T.C.

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİ DELTA ETKİLEŞİM NOKTALI STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPECTRAL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ahmet ZİNCİR

ADIYAMAN-2020

T.C.

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ DELTA ETKİLEŞİM NOKTALI STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPECTRAL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Ahmet ZİNCİR

Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Matematik Anabilim Dalı

ADIYAMAN-2020

T.C.

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DELTA ETKİLEŞİM NOKTALI STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPECTRAL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Ahmet ZİNCİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 22/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Danışman

Prof. Dr. Seyit TEMİR	**Prof. Dr. Abdullah KABLAN**
Üye	**Üye**

Doç. Dr. Tayfun SERVİ

Enstitü Müdür V.

ÖZET

İKİ DELTA ETKİLEŞİM NOKTALI STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPECTRAL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Ahmet ZİNCİR

Adıyaman Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Yıl: 2020, Sayfa sayısı: Vİ+44

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Prof. Dr. Seyit TEMİR

Prof. Dr. Abdullah KABLAN

Bu çalışmanın birinci kısmında, diferansiyel operatörler. Sturm-Liouville operatör ve ters spektral problemler ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, önceki çalışmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, Sturm-Liouville operatör, dönüşüm operatörü için genel bilgiler ve öz fonksiyonların özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde; iki Delta-Etkileşim noktalı Sturm-Liouville operatörünün spektal karakteristiklerinin incelenmesi, düz spektral problemler ile ilgili açıklamalar, teoremler ters problem formülleri ve teklik teoremleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville operatörü; Özdeğer, Özfonksiyon; Ters problem, Ters spektral problemler.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF SPECTRAL PROPERTIES OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH TWO DELTA INTERACTION POINT

Ahmet ZİNCİR

Adiyaman University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Year: 2020, Number of pages: vi+44

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Prof. Dr. Seyit TEMİR

Prof. Dr. Abdullah KABLAN

In the first part of this study, differential operarors. Information on Sturm-Liouville operator and inverse spectral problems is given. In the second part, previous studies are included. In the third chapter, basic definitions and theorems, which are frequently used in the spectral theory of differential operators, are given. In the fourth section, the Sturm-Liouville operator, general information fort he transformation operatör and the properties of the eigenfunctions are given. In the fifth section; Investigation of the spectral characteristics of two Delta-Interacting point Sturm-Liouville operators, explanations about straight spectral problems, theorems, inverse problem formulas and uniqueness theorems are given.

KeyWords: Sturm-Liouville Operators: Eigenvalue; Eigenfunction; Inverse problem; Inverse spectral problems.

BEYAN

Tez olarak sunduğum "İki Delta Etkileşim Noktalı Sturm- Liouville Operatörünün Spectral Özelliklerinin İncelenmesi" adlı çalışmanın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Tarih

Ahmet ZİNCİR

İmza

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında, bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmamda bana her şekilde destek olan sayın danışman hocam Sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI ’ya en içten duygularımla teşekkür ederim.

Ahmet ZİNCİR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİSİ

Simgeler

γ	: Normlaştırıcı Sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$C[a.b]$	: $[a.b]$ kapalı aralığında sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların uzayı
H	: Hilbert Uzayı
L	: Lineer Operatör
L^*	: L operatörünün eşleniği
$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
O, o	: Asimptotik davranışları tarif etmek için kullanılan simgeler
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$W(f,g)$	: Wronskian Determinantı
$y(x,\lambda)$	: Özfonksiyon
λ	: Değer
$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$	: Özdeğerlerin cümlesi

Kısaltmalar

SDP: Sınır Değer Problemi

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları titreşim teorisinin problemleridir. Özellikle L_2ve l_2 soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer özeşlenik operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. 19. ve 20. yüzyıllarda bu konularda çalışan matematikçiler tarafından geliştirilerek üst seviyelere çıkarılmıştır. Bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlamış ve farklı yöntemlerle veriler için asimptotik formüller bulunmuştur. Spektral teori için önemli olan açılım teoremleri de ispatlanmıştır. Bu tezde katsayıları genelleşmiş iki Delta Dirac fonksiyonlu Sturm-Liouville Operatörü için spektral özelliklerinin incelenmesi istenmektedir. Bunun için çözümün tüm bakılan aralıkta kurulması büyük önem taşımaktadır ve buna göre farklı yol izleneceği düşünülmektedir. Bunu esas alarak özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik durumu incelenecektir. Bu tezde özgün sonuçlar elde edip konuya derinlik kazandırmış olup bu tezin bundan sonra yapılacak çalışmalara kaynak olabileceği düşünülmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz nokta olan diferansiyel operatörlere singüler diferansiyel operatör denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. İlk defa 19. Yüzyılda Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulmuştur. Başlangıçta ısı iletimi problemlerinde yoğun olarak kullanılan teori, günümüzde farklı fiziksel problemlerde de uygulanmaktadır. Başta Naimark [11] olmak üzere, Titchmarsh [5], Jorgensen [16], Atkinson [9] bu teoriye büyük katkı sağlamıştır.

Spektral analizin ters problemleri spektral karakteristiklerine göre başlangıç verilerinin bulunuşundan oluşur. Bu tarz problemler mekanik, matematik, fizik, elektronik, meteoroloji, jeofizik gibi bilim dallarında kullanılır. Ters problem teorisi son yıllarda giderek artan şekilde bir ilgi görmektedir. Bu konudaki ilk çalışmalar bir dizinin titreşimini açıklayan denklemin çözümü ile ilgili olarak D. Bernoulli, Euler, Liouville ve Sturm tarafından yapılmıştır. Ters spektral problemlerin temel sonuçlar 20. Yüzyılın sonlarına doğru ortaya konulmuştur. Son zamanlarda ters spektral problemlerin uygulamaları için yeni uygulama alanları ortaya çıkmıştır.

Diferansiyel operatörlerin spektral problemleri düz ve ters spektral problemler olmak üzere iki ana dalda incelenmiştir. Spektral analizin doğrudan problemleri bir operatörün spektral özelliklerinin araştırılmasından oluşur. Ters problem operatörleri ise spektral özelliklerine dayanarak operatörünün kurulmasını oluşturmaktır. Bu spektral verileri bir, iki veya daha çok spektrum, spektral fonksiyon ve normalleştirici sabitler, Weyl fonksiyonu gibi kavramlar oluşturur.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. C kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir H lineer vektör uzayını ele alalım. H deki bir vektör çiftine bir sayı karşı getiren $<.,.>: H \times H \to \mathbb{C}$ fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahipse $<.,.>$ ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, <.,.>)$ ikilisine iç çarpım sayı denir.

Her $u, v \in H$ için $< u, v >= \overline{< v, u >}$

Her $u, v \in H$ ve a ∈ C İçin $< au, v >= a < u, v >$

Her $u, v, w \in H$ için $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$

Her $u \in H, u \neq 0$ için $< u, u > \geq 0$

Bu iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{< u - v, u - v >}$$

metriğine göre tam bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir

Tanım 3.2. $L_2[a, b]$ uzayı

$$L_2[a, b] = \left\{ x(t): \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım,

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3. Bir $X = (X, d)$ metrik uzayında (x_n) dizisi ele alalım. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

olacak şekilde $N = N(\epsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.4. $X = (X, d)$ metrik uzayında her *Cauchy dizisi* yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına *tamdır* denir.

Tanım 3.5. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|,\|: x \to R_+, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve $(X, \|,\|)$ ikilisine normlu vektör uzayı denir.

Tanım 3.6. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 3.7. Bir T lineer operatörü, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir operatördür.T nin tanım kümesi bir vektör uzayı olup, değer kümesi de aynı cisim üzerinde bir vektör uzaydır.

$\forall x. y \in D(T)$ ve a skaleri için ($D(T)$: tanım kümesi)

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(ax) = aTx$$

Tanım 3.8. $A: S(x, \delta) \to S(Ax, \epsilon)$ olsun. $|x - x_0| < \delta$ için $|Ax - Ax_0| < \epsilon$ ise A operatörüne süreklidir denir.

Tanım 3.9. H_1ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L: H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun Eğer, $L^*: H_2 \to H_1$ operatörü $< Lx, y > = < x, L^* y >$ şartını sağlıyorsa L operatörüne L nin eşleniği denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne *öz eşlenik operatör* denir.

Tanım 3.10. $L, D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün *özdeğeri* $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

Tanım 3.11. $\rho(A) = \left(\lambda \in C: (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\right)$ kompleks sayılar kümesine A operatörünün regüler değerler kümesi $б(A) = {}^{C}/_{\rho(A)}$ kümesine ise A operatörünün spektrum denir. $\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatorüne A operatörünün rezolventi denir.

Tanım 3. 12. $x \to 0$ veya $(x \to \infty)$ iken eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0\ ise\ f(x) = o\big(g(x)\big)$ ve $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ sınırlı ise $f(x) = O\big(g(x)\big)$ olarak gösterilir.

Tanım 3.13. $y_1, y_2, \dots, y_n$ ler ortak I aralığında tanımlı ve $(n-1)$ kez türevleri alınabilir n tane fonksiyonlar olsun.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ifadesinin determinantına n fonksiyonunun *Wronski*'si denir.

Bu bölümdeki tanım ve teoremler [1] den alınmıştır.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde sonlu aralıktaki Sturm Liouville operatörleri için spektral teoriye giriş yapılacaktır. Bölüm 4.1. de spektral analizin düz problemleri anlatılacaktır. Bölüm 4.2. de Sturm-Liouville operatörünün sınır değer problemleri için ana spektral karakteristikleri verilecektir. Özellikle özfonksiyon ve özdeğerlerin varlığının asimptotik davranışları üzerindeki teorem ispatlanacaktır. Bölüm 4.2 de fonksiyonların özellikleri incelenecektir. Özfonksiyon sisteminin tamamlandığı ve $L_2(0,\pi)$ de ortogonal bir sistem oluşturduğu kanıtlanacaktır. Biz özfonksiyonları karakterlerini araştırıp ve $(0,\pi)$ aralığında $n.$ dereceden fonksiyonların tam olarak n tane sıfırları olduğunu kanıtlayacağız.

