T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI

MEHMET İBRAHİM FİGEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2020

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI

Mehmet İbrahim FİGEN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 06/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Danışman

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA
Üye

Doç. Dr. Tayfun SERVİ
Enstitü Müdürü V.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI

Mehmet İbrahim FİGEN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Yıl : 2020, Sayfa sayısı: V+45

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA

Bu tezde determinant eşitsizlikleri üzerine çalışılmıştır.

Tezimizin ilk kısımlarında pozitif tanımlı matris, akretif-dissipatif matris, sektör matris kavramları tanıtılmış ve bu matrislerle ilgili determinant eşitsizlikleri verilmiştir. Ayrıca Hadamard determinant eşitsizliği, Fan determinant eşitsizliği, Fischer Eşitsizliği gibi birçok önemli determinant eşitsizliklerinden bahsedilmiştir.

Tezimizin esas kısmında ise bazı yeni determinant eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pozitif tanımlı matrisler; Sektör matrisler; Determinant; Eşitsizlikler

ABSTRACT

MSc Thesis

THE DETERMINANTS OF POSITIVE SEMIDEFINITE MATRICES

Mehmet İbrahim FİGEN

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Year : 2020 , Number of pages: V+45

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Assoc. Prof. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ
Asst. Prof. Dr. Bayram BALA

In this thesis, determinant inequalities are studied.

In the first part of our thesis, positive definite matrix, accretive-dissipative matrix, sector matrix notions have been introduced and determinant inequalities related to this matrices have been given. Also various important determinant inequalities like Hadamard determinant inequality, Fan determinant inequality, Fischer inequality have been mentioned.

In the main part of thesis, some new determinant inequalities have been obtained.

Key Words: Positive definite matrices; Sector matrices; Determinant; Inequalities

BEYAN

"POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mehmet İbrahim FİGEN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca hoşgörü, samimiyet ve alçak gönüllülüğü ile daima yanımda olan, kıymetli bilgi ve deneyimlerini paylaşan, her konuda yardımını esirgemeyen ve öğrencisi olduğum için kendimi çok şanslı bulduğum değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. İBRAHİM HALİL GÜMÜŞ´e,

Bana duydukları sevgi, güven ve anlayışlarıyla daima yanımda olan eşime, anneme, babama, ablama, kardeşlerime ve kızıma sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunuyorum…

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Matrisler veri biliminin yapı taşlarıdır. Matris işlemleri teorik fizikten yapay sinir ağlarına kadar birçok yerde kullanılır. Örneğin optimizasyon problemlerinde, kritik noktanın minimum veya maksimum nokta olduğunu belirlemede Hessian matrisin özdeğerleri çok önemli bir araçtır. Bir noktada hesaplanan özdeğerlerin hepsinin pozitif olması fonksiyonunun o noktada minimuma sahip olduğu; hepsinin negatif olması o noktada maksimuma sahip olduğunu gösterir. Ayrıca çok değişkenli bir fonksiyonun konvekslik ve konkavlık incelemesi de yine Hessian matrisinin özdeğerleri ile ilgilidir.

Matris teoride, özdeğerleri negatif olmayan Hermityen matrise pozitif yarı tanımlı matris denir. Pozitif yarı tanımlı matrisler negatif olmayan reel sayılara benzerler. Örneğin pozitif sayıların pozitif bir karekökü olduğu gibi pozitif yarı tanımlı matrislerin de karesi kendisini veren bir tek pozitif yarı tanımlı matris kökü vardır. Ayrıca bu matrisler arasında adına Löwner sıralaması denilen bir kısmi sıralama bağıntısı mevcuttur. Bu tez çalışmasında pozitif yarı tanımlı matrisler ve bu matrislerin genelleştirilmeleri olan akretif-dissipatif ve sektör matrislerin determinantları üzerine çalışacağız.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tarihsel olarak determinantlar matrislerden çok daha önce kullanılmıştır. Determinant, lineer denklem sistemlerinin bir özelliği olarak tanımlanmıştır. Determinant bir sistemin tek bir çözümünün olup olmadığını belirler. Bu anlamda determinant Çince yazılmış olan The Nine Chapters on the Mathematical Art kitabında ilk olarak karşımıza çıkmaktadır.

Avrupa'da 2×2 determinantlar 16.yüzyıl sonunda Cardano tarafından incelenmiş daha büyük boyutlu matrislerin determinantları ise Leibniz tarafından çalışılmıştır. Japonya'da Seki Takakazu determinantın keşfedicisi olarak bilinir.

Determinantı bağımsız fonksiyonlar olarak tanımlayan ilk kişi ise Vandermonde dir. Laplace ise minörleri kullanarak determinantı elde etmede genel bir metod vermiştir.

Literatür taraması yaptığımızda karşımıza birçok determinant eşitsizliği çıkmaktadır. Özellikle pozitif tanımlı matrislerin içeren Minkowski determinant eşitsizliği, Hadamard eşitsizliği, Fan determinant eşitsizliği, blok matrisler ile ilgili olan Fischer eşitsizliği matris eşitsizlikleri için önemli eşitsizliklerdir.

Son yıllarda pozitif tanımlı matrislerin genişletmeleri olan akretif-dissipatif matrisler ve sektör matrisler üzerine determinant çalışmaları sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Mevcut determinant eşitsizliklerinin bu matrislere uyarlaması yapılmaktadır.

Bizde tez çalışmamızda bazı özel matrislerin determinantları üzerine çalışmaya devam edeceğiz.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Pozitif yarı tanımlı matrislerin determinantları ile ilgili yayınlanmış makaleler ve kitaplardan yararlanılacaktır. Matrislerin determinantları ile ilgili özelliklerin pozitif yarı tanımlı matrislerdeki karşılıklarına bakılacaktır.

4. MATRİSLER

Tanım 4.1.[1] Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olabilen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklindeki düzenli tabloya m satır ve n sütunlu bir matris veya kısaca $m \times n$ matris denir. $m \times n$ ye matrisin mertebesi denir. Elemanları a_{ij} ler reel sayı ise A ya reel matris, kompleks sayı ise A ya kompleks matris denir. Bir tek satırdan oluşan matrise satır matrisi denir. Satır matrisin mertebesi $1 \times n$ şeklindedir. Bir tek sütundan oluşan matrise sütun matrisi denir.

Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matrisi denir. Sıfır matrisi O ile gösterilir. Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise kare matris denir. $A = \left[a_{ij}\right], n \times n$ mertebesinden bir kare matris ise $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa matrise köşegen matris denir. Bir köşegen matrisin asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani $a_{11} = a_{22} = a_{33} = ... = a_{nn} = k$ ise matrise skaler matris denir. Bir skaler matriste asal köşegen elemanları 1, diğer elemanları 0 ise matrise birim matris denir. $n \times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir. Karşılıklı elemanları eşit olan aynı mertebeden matrislere eşit matrisler denir. $m \times n$ mertebeden $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ matrisleri eşit ise $A = B$ şeklinde yazılır.

Aynı mertebeden iki matrisin toplamı karşılıklı elemanların toplamıyla elde edilen, aynı mertebeden bir matristir. Yani $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$, $m \times n$

mertebesinden iki matris ise bunların toplamı $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$, $m\times n$ matristir. Farklı mertebeden matrisler toplanamazlar.

A bir matris ve λ bir skaler olmak üzere, λA skaler çarpımı A'nın her bir elemanının λ ile çarpılmasından elde edilen bir matristir. (-1)A çarpımı –A ile gösterilir. Eğer A ve B aynı mertebeden iki matris ise bu iki matrisin farkı

A – B = A +(- B) = A +(-1)B dir.

Teorem 4.1. [1] A,B,C aynı mertebeden matrisler ve λ_1,λ_2 birer skaler olmak üzere,

i. $A+B=B+A$ (değişme özelliği)

ii. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (birleşme özelliği)

iii. $A+0=A$ (etkisiz eleman)

iv. $A-A=0$

v. $\lambda_1\left(A+B\right)=\lambda_1 A+\lambda_1 B$

vi. $\left(\lambda_1+\lambda_2\right)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$

vii. $\left(\lambda_1\lambda_2\right)A=\lambda_1\left(\lambda_2 A\right)$

viii. $1.A=A$

özellikleri vardır.

Tanım 4.2.[1] $A=\left[a_{ij}\right]$ bir $m\times r$ - matris ve $B=\left[b_{ij}\right]$ bir $r\times n$ - matris ise bunların çarpımı $i=1,...,m;\ j=1,...,n$ için

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ir}b_{rj}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$$

olmak üzere $AB=\left[c_{ij}\right]$, $m\times n$ matristir.

Herhangi iki matris her zaman çarpılamaz. İki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.

Matrislerin toplama, çarpma ve skalerle çarpma tanımlarından aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.[1] $A, m\times n$ matris B ve $C, n\times r$ matrisler, $D, r\times t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $A\ \left(BD\right)\ =\ \left(AB\right)\ D$

ii. $A\ (B+C) = AB+AC$

iii. $(B+C)D = BD+CD$

iv. $\lambda(AB)=(\lambda A)B = A(\lambda B)$

v. $A0=0$

vi. Genellikle $AB \neq BA$

Tanım 4.3.[1] A bir kare matris olsun. A'nın n defa kendisiyle çarpımı sonucunda elde edilen matrise A'nın n.kuvveti denir. Yani

$$\underbrace{A.A.......A}_{n}=A^n$$

dir. Ayrıca,

$$A^k A^t = A^{k+t} \quad \text{ve} \quad \left(A^k\right)^t = A^{kt} \quad (k,l \in N)$$

dir.

