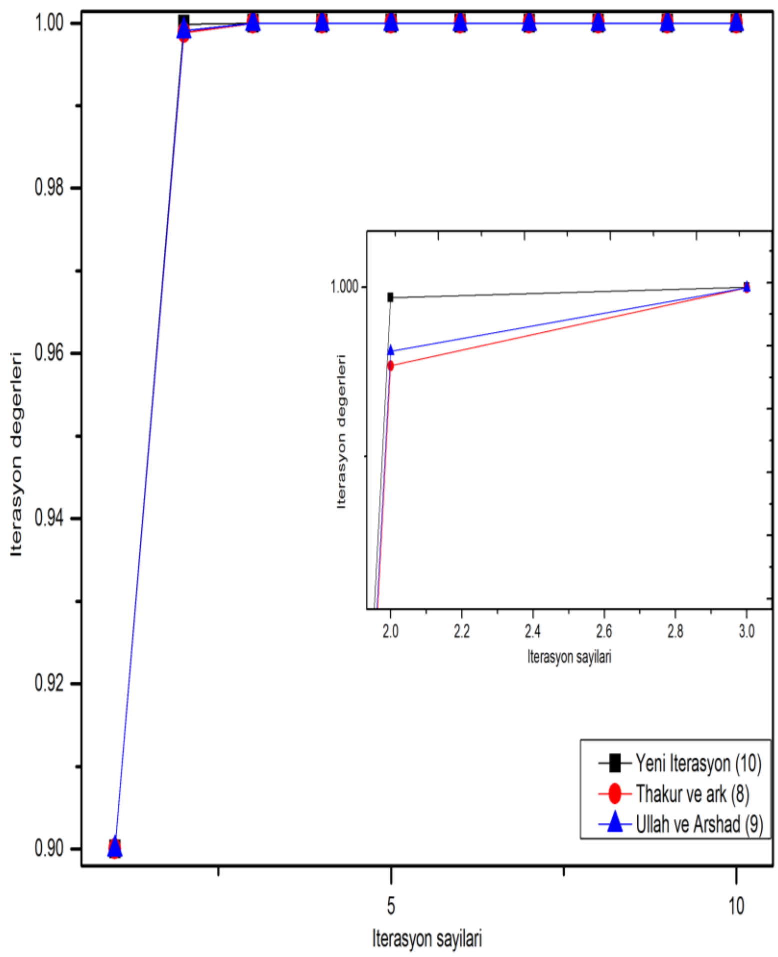
Benzer olarak yukarıda verilen Örnek 5.2.10'den Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümdür ancak genişlemeyen dönüşüm olmadığı Ullah ve Arshad [26]'dan kolaylıkla görülür. Şimdi bu örnek için sunulan (10) iterasyon sürecinin Thakur ve ark.[25] ve Ullah ve Arshad [26] de sunulan iterasyon süreçlerinden daha hızlı yaklaştığı nümerik olarak gösterelim.

$x_0 = 0.9$, $\alpha_n = 0{,}85, \beta_n = 0{,}65, \gamma_n = 0{,}45$ ve $x^* = 1$ alalım.

Bu örnekle Thakur ve ark. [25], Ullah ve Arshad[26] iterasyonlarının ve bu çalışmada verilen (10) iterasyon dizilerinin yakınsaklık davranışları aşağıda verilmektedir.

İter. No.	Yeni İterasyon(10)	Thakur ve ark (8)	Ullah ve Arshad (9)
1	9E-01	9E-01	9E-01
2	9.99843E-01	9.98837E-01	9.99053E-01
3	1E+00	9.99986E-01	9.99991E-01
4	1E+00	1E+00	1E+00
5	1E+00	1E+00	1E+00
6	1E+00	1E+00	1E+00
7	1E+00	1E+00	1E+00
8	1E+00	1E+00	1E+00
9	1E+00	1E+00	1E+00
10	1E+00	1E+00	1E+00
	--	--	--

Çizelge 5.2.2 İterasyon Algoritmasının Yakınsaklık Davranışı-3



Şekil 5.2.2 İterasyon Yaklaşımı-3

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezde, yeni sunulan iterasyon süreci yardımıyla genişlemeyen dönüşümlerin ve Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yakınsaklıkları incelenmektedir. Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm olan ancak genişlemeyen dönüşüm olmayan bir dönüşümün *(C)* şartını sağladığı durumlar detayları ile verilmektedir. Alınan örneklerle yeni sunulan iterasyon sürecinin literatürde sunulan iterasyon süreçlerinden daha hızlı sabit noktaya yaklaştığı nümerik olarak gösterilmektedir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar özgün olup elde edilen sonuçlar bundan sonraki yapılacak çalışmalara kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] M. Abbas, T. Nazir, "A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems*", Mat. Vesnik* 66(2), 223–234 (2014).