4.1. Sturm-Liouville Operatörü

Aşağıdaki $L = L(q(x), h.H)$ sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$ly := -y'' + q(x)y = \lambda y,\ \ 0 < x < \pi \tag{4.1}$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0,\ V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{4.2}$$

Burada λ spektral parametre, $q(x), H, h$ reel sayı ve $q(x) \in L_2(0,\pi)$. Burada L operatörü Sturm-Liouville operatörüdür.

Tanım 4.1.1. $Bir\ \ \lambda$ skaleri için $ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $y \in D(L)$ çözümleri varsa λ skalerine bir özdeğer veya karakteristik değer adı verilir. Bu eşitliği sağlayan sıfırdan farklı vektörlere de λ ya karşılık gelen özfonksiyonlar adı verilir. Özdeğerlerin dizisi L nin spektrumuna denk gelir.

Biz bu bölümde L nin basit spektral özelliklerini elde edeceği ve özfonksiyonların ve özdeğerlerin asimptotik davranışlarını bulmak isteyeceğiz.

Aşağıdaki ilk şartlar altında (4.1) in çözümleri $C(x,\lambda), S(x,\lambda), \varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda)$ olsun.

$$C(0,\lambda) = 1, \qquad C'(0,\lambda) = 0, \qquad S(0,\lambda) = 0, \qquad S'(0,\lambda) = 1$$

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h, \qquad \psi(\pi,\lambda) = 1, \qquad \psi'(\pi,\lambda) = -H$$

Her sabit x için $\varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda), C(x,\lambda), S(x,\lambda)$ x e bağlı fonksiyonlardır. Bu durumda

$$U(\varphi) = \varphi'(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0, \qquad V(\psi) = \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0 \qquad (4.3)$$

olur.

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) \rangle \qquad (4.4)$$

tanımlayalım. $\Delta(\lambda)$ L nin karakteristik fonksiyonu ismini alır.

$\langle y(x), z(x) \rangle = y(x).z'(x) - y'(x).z(x)$ ifadesi y ve z nin Wronskiandır. Liouville'nin formülü $\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) \rangle$ Wronskianı x bağlı değildir[4]. (4.4) de $x = 0$ ve $x = \pi$ yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi) \qquad (4.5)$$

Teorem 4.1.2. *Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları L nin sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakışır. $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları özfonksiyonlardır ve aşağıdaki şartı sağlayan bir ardışık $\{\beta_n\}$ ler vardır:*

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(x,\lambda_n) \quad \beta_n \neq 0 \qquad (4.6)$$

İspat: $\lambda_0, \Delta(\lambda)$ nin bir sıfırı olsun (4.3) ve (4.5) sayesinde $\psi(x,\lambda_0) = \beta_0.\varphi(x,\lambda_0)$ olur ve fonksiyonlar $\psi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_0)$ (4.2) değer şartlarını sağlar. Bundan dolayı λ_0 bir özdeğer ve $\psi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarında buna karalık gelen özfonksiyonlardır.

λ_0, L nin bir özdeğeri olsun ve y_0 da buna karşılık gelen özfonksiyon olsun, $U(y_0) = V(y_0) = 0$ olur buradan $y_0(0) \neq 0$ olur $y_0(0) = 1$ yazabiliriz. ${y_0}'(0) = h$ ve bu yüzden $y_0(x) \equiv \varphi(x,\lambda_0)$, (4.5) bize $\Delta(\lambda_0) = V\big(\varphi(x,\lambda_0)\big)$ $\Delta(\lambda_0) = V\big(\varphi(x,\lambda_0)\big) = V\big(y_0(x)\big) = 0$ ifadesini verir. Dolayısıyla biz her özdeğere bir özfonksiyon karşılık geldiğini kanıtlamış olduk.□
Bölüm boyunca aşağıdaki notasyonu kullanacağız.

$$\gamma_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n).dx \qquad (4.7)$$

$\{\gamma_n\}$ sayıları normlaştırıcı sayıları ismini alır ve bu durumda $\{\gamma_n, \lambda_n\}$ sayıları da L nin spektral verileridir.

Lemma 4.1.3. $\dot{\Delta}(\lambda_n) = -\beta_n \gamma_n$ (4.8) *ifadesi doğrudur. Burada β_n sayıları (4.6) yardımıyla tanımlanır ve $\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$ dır.*

İspat: $$-\psi''(x,\lambda) + q(x)\cdot\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda);$$

$$-\varphi''(x,\lambda_n) + q(x)\cdot\varphi(x,\lambda_n) = \lambda_n\cdot\varphi(x,\lambda_n)$$

Buradan şunu elde ederiz.

$$\frac{d}{dx} < \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n) >= \psi(x,\lambda).\varphi''(x,\lambda_n) - \psi''(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)$$

$$= (\lambda-\lambda_n)\cdot\psi(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)$$

ifadesi ve (4.5) yardımıyla

$$= (\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \psi(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n).dx$$

$$= \langle\psi(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)\rangle\Big|_0^\pi$$

$$= \varphi'(\pi,\lambda_n) + H.(\pi,\lambda_n) + \psi'(0,\lambda) - h.\psi(0,\lambda) = -\Delta(\lambda)$$

olur. $\lambda \to \lambda_n$ için bu terim şöyle olur:

$$\int_0^\pi \psi(x,\lambda_n).\varphi(x,\lambda_n).dx = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$$

(4.6) ve (4.7) kullanılarak (4.8) elde ederiz yani, $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$ olur.

Teorem 4.1.4. *$\{\lambda_n\}$ özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonları reeldir. $\Delta(\lambda)$ nın bütün sıfırları basittir, yani $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$. $L_2(0,\pi)$ deki farklı değerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir.*

İspat: λ_n ve λ_k özdeğerler ve sırasıyla bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar $y_n(x)$ ve $y_k(x)$ olsun.

$$\int_0^\pi ly_n(x).y_k(x)dx = \int_0^\pi y_n(x).ly_k(x)dx$$

ve buradan

$$\lambda_n \int_0^{\pi} y_n(x).\, y_k(x)dx = \lambda_k \int_0^{\pi} y_n(x).\, y_k(x)dx$$

veya

$$\int_0^{\pi} y_n(x).\, y_k(x)dx = 0$$

olur. İlave olarak $\lambda^0 = u + iv, v \neq 0$ reel olmayan bir *özdeğer* ve $y^0(x) \neq 0$. $q(x), h, H$ reel olduğu için $\overline{\lambda^0} = u - iv$ i ayrıca $y^0(x)$ *özfonksiyonunu* elde ederiz. $\lambda^0 \neq \overline{\lambda^0}$ olduğu için

$$\|y^0\|_{L_2}^2 = \int_0^{\pi} y^0(x).\, \overline{y^0(x)}dx = 0$$

olur. Böylece L nin $\{\lambda_n\}$ bütün *özdeğerleri* ve $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ *özfonksiyonları* da reeldir. γ_n ve β_n sıfırdan farklı olduğundan (4.8) i elde ederiz, yani $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$ dır. □

Lemma 4.1.5. $|k| \to \infty$ *için aşağıdaki asimptotik formül*

$$\varphi(x, \lambda_n) = coskx + O\left(\frac{1}{|k|}\exp(|\tau|x)\right) = O\big(\exp(|\tau|x)\big)$$

$$\varphi'(x, \lambda_n) = -k.\, sinkx + O\big(\exp(|\tau|x)\big) = O(|k| \exp|\tau|x) \qquad (4.9)$$

$$\psi(x, \lambda_n) = cosk(\pi - x) + O\left(\frac{1}{|k|}\exp\big(|\tau|(\pi - x)\big)\right) = O\big(\exp|\tau|(\pi - x)\big)$$

$$\psi'(x, \lambda_n) = k.\, sink(\pi - x) + O\Big(|k| \exp\big(|\tau|(\pi - x)\big)\Big) = O\Big(|k| \exp\big(|\tau|(\pi - x)\big)\Big) \qquad (4.10)$$

$x \in [0, \pi]$ *ile eşittir. Burada ve devamında* $\lambda = k^2$ *ve* $\tau = Imk$ *, o ve* O *Landau sembolleridir.*

İspat:

$$\varphi(x, \lambda_n) = coskx + h.\frac{sinkx}{k} + \int_0^{\pi} \frac{sink(x - t)}{k}.\, q(t).\, \varphi(t, \lambda) \qquad (4.11)$$

olduğunu gösterelim. Aslında Volterra integral denklemi

$y(x,\lambda) = coskx + h.\frac{sinkx}{k} + \int_0^{\pi} \frac{sink(x-t)}{k}.q(t).y(t,\lambda)$ tek bir çözüme sahiptir. Öte yandan belli bir $y(x,\lambda)$ fonksiyonu bu denklemi sağlar. Buradan türev alırsak

$$y''(x,\lambda) + k^2.y(x,\lambda) = q(x).y(x,\lambda), \qquad y(0,\lambda) = 1 \quad y'(0,\lambda) = h$$

$y(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)$ ve (4.1) sağlanır. (4.11) i şöyle hesaplayabiliriz.

$$\varphi'(x,\lambda) = -ksinkx + h.coskx + \int_0^x cosk(x-t).q(t)\,\varphi(t,\lambda).dt \tag{4.12}$$

$$\mu(\lambda) = \max_{0\le x\le\pi}(|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x)).$$

$$|sinkx| \le \exp(|\tau|x) \text{ ve } |coskx| \le \exp(|\tau|x)$$

olduğu için $|k| \ge 1, x \in [0,\pi]$ için (4.11) sağlanır.

$$|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x) \le 1 + \frac{1}{|k|}.\big(h+\mu(\lambda)\big).\int_0^x |q(t)|dt \le C_1 + \frac{C_2}{|k|}.\mu(\lambda)$$

ve sonuç olarak $\mu(\lambda) \le C_1 + \frac{C_2}{|k|}$ olur.