Tanım 4.4.[1] Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarını yer değiştirerek elde edilen matrise A nın transpozesi (devriği) denir ve A^t ya da A^T ile gösterilir. Buna göre $A=\left[a_{ij}\right]$, $m\times n$- matrisi ise $A^t=\left[a_{ji}\right]$ $n\times m$ - matrisidir.

Elemanları karmaşık sayılar olan bir A matrisinde her elemanın yerine eşleniğinin yazılmasıyla elde edilen matrise Amatrisinin eşleniği denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.[1] A, B aynı mertebeden iki matris ve λ ve k bir skaler olmak üzere

i. $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii. $\left(A^T\right)^T = A$

iii. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

iv. A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere $(AB)^T = B^T A^T$ dir.

v. $\overline{\overline{A}} = A$

vi. $\left(\overline{kA}\right) = \overline{k}\,\overline{A}$

vii. $\left(\overline{A+B}\right)=\overline{A}+\overline{B}$

viii. $\left(\overline{AB}\right)=\overline{A}\overline{B}$

Tanım 4.5.[1] $A^T = A$ olacak şekilde A (reel) kare matrisine simetrik matris denir. Eğer $A=\left[a_{ij}\right]$ bir simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ dir. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

bir simetrik matristir.

Tanım 4.6.[1] $A^T = -A$ olacak şekilde A(reel) kare matrisine ters simetrik matris (anti simetrik matris) denir. Eğer $A=\left[a_{ij}\right]$ bir ters simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ dir. Şu halde bir ters simetrik matriste asal köşegen elemanları hep sıfırdır. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

bir ters simetrik matristir.

Tanım 4.7.[1] $A^* = \left(\overline{A}\right)^T = A$ olacak şekilde A (kompleks) kare matrisine Hermityen matris denir. Eğer $A=\left[a_{ij}\right]$ kare matrisi Hermityen matris ise $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ dir. Bir Hermityen matrisin köşegen elemanları reel sayılardır.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi bir Hermityen matristir.

$\left(\overline{A}\right)^T = -A$ olacak şekilde A (kompleks) kare matrisine ters Hermityen matris denir. Eğer $A=\left[a_{ij}\right]$ kare matrisi ters Hermityen matris ise $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ dir.

Bir ters Hermityen matrisin köşegen elemanları 0 veya sanal sayılardır.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi bir ters Hermityen matristir.

Tanım 4.8.[1] A , $n\times n$ mertebesinden bir kare matris olmak üzere

$$AB=BA=I_n$$

bağıntısını sağlayan (eğer varsa) B matrisine A matrisinin tersi veya inversi denir. A matrisinin inversi A^{-1} ile gösterilir. Tersi olan matrise regüler matris ya da tersinir matris denir.

A , $n\times n$ mertebesinden bir kare matris olmak üzere A nın tersi yoksa A ya singüler veya tekil matris denir.

5. POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLER

Bu bölümde matris teoride önemli bir yere sahip olan pozitif tanımlı matrisler ve pozitif yarı tanımlı matrisler üzerinde duracağız. Bu matrislerin özdeğerleri pozitif olduğundan uygulamalı matematikte birçok kolaylıklar sağlamaktadır.

A, $n \times n$ tipinde bir hermityen matris olsun. A matrisi sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{C}^n$ için $x^* Ax > 0$ şartını sağlıyorsa bu matrise pozitif tanımlı matris denir ve A > 0 ile gösterilir. Eğer her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$x^* Ax \geq 0$ şartını sağlıyorsa A matrisine pozitif yarı tanımlı matris denir ve A ≥ 0 ile gösterilir.

Her pozitif tanımlı matris aynı zamanda pozitif yarı tanımlı matristir. Fakat bir pozitif yarı tanımlı matrisin pozitif tanımlı matris olması için gerek ve yeter şart matrisin tersinir olmasıdır. Örneğin $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi pozitif yarı tanımlıdır ama pozitif tanımlı değildir. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ise hem pozitif tanımlı, hem de pozitif yarı tanımlı bir matristir. Pozitif tanımlı matrislerin eşleniği, transpozesi, eşlenik transpozesi ve tersi de pozitif tanımlıdır.

Pozitif tanımlı matrislerin kullanışlı ve basit birçok karakterizasyonu vardır. Şimdi bunların bazılarını verelim.

Teorem 5.1.[2] $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermityen matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart özdeğerlerinin pozitif olmasıdır. Pozitif yarı tanımlılıkta ise gerek ve yeter şart özdeğerlerin negatif olmamasıdır.

İspat: A matrisi pozitif tanımlı matris, λ , A matrisinin özdeğerlerinden birisi ve x de λ ya karşılık gelen özvektör olsun. Bu takdirde

$$x^* Ax = x^* \lambda x = \lambda x^* x$$

eşitliği yazılabilir. Buradan $\lambda = \dfrac{x^* Ax}{x^* x}$ elde edilir. $x^* Ax$ ve $x^* x$ pozitif olduğundan oranları da pozitiftir. Böylece istenen elde edilmiş olur. $D = köş(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ matrisi A nın özdeğerlerinden oluşan köşegen matris olsun. A matrisinin özdeğerleri pozitif ise sıfır olmayan $x \in \mathbb{C}^n$ için $x^* Ax = x^* U^* DUx \overset{y=Ux}{=} y^* Dy = \sum_{i=1}^{n} d_i \bar{y}_i y_i = \sum_{i=1}^{n} d_i |y_i|^2 > 0$ elde edilir ki istenendir.

Sonuç 5.1.1. Pozitif tanımlı matrislerin izi ve determinantı pozitiftir.

Sonuç 5.1.2. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris ise A^k matrisi de $k = 1, 2, ...$ için pozitif yarı tanımlıdır.

İspat: A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ise A^k matrisinin özdeğerleri $\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k$ dır. Dolayısıyla bu özdeğerler de pozitiftir.

Teorem 5.2.[3] A hermityen matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart ilk esas minörlerinin pozitif olmasıdır. Pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart esas minörlerinin negatif olmamasıdır.

Teorem 5.3.[3] A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere bütün $n \times m$ X kompleks matrisleri için, A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart $X^* AX \geq 0$ olmasıdır.

Teorem 5.4.[3] A, $n \times n$ kompleks matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart U üniter matrisi ve negatif olmayan λ_i özdeğerleri için $A = U^* köş(\lambda_1, ..., \lambda_n)U$ olmasıdır.

Teorem 5.5.[3] A matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olması için gerek ve yeter şart bazı B matrisleri için $A = B^* B$ olmasıdır. Pozitif tanımlılık için ise B nin tekil olmayan matris olması gerekir.

Teorem 5.6.[3] A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bazı üst üçgen matrisleri için $A = T^* T$ olmasıdır. Ayrıca T negatif olmayan köşegen elemanlarına sahip bir matris olarak seçilebilir. A pozitif tanımlı matris ise T tektir.

Her negatif olmayan sayının bir tane negatif olmayan karekökü vardır. Bu durum matrisler için şöyle genelleştirilebilir.

Teorem 5.7.[3] Her $A \geq 0$ için $B^2 = A$ olacak şekilde bir tane $B \geq 0$ matrisi vardır.

İspat: $A \geq 0$ için $A = U^* k\ddot{o}ş(\lambda_1, ..., \lambda_n)U$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$B = U^* k\ddot{o}ş(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, ..., \lambda_n^{\frac{1}{2}})U$$

matrisi vardır. Bu matrisin özdeğerleri de pozitif olduğundan *B* matrisi pozitif yarı tanımlıdır. *B* matrisine *A* matrisinin karekökü denir ve $A^{\frac{1}{2}}$ ile gösterilir.

6. POZİTİF YARI TANIMLI MATRİS ÇİFTİ

Eşitsizlikler modern matris teorinin ana konularından biridir. Bu bölümde tezimizde de önemli bir yere sahip olan iki pozitif yarı tanımlı matris içeren eşitsizlikler üzerinde duralacaktır.

A ve *B* aynı mertebeli hermityen iki matris olsun. *A-B* pozitif yarı tanımlı ise $A \geq B$ veya $B \leq A$ yazabiliriz. Buradaki $\geq$ eşitsizliği bir kısmi sıralamadır. Hermityen matrisler üzerindeki bu sıralamaya *Löwner kısmi sıralaması* da denir. Bu sıralama şu şekilde gösterilebilir:

- Her *A* hermityen matrisi için $A \geq A$,
- $A \geq B$ ve $B \geq A$ ise $A=B$,
- $A \geq B$ ve $B \geq C$ ise $A \geq C$

Ayrıca Teorem 5.3 de yer alan $A \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $X^*AX \geq 0$ eşitsizliği, $A \geq B$ olması için gerek ve yeter şart $X^*AX \geq X^*BX$ olarak genelleştirilebilir.