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, "Iterative construction of fixed points ofnearly asymptotically nonexpansive mappings", *J. Nonlinear Convex Analysis* 8(1),61–79 (2007).

[3] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, "Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applicitions, series", *Topological Fixed Point Theory and its App.*, Springer, New York, (2009).

[4] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*, Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları, (1994).

[5] V. Berinde, "Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasicontractive operators", *Fixed Point Theory Appl.* 2, 97-105, (2004).

[6] F.E. Browder, "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space", *Proc. Natl.Acad. Sci.* USA54, 1041–1044 (1965)

[7] M. Edelstein, "The construction of an asymptotic center with a fixed-point property", *Bull. Amer. Math. Soc.*78, 206–208 (1972).

[8] M. Edelstein, "Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*44, 369–374 (1974).

[9] J. Garc´ıa-Falset, E. Llorens-Fuster, T. Suzuki, "Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings", *J. Math. Analy. Appl.* 375(1), 185–195 (2011).

[10] K. Goebel, W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[11] S. Ishikawa, “Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space”. *Proc. Amer. Math. Soc.*59(1), 65–71 (1976).

[12] M.A. Krasnoselski, “Two remaks on method of successive approximations”, *Uspekhi Math. Vauk.* 10(1), 123-127 (1955).

[13] E. Kreyszig, *Introductory Functionel Analysis with Applications*, USA. John Wiley &Sons, (1989).

[14] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Prentice-Hall Inc. (1970).

[15] E. Llorens Fuster, E. Moreno G´alvez, “The fixed point theory for some generalized nonexpansive mappings”, *Abstr. Appl. Analysis*,2011, 15 (2011). (Art. ID435686)

[16] W. R. Mann, “Mean value methods in iteration”, *Proc. Amer. Math. Soc.*4,506–510 (1953).

[17] M.A. Noor, “New approximation schemes for general variational inequalities”, *J.Math. Analy. Appl.* 251(1), 217–229 (2000).

[18] Z. Opial, “Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings”, *Bull. Amer. Math. Soc.*73, 591–597 (1967).

[19] E.Picard, “Memorie sur la therie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives”.*J.Math. Pures Appl.* 6,145-210,(1890).

[20] B.E. Rhoades, “Some fixed point iteration procedures”, *Int. Math. Sci*, 14, 1-16 (1991).

[21] J. Schu, “Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings”, *Bull. Austral. Math. Soc.*43(1), 153–159 (1991).

[22] H.F. Senter, W.G. Dotson, "Approximating fixed points of nonexpansivemappings*", Proc. Amer. Math. Soc.*44, 375–380 (1974).

[23] T. Suzuki," Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings", *J. Math. Analy. Appl.* 340(2), 1088–1095 (2008).

[24] D. Thakur, B.S. Thakur, M. Postolache, "New iteration scheme for numerical reckoning fixed points of nonexpansive mappings", *Journal of Inequlities and Applications*, 328 (2014).

[25] B.S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache," A new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings", *Applied Mathematics and Computation*, 147-155, 275 (2016).

[26] K. Ullah, M. Arshad, "Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process", *Filomat* 32:1 187-196 (2018).

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Abdulhamit EKİNCİ
Doğum Yeri : Adıyaman
Doğum Tarihi : 01.01.1994
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : hamitekinci75@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	2015
Lise	Fen Bilimleri	Adıyaman Atatürk Lisesi	2010

Yayınları:

1- A. Ekinci, S. Temir, "Convergence theorems for Suzuki generalized nonexpansive mapping in Banach spaces" (Yayın için dergiye gönderildi).