Yeterli büyüklükte bir $|k|$ için $\mu(\lambda) = O(1)$ olur. Bu sonucun sağ tarafına (4.11) ve (4.12) konulursa (4.9) a benzer şekilde (4.10) ulaşabiliriz. (4.10) doğrudan (4.9) u verir. Aslında

$$-\psi''(x,\lambda_n) + q(x).\psi(x,\lambda) = \lambda.\psi(x,\lambda_n), \qquad \psi(x,\lambda_n) = 1, \qquad \psi'(,\lambda_n) = -H$$

olduğundan $\tilde{\varphi}(x,\lambda)q(\pi-x,\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonu sağlar ve başlangıç koşullarına göre

$$-\tilde{\varphi}''(x,\lambda) + q(\pi-x).\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \lambda.\tilde{\varphi}(x,\lambda), \ \ \tilde{\varphi}(0,\lambda) = 1, \qquad \tilde{\varphi}'(0,\lambda) = H$$

Bu nedenle (4.9) asimptotik formülü $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ fonksiyonu için de geçerlidir. Buradan (4.10) a ulaşırız. □

Teorem 4.1.6. *L nin sınır değer problemi sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.* $\{\lambda_n\}_{n\ge0}, n \ge 0$ *için*

$$p_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \qquad \{K_n\} \in l_2 \tag{4.13}$$

$$\varphi(x,\lambda_n) = cosnx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \qquad |\xi_n(x)| \le \mathbb{C}, \tag{4.14}$$

$$w = h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t).dt$$

Burada ve her yerde aynı $\{K_n\}$ gibi aynı semboller l_2 deki çeşitli dizileri gösterir. $\mathbb{C}$ sembolü x, λ, n gibi bağımlı olmayan pozitif sabitleri belirtir.

İspat: (4.9) daki $\varphi(x,\lambda)$ için (4.11) ve (4.12) deki sağ tarafların asimptotlarını değiştirirsek şunu hesaplayabiliriz.

$$\varphi(x,\lambda) = coskx + q_1(x).\frac{sinkx}{k} + \frac{1}{2k}.\int_0^x q(t).sink(x-2t).dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{p^2}\right)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -ksinkx + q_1(x).coskx + \frac{1}{2}\int_0^x q(t).cosk(x-2t).dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{p}\right) \quad (4.15)$$

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi'(x,\lambda)$ ifadelerine (4.15) diyelim. Burada $q_1(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t).dt$ olur. (4.5) e göre ve (4.15) yardımıyla $\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda) + H.\varphi(\pi,\lambda)$ yazılır.

$$\Delta(\lambda) = -k.sink\pi + w.cosk\pi + O\left(\frac{1}{p}\exp(|\tau|x)\right) \quad (4.16)$$

$$K(k) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t).cosk(\pi-2t).dt + O\left(\frac{1}{p}\exp(|\tau|\pi)\right)$$

$G_\delta = \{k: |k-K| \geq \delta, K = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}, \delta > 0$ olsun. Yeterli büyüklükte bir $k^* = k^*(\delta)$ için

$$|sink\pi| \geq C_\delta.|k|\exp(|\tau|x), \quad k \in G_\delta \quad (4.17)$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta.|k|\exp(|\tau|x), \qquad k \in G_\delta, |k| \geq k^* \quad (4.18)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$k = \sigma + i\zeta$ olsun. (4.17) i kanıtlamak yeterli olacaktır.

$$D_\delta = \left\{k: \sigma \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \zeta \geq 0, |k| \geq \delta\right\}$$

$\theta(k) = |sink\pi|\exp(-|\tau|\pi)$ alalım. $k \in D_\delta$ olsun. $r \leq 1$ için $\theta(k) \geq G_\delta$ olur.

$$sink\pi = \frac{(\exp(ik\pi) - \exp(-ik\pi))}{2i}$$

$r \geq 1$ için $\theta(k) = \frac{|1-\exp(2i\sigma\pi)-\exp(-2\zeta\pi)|}{2} \geq \frac{1}{4}$ olur. Böylece (4.17) kanıtlanmış oldu.

Sonuç olarak (4.16) yı kullanarak $k \in G_\delta$ için

$$\Delta(\lambda) = -k.sink\pi\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

ve bu yüzden (4.18) geçerlidir. $\tau_n = \left\{\lambda: |\lambda| = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\}$ alalım. (4.16) yardımıyla

$\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda),\ f(\lambda) = -k.sink\pi,\ |g(\lambda)| \leq C\exp(|\tau|\pi)$ elde edilir.

(4.17) ye göre yeterli büyüklükte bir $n(n \geq n^*)$ için $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|,\ \lambda \in \tau_n$ olur. Rouche teoremine [8] göre $\Delta(\lambda)$ nın τ_n içindeki sıfırlarının sayısı $f(\lambda) = -k.sink\pi$ sıfırlarının sayısı ile aynıdır ve $n+1$ tanedir. Böylece $|\lambda| < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ yuvarında L nin tam olarak $n+1$ özdeğeri vardır. Şimdi Rouche teoremini $\gamma_n(\delta) = \{k: |k-n| \leq \delta\}$ yuvarında uygulayarak $\gamma_n(\delta)$ yuvarındaki yeterince büyük bir n için $\Delta(k^2)$ nın bir sıfırı vardır yani $k_n = \sqrt{\lambda_n}$. Keyfi bir $\delta > 0$ için

$$k = n + \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n = o(1), \qquad n \to \infty \tag{4.19}$$

(4.19) u (4.16) da yerine koyarsak:

$$0 = \Delta(k_n^2) = -(n + \varepsilon_n).sin(n+\varepsilon_n).\pi + w.cos(n+\varepsilon_n).\pi + K_n$$

$$-n\,.sin(\varepsilon_n.\pi) + w.\cos(\varepsilon_n.\pi) + K_n = 0 \tag{4.20}$$

$$sin(\varepsilon_n.\pi) = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(4.20) yi kullanarak bir kez daha $\varepsilon_n = \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n}$ olduğunu buluruz. Dolayısıyla (4.13) geçerlidir. (4.13) ü (4.15) de yerine koyarsak (4.14) ü elde ederiz.

$$\varepsilon_n(x) = \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t).dt - x.\frac{w}{\pi} - x.K_n\right).sinnx$$

$$+\frac{1}{2}.\int_0^x q(t).sinn(x-2t).dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.21}$$

Sonuç olarak $|\varepsilon_n(x)| \leq C$ olur ve (4.1.6) teoremi kanıtlanmış olur. □

(4.6) yardımıyla $x = \pi$ için $\beta_n = \left(\varphi(\pi, \lambda_n)\right)^{-1}$ olur. (4.7), (4.8), (4.14) ve (4.21) kullanılarak

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2} + \frac{K_n}{n}, \quad \beta_n = (-1)^n + \frac{K_n}{n}, \qquad \dot{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}.\frac{\pi}{2} + \frac{K_n}{n} \tag{4.22}$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$ basit sıfırlara sahip olduğundan ve $n \geq 0$ için $\dot{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}$ dir.

Açıklama: Eğer $q(x) \in W_2^N$ ve $N \geq 1$ olursa daha öncede hesaplandığı gibi asimptotik formüller şöyle olur.

$$\begin{cases} k_n = n + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j}{n^j} + \frac{K_n}{n^{N+1}}, \ w_{2k} = 0, \qquad k \geq 0, \qquad w_1 = \frac{w}{\pi} \\ \gamma_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j^+}{n^j} + \frac{K_n}{n^{N+1}}, w_{2k+1}^+ = 0, \qquad k \geq 0, \ a_n > 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Gerçekten $q(x) \in W_2^1$ olsun.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.\int_0^x q(t).\cos k(x-2t)\,.dt = \frac{sinpx}{4k}.\left(q(x) + q(0)\right) + \frac{1}{4k}.\int_0^x q'(t).\cos(x-2t)\,.dt \\ \frac{1}{2p}.\int_0^x q(t).\text{sink}(x-2t)\,.dt = \frac{cospx}{4k}.\left(q(x) + q(0)\right) + \frac{1}{4k^2}.\int_0^x q'(t).\cos(x-2t)\,.dt \end{cases} \tag{4.24}$$

(4.15) ve (4.24) den

$$\varphi(x, \lambda) = coskx + \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t).dt\right)\frac{sinkx}{k} + O\left(\frac{(\exp(|\tau|x))}{k^3}\right)$$

(4.11) ve (4.12) nin sağ taraflarında yerine koyarsak, (4.24) ve (4.16) yı kullanarak $\Delta(\lambda)$ ve $\varphi^v(x, \lambda)$ için (4.15) ve (4.16) dakine nazaran daha açık olarak asimptotlar elde edilir.

$$q_1(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t).dt\,, w_0 = q_{21}(\pi) + Hq_1(\pi)$$

$$q_{2j}(x) = \frac{1}{4}(q(x) + (-1)^{j+1}.q(0)) + \frac{(-1)^{j+1}}{2}.\int_0^x q(t)q_1(t).dt, \qquad j = 0,1,$$

$K_0(k) = \frac{1}{4}.\int_0^{\pi} q'(t).\sin k(\pi - 2t)\,.dt + O\left(\frac{(\exp(|\tau|x))}{k}\right)$ iken;

$$\varphi(x,\lambda) = coskx + q_1(x).\frac{sinkx}{k} + q_{20}(x).\frac{coskx}{k^2}$$

$$-\frac{1}{4k^2}.\int_0^x q'(t).\cos k(x-2t)\,.dt + O\left(\frac{(\exp(|\tau|x))}{k^3}\right)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -k.sinkx + q_1(x)coskx + q_{21}(x).\frac{sinkx}{k}$$

$$\frac{1}{4k}.\int_0^x q'(t).\sin k(x-2t)\,.dt + O\left(\frac{(\exp(|\tau|x))}{k^2}\right)$$

$$\Delta(\lambda) = -k.sink\pi + w.cosk\pi + w_0.\frac{sink\pi}{k} + \frac{K_0(k)}{k} \tag{4.25}$$

(4.25) den aşağıdaki sonuca varırız.

$$k_n = n + \varepsilon_n, \quad -n.sin\varepsilon_n + w.cos\varepsilon_n + \frac{K_n}{n} = 0$$

olur. Bu nedenle

$$k_n = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n^2}, \quad \{K_n\}_{\in l_2}$$

olur. Benzer şekilde (4.23) deki formüllerde hesaplanabilir.