Şimdi de pozitif yarı tanımlı matrisler için önemli eşitsizlikler içeren teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 6.1.[3] $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ aynı mertebeli iki matris olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

i. $A + B \geq B$

ii. $A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \geq 0$

iii. $iz(AB) \leq izA.izB$

iv. *AB'* nin özdeğerleri negatif olmayan sayılardır. *AB'* nin pozitif yarı tanımlı matris olması için gerek ve yeter şart *AB*=*BA* olmasıdır.

Teorem 6.2.[4] A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Öyleyse

$$A \geq B \Rightarrow A^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}}$$

dir.

Teorem 6.3.[3] Eğer A pozitif tanımlı matris ve B hermityen matris ise

$$A = P^{*}IP \quad \text{ve} \quad B = P^{*}DP$$

eşitliklerini sağlayan tersinir bir P matrisi vardır. Ayrıca *B* matrisinin pozitif özdeğerleri ile *D* matrisinin pozitif özdeğerlerinin sayısı aynıdır. Aynı durum negatif özdeğerler ve sıfır özdeğerlerin sayısı için de geçerlidir.

Dolayısıyla *B* pozitif yarı tanımlı matris ise *D* negatif olmayan köşegen elemanlara, *B* pozitif tanımlı bir matris ise *D* pozitif köşegen elemanlarına sahip olacaktır. Ayrıca *D* matrisinin köşegen elemanları $A^{-1}B$ matrisinin özdeğerleri ile aynıdır.

Teorem 6.4.[2] A ve B, $n \times n$ tipinde hermityen matrisler olsun.

i. Eğer A matrisi pozitif tanımlı ise AB matrisi köşegenleştirilebilir ve reel özdeğerlere sahiptir. Ek olarak B pozitif tanımlı ise AB matrisi pozitif özdeğerlere, B matrisi pozitif yarı tanımlı ise AB matrisi negatif olmayan özdeğerlere sahiptir.

ii. Eğer hem A hem de B pozitif yarı tanımlı ise AB matrisi köşegenleştirilebilir ve negatif olmayan özdeğerlere sahiptir.

7. DETERMİNANTLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Teorem: 7.1.[1] Bir A kare matrisinin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ ile gösterilir.

i. 1×1 mertebesinden $A=[a]$ kare matrisinin determinantı

$$\det(A)=|A|=|a|=a \quad \text{dır.}$$

ii. 2×2 mertebesinden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ kare matrisinin determinantı

iii. $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ dir.

iv. 3×3 mertebesinden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ kare matrisinin determinantı

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

dir. Bu ifade, A matrisinin determinantının 1 inci satıra göre açılımıdır.

Teorem: 7.2.[1] $A=\left[a_{ij}\right]$, $n\times n$ mertebesinden bir matris olsun ve M_{ij}, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle A dan elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ mertebeden matrisi göstersin. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir. Ayrıca

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

değerine a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir.

Teorem 7.3.[1] $n\geq 2$ olmak üzere A, $n\times n$ mertebesinden bir kare matris olsun. $i=1,2,...,n$ ve $j=1,2,...,n$ için

$$\det(A)=|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj}$$

dir. Determinantın bu şekilde hesaplanmasına Laplace açılımı denir.

Teorem 7.4.[1] Bir determinantta herhangi bir satır (ya da sütun) elemanlarının hepsi 0 ise determinantın değeri 0 olur.

Bir determinantın bir satırındaki (ya da sütununda ki) elemanlar bir k skaleri ile çarpılırsa determinant k ile çarpılmış olur.

Determinantta herhangi iki satır (ya da sütun) yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

Bir determinantın herhangi satır (ya da sütun) elemanları bir k skaleri ile çarpılıp bir başka satırın (ya da sütunun) elemanlarına eklenirse determinantın değeri değişmez.

Bir determinantın herhangi iki satırı (ya da sütunu) birbirine eşit ise determinantın değeri 0 olur.

Bir determinantın herhangi iki satır (ya da sütun) elemanları karşılıklı olarak orantılı ise determinantın değeri 0 dır.

Teorem 7.5.[1] Bir matrisin determinantı transpozesinin determinantına eşittir. Yani, bir A, $n \times n$ matrisi için $|A| = |A^t|$ dir.

Teorem 7.6. (Sarrus Kuralı)

Sadece 3×3 tipindeki matrislerin determinantın hesaplanmasında kullanılan bir yöntemdir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{determinantı}$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33})$$

şeklinde hesaplanır.

Teorem 7.7.[3] $A, B \in M_n$ olmak üzere

$$\det(A.B) = \det A . \det B$$

dir.

Teorem 7.8.[3] $A \in M_n, C \in N_m \quad B_{n\times m}, 0_{m\times n}$ olmak üzere

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det A.\det C$$

dir.

Teorem 7.9.[3] Elementer satır (sütun) işlemleri lineer cebirde önemli bir rol oynar. Bu işlemlerin blok matrislere uyarlanmış hali şu şekildedir.

- **i.** İki blok satırı (sütunu) yer değiştirme
- **ii.** Bir blok satırı (sütunu) soldan (sağdan) tekil olmayan uygun boyutlu bir matris ile çarpma
- **iii.** Bir blok satırı (sütunu) soldan (sağdan) uygun boyutlu bir matris ile çarpıp başka bir satıra (sütuna) ekleme
- **iv.** Bu elementer işlemler kullanılarak

  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ sonucuna varılır. Böylece

  A tersinir matris olmak şartıyla

  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A.\det(D - CA^{-1}B)$ bulunur.

Teorem 7.10.[3] $A \in M_n$, tersinir, $D \in N_m$, $B \in M_{n\times m}, C \in M_{m\times n}$ olmak üzere

$$AC = CA \text{ ise } \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB)$$

İspat: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A.\det(D - CA^{-1}B)$ olduğu bir önceki maddeden bilinmektedir.

Buradan da

$$\det A.\det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB)$$

Sonucu elde edilir.

Teorem 7.11.[3] A ve B , $n \times n$ kompleks matrisler olmak üzere

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \det A.\det B$$

olur.

Teorem 7.12.[3] $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrislerini ele alalım. Öyleyse

$$|\det(A+iB)|^2 = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}$$

olur.

İspat: Benzer matrislerin determinantları aynı olduğundan $P = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & -i\mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ seçilerek

$$\begin{pmatrix} I & iI \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -iI \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Öyleyse

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{vmatrix} = \det(A+iB).\det(A-iB)$$

$$= \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} = |\det(A+iB)|^2$$

sonucuna varılır. Üstteki özelliğin pozitif yarı tanımlı matrisler içinde doğru olduğu da aşikardır.

Yani $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise

$$|\det(A+iB)|^2 = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}$$

dir.

Teorem 7.13.[3] $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ise

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B).\det(A-B)$$

dir.

İspat: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\begin{vmatrix} I & I \\ B & A \end{vmatrix}$$

$$= \det(A+B)\begin{vmatrix} I & I \\ 0 & A-B \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

dir.

Teorem 7.14.[3] Eğer $A \geq B \geq 0$ ise $\det A \geq \det B$ dir.

İspat: A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olduğundan Teorem 6.3'ten $A = P^* D_1 P$ ve $B = P^* D_2 P$ eşitliklerini sağlayan P ters çevrilebilir matrisi vardır. Öyleyse

$$A \geq B \geq 0 \Rightarrow P^* D_1 P \geq P^* D_2 P \Rightarrow P^*(D_1 - D_2)P \geq 0$$

$$\Rightarrow D_1 - D_2 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq D_2 \Rightarrow \det D_1 \geq \det D_2$$

$$\Rightarrow \det P^* \det D_1 \det P \geq \det P^* \det D_2 \det P \Rightarrow \det A \geq \det B$$

dir.

Teorem 7.15.[3] $A \geq 0, B \geq 0$ aynı mertebeden matrisler olmak üzere

$$\det(A+B) \geq \det A + \det B$$

dir.

İspat: Bir önceki özellikte olduğu gibi $A = P^* D_1 P$ ve $B = P^* D_2 P$ şeklinde yazılabilir. Öyleyse $D_1 = k\ddot{o}ş(a_1, a_2, ..., a_n)$, $D_2 = k\ddot{o}ş(b_1, b_2, ..., b_n)$ olmak üzere

$$\det(A+B) = \det(P^* D_1 P + P^* D_2 P)$$
$$= \det(P^*(D_1 + D_2)P = \det P^* \det(D_1 + D_2)\det P$$
$$= \det P^* . \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\det P \geq \det P^* \left(\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i\right)\det P$$

$$= \det P^* \det D_1 \det P + \det P^* \det D_2 \det P$$
$$= \det A + \det B$$

bulunur. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 7.16.[2] **(Minkowski Determinant Eşitsizliği)**

A ve B, $n\times n$ tipinde pozitif yarı tanımlı matrisler ve $n>1$ olmak üzere

$$\det^{\frac{1}{n}}(A+B)\geq \det^{\frac{1}{n}} A+\det^{\frac{1}{n}} B$$

dir.

Eşitlik durumu $(i)\,A=0$ $(ii)\,B=0$ $(iii)\,A+B$ tekil matris $(iv) B=\alpha A,\ \alpha>0$ durumlarının herbiri için geçerlidir. Ayrıca sonuç olarak

$$\det(A+B)\geq \det A+\det B \quad \text{dir.}$$

Eşitlik durumu $(i)\,A=0$ $(ii)\,B=0$ $(iii)\,A+B$ tekil matris durumlarının her biri için geçerlidir

İspat: Çok iyi bilinen bir eşitsizliği kullanarak ispatımıza başlayalım. $\theta_1,...,\theta_n$ negatif olmayan sayılarının $\theta_1+\theta_2+...+\theta_n=1$ eşitliğini sağladığını varsayalım. Öyleyse $x=(x_1,...,x_n)$ ve $y=(y_1,...,y_n)$ negatif olmayan bileşenlere sahip ise $(x_1+y_1)^{\theta_1}...(x_n+y_n)^{\theta_n}\geq x_1^{\theta_1}x_2^{\theta_2}...x_n^{\theta_n}+y_1^{\theta_1}y_2^{\theta_2}...y_n^{\theta_n}$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu ancak ve ancak x=0 veya y=0 veya bazı i'ler için $x_i=y_i=0$ veya $x=ky$ $(k>0)$ durumlarından birinde geçerlidir. Bu sayısal eşitsizlik tümevarım metodu ile ispatlanabilir.

$\forall i$ için $c_i>0$ ve $d_i>0$ olacak şekilde

$C=k\ddot{o}\c{s}(c_1,c_2,...,c_n)$, $D=k\ddot{o}\c{s}(d_1,d_2,...,d_n)$ köşegen matrisleri için

$A=P^*CP$, $B=P^*DP$ olacak şekilde bir tersinir P matrisinin varlığı biliniyor. Öyleyse

$$\left(\det(A+B)\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\det A\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\det B\right)^{\frac{1}{n}}\Leftrightarrow\left(\left|\det P\right|^2\det(C+D)\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\geq\left(\left|\det P\right|^2\det C\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\left|\det P\right|^2\det D\right)^{\frac{1}{n}}\Leftrightarrow\left(\det(C+D)\right)^{\frac{1}{n}}\geq\det^{\frac{1}{n}}C+\det^{\frac{1}{n}}D$$
$$\Leftrightarrow\left((c_1+d_1)...(c_n+d_n)\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(c_1...c_n\right)^{\frac{1}{n}}+\left(d_1...d_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

bulunur ki üstteki eşitsizlik $\forall i$ için $\theta_i = \dfrac{1}{n}$ alınarak doğru olduğu görülür. Diğer eşitsizlikler bu eşitsizliğin bir sonucudur.

Teorem 7.17.[3] $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ aynı boyutlu iki matris olsun. Herhangi $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

$$\left|\det(\lambda A + \mu B)\right| \leq \det\left(|\lambda| A + |\mu| B\right) \text{ olur.}$$

İspat: $\forall\ i$ için $c_i, d_i \geq 0$ olmak üzere $C = k\ddot{o}\c{s}(c_1, c_2, ..., c_n)$ ve $D = k\ddot{o}\c{s}(d_1, d_2, ..., d_n)$ köşegen matrislerini alalım. $A = P^* CP$ ve $B = P^* DP$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $c, d > 0$ olmak üzere $|\lambda c + \mu d| \leq |\lambda| c + |\mu| d$ bilinen bir gerçektir. Öyleyse

$$\begin{aligned}
&\left|\det(\lambda A + \mu B)\right| \leq \left|\det P\right|^2 \det(\lambda C + \mu D) \\
&= \left|\det P\right|^2 \left|\lambda c_1 + \mu d_1\right| ... \left|\lambda c_n + \mu d_n\right| \\
&\leq \left|\det P\right|^2 \left(|\lambda| c_1 + |\mu| d_1\right) ... \left(|\lambda| c_n + |\mu| d_n\right) \\
&= \det(|\lambda| A + |\mu| B)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 7.18.[3] $A > 0$ ve $B \geq 0$ aynı boyutlu iki matris ve $A \geq B$ olsun. Öyleyse

$$\frac{trB}{trA} \geq \frac{\det B}{\det A}$$

dir.

Teorem 7.19.[3] Teorem7.9. ‘da A_{11} ters çevrilebilir matris olmak şartıyla

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

blok matrisinin determinantının

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det A_{11}.\det\left(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}\right)$$

olduğunu görmüştük. Literatürde

$$A_{11} = A / A_{11} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

matrisine A_{11} matrisinin Schur tamamlayıcısı denir.

A pozitif tanımlı matris ise A_{11} pozitif tanımlı matris ve $A_{21} = A_{12}^*$ olduğu bilinen bir gerçektir. Öyleyse

$$A_{22} \geq A_{11} \geq 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\det A_{22} \geq \det A_{11}$$

yazılır.

Bu eşitsizlikleri kullanarak Fischer eşitsizliği olarak da bilinen determinant eşitsizliğini verelim.

Teorem 7.20.[2] **(Fischer Eşitsizliği)**

A pozitif yarı tanımlı matrisinin

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde bloklara ayrıldığını varsayalım. Öyleyse

$$\det A \leq \det A_{11}.\det A_{22}$$

dir. Ayrıca tüm bloklar aynı boyutlu kare matrisler olmak şartıyla

$$\left|\det A_{12}\right|^2 \leq \det A_{11}.\det A_{22}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\det A = \det A_{11}.\det\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)$ olduğunu biliyoruz.

$A_{22} \geq A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ olduğundan birinci eşitsizlik elde edilmiş olur. İkinci eşitsizliğin ispatı için

$$A_{22} \geq A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \geq 0$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın determinantını alırsak

$$\det A_{22} \geq \det(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$
$$\Rightarrow \det A_{22} \det A_{11} \geq \left|\det A_{12}\right|^2$$

dir.

Teorem 7.21.[2] **(Hadamard Eşitsizliği)**

A matrisi $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ köşegen elemanlarına sahip pozitif yarı tanımlı matris olsun. Öyleyse

$$\det A \leq a_{11}.a_{22}....a_{nn}$$

dir.

İspat: A matrisi pozitif yarı tanımlı matris olduğundan $\forall i$ için $a_{ii} \geq 0$ dır. Farz edelim $a_{ii} > 0$ olsun.

$$D = köş\left(a_{11}^{-\frac{1}{2}}, ..., a_{nn}^{-\frac{1}{2}}\right)$$ köşegen matrisini oluşturalım.

A matrisi pozitif yarı tanımlı matris olduğundan $B = DAD$ matrisi köşegen elemanları 1 olan pozitif yarı tanımlı matristir. Öyleyse aritmetik-geometrik ortalama eşitliğinden

$$n = trB = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(B) \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(B)\right)^{\frac{1}{n}} = n(\det B)^{\frac{1}{n}}$$

elde edilir. Yani

$$\det B \leq 1$$

dir. Böylece

$$\det A = \det(D^{-1}BD^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \det B \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Bu eşitsizliğin bir sonucu olarak A, $m \times n$ tipinde herhangi bir kompleks matris olmak üzere

$$\det\left(A^* A\right) \leq \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left|a_{ij}\right|^2$$

eşitsizliği yazılabilir.

Teorem 7.22.[3] A,B,C ve D tekil olmayan $n \times n$ tipinde kompleks matrisler ise

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & B^{-1} \\ C^{-1} & D^{-1} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{\det(ABCD)} \begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix}$$

dir.

Teorem 7.23.[2] **(Fan Determinant Eşitsizliği)**

$H, K \in M_n$ hermityen matrisler olsun. Ayrıca $A = H + iK$ matrisini oluşturalım. Eğer H pozitif tanımlı matris ise

$$(\det H)^{\frac{2}{n}} + |\det K|^{\frac{2}{n}} \leq |\det(H + iK)|^{\frac{2}{n}} = |\det A|^{\frac{2}{n}}$$

dir. Eşitlik durumu $H^{-1}K$ matrisinin bütün özdeğerlerinin aynı modüle sahip olması durumunda geçerlidir.

İspat: Teorem 6.3'ten biliyoruz ki $H = SIS^*$ ve $K = SDS^*$ eşitliklerini sağlayan bir tersinir S matrisi vardır. Yine aynı teoremden bilinir ki

$D = k\ddot{o}ş(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ matrisinin köşegen elemanları $H^{-1}K$ matrisinin özdeğerleridir.

Dolayısıyla eşitsizliğimiz

$$|\det(I + iD)|^{\frac{2}{n}} \geq 1 + |\det D|^{\frac{2}{n}}$$

eşitsizliğine denktir.

$$\left(\prod_{j=1}^{n} |1 + \lambda_j| \right)^{\frac{2}{n}} = \left(\prod_{j=1}^{n} (1 + \lambda_j^2) \right)^{\frac{1}{n}} \text{ ve } |\det D|^{\frac{2}{n}} = \left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \right)^{\frac{1}{n}}$$

olduğundan

$$1 + \left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{j=1}^{n} (1 + \lambda_j^2) \right)^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliğini ispatlamamız gereklidir. Bu eşitsizlik

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{j=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{j=1}^{n} y_i \right)^{\frac{1}{n}} \qquad x_i, y_i \geq 0$$

Minkowski çarpım eşitsizliğinin özel bir halidir. Eşitlik durumu $\lambda_1^2 = ... = \lambda_n^2 = c \geq 0$ durumunda geçerlidir.

8. BAZI DETERMİNANT EŞİTSİZLİKLERİ

Teorem 8.1.[3] A, B, C $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$\det(A+C)+\det(B+C) \leq \det C+\det(A+B+C) \tag{8.1}$$

dir.