Teorem 4.1.7. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ *spektrumlarının şartlarını tek başına* $\Delta(\lambda)$ *karakteristik fonksiyonu belirler. Şöyle formüle edilir.*

$$\Delta(\lambda) = \pi.(\lambda_0 - \lambda).\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_0 - \lambda)}{n^2} \tag{4.26}$$

İspat: (4.16) dan $\Delta(\lambda)$ nın λ ya göre derecesi $1/2$ dir. Sonuç olarak Hadamardın çarpanlara ayırma teoremi [8] $\Delta(\lambda)$ çarpım sabiti sıfırları yardımıyla belirlenir.

$$\Delta(\lambda) = C.\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \tag{4.27}$$

$$\tilde{\Delta}(\lambda) := -p.sinp\pi = -\lambda.\pi.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n^2}\right)$$

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = C.\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0.\pi.\lambda}.\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda^2}{n^2 - \lambda}\right)$$

(4.13) ve (4.16) yı ele alarak hesaplarsak

$$\lim_{\lambda \to -\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = 1, \quad \lim_{\lambda \to -\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda^2}{n^2 - \lambda}\right) = 1$$

ve bu nedenle

$$C = \pi.\lambda_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n^2}$$

Bunu (4.27) de yerine yazarsak (4.26) ya ulaşırız. □

Açıklama: Benzer sonuçlar, diğer ayrılmış sınır koşulları türlerine sahip Sturm-Liouville operatörleri için geçerlidir. Aşağıda kullanılacak bu sonuçları kısaca özetleyelim.

Sınır koşulları $U(y) = 0,\ y(\pi) = 0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi $L_1 = L_1\,(q(x), h)$ düşünelim. L_1 in $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerleri basittir ve $d(\lambda) = \varphi(\pi, \lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır.

$$d(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_n - \lambda}{\left(n + {}^{1}/_{2}\right)^2}\right) \qquad (4.28)$$

$$\{\mu_n, \gamma_{n1}\}_{n\geq 0}, \gamma_{n1} = \int_0^{\pi}\varphi^2(x, \mu_n).dx$$

L_1 in asimptotik formülü:

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{w_1}{\pi.n} + \frac{K_n}{n}, \qquad \{K_n\}_{\in l_2} \qquad (4.29)$$

$$\gamma_{n1} = \frac{\pi}{2} + \frac{K_{n1}}{n}, \quad \{K_n\}_{\in l_2} \qquad (4.30)$$

Sınır koşulları $V(y) = 0,\ y(0) = 0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi $L^0 = L^0(q(x), H)$ düşünelim L^0 ın $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ özdeğerleri basittir ve $\Delta^0(\lambda) = \psi(0, \lambda) = S'(\pi, \lambda) +$

$H.S(\pi,\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sınırlarıyla çakışır. $S(x,\lambda)$ Volterra integral denklemini sağlar:

$$S(x,\lambda)=\frac{sinkx}{k}+\int_0^x \frac{sink(x-2t)}{k}q(t)S(t,\lambda)dt \tag{4.31}$$

$|k|\to\infty$ için

$$\begin{cases} S(x,\lambda)=\dfrac{sinkx}{k}+O\left(\dfrac{1}{|k|^2}.\exp(|\tau|x)\right)=O\left(\dfrac{1}{|k|}.\exp(|\tau|x)\right), \\ S'(x,\lambda)=coskx+O\left(\dfrac{1}{|k|}.\exp(|\tau|x)\right)=O(\exp(|\tau|x)) \\ \Delta^0(\lambda)=cosk\pi+\left(\dfrac{1}{|k|}.\exp(|\tau|\pi)\right), \qquad \tau=Imp \end{cases} \tag{4.32}$$

Diğer taraftan

$$\Delta^0(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^0-\lambda}{\left(n+{}^1\!/_2\right)^2}$$

$$\sqrt{\lambda_n^0}=n+\frac{1}{2}+\frac{w_0}{\pi n}+\frac{K_n}{n},\ \ \{K_n\}_{\in l_2}$$

$$w^0=H+\frac{1}{2}.\int_0^{\pi} q(t).dt$$

Sınır koşulları $y(\pi)=0,\ y(0)=0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi $L_1^0=L_1^0\big(q(x)\big)$ düşünelim. L_1^0 in $\{\mu_n^0\}_{n\geq 1}$ özdeğerleri basittir ve $d^0(\lambda)=S(\pi,\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır ve

$$d^0(\lambda)=\pi.\prod_{n=1}\left(\frac{\mu_n^0-\lambda}{n^2}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n^0}=n+\frac{w_1^0}{\pi n}+\frac{K_n}{n}, \qquad \{K_n\}_{\in l_2}$$

$$w_1^0=\tfrac{1}{2}.\textstyle\int_0^{\pi} q(t).dt$$

olur.

Lemma 4.1.8. $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \;\; n \geq 0$ (4.33)

iki sınır değer probleminin L ve L_1 özdeğerleri dönüşümlüdür.

İspat:

Lemma(4.1.1) in ispatından

$$\frac{d}{dx}\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle = (\lambda-\mu).\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu) \tag{4.34}$$

$$(\lambda-\mu).\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda).\varphi(x,\mu).dx = \langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle\Big|_0^{\pi}$$

$$= \varphi(x,\lambda),\varphi'(x,\mu) - \varphi'(x,\lambda),\varphi(x,\mu) = d(\lambda).\Delta(\mu) - d(\mu).\Delta(\lambda)$$

$\mu \to \lambda$ için şunu elde ederiz:

$$\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda).dx = \dot{d}(\lambda).\Delta(\lambda) - d(\lambda).\dot{\Delta}(\lambda)$$

ile

$$\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}.\Delta(\lambda), \;\; \dot{d}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}.d(\lambda)$$

özellikle bu sonuç aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\gamma_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n).d(\lambda_n) \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{d^2(\lambda)}.\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda).dx = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}\right), -\infty < \lambda < +\infty, \qquad d(\lambda) \neq 0$$

Böylece $\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}$ fonksiyonu $R - \{\mu_n | n \geq 0\}$ üzerinde monoton azalandır.

$$\lim_{\lambda\to\mu_n\pm 0}\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)} = \pm\infty$$

Sonuç olarak (4.13) ve (4.29) kullanılarak (4.33) e ulaşılır. □

Bu bölümdeki sonuçlar [6] dan alınmıştır.

4.2. Özfonksiyonların Özellikleri

Bu bölümde Sturm-Liouville sınır değer operatörü L nin özfonksiyonlarının eksiksiz olduğunu ve $L_2(0,\pi)$ de ortogonal bir baz oluşturduğunu kanıtlayacağız. Aynı zamanda özfonksiyonların Fourier serilerinin $[0,\pi]$ üzerinde tek bir noktada birleştiğini göstereceğiz. Tamlık ve genişleme problemleri matematiksel fizikteki çeşitli problemleri Fourier yöntemi ile çözmek ve spektral teori için önemlidir.

Teorem 4.2.1. *Sınır değer problemi L nin $\{\varphi(x,\lambda_n), n \geq 0\}$ özfonksiyonların sistemleri de $L_2(0,\pi)$de tamdır.*

$f(x), x \in [0,\pi]$ de kesin sürekli bir fonksiyon olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.\varphi(x,\lambda_n), \qquad a_n = \frac{1}{\gamma_n}.\int_0^{\pi} f(t).\varphi(t,\lambda_n).dt \tag{4.36}$$

$f(x) \in L_2(0,\pi)$ için (4.36) serisi $L_2(0,\pi)$ de yakınsaktır.

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2.dx = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n |a_n|^2 \qquad (Parseval\ eşitliği) \tag{4.37}$$

İspat: 1)

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases} \varphi(x,\lambda).\psi(t,\lambda), & x \leq t \\ \varphi(t,\lambda).\psi(x,\lambda), & x \geq t \end{cases}$$

gösterelim ve aşağıdaki fonksiyonu düşünelim.

$$Y(x,\lambda) = \int_0^{\pi} G(x,t,\lambda).f(t).dt = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}.\left(\psi(x,\lambda).\int_0^{\pi} \varphi(t,\lambda).f(t).dt\right.$$

$$\left.+\varphi(x,\lambda).\int_0^{\pi} \psi(t,\lambda).f(t).dt\right)$$

Burada $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonu L için Green fonksiyonudur. $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonu Sturm-Liouville operatörü için ters operatörün çekirdeğidir. Yani $Y(x,\lambda)$ sınır değer probleminin çözümüdür.

$$lY-\lambda Y+f(x)=0, \qquad U(Y)=V(Y)=0, \tag{4.38}$$

İfadesi ile kolayca doğrulanmış olur. (4.6) ve teorem 4.1.2. i kullanarak

$$Res_{\lambda=\lambda_n}Y(x,\lambda)=-\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}.\left(\psi(t,\lambda_n).\int_0^x \varphi(t,\lambda_n).f(t)dt\right.$$

$$\left.+\varphi(t,\lambda_n).\int_0^\pi \psi(t,\lambda_n).f(t).dt\right)=-\frac{\beta_n}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}.\varphi(x,\lambda_n).\int_0^\pi f(t).\varphi(t,\lambda_n)dt$$

ifadesi ve (4.8) yardımıyla

$$Res_{\lambda=\lambda_n}Y(x,\lambda)=\frac{1}{\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n).\int_0^\pi f(t).\varphi(t,\lambda_n)dt \tag{4.39}$$

2) $f(x)\in L_2(0,\pi)$ olsun.

$$\int_0^\pi f(t).\varphi(t,\lambda_n)dt=0, \quad n\geq 0$$

O halde (4.39), $Res_{\lambda=\lambda_n}Y(x,\lambda)=0$, ve sonuç olarak her sabit $x\in[0,\pi]$ için $Y(x,\lambda)$ tamdır. Dahası her sabit $\delta>0$ ve yeterince büyük bir $k^*>0$ için (4.9), (4.10), (4.18) den

$$|Y(x,\lambda)|\leq\frac{C_\delta}{|k|}, k\in G_\delta, |k|\geq k^*$$

Maksimum kuralı ve Liouville teoremi kullanarak $Y(x,\lambda)=0$. Buradan ve (4.38) den $f(x)=0$ olur.