İspat: A matrisinin tekil olmayan bir matris olduğunu kabul edelim. Ayrıca $C = \mathrm{I}$ alınarak ispatın yapılması genelliği bozmayacaktır. $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere λ_i, μ_i ve δ_i'ler sırasıyla B, A ve $B+A$ matrislerinin $i.$ özdeğerleri olsunlar. Öyleyse üstteki eşitsizliği

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)+\prod_{i=1}^{n}(1+\mu_i) \leq 1+\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i)$$

şeklinde yazabiliriz. $\delta_k(x)$, k .elementer simetrik fonksiyon olmak üzere

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)=1+(x_1+x_2+...+x_n)+...+x_1x_2...x_n=\sum_k \delta_k(x)$$

eşitliği doğrudur.

$E_k(x)=\delta_k(\lambda_1(x),...,\lambda_n(x))$ x'in özdeğerlerinin k. elementer simetrik fonksiyonları ve $E_k(A)+E_k(B) \leq E_k(A+B)$ bilgisinden hareketle eşitsizliğin doğru olduğu aşikardır.

Bu teoremde $C = 0$ alınırsa

$$\det(A+B) \geq \det A+\det B \tag{8.2}$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\det(A+C)+\det(B+C) \leq \det C+\det(A+B+C)$$

eşitsizliği

$$\det(A+B) \geq \det A+\det B$$

eşitsizliğinin bir genişletmesi olduğu gerçeğine varılır.

Minghua Lin [6] makalesinde, (8.1) ile (8.2) arasında aşağıdaki ilişkiyi elde etmiştir.

Teorem 8.2.[3] A, B, C pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$\det(A+B+C)+\det C-\left(\det(A+C)+\det(B+C)\right)\geq \det(A+B)-(\det A+\det B)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Haynsworth $[5]$ çalışmasında aşağıdaki teoremleri vermiştir.

Teorem 8.3.[5] A, B $n\times n$ tipinde Hermityen matrisler $\left(A_{ij}\right),\left(B_{ij}\right)$ $i, j=1,2$, matrisleri A ve B matrislerinin blokları olsun. Ayrıca A_{11} ve B_{11} matrislerinin kare matrisler olduğunu kabul edelim.

Eğer $A\geq 0, B\geq 0, A_{11}>0, B_{11}>0$ ise

$$\left(A+B/A_{11}+B_{11}\right)\geq\left(A/A_{11}\right)+\left(B/B_{11}\right)$$

dir.

Teorem 8.4.[5] A, B $n\times n$ tipinde Hermityen matrisler $\left(A_{ij}\right),\left(B_{ij}\right)$ $i, j=1,2$, matrisleri A ve B matrislerinin blokları olsun. Ayrıca A_{11} ve B_{11} matrislerinin kare matrisler olduğunu kabul edelim.

$$\det\left(A+B/A_{11}+B_{11}\right)\geq \det A/\det A_{11}+\det B/\det B_{11}$$

dir.

Sonuç olarak Haynsworth [5] makalesinde $\det\left(A+B\right)\geq\det A+\det B$ eşitsizliğini geliştirerek aşağıdaki eşitsizliği bulmuştur.

Teorem 8.5.[5] A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $k=1,\ldots,n$ için A_k ve B_k ’lar sırasıyla A ve B matrislerinin *k.* mertebeden sol üst köşede ki esas alt matrisleri ise

$$\det(A+B) \geq \det A\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det(B_k)}{\det(A_k)}\right)+\det B\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det(A_k)}{\det(B_k)}\right)$$

dir.

Hartfiel, 'An Extension of Haynsworth's determinant inequality' , makalesinde Haynsworth'un elde ettiği eşitsizliği geliştirerek aşağıdaki teoremi sunmuştur.

Teorem 8.6.[9] A, B matrisleri $n.$ mertebeden pozitif tanımlı matrisler olmak üzere

$$\det(A+B) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det(B_i)}{\det(A_i)}\right)\det A+\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det(A_i)}{\det(B_i)}\right)\det B+\left(2^n-2n\right)\left(\det A.\det B\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir.

İspat: A ve B $k.$ mertebeden matrisler olsun.

$k=1$ ise eşitsizlik $|A+B| \geq |A|+|B|$ eşitsizliğine indirgenir ki üçgen eşitsizliğinden doğrudur.

$k<n$ olmak üzere eşitsizliğin her $k\times k$ boyutunda A ve B matrisi için doğru olsun.

Şimdi A ve B matrislerinin $n.$ mertebeden pozitif tanımlı matrisler olduğunu kabul edelim. Öyleyse Teorem 8.4' ten

$$\begin{aligned}\det(A+B) &= \det(A_{n-1}+B_{n-1})\det\left(A+B/(A_{n-1}+B_{n-1})\right)\\ &\geq \det(A_{n-1}+B_{n-1})\left(\det A/\det A_{n-1}+\det B/\det B_{n-1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tümevarım metodundan

$$\begin{aligned}\det(A+B) \geq &\left(1+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\det(B_i)}{\det(A_i)}\right)\det A_{n-1}+\left(1+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\det(A_i)}{\det(B_i)}\right)\det B_{n-1}\\ &+\left(2^{n-1}-2(n-1)\right)\left(\det(A_{n-1}).\det(B_{n-1})\right)^{\frac{1}{2}}.\left[\frac{\det A}{\det A_{n-1}}+\frac{\det B}{\det B_{n-1}}\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da bazı hesaplamalar sonucunda

$$\det\left(A+B\right)\geq\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det(B_i)}{\det(A_i)}\right)\det A+\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det(A_i)}{\det(B_i)}\right)\det B+\left(2^n-2n\right)\left(\det A.\det B\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir ki istenen bulunmuş olur.

Bu teoremin doğal bir sonucu şu şekilde verilebilir.

Teorem 8.7.[9] Eğer A ve B matrisleri $n.$ mertebeden pozitif tanımlı matrisler ise

$$\det(A+B)\geq\det A+\det B+\left(2^n-2\right)\left(\det A.\det B\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Eşitlik durumu $A=B$ için geçerlidir.

Teorem 8.8.[2] **(Ostrowski-Taushy Eşitsizliği)**

$H,K\in M_n$ Hermityen matrisler ve $A=H+iK$ olsun.

Eğer H pozitif tanımlı ise

$$\det H\leq\left|\det H+iK\right|=\left|\det A\right|$$

dır. Eşitlik durumu $K=0$ olması durumunda yani A matrisi hermityen matrisi iken geçerlidir.

İspat: $A=H(I+iH^{-1}K)$ yazarsak eşitsizliğimiz

$$\left|\det(I+iH^{-1}K)\right|\geq 1$$

halini alır. Teorem 6.4. den $H^{-1}K$ köşegenleştirilebilir ve $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ reel özdeğerlere sahiptir.

Öyleyse

$$\left|\det(I+iH^{-1}K)\right|=\prod_{j=1}^{n}\left|1+i\lambda_j\right|$$

ve

$$\left|1+i\lambda\right|^2=1+\lambda^2\geq 1$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur. Eşitlik durumu $\lambda = 0$ olması halinde sağlanır. Bu da $H^{-1}K = 0$ olması ile yani $K = 0$ olması halinde geçerlidir. Bu da A matrisinin hermityen olması durumunda sağlanır.

Ostrowski-Taussky eşitsizliğini aşağıdaki teoremde biraz daha geliştirebiliriz.

Teorem 8.9.[2] $n \geq 2,$ H ve K matrisleri hermityen matrisler ve $A = H + iK$ olsun. Eğer H pozitif tanımlı ise

$$\det H + \left|\det K\right| \leq \left|\det\left(H + iK\right)\right|$$

dir. $n = 2$ ise bu eşitsizlik bazı c reel sayıları için $K = cH$ olması durumunda eşitlik haline gelir. $n \geq 3$ ise eşitlik haline gelmesi için gerek ve yeter şart $K = 0$ olması yani A matrisinin hermityen matris olmasıdır.

İspat: Eşitsizliğin doğru olması için bir önceki özellikte olduğu gibi $i = 1,...,n$ için λ_i ’ler $H^{-1}K$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\left|\det(I + iH^{-1}K)\right| = \prod_{j=1}^{n}\left|1 + i\lambda_j\right| \geq 1 + \prod_{j=1}^{n}\left|\lambda_j\right| = \det I + \left|\det(H^{-1}K)\right|$$

eşitsizliğini ispatlarsak istediğimizi elde etmiş oluruz.

$$\left|1 + i\lambda_j\right|^2 = 1 + \lambda_j^{\,2}$$

olduğundan yukarıdaki eşitsizliğe denk olarak

$\forall\lambda_j \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 2$ için $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \lambda_j^2\right) \geq \left(1 + \prod_{j=1}^{n}\left|\lambda_j\right|\right)^2$ eşitsizliğini ispatlayalım.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}\left(1+\lambda_1^2\right)\left(1+\lambda_2^2\right) &= 1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 \\ &\geq 1 + 2\left|\lambda_1\lambda_2\right| + \lambda_1^2\lambda_2^2 = \left(1 + \left|\lambda_1\lambda_2\right|\right)^2\end{aligned}$$

bulunur ki eşitlik ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = c \Leftrightarrow K = cH$ olduğunda geçerlidir.