3) Şimdi $f\in AC[0,\pi]$ keyfi ve sürekli bir işlevi olsun. $\varphi(t,\lambda)$ ve $\psi(t,\lambda)$ (4.1) in çözümleri, $Y(x,\lambda)$ dönüştürürsek

$$Y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda.\Delta(\lambda)}.\left(\psi(x,\lambda).\int_0^x\left(-\varphi''(t,\lambda)+q(t).\varphi(t,\lambda)\right).f(t).dt\right.$$

$$+\varphi(t,\lambda).\int_0^\pi \left(-\psi''(x,\lambda)+q(t).\psi(t,\lambda)\right).f(t).dt\Bigg)$$

(4.4) ün parçaları yardımıyla ikinci türev içeren terimlerin bütünleştirilmesi,

$$Y(x,\lambda)=\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}.\left(Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right) \tag{4.40}$$

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}.\left(\psi(x,\lambda).\int_0^x g(t).\varphi'(t,\lambda)dt+\varphi(t,\lambda)\int_0^\pi g(t).\psi'(t,\lambda).dt\right),g(t):=f'(t)$$

$$Z_2(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}.\Bigg(h.f(0).\psi(x,\lambda)+H.\int_0^\pi f(\pi).\varphi(x,\lambda)dt$$

$$+\psi(x,\lambda).\int_0^x q(t).\varphi(t,\lambda)f(t).dt+\varphi(x,\lambda).\int_x^\pi q(t).\psi(t,\lambda).f(t).dt\Bigg)$$

Sabit bir $\delta>0$ ve yeterince büyük $k^*>0$ için (4.9), (4.10), (4.18) kullanılarak

$$\max_{0\le x\le\pi}|Z_2(x,\lambda)|\le\frac{C}{|k|},\qquad k\in G_\delta,\qquad |k|\ge k^* \tag{4.41}$$

$$\lim_{p\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda)|=0 \tag{4.42}$$

İlk olarak $g(x)$ in $[0,\pi]$ üzerinde kesintisiz olduğunu varsayalım.

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}.\Bigg(\psi(x,\lambda).g(t).\varphi(t,\lambda)\Big|_0^x+\varphi(x,\lambda).g(t).\psi(t,\lambda)\Big|_x^\pi$$

$$-\psi'(x,\lambda).\int_0^x g'(t).\psi(t,\lambda).dt\Bigg)$$

(4.9), (4.10), (4.18) yardımıyla

$$\max_{0\le x\le\pi}|Z_1(x,\lambda)|\le\frac{C}{|k|},\qquad k\in G_\delta,\qquad |k|\ge k^*$$

Şimdi $g(t) \in L(0,\pi)$ olsun. Sabit bir $\delta > 0$ ve sürekli bir $g_\varepsilon(t)$ seçelim.

$$\int_0^x |g(t) - g_\varepsilon(t)|.\,dt < \frac{\varepsilon}{2C^*}$$

Burada, $C^+ = \max\limits_{0\le x\le\pi} \sup \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left(|\psi(x,\lambda)|.\int_0^x |\varphi'(t,\lambda)|.\,dt + |\varphi(x,\lambda)|.\int_x^\pi |\psi'(t,\lambda)|.\,dt\right)$

$k \in G_\delta,\quad |k| \ge k^*$ için

$$\max_{0\le x\le\pi} |Z_1(x,\lambda)| \le \max_{0\le x\le\pi} |Z_1(x,\lambda;g_\varepsilon)| + \max_{0\le x\le\pi} |Z_1(x,\lambda;g_\varepsilon - g_\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C(\varepsilon)}{|k|}$$

Bundan dolayı bir $k^0 > 0$ vardır ki $|k| \ge k^0$ için $\max_{0\le x\le\pi} |Z_1(x,\lambda)| \le \varepsilon$ sağlar. Keyfi $\varepsilon > 0$ için (4.42) a ulaşırız.

$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int Y(x,\lambda).\,d\lambda$ integralini düşünelim. $\tau_n = \left\{\lambda : |\lambda| = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\}$ (4.40) ve (4.42) yi takip eden

$$I_n(x) = f(x) + \varepsilon_N(x), \quad \lim_{N\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} |\varepsilon_n(x)| = 0 \tag{4.43}$$

Rezidü teoremi yardımıyla $I_n(x)$ i hesaplayabiliriz. (4.39) yardımıyla

$$I_n(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi(x,\lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\gamma_n}.\int_x^\pi f(t)\varphi(x,\lambda_n).\,dt$$

(4.43) ile (4.36) e ulaşabiliriz.

4) $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\ge0}$ özfonksiyonları $L_2(0,\pi)$ de ortogonaldir ve tamdır. $L_2(0,\pi)$ de ortogonal bir temel oluşturur ve Parseval eşitliği geçerlidir. Bu bölümdeki sonuçlar [6] dan alınmıştır.

5. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

5.1 İki Delta-Etkileşim Noktalı Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Karakteristiklerinin İncelenmesi

$L = L(q(x), h, H, a_i, \alpha_i, i = 1,2)$ sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$-y'' + q(x).y = \lambda y, \qquad x \in (a_0, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) = \bigcup_{i=0}^{2} (a_i, a_{i+1}),$$

$$a_0 = 0, a_3 = \pi, \qquad q(x) \in L_2(0, \pi) \tag{5.1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{5.2}$$

$$I(y) = \begin{cases} y(a_i + 0) = y(a_i - 0) = y(a_i) \\ y'(a_i + 0) - y'(a_i - 0) = \alpha_i y(a_i) \end{cases}, \; i = 1,2 \tag{5.3}$$

Burada λ spektral parametre, $q(x)$ reel değerli fonksiyon olup $L_2(0, \pi)$ içindedir; $h, H, a_i, \alpha_i, (\, i = 1,2)$ birer reel sayıdır.

$(5.1), (5.2)$ ve (5.3) ifadeleri aşağıdaki denkleme denktir [18]:

$$-y'' + (\alpha_1.\delta(x - a_1) + \alpha_2.\delta(x - a_2) + q(x))y = \lambda y$$

Bu çeşit süreksiz sınır değer problemleri için düz ve ters problemler [3,7,10,13,14,15] de ele alınmıştır ve daha fazla bilgi için buradaki referanslara bakılabilir. Bu konuda temel kitaplar [2,6,19] dir.

$\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ ifadeleri (5.1) denkleminin aşağıdaki başlangıç şartları altındaki çözümleri olsun.

$$\varphi(x, \lambda){:}\; \varphi(0, \lambda) = 1, \; \varphi'(0, \lambda) = h \Rightarrow U(\varphi) = 0$$

$$\psi(x, \lambda){:}\; \psi(\pi, \lambda) = 1, \; \psi'(\pi, \lambda) = -H \Rightarrow V(\psi) = 0, \qquad \lambda = k^2$$

olur.

$$\Delta(\lambda) = < \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) > \tag{5.4}$$

$$< \psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda) > = \begin{vmatrix} \psi(x,\lambda) & \varphi(x,\lambda) \\ \psi'(x,\lambda) & \varphi'(x,\lambda) \end{vmatrix} = \psi(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

olur. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu L nin karakteristik fonksiyonudur. $x = 0$ ve $x = \pi$ alınırsa

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi) \qquad (5.5)$$

elde edilir.

Şimdi $\Delta(\lambda)$ ifadesinin sürekli olduğunu gösterelim.

$$< y,z >_{x=a_i+0} = y(a_i+0).z'(a_i+0) - y'(a_i+0).z(a_i+0)$$

$$= y(a_i-0).\big(z'(a_i-0)+\alpha_i.z(a_i-0)\big) - \big(y'(a_i-0)+\alpha_i.y(a_i-0)\big).z(a_i-0)$$

$$= y(a_i-0).z'(a_i-0) + \alpha_i.y(a_i-0).z(a_i-0) - y'(a_i-0).z(a_i-0)$$

$$-\alpha_i.y(a_i-0).z(a_i-0)$$

$$(yz'-y'z)_{x=a_i-0} =< y,z >_{x=a_i-0}\,, \qquad i = 1,2$$

olduğundan $< y,z >$ a_1 ve a_2 noktalarıda dahil olmak üzere tüm $(0,\pi)$ de süreklidir.

Teorem 5.1.1 *Karakteristik fonksiyonun* (λ_n) *sıfırları sınır değerleri probleminin özdeğerleriyle çakışır.* $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ *özfonksiyonları arasında aşağıdaki şartı sağlayan* $\{\beta_n\}$ *ler vardır.*

$$\psi(x,\lambda) = \beta_n.\varphi(x,\lambda),\ \beta_n \neq 0 \qquad (5.6).$$

İspat:

1) λ_0, $\Delta(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. $(5.2) - (5.5)$ den $\psi(x,\lambda_0) = \beta_0.\varphi(x,\lambda_0)$ olur ve $\varphi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları (5.2) sınır şartlarını sağlar. Bundan dolayı λ_0 özdeğer ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlarda $\varphi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_0)$ olur.

2) λ_0 L nin bir özdeğeri olsun. y_0 uygun bir fonksiyon olsun. Buradan $U(y_0) = V(y_0) = 0$ olur. $y_0 \neq 0$ olduğu açıktır. Genelliği bozmadan $y_0(0) = 1$ yazalım. Buradan $y_0'(0) = h$ olur. Sonuç olarak $y_0(x) \equiv \varphi(x,\lambda_0)$ olur. Bu nedenle (5.5) bize

$$\Delta(\lambda) = V\big(\varphi(x,\lambda_0)\big) = V\big(y_0(x)\big) = 0$$

olduğunu verir. Sonuç olarak her bir özdeğer için yalnız bir özfonksiyon vardır. Böylece ispat tamamlanır. □

Bundan sonra şu notasyonu kullanacağız.

$$\gamma_n := \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n). dx \tag{5.7}$$

$\{\gamma_n\}$ sayılar normalleştirilmiş sayılar $\{\lambda_n, \gamma_n\}$ spektral verilerdir

Lemma 5.1.2

$$\beta_n . \gamma_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n) \tag{5.8}$$

doğrudur. Burada $\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$ *dır.*

İspat:

$$-\psi''(x, \lambda) + q(x).\psi(x, \lambda) = \lambda.\psi(x, \lambda)$$

$$-\varphi''(x, \lambda_n) + q(x).\varphi(x, \lambda_n) = \lambda_n.\varphi(x, \lambda_n)$$

Buradan

$$\frac{d}{dx} < \psi(x, \lambda).\varphi(x, \lambda_n) >= \frac{d}{dx}\left(\psi(x, \lambda).\varphi'(x, \lambda_n) - \psi'(x, \lambda).\varphi(x, \lambda_n)\right)$$

Çarpımın türevinden yararlanılırsa:

$$= \psi'(x, \lambda).\varphi'(x, \lambda_n) + \psi(x, \lambda).\varphi''(x, \lambda_n) - \psi''(x, \lambda).\varphi(x, \lambda_n)$$

$$-\psi'(x, \lambda).\varphi'(x, \lambda_n)$$

$$= \psi(x, \lambda).\varphi''(x, \lambda_n) - \psi''(x, \lambda).\varphi(x, \lambda_n)$$

$$= \psi(x, \lambda).[q(x).\varphi(x, \lambda_n) - \lambda_n.\varphi(x, \lambda_n)] - [q(x).\psi(x, \lambda_n) - \lambda_n.\psi(x, \lambda_n)].\varphi(x, \lambda_n)$$

$$= (\lambda - \lambda_n).\psi(x, \lambda).\varphi(x, \lambda_n)$$

$$= (\lambda - \lambda_n).\int_0^\pi \varphi(x, \lambda_n).\psi(x, \lambda).dx =< \varphi(x, \lambda_n), \psi(x, \lambda) > \Big|_0^\pi$$

$$= \left(\psi(x,\lambda).\varphi'(x,\lambda_n) - \psi'(x,\lambda).\varphi(x,\lambda_n)\right)\Big|_0^\pi$$

$$= \psi(\pi,\lambda).\varphi'(\pi,\lambda_n) - \psi'(\pi,\lambda_n).\varphi(\pi,\lambda_n) + \psi'(0,\lambda).\varphi(0,\lambda_n) - \psi(0,\lambda).\varphi'(0,\lambda_n)$$

$$= \varphi'(\pi,\lambda_n) \ + \ H.\varphi(\pi,\lambda_n) + \psi'(0,\lambda) - h.\psi(0,\lambda) = -\Delta(\lambda_n)$$

olur. Burada $\lambda_n : \Delta(\lambda_n) = 0$ ve $\lambda \to \lambda_n$ için

$$\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n).\psi(x,\lambda).dx = -\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n}$$

$$\beta_n \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n).dx = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$$

(5.7) den

$$\gamma_n.\beta_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n) \tag{5.9}$$

elde edilir. □

Şimdi çözümleri kuralım:

$$C_0(0,\lambda) = {S_0}'(0,\lambda) = 1, \qquad {C_0}'(0,\lambda) = S_0(0,\lambda) = 0 \Longrightarrow W\{C_0(0,\lambda), S_0(0,\lambda)\} \ =$$

$$= \begin{vmatrix} C_0(x,\lambda) & S_0(,\lambda) \\ {C_0}'(x,\lambda) & {S_0}'(x,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_0(0,\lambda) & S_0(0,\lambda) \\ {C_0}'(0,\lambda) & {S_0}'(0,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Wronskian x den bağımsızdır. Burada denklem sisteminin çözümleri lineer bağımsızdır.

$x \in (0, a_1)$ için:

$$C(x,\lambda) = C_0(x,\lambda), S(x,\lambda) = S_0(x,\lambda) \tag{5.10}$$

$x \in (a_1, a_2)$ için:

$$C(x,\lambda) = A_1 C_0(x,\lambda) + B_1 S_0(x,\lambda)$$

$$S(x,\lambda) = A_2 C_0(x,\lambda) + B_2 S_0(x,\lambda) \tag{5.11}$$

Kabul ettiğimiz (5.3) ü kullanırsak:

$$C(a_1+0,\lambda)=C(a_1-0,\lambda)=C(a_1,\lambda)$$

$$C'(a_1+0,\lambda)-C'(a_1-0,\lambda)=\alpha_1.C(a_1,\lambda)$$

ifadesi elde edilir. Bunu (5.11) ile birlikte düşünürsek;

$$A_1.C_0(a_1,\lambda)+B_1.S_0(a_1,\lambda)=C_0(a_1,\lambda)$$

$$A_1.C_0{}'(a_1,\lambda)+B_1.S_0{}'(a_1,\lambda)=C_0{}'(a_1,\lambda)+\alpha_1.C_0(a_1,\lambda)$$

Bu denklem sistemini Cramer metodu ile çözelim:

$$A_1=\frac{\begin{vmatrix} C_0(a_1,\lambda) & S_0(a_1,\lambda) \\ C_0{}'(a_1,\lambda)+\alpha_1.C_0(a_1,\lambda) & S_0{}'(a_1,\lambda)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_0(a_1,\lambda) & S_0(a_1,\lambda) \\ C_0{}'(a_1,\lambda) & S_0{}'(a_1,\lambda)\end{vmatrix}}$$

$$=C_0(a_1,\lambda).S_0{}'(a_1,\lambda)-C_0{}'(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)-\alpha_1.C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)$$

$$A_1=1-\alpha_1.C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda) \tag{5.12}$$

$$B_1=\begin{vmatrix} C_0(a_1,\lambda) & S_0(a_1,\lambda) \\ C_0{}'(a_1,\lambda) & C_0{}'(a_1,\lambda)+\alpha_1.C_0(a_1,\lambda)\end{vmatrix}$$

$$=C_0(a_1,\lambda).C_0{}'(a_1,\lambda)+\alpha_1.C_0^2(a_1,\lambda)-C_0(a_1,\lambda).C_0{}'(a_1,\lambda)$$

$$B_1=\alpha_1.[C_0(a_1,\lambda)]^2 \tag{5.13}$$

Şimdi denklemi kendi şartlarımıza göre A_2 ve B_2 katsayılarına göre yazalım:

$$S(a_1+0,\lambda)=S(a_1-0,\lambda)=S_0(a_1,\lambda)$$

$$S'(a_1+0,\lambda)-S'(a_1-0,\lambda)=\alpha_1.S_0(a_1,\lambda)$$

Buradan;

$$A_2C_0(a_1,\lambda)+B_2S_0(a_1,\lambda)=S_0(a_1,\lambda)$$

$$A_2C_0{}'(a_1,\lambda)+B_2S_0{}'(a_1,\lambda)=S_0{}'(a_1,\lambda)+\alpha_1.S_0(a_1,\lambda)$$

Bu denklem sistemini çözersek;

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} S_0(a_1,\lambda) & S_0(a_1,\lambda) \\ S_0'(a_1,\lambda) + \alpha_1 . S_0(a_1,\lambda) & S_0'(a_1,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_0(a_1,\lambda) & S_0(a_1,\lambda) \\ C_0'(a_1,\lambda) & S_0'(a_1,\lambda) \end{vmatrix}}$$

$$= S_0(a_1,\lambda).S_0'(a_1,\lambda) - S_0(a_1,\lambda).S_0'(a_1,\lambda) - \alpha_1.[S_0(a_1,\lambda)]^2$$

$$A_2 = -\alpha_1.[S_0(a_1,\lambda)]^2 \tag{5.14}$$

Aynı yöntemle devam edersek;

$$B_2 = \begin{vmatrix} C_0(a_1,\lambda) & S_0(a_1,\lambda) \\ C_0'(a_1,\lambda) & S_0'(a_1,\lambda) + \alpha_1 . S_0(a_1,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= C_0(a_1,\lambda).S_0'(a_1,\lambda) + \alpha_1.C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda) - C_0'(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)$$

$$B_2 = 1 + \alpha_1.C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda) \tag{5.15}$$

$x \in (a_2,\pi)$ için:

$$\begin{cases} C(x,\lambda) = A_3 C_0(x,\lambda) + B_3 S_0(x,\lambda) \\ S(x,\lambda) = A_4 C_0(x,\lambda) + B_4 S_0(x,\lambda) \end{cases}$$

olacak şekilde ve (5.3) kullanılırsa,

$$C(a_2+0,\lambda) = C(a_2-0,\lambda) \text{ ve } C'(a_2+0,\lambda) = C'(a_2-0,\lambda) + \alpha_2.C(a_2-0,\lambda)$$

olduğundan

$$A_3 C_0(a_2,\lambda) + B_3 S_0(a_2,\lambda) = A_1 C_0(a_2,\lambda) + B_1 S_0(a_2,\lambda)$$

$$A_3 C_0'(a_2,\lambda) + B_3 S_0'(a_2,\lambda) = A_1 C_0'(a_2,\lambda) + B_1 S_0'(a_2,\lambda)$$

$$+\alpha_2.[A_1 C_0(a_2,\lambda) + B_1 S_0(a_2,\lambda)]$$

bulunur.

A_3 ü bulmak için bu denklem sistemini çözelim:

$$A_3 = \begin{vmatrix} A_1 C_0(a_2,\lambda) + B_1 S_0(a_2,\lambda) & S_0(a_2,\lambda) \\ A_1 C_0'(a_2,\lambda) + B_1 S_0'(a_2,\lambda) + \alpha_2.[A_1 C_0(a_2,\lambda) + B_1 S_0(a_2,\lambda)] & S_0'(a_2,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= A_1 C_0(a_2,\lambda).S_0{}'(a_2,\lambda) + B_1 S_0(a_2,\lambda).S_0{}'(a_2,\lambda) + A_1[C_0{}'(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda) +$$

$$+\alpha_2.C_0(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)] - B_1.[S_0(a_2,\lambda).S_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2.[S_0(a_2,\lambda)]^2]$$

$$= A_1[C_0(a_2,\lambda).S_0{}'(a_2,\lambda) - C_0{}'(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda) - \alpha_2.C_0(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)]$$

$$-B_1.\alpha_2[S_0(a_2,\lambda)]^2$$

Burada A_1ve B_1 i yerine yazalım:

$$A_3 = [1 - \alpha_1.C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)].[1 - \alpha_2.C_0(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)]$$

$$-\alpha_1.\alpha_2.[C_0(a_1,\lambda)]^2[S_0(a_2,\lambda)]^2 \qquad (5.16)$$

Aynı şekilde B_3 ü de buluruz.

$$B_3 = \begin{vmatrix} C_0(a_2,\lambda) & A_1 C_0(a_2,\lambda) + B_1 S_0(a_2,\lambda) \\ C_0{}'(a_2,\lambda) & A_1[C_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2.C_0(a_2,\lambda)] + B_1[S_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2.S_0(a_2,\lambda)] \end{vmatrix}$$

$$= A_1[C_0(a_2,\lambda).C_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2.[C_0(a_2,\lambda)]^2 - C_0(a_2,\lambda).C_0{}'(a_2,\lambda)]$$

$$+B_1[C_0(a_2,\lambda).S_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2.C_0(a_2,\lambda)S_0(a_2,\lambda) - C_0{}'(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)]$$

$$B_3 = \alpha_1[C_0(a_1,\lambda)]^2[1 + \alpha_2.C_0(a_2,\lambda)S_0(a_2,\lambda)] +$$

$$+\alpha_2.[C_0(a_2,\lambda)]^2.[1 - \alpha_1 C_0(a_1,\lambda)S_0(a_1,\lambda)] \qquad (5.17)$$

Denklemi kendi şartlarımıza göre, A_4 ve B_4 katsayılarına göre yazalım:

$$S(a_2+0,\lambda) = S(a_2-0,\lambda)$$

$$S'(a_2+0,\lambda) = S'(a_2-0,\lambda) + \alpha_2.S_0(a_2-0,\lambda)$$

Buradan

$$A_4.C_0(a_2,\lambda) + B_4.S_0(a_2,\lambda) = A_2.C_0(a_2,\lambda) + B_2.S_0(a_2,\lambda)$$

$$A_4.C_0{}'(a_2,\lambda) + B_4.S_0{}'(a_2,\lambda) = A_2.C_0{}'(a_2,\lambda) + B_2.S_0{}'(a_2,\lambda)$$

$$+\alpha_2.[A_2.C_0(a_2,\lambda) + B_2.S_0(a_2,\lambda)]$$

Bu denklem sistemini aynı metotla çözelim:

$$A_4 = \begin{vmatrix} A_2C_0(a_2,\lambda) + B_2S_0(a_2,\lambda) & S_0(a_2,\lambda) \\ A_2[C_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2 . C_0(a_2,\lambda)] + B_2[S_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2 . S_0(a_2,\lambda)] & S_0{}'(a_2,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= A_2[C_0(a_2,\lambda).S_0{}'(a_2,\lambda) - C_0{}'(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda) - \alpha_2 . C_0(a_2,\lambda)S_0(a_2,\lambda)]$$

$$+B_2[S_0(a_2,\lambda).S_0'(a_2,\lambda) - S_0(a_2,\lambda)S_0{}'(a_2,\lambda) - \alpha_2 .[S_0(a_2,\lambda)]^2]$$

$$A_4 = -\alpha_1 .[S_0(a_1,\lambda)]^2 .[1-\alpha_2 . C_0(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)]$$

$$-\alpha_2 .[1+\alpha_1 . C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)].[S_0(a_2,\lambda)]^2 \qquad (5.18)$$

$$B_4 = \begin{vmatrix} C_0(a_2,\lambda) & A_2C_0(a_2,\lambda) + B_2S_0(a_2,\lambda) \\ C_0{}'(a_2,\lambda) & A_2[C_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2 . C_0(a_2,\lambda)] + B_2[S_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2 . S_0(a_2,\lambda)] \end{vmatrix}$$

$$= A_2[C_0(a_2,\lambda).C_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2 .[C_0(a_2,\lambda)]^2 - C_0(a_2,\lambda).C_0{}'(a_2,\lambda)]$$

$$+B_2 .[C_0(a_2,\lambda).S_0{}'(a_2,\lambda) + \alpha_2 . C_0(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda) - C_0{}'(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)]$$

$$B_4 = [1 + \alpha_1 . C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)].[1 + \alpha_2 . C_0(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)]$$

$$-\alpha_1 . \alpha_2[S_0(a_1,\lambda)]^2 .[C_0(a_2,\lambda)]^2 \qquad (5.19)$$

Bu denkleri sağlayan $C_0(x,\lambda)$ aşağıdaki şekilde belirlenir. $\lambda = k^2,\ k = \sigma + i\tau$ seçerek $C_0(x,\lambda)$ yı yazalım. Ardışık yaklaşımlar metoduna göre 1. ve 2. terimi yerine yazarsak

$$C_0(x,\lambda) = \cos kx + \int_0^x \frac{\mathrm{sink}(x-t)}{k} . q(t). C_0(t,\lambda)dt$$

$$+ \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} . q(t). \int_0^x \frac{\sin k(t-y)}{k} . q(t). \cos ky \, . dydt + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Burada integral içlerinde bazı cebirsel işlemler yaparsak:

$$C_0(x,\lambda) = \cos kx + \frac{1}{2k} . \mathrm{sinkx}. \int_0^x q(t). dt + \frac{1}{2k} \int_0^x \mathrm{sink(x-2t)}. q(t)dt$$

$$+O\left(\frac{1}{k^2} . \exp(|\tau|. x)\right) \qquad (5.20)$$

bulunur. Şimdi $C_0(x,\lambda)$ ifadesinin türevini alalım:

$$C_0'(x,\lambda) = -k\text{sinkx} + \frac{\cos kx}{2}\int_0^x q(t)dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x q(t).\cos k\,(x-2t)dt + O\left(\frac{1}{k}.\exp(|\tau|.x)\right) \qquad (5.21)$$

olur. Şimdi de $S_0(x,\lambda)$ ifadesini inceleyip bulalım:

$$S_0(x,\lambda) = \frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{k}\int_0^x \text{sink}(x-t)\,.\,q(t).S_0(t,\lambda)dt$$

Ardışık yaklaşımlar yöntemiyle 1. ve 2. terimi yerine yazalım.

$$S_0(x,\lambda) = \frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{k^2}\int_0^x \text{sink}(x-t)\,.\,q(t).\sin kt\,dt$$

$$+\frac{1}{k^3}\int_0^x \text{sink}(x-t)\,.\,q(t).\int_0^t \text{sink}(x-y)\,.\,q(y).\sin ky.dy\,dt + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

İntegral içlerinde bazı cebirsel işlemler yaparsak ifade şöyle olur.

$$S_0(x,\lambda) = \frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{2k^2}\text{cosk}\,x\int_0^x q(t)dt$$

$$+\frac{1}{2k^2}\int_0^x q(t).\text{cosk}(x-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{k^3}\exp(|\tau|.x)\right) \qquad (5.22)$$

Şimdi $S_0(x,\lambda)$ ifadesinin türevini alalım.

$$S_0{}'(x,\lambda) = \text{coskx} + \frac{\text{sinkx}}{2\text{k}}.\int_0^x q(t)dt$$

$$-\frac{1}{2k}\int_0^x q(t).\text{sink}(x-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\tau|.x)\right) \qquad (5.23)$$

Bu denklemler yardımıyla $A_1, B_1, A_2 ve\ B_2$ katsayılarını hesaplayalım:

$$A_1 = 1 - \alpha_1 . C_0(a_1,\lambda) . S_0(a_1,\lambda)$$

$$A_1 = 1 - \alpha_1 . \left[\cos ka_1 + \frac{1}{2k} . \text{sink}a_1 . \int_0^{a_1} q(t)dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] . \left[\frac{\sin ka_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$A_1 = 1 - \alpha_1 \frac{\sin 2ka_1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \qquad (5.24)$$

$$B_1 = \alpha_1 . [C_0(a_1,\lambda)]^2$$

$$B_1 = \alpha_1 . \left[\cos ka_1 + \frac{1}{2k} . \text{sink}a_1 . \int_0^{a_1} q(t)dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]^2$$

$$B_1 = \frac{\alpha_1}{2}(1 + \text{cos2ka}_1) + O\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (5.25)$$

$$A_2 = -\alpha_1 . [S_0(a_1,\lambda)]^2$$

$$A_2 = -\alpha_1 . \left[\frac{\sin ka_1}{k} - \frac{1}{2k^2} \text{cosk}\, a_1 \int_0^{a_1} q(t)dt + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right]^2$$

$$A_2 = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \qquad (5.26)$$

$$B_2 = 1 + \alpha_1 . C_0(a_1,\lambda) . S_0(a_1,\lambda)$$

$$B_2 = 1 + \alpha_1 . \left[\cos ka_1 + \frac{1}{2k} . \text{sink}a_1 . \int_0^{a_1} q(t)dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] . \left[\frac{\sin ka_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$B_2 = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (5.27)$$

bulunur.

$0 < x < a_1$ için $\varphi(x,\lambda)$ çözümünü bulalım. $C(x,\lambda) = C_0(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda) = S_0(x,\lambda)$ eşitliklerini kullanalım ve $\varphi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + h.S(x,\lambda)$ denkleminde yerine yazalım.

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + (h + \frac{1}{2}.\int_0^x q(t)dt)\frac{\sin kx}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \qquad (5.28)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -k.\sin kx + (h + \frac{1}{2}.\int_0^x q(t)dt)\cos kx + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \qquad (5.29)$$

$a_1 < x < a_2$ için $\varphi(x,\lambda)$ çözümünü bulalım:

$$C(x,\lambda) = A_1C_0(x,\lambda) + B_1S_0(x,\lambda)$$

$$S(x,\lambda) = A_2C_0(x,\lambda) + B_2S_0(x,\lambda)$$

$$\varphi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + h.S(x,\lambda)$$

Bu denklemde katsayıları yerine yazalım:

$$\varphi(x,\lambda) = \text{coskx} + \left(\text{h} + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right)\frac{\text{sinkx}}{\text{k}} - \frac{\alpha_1}{2}\frac{\text{sink}(2\text{a}_1 - \text{x})}{\text{k}}$$

$$+O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\tau|.x)\right) \qquad (5.30)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -\text{ksinkx} + \left(\text{h} + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right)\text{coskx} + \frac{\alpha_1}{2}\text{cosk}(2\text{a}_1 - \text{x})$$

$$+O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\tau|.x)\right) \qquad (5.31)$$

Şimdi A_3, B_3 katsayılarını hesaplayıp bu katsayılar yardımıyla $a_2 < x < \pi$ için $C(x,\lambda)$ terimini bulalım:

$$A_3 = [1 - \alpha_1.C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)].[1 - \alpha_2.C_0(a_2,\lambda).S_0(a_2,\lambda)]$$

$$-\alpha_1.\alpha_2.[C_0(a_1,\lambda)]^2[S_0(a_2,\lambda)]^2$$

Burada $C_0(x,\lambda)$ ve $S_0(x,\lambda)$ denklemleri kullanılırsa,

$$A_3 = \left[1 - \alpha_1.\left[\cos ka_1 + \frac{1}{2k}.\text{sinka}_1.\int_0^{a_1} q(t)dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right].\left[\frac{\sin ka_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\right].\left[1\right.$$

$$\left. - \alpha_2\left[\cos ka_2 + \frac{1}{2k}.\text{sinka}_2.\int_0^{a_2} q(t)dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right].\left[\frac{\sin ka_2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\right]$$

$$- \alpha_1.\alpha_2\left[\cos k{a_1}^2 + \frac{\text{sin2ka}_1}{2\text{k}}\int_0^{a_1} q(t).dt\right].\left[\frac{\sin k{a_2}^2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$A_3 = 1 - \alpha_1\frac{\text{sin2ka}_1}{2\text{k}} - \alpha_2\frac{\text{sin2ka}_2}{2\text{k}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{5.32}$$

bulunur. Benzer şekilde B_3 katsayısını da bulalım:

$$B_3 = \alpha_1[C_0(a_1,\lambda)]^2[1 + \alpha_2.C_0(a_2,\lambda)S_0(a_2,\lambda)] +$$

$$+\alpha_2.[C_0(a_2,\lambda)]^2.[1 - \alpha_1 C_0(a_1,\lambda)S_0(a_1,\lambda)]$$

Burada $C_0(x,\lambda)$ ve $S_0(x,\lambda)$ denklemleri kullanılırsa,

$$B_3 = \left[\frac{\alpha_1}{2}(1 + \text{cos2ka}_1) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right].\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] + \left[\frac{\alpha_2}{2}(1 + \text{cos2ka}_2) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right].\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$B_3 = \frac{\alpha_1}{2}(1 + \text{cos2ka}_1) + \frac{\alpha_2}{2}(1 + \text{cos2ka}_2) + O\left(\frac{1}{k}\right) \tag{5.33}$$

elde edilir.

$$C(x,\lambda) = A_3 C_0(x,\lambda) + B_3 S_0(x,\lambda)$$

Bu denklemde $C_0(x,\lambda)$ ve $S_0(x,\lambda)$ denklemleri kullanılırsa,

$$C(x,\lambda) = \left[1 - \alpha_1\frac{\text{sin2ka}_1}{2\text{k}} - \alpha_2\frac{\text{sin2ka}_2}{2\text{k}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right].[\text{coskx} +$$

$$\left. + \frac{\text{sinkx}}{2\text{k}}.\int_0^x q(t)dt + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] + \left[\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}(\alpha_1.\text{cos2ka}_1 + \alpha_2.\text{cos2ka}_2)\right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{k}\right)\right].\left[\frac{\text{sinkx}}{\text{k}} + O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\tau|.x)\right)\right]$$

$$C(x,\lambda) = \text{coskx} + \frac{\text{sinkx}}{2\text{k}}\int_0^x q(t)dt - \alpha_1.\frac{\text{cos2ka}_1.\text{sinkx}}{2\text{k}} - \alpha_2.\frac{\text{sin2ka}_1.\text{coskx}}{2\text{k}}$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\text{sinkx}}{2\text{k}} + \alpha_1.\frac{\text{cos2ka}_1.\text{sinkx}}{2\text{k}} + \alpha_2.\frac{\text{cos2ka}_1.\text{sinkx}}{2\text{k}} + O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\tau|.x)\right)$$

$$C(x,\lambda) = \text{coskx} + \frac{1}{2}\left(\alpha_1+\alpha_2+\int_0^x q(t)dt\right)\frac{\text{sinkx}}{2\text{k}} - \alpha_1.\frac{\text{sink}(2\text{a}_1-\text{x})}{2\text{k}}$$

$$-\alpha_2.\frac{\text{sink}(2\text{a}_1-\text{x})}{2\text{k}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{5.34}$$

elde edilir.

Burada $C(x,\lambda)$ yı oluşturduk. Şimdi $S(x,\lambda)$ yı oluşturmak için A_4 ve B_4 ü bulalım.

$$A_4 = \alpha_1.[S_0(a_1,\lambda)]^2.[1-\alpha_2 C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)]$$

$$-\alpha_2.[1+\alpha_1.C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)].[S_0(a_1,\lambda)]^2$$

Burada $C_0(x,\lambda)$ ve $S_0(x,\lambda)$ denklemleri kullanılırsa,

$$A_4 = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{5.35}$$

$$B_4 = -\alpha_1.\alpha_2.[C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)]^2.[1+\alpha_2 C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)].[1+$$

$$+\alpha_2 C_0(a_1,\lambda).S_0(a_1,\lambda)]$$

Burada $C_0(x,\lambda)$ ve $S_0(x,\lambda)$ denklemleri kullanılırsa,

$$B_4 = \left[1+\alpha_1.\frac{\text{sin2ka}_1}{2\text{k}}\right].\left[1+\alpha_2.\frac{\text{sin2ka}_2}{2\text{k}}\right]$$

$$B_4 = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \tag{5.36}$$

Şimdi $S(x,\lambda)$ ifadesini oluşturalım:

$$S(x,\lambda) = A_4 C_0(x,\lambda) + B_4 S_0(x,\lambda)$$

Burada $C_0(x,\lambda)$ ve $S_0(x,\lambda)$ denklemlerini kullanırsak:

$$S(x,\lambda)=\frac{\text{sinkx}}{\text{k}}+O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\tau|.x)\right) \tag{5.37}$$

şeklinde bulunmuş olur. Şimdi $\varphi(x,\lambda)$ çözümünü kurmaya çalışalım:

$$\varphi(x,\lambda)=C(x,\lambda)+h.S(x,\lambda)$$

$$=\text{coskx}+\left(\text{h}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right)\frac{\text{sinkx}}{\text{k}}-\frac{\alpha_1}{2}\frac{\text{sink}(2\text{a}_1-\text{x})}{\text{k}}$$

$$-\frac{\alpha_2}{2}\frac{\text{sink}(2\text{a}_2-\text{x})}{\text{k}}+O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\tau|.x)\right) \tag{5.38}$$

bulunur. Böylece $\varphi(x,\lambda)$ ifadesini oluşturmuş olduk. Şimdi de türevini hesaplayalım:

$$\varphi'(x,\lambda)=-k\text{sinkx}+\left(\text{h}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right)\text{coskx}$$

$$+\frac{\alpha_1}{2}.\text{cosk}(2\text{a}_1-\text{x})+\frac{\alpha_2}{2}.\text{cosk}(2\text{a}_2-\text{x})+O\left(\frac{1}{k}\exp(|\tau|.x)\right) \tag{5.39}$$

$\varphi'(x,\lambda)$ yı bulmuş olduk. Şimdi çözümümüzü başlangıç şartlarına göre yazalım:

$$\Delta(\lambda)=-V(\varphi)=-\varphi'(\pi,\lambda)-H.\varphi(\pi,\lambda)$$

$$=k.\text{sink}\pi-\left(\text{h}+\text{H}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^T q(t).dt\right)\text{cosk}\pi-$$

$$-\frac{\alpha_1}{2}\text{cosk}(2\text{a}_1-\pi)-\frac{\alpha_2}{2}\text{cosk}(2\text{a}_2-\pi)+O\left(\frac{1}{k}\right) \tag{5.40}$$

(5.40) formülünü ve Rouche teoremini kullanarak $n\to\infty$ için $k_n=n+\ O(1)$

elde edilir. Benzer şekilde, tekrar Rouche teoremini kullanarak gösteririz ki, yeteri kadar büyük n ler için $б_n(\delta)=\{k:|k-n|\le\delta\}$ dairesi içinde $\Delta(\lambda^2)$ nın tek bir sıfırı vardır. Bu durumda:

$$k_n=n+\ \varepsilon_n,\ \varepsilon_n=o(1),\quad n\to\infty$$

alalım. Bunu dikkate alıp (5.40) dan elde ederiz:

$$n.\sin\varepsilon_n\pi - \omega_1\cos\varepsilon_n\pi - \frac{\alpha_1}{2}\cos k(n+\varepsilon_n)(2a_1-\pi)$$

$$-\frac{\alpha_2}{2}\cos k(n+\varepsilon_n)(2a_2-\pi) + v_n = 0 \qquad (5.41)$$

Burada:

$v_n = \varepsilon_n\sin\varepsilon_n\pi + o(\exp(|\tau_n|.x)), \tau_n = Imk_n$ ve $\omega_1 = h + H + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t).dt$

sonuncudan $\sin\varepsilon_n\pi = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (5.41) i kullanırsak,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\pi n}\left(\omega_1 + \frac{\alpha_1}{2}\cos k(2a_1 n) + \frac{\alpha_2}{2}\cos k(2a_2 n)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$k_n = n + \frac{1}{\pi n}\left(\omega_1 + \frac{\alpha_1}{2}\cos k(2a_1 n) + \frac{\alpha_2}{2}\cos k(2a_2 n)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur. Bakılan, ele alınan problem özeşlenik olduğundan, tüm $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ özdeğerleri reeldir ve basittir[12], yani aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu: □

Teorem 5.1.3. *L sınır-değer problemi sayılabilir $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ özdeğerler sahiptir. Tüm özdeğerler reeldir, basittir ve* $n \to \infty$ iken

$$k_n := \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{\pi n}\left(\omega_1 + \frac{\alpha_1}{2}\, cosk(2a_1 n) + \frac{\alpha_2}{2}\, cosk(2a_2 n)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (5.42)$$

olur. Burada

$$\omega_1 = h + H + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt$$

bulunur.

(5.28), (5.30), (5.38) ve (5.42) i $\gamma_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx$ de dikkate alırsak,

$\gamma_n = \gamma_n{}^0 + o(1),\ n \to \infty$ bulunur. Burada $\gamma_n{}^0 = \frac{\pi}{2}$ dir.

5.2 Ters Problem

Ters problemi