$n \geq 3$ ise

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j^2\right)=1+\prod_{j=1}^{n}\lambda_j^2+\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_j^2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2+\text{negatif olmayan terimler}$$

$$\geq 1+\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_j^2+\lambda_n^2+\prod_{j=1}^{n}\lambda_j^2+\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j^2$$

$$\geq 1+\left(\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_j^2+\lambda_n^2\right)+\prod_{j=1}^{n}\lambda_j^2$$

$$\geq 1+2\left(\prod_{j=1}^{n-1}\left|\lambda_j\right|\right)\left|\lambda_n\right|+\prod_{j=1}^{n}\lambda_j^2$$

$$=\left(1+\prod_{j=1}^{n}\left|\lambda_j\right|\right)^2$$

bulunur ki ispat tamamlanır.

Teorem 8.10.[2] $f(A)=\log\det A$ fonksiyonu $n\times n$ tipinde pozitif tanımlı matrislerin oluşturduğu konveks küme üzerinde keskin konkav bir fonksiyondur.

İspat: A ve B pozitif tanımlı matrisleri alalım. $\alpha\in(0,1)$ için

$$f\left(\alpha A+(1-\alpha)B\right)\geq \alpha f(A)+(1-\alpha)f(B) \tag{8.3}$$

olduğunu göstermeliyiz. Teorem 6.3'den $A=CIC^*$ ve $B=CDC^*$ eşitliklerini sağlayan $C\in\mu_n$ ve $D=k\ddot{o}\c{s}\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right),\lambda_i>0$ matrislerinin olduğu bilinir.

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha A+(1-\alpha)B\right) &= \log\det\left[\alpha A+(1-\alpha)B\right]\\
&= \log\det\left[C\left(\alpha I+(1-\alpha)D\right)C^*\right]\\
&= \log\left(\det CC^*.\det\left(\alpha I+(1-\alpha)D\right)\right)\\
&= \log\det CIC^*+\log\det\left(\alpha I+(1-\alpha)D\right)\\
&= \log\det A+\log\det\left(\alpha I+(1-\alpha)D\right)\\
&= f(A)+\log\det\left(\alpha I+(1-\alpha)D\right)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B) &= \alpha \log\det A+(1-\alpha)\log\det(CDC^*) \\
&= \alpha f(A)+(1-\alpha)\log\left(\det(CC^*).\det D\right) \\
&= \alpha f(A)+(1-\alpha)f(A)+(1-\alpha)\log\det D^* \\
&= f(A)+(1-\alpha)\log\det D
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

(8.3) eşitsizliğinin sağlanması için

$$\log\det\left(\alpha I+(1-\alpha)D\right)\geq(1-\alpha)\log\det D$$

olduğunu göstermek yetecektir. $\log x$ fonksiyonunun keskin konkav olduğu bilgisi yardımıyla bu eşitsizliği şu şekilde ispatlayabiliriz.

$$\begin{aligned}
\log\det\left(\alpha I+(1-\alpha)D\right) &= \log\prod_{i=1}^{n}\left(\alpha+(1-\alpha)\lambda_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\log\left(\alpha+(1-\alpha)\lambda_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha\log 1+(1-\alpha)\log\lambda_i\right] \\
&= (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\log\lambda_i=(1-\alpha)\log\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \\
&= (1-\alpha)\log\det D
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin eşitlik haline gelmesi $\forall i$ için $\lambda_i=1$ olması ile gerçekleşir. Bu da $D=I$ olması yani $A=B$ olması ile sağlanır.

Her iki tarafı üstel fonksiyona tabi tutarak, üstel fonksiyonun artan fonksiyon olmasından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 8.1. A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $0<\alpha<1$ olsun. Öyleyse

$$\det\left(\alpha A+(1-\alpha)B\right)\geq\det A^{\alpha}.\det B^{1-\alpha}$$

dir. Eşitlik durumu $A=B$ için geçerlidir. $\alpha=\dfrac{1}{2}$ alırsak $\Rightarrow$ $\det\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\geq\sqrt{\det AB}$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik matrislerin aritmetik-geometrik ortalamaları üzerine bir determinant eşitsizliğidir.

Ayrıca Minkowski determinant eşitsizliğinde A matrisi yerine αA matrisi, B matrisi yerine $(1-\alpha)B$ yazınca

$$\left[\det(\alpha A+(1-\alpha)B)\right]^{\frac{1}{n}} \geq \alpha(\det A)^{\frac{1}{n}} + (1-\alpha)(\det B)^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da $f(A)=(\det A)^{\frac{1}{n}}$ fonksiyonunun pozitif tanımlı matrisler kümesi üzerinde konkav olduğunu gösterir.

Lakin A ve B keyfi kompleks matrisler olduğunda bu eşitsizlikler genellikle geçerli değildir.

Fozi M. Dannan[7] , Convexity of $f(A)=(\det A)^m$ adlı makalesinde $f(A)=\det A$ fonksiyonunun konveksliği üzerine çalışmış ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 8.11.[7] $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ pozitif tanımlı matrisler ve λ_j $(j=1,2,...,n)$ $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ matrisinin özdeğerleri olsun. Eğer her i için $\lambda_i>1$ veya $\lambda_i<1$ ise

$$\det(\alpha A+\beta B)\leq \alpha\det A+\beta\det B$$

eşitsizliği $\alpha,\beta>0$ ve $\alpha+\beta=1$ şartı altında geçerlidir

Teorem 8.12.[7] A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ matrisinin bütün özdeğerleri 1'den büyük veya 1'den küçük olsun. Öyleyse $f(A)=(\det A)^m$ fonksiyonu pozitif tanımlı matrisler kümesi üzerinde $m>1$ veya $m<0$ olduğunda konveks bir fonksiyondur.

Shilin Zhan, [8], çalışmasında A ve B matrislerinin keyfi kompleks kare matrisler olması durumunu incelemiş ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 8.13.[8] $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. B matrisi tekil olmayan bir matris ve $\operatorname{Re}\lambda_k\left(B^{-1}A\right) \geq 0 \quad (k = 1, 2, ..., n)$ olması durumunda $t \geq \frac{2}{n}$ için

$$\left|\det(A+B)\right|^t \geq \left|\det(A)\right|^t + \left|\det(B)\right|^t$$

eşitsizliği geçerlidir. Özel olarak $t = 1$ alınırsa

$$\left|\det(A+B)\right| \geq \left|\det A\right| + \left|\det B\right|$$

bulunur.

Teorem 8.14.[8] $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. B matrisi tekil olmayan bir matris ve $\operatorname{Re}\lambda_k\left(B^{-1}A\right) \geq 0,\ (k = 1, 2, ..., n)$ olsun. $B^{-1}A$ matrisinin tüm özdeğerlerinin aynı modüle sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\left|\det(A+B)\right|^{\frac{2}{n}} \geq \left|\det A\right|^{\frac{2}{n}} + \left|\det B\right|^{\frac{2}{n}}$$

olmasıdır.

Teorem 8.15.[8] $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrislerini alalım. B tekil olmayan matris ve $\operatorname{Re}\lambda_k\left(B^{-1}A\right) \geq 0,\ (k = 1, 2, ..., n)$ olsun. Eğer $B^{-1}A$ matrisinin r tane reel özdeğeri var ve diğer kökleri de eşlenik kompleks kökler ise

$$\left|\det(A+B)\right|^t \geq \left|\det A\right|^t + \left|\det B\right|^t$$

eşitsizliği $t \geq \frac{2}{n+r}$ için sağlanır.

Bu teoremden yararlanarak Minkowski determinant eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi şöyle verilebilir.

Teorem 8.16.[8] A, B $n \times n$ tipinde matrisler olsun. Eğer B tekil olmayan matris ve $B^{-1}A$ matrisinin bütün özdeğerleri pozitif sayılar ise $t \geq \frac{1}{n}$ için

$$\left|\det(A+B)\right|^t \geq \left|\det(A)\right|^t + \left|\det(B)\right|^t$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 8.1.[10] $n \times n$ kompleks matrisler kümesinden kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesinde tanımlanan,

$$F(\bullet): M_n \to D (D \subseteq \mathbb{C})$$
$$A \to F(A) = x^* Ax, (x \in \mathbb{C}^n)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} W(A) &= \{F(A) : A \in M_n\} \\ &= \{x^* Ax : A \in M_n, x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \\ &= \{x^* Ax : A \in M_n, x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

ile tanımlanan kümeye, cebirsel anlamda $A \in M_n$ matrisinin nümerik bölgesi, kümedeki kompleks sayılara kompleks düzlemde noktaların karşılık getirilmesi ile oluşan geometrik şekle, A 'nın sayısal görüntüsü denir. Bu başka bir ifade ile cebirsel olarak matrisin nümerik bölgesi, geometrik olarak sayısal görüntü anlamındadır.

Ayrıca bir A matrisinin Hermityen ayrışımı veya Toeplitz ayrışımı $A = B + iC$ olarak bilinir. Burada

$$B = \frac{A + A^*}{2}, \quad C = \frac{A - A^*}{2i}$$

olduğu bilinmektedir. Dikkat edilirse B ve C hermityen matrislerdir.

Kompleks düzlemin belirli alt kümeleri ve kompleks kare matrislerin bazı özel sınıfları arasında iyi bilinen benzerlikler vardır. Örneğin modülü 1 olan kompleks sayılar üniter matrislere, reel sayılar da birçok durumda Hermityen matrislere benzerdir. Özel matrislerin başka bir türü vardır ki kompleks düzlemin uzayın birinci bölgesindeki sayılara benzemektedir.

A matrisinin hermityen ayrışımında eğer B pozitif yarı tanımlı $(B \geq 0)$ ise A ya akretif matris denir. Eğer B pozitif tanımlı $(B > 0)$ ise A ya kesin akretif matris denir. Benzer şekilde eğer C pozitif yarı tanımlı $(C \geq 0)$ ise A ya dissipatif, C pozitif tanımlı $(C > 0)$ ise A ya kesin dissipatif matris denir.

Hem $(B \geq 0)$ hem de $(C \geq 0)$ ise A ya akretif- dissipatif matris denir. Hem $(B > 0)$ hem de $(C > 0)$ ise A ya kesin akretif- dissipatif matris denir.

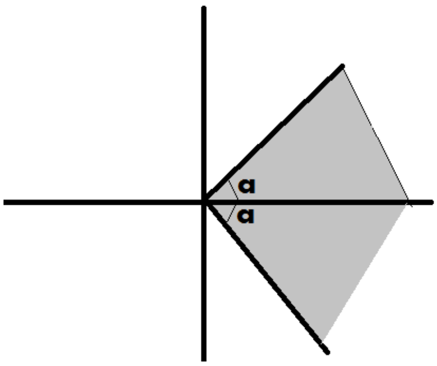
M_n^{++} sembolünü $(B > 0)$ ve $(C \geq 0)$ olmak üzere akretif- dissipatif matrislerin genişletilmiş kümesini göstersin.

Hermityen pozitif tanımlı matrisler M_n^{++} kümesinin alt kümesidir. M_n^{++} deki matrislerin birçok özelliği pozitif tanımlı matrislerin özelliğinin doğal genişlemesidir. Şimdi de özel bir matristen bahsedelim.

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0, \left|\operatorname{Im} z\right| \leq \left|\operatorname{Re} z\right| \tan \alpha \right\}$$

kümesine kompleks düzlemde sektör adı verilir. Bir A matrisinin nümerik bölgesi bir $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ değeri için $\left\{ z : \left|\arg z\right| \leq \alpha \right\}$ kümesinin alt kümesi ise A ya sektör matris adı verilir. Yani bir α değeri için bir A matrisinin nümerik bölgesi



taralı bölgenin içine düşüyorsa A ya sektör matris denir.

Akretif – Dissipatif matrisler; sektör matris olarak alınabilir mi sorusu aklımıza gelmektedir. Akretif- Dissipatif matrisleri sektör matris olarak düşünmek 2 problem ortaya çıkarır. Birincisi bütün akretif-dissipatif matrisleri içine alan bir α değeri bulunmamaktadır. İkincisi olarak da akretif-dissipatif matrislerin nümerik bölgeleri birinci bölgeye düştüğünden dolayı sektörün alt kısmına gerek yoktur.

Bundan sonraki kısımda sektör matrisleri ve Akretif-Dissipatif matrisleri içeren determinant eşitsizlikler üzerinde durulacaktır.

'Extension of a result of Haynworth and Hartfiel' adlı çalışmasında Lin [11] tarafından aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 8.17.[11] $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $W(A) \subset S_\alpha$ olsun.

Öyleyse

$$|\det A| \leq \sec^n(\alpha)\det(\operatorname{Re} A)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu teorem Ostrowski-Taussky eşitsizliğinin sektör matrisler için tersi olarak kabul edilebilir.

Minghua Lin, aynı çalışmasında Haynsworth eşitsizliğini sektör matrisler için şu şekilde elde etmiştir.

Teorem 8.18.[11] $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ve $W(A), W(B) \subset S_\alpha$ olsun.

A_k ve B_k, $k = 1, \ldots, n-1$, sırasıyla A ve B matrislerinin ilk temel alt matrisleri olsun. Öyleyse

$$\operatorname{Sec}^n(\alpha)|\det(A+B)| \geq \left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right)|\det A| + \left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right)|\det B|$$
$$+\left(2^n - 2n\right)\sqrt{|\det AB|}$$

dir.

Bu teorem yardımıyla Minghua Lin [11] , akretif-dissipatif matrisler için bir eşitsizlik elde etmiştir. A matrisi akretif-dissipatif matris ise

$$W\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}A\right)\subset S_{\frac{\pi}{4}}$$

olur. Yani $e^{-i\frac{\pi}{4}}A$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ için bir sektör matristir. Dolayısıyla yukarıdaki teoremde A yerine $e^{-i\frac{\pi}{4}}A$, B yerine $e^{-i\frac{\pi}{4}}B$ ve $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ yazarsak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 8.19.[11] $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ akretif-dissipatif matrisler olsun. A_k ve B_k, $k=1,\dots,n-1$, sırasıyla A ve B matrislerinin ilk temel alt matrislerini göstermek üzere

$$2^{\frac{3n}{2}-1}\left|\det(A+B)\right|\geq\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right)\left|\det A\right|+\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right)\left|\det B\right|$$
$$+\left(2^n-2n\right)\sqrt{\left|\det AB\right|}$$

dir.

Zhang ve arkadaşları tarafından bu teoremler geliştirilerek aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 8.20.[13] $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ ve $W(A),W(B)\subset S_\alpha$ olsun.

A_k ve B_k, $k=1,\dots,n-1$, sırasıyla A ve B matrislerinin ilk temel alt matrisleri olsun. Öyleyse

$$\operatorname{Sec}^{2n-1}(\alpha)\left|\det(A+B)\right|\geq\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right)\left|\det A\right|+\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right)\left|\det B\right| \qquad (8.4)$$
$$+\left(2^n-2n\right)\sqrt{\left|\det AB\right|}$$

olur.

Teorem 8.21.[13] $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ akretif-dissipatif matrisler olsun. A_k ve B_k, $k = 1, \dots, n-1$, sırasıyla A ve B matrislerinin ilk temel alt matrislerini göstermek üzere

$$2^{n-\frac{1}{2}} \left|\det(A+B)\right| \geq \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right) |\det A| + \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{\det A_k}{\det B_k}\right|\right) |\det B| + \left(2^n - 2n\right)\sqrt{|\det AB|}$$

olur.

Hartfiel eşitsizliğinin ikiden fazla matris için düşünüldüğü ilk çalışma Hou ve Dong [12] tarafından yapılmıştır. Hou ve Dong tarafından Hartfiel eşitsizliği 3 tane matris için çalışılmış ve

$$\begin{aligned} \det(A+B+C) \geq & \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\det B_k + \det C_k}{\det A_k}\right) \det A + \\ & \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\det A_k + \det C_k}{\det B_k}\right) \det B + \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\det A_k + \det B_k}{\det C_k}\right) \det C \\ & + \left(2^n - 2n\right)\left(\sqrt{\det AB} + \sqrt{\det AC} + \sqrt{\det BC}\right) \end{aligned} \tag{8.5}$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

Mao [12] tarafından Hartfiel determinant eşitsizliği çoklu matrisler için aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Teorem 8.22.[12] A_j, $j \in M = \{1, \dots, m\}$ matrisleri pozitif tanımlı matrisler olsun. $A_{jk}, k = 1, \dots, n-1$, için A_j matrislerinin k. ilk temel alt matrisi olsun. Öyleyse

$$\det\left(\sum_{j=1}^{m} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{m} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sum\limits_{i \neq j, i \in M} \det A_{ik}}{\det A_{jk}}\right) \det A_j + \left(2^n - 2n\right) \sum_{1 \leq i < j \leq m} \sqrt{\det A_i . \det A_j}$$

dir.

Bu eşitsizlikte $m = 2$ alınırsa Hartfiel eşitsizliği ; $m = 3$ alınırsa (8.5) eşitsizliği elde edilir.

Mao bu çalışmasında elde ettiği eşitsizliği sektör matrislere de uyarlayarak aşağıdaki teoremleri elde etmiştir.

Teorem 8.23.[12] $A_j \in M_n$ matrisleri $W(A_j) \subset \delta_\theta$ şartını sağlasınlar. $A_{jk}, k = 1,...,n-1$, matrisleri $A_j, j \in M = \{1,...,m\}$, $k.$ ilk temel alt matrisleri olsunlar. Öyleyse

$$\operatorname{Sec}^n(\theta)\left|\det\left(\sum_{j=1}^m A_j\right)\right| \geq \sum_{j=1}^m \left(1+\cos^k(\theta)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sum_{i\neq j, i\in M}\left|\det A_{ik}\right|}{\left|\det A_{jk}\right|}\right)\left|\det A_j\right|$$
$$+\left(2^n-2n\right)\sum_{1\leq i<j\leq m}\sqrt{\left|\det A_i A_j\right|}$$

elde edilir.

Teorem 8.24.[12] $A_j \in M_n$ matrisleri $W(A_j) \subset \delta_\theta$ şartını sağlasınlar. $A_{jk}, k = 1,...,n-1$, matrisleri $A_j, j \in M = \{1,...,m\}$, $k.$ ilk temel alt matrisleri olsunlar. Öyleyse

$$\operatorname{Sec}^{2n-1}(\theta)\left|\det\left(\sum_{j=1}^m A_j\right)\right| \geq \sum_{j=1}^m \left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sum_{i\neq j, i\in M}\left|\det A_{ik}\right|}{\left|\det A_{jk}\right|}\right)\left|\det A_j\right|$$
$$+\left(2^n-2n\right)\sum_{1\leq i<j\leq m}\sqrt{\left|\det A_i A_j\right|}$$

elde edilir.

Bu teoremde $m=2$ alınırsa (8.4) eşitsizliği elde edilir.

9. ARAŞTIRMA BULGULARI VE SONUÇLAR

Bu kısımda çalışmamız esnasında elde ettiğimiz sonuçları sunacağız. Kullandığımız en önemli araç Teorem 7.12 olacaktır.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisleri için

$$\det(A+B) \geq \det A + \det B \tag{9.1}$$

eşitsizliği iyi bilinmektedir.

(9.1) eşitsizliği Minkowski determinant eşitsizliği olarak bilinen

$$\left(\det(A+B)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\det A\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\det B\right)^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliğinden kolaylıkla elde edilebilmektedir. Daha önceki bölümlerde de verdiğimiz üzere, Hartfiel [9] ve Haynsworth [5] (9.1) eşitsizliğini geliştirerek

$$\begin{aligned}\det(A+B) \geq \left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det(B_k)}{\det(A_k)}\right)\det A + \\ \left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det(A_k)}{\det(B_k)}\right)\det B + \left(2^n - 2n\right)\sqrt{\det AB}\end{aligned} \tag{9.2}$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir. Hartfiel tarafından ayrıca bu eşitsizliğin bir sonucu olarak

$$\det(A+B) \geq \det A + \det B + \left(2^n - 2\right)\sqrt{\det AB} \tag{9.3}$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisleri ele alındığında

$$\left|\det(A+iB)\right| \leq \det(A+B) \leq 2^{\frac{n}{2}}\left|\det(A+iB)\right| \tag{9.4}$$

eşitsizliği de $\det(A+iB)$ ile $\det(A+B)$ arasında bir karşılaştırma sunmaktadır.

Bu karşılaştırmanın bir sonucu olarak (9.2) eşitsizliğinde sol tarafı $\det(A+iB)$ almamız halinde ne olur? sorusu aklımıza gelir. Bu durumu bir teorem olarak verelim.

Ama öncelikle teoremimiz için gerekli olan bir teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 9.1.[3] $A \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif tanımlı matris ve A_i'de A matrisinin esas alt matrisi olsun.

$$\left(A^{-1}\right)_i \geq \left(A_i\right)^{-1}$$

dir.

Teorem 9.2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise

$$\left|\det(A+iB)\right|^2 \geq \left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det^{-1}\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right)_i}{\det\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right)_i}\right).\det^2 B+\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det^{-1}\left(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\right)_i}{\det\left(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\right)_i}\right).\det^2 A$$

$$+\left(2^n-2n\right)\det A.\det B$$

dir.

İspat : Teorem 7.12 ve Hartfiel eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\det(A+iB)\right|^2 = \det A.\det\left(A+BA^{-1}B\right) \geq \det A.\det B\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)_i}{\det\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right)_i}\right).\det\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$+\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right)_i}{\det\left(B^{-\frac{1}{2}}A^{-1}B^{-\frac{1}{2}}\right)_i}\right).\det\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(2^n-2n\right).1$$

eşitsizliği elde edilir. $\det A.\det B$'yi de parantez içine dağıttığımızda ve Teorem 9.1.'i kullandığımızda

$$\left|\det\left(A+iB\right)\right|^2 \geq \left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det^{-1}\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right)_i}{\det\left(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\right)_i}\right).\det^2 B+$$

$$+\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\det^{-1}\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)_i}{\det\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)_i}\right).\det^2 A+\left(2^n-2n\right).\det A\det B$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Benzer şekilde (9.3) eşitsizliğinde eşitsizliğin sol tarafının $\det\left(A+iB\right)$ olması halinde de sırada ki eşitsizliği elde ederiz.

Teorem 9.3. $A,B\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ pozitif tanımlı matrisler olsun. Öyleyse

$$\left|\det\left(A+iB\right)\right|^2 \geq \det^2 A+\det^2 B+\left(2^n-2\right)\det AB$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Teorem 7.12'ten

$\left|\det\left(A+iB\right)\right|^2 = \det A.\det(A+BA^{-1}B)$ olduğunu biliyoruz. (9.3) eşitsizliğini kullanarak

$$\geq \det A.\left(\det A+\det\left(BA^{-1}B\right)+\left(2^n-2\right).\det^{\frac{1}{2}} A.\det^{\frac{1}{2}}\left(BA^{-1}B\right)\right)$$

$$=\det^2 A+\det^2 B+\left(2^n-2\right)\det AB$$

bulunur ki istenen elde edilmiş olur.

Sonuç 9.1. $n \geq 2$ olduğunda $\left(2^n - 2\right) \geq 2$ olduğunu biliyoruz. Böylece Teorem 9.3'den

$$\begin{aligned}\left|\det\left(A+iB\right)\right|^2 &\geq \det^2 A + \det^2 B + \left(2^n - 2\right)\det AB \\ &\geq \det^2 A + \det^2 B + 2\det AB \\ &= \left(\det A + \det B\right)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın karekökü alınırsa

$$\left|\det\left(A+iB\right)\right| \geq \det A + \det B$$

bulunur. Bu eşitlikte A ve B pozitif tanımlı matrisler için Teorem 8.9'daki eşitsizliktir.

Teorem 7.23'de Fan Determinant eşitsizliğini vermiştik. Şimdi Teorem 7.12'yi kullanarak farklı ve basit bir ispatını verelim.

Teorem 9.4. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif tanımlı matrisler olsun. Öyleyse

$$\left|\det\left(A+iB\right)\right|^{\frac{2}{n}} \geq \det A^{\frac{2}{n}} + \det^{\frac{2}{n}} B$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : Teorem 7.12 ve Minkowski Determinant eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left|\det\left(A+iB\right)\right|^{\frac{2}{n}} = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}^{\frac{1}{n}} &= \det^{\frac{1}{n}} A \det^{\frac{1}{n}}\left(A + BA^{-1}B\right) \\ &\geq \det^{\frac{2}{n}} A + \det^{\frac{2}{n}} B\end{aligned}$$

olduğu rahatlıkla görülür.

Son olarak (9.4) eşitsizliğinin özel bir durum için iyileştirmesini vererek bu bölümü sonlandıracağız.

Teorem 9.5. $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif tanımlı matrisler olsun. Öyleyse

$$\left|\det(A+iB)\right| \leq \det\left(A+\frac{BA^{-1}B}{2}\right)$$

dir.

İspat : Teorem 7.12'den

$$\left|\det(A+iB)\right| = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \det^{\frac{1}{2}}(A).\det^{\frac{1}{2}}\left(A+BA^{-1}B\right)$$
$$\leq \det\left(A+\frac{BA^{-1}B}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 9.2. A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $B \leq 2A$ olsun. Öyleyse

$$\left|\det(A+iB)\right| \leq \det\left(A+\frac{BA^{-1}B}{2}\right) \leq \det(A+B)$$

bulunur ki (9.4) eşitsizliğinin bir genelleştirilmişi olduğu görülür.

KAYNAKLAR

[1] A.G. Ağargün ve H. Özdağ, *Lineer cebir ve çözümlü problemleri*. İstanbul: Birsen, 2015.

[2] R.A. Horn ve C.R. Johnson, *Matrix Analysis*. New York:Cambridge University Pres, 1985.

[3] F. Zhang, *Matrix Theory, Basic Results and Techniques*. NewYork: Springer-Verlag, 1999.

[4] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton: Princeton University Press, 2007.

[5] E.V. Haynsworth, "Applications of an inequality for the Schur complement" , *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol.24, pp.512-513, 1970.

[6] M. Lin, "A determinantal inequality for positive semidefinite matrices", *A Puplication of the International Linear Algebra Society*, vol.27, pp.821-826, 2014.

[7] F.M. Dannan, "*Convexity of* $f(A) = (\det A)^m$", *Mathematical Inequalities &Applications*, vol.14, pp.455-458, 2011.

[8] S. Zhan, " On the Determinantal Inequalities", *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol.6,ıssue 4, article 105, 2005.

[9] D.J. Hartfiel, " An Extension of Haynsworth's Determinant Inequality", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol.41, pp.463-465, 1973.

[10] A. George, K.D. Ikramov, "On the properties of accretive-dissipative matrices", *Math Notes,* vol.77, pp.767-776, 2005.

[11] M. Lin, "Extension of a result of Haynworth and Hartfiel", *Archiv der Mathematik*, vol.104, pp.93-100, 2015.

[12] Y. Mao, "Extension of Hartfiel's inequality to multiple matrices", *Mathematical Inequalities &Applications,* vol.21, pp.1105-1110, 2018.

[13] Y. Zheng, X. Jiang, X. Chen, F. Alsaadi, " More extensions of a determinant inequality of Harfiel", *Applied Mathematics and Computation,* vol.369, 2020.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Mehmet İbrahim FİGEN

Doğum Yeri :ADIYAMAN

Doğum Tarihi :17.05.1986

Medeni Hali :Evli

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta : mfigen@adiyaman.edu.tr

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Uygulamalı matematik	Adıyaman Üniversitesi	
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2012
Lise	Adıyaman Anadolu Lisesi		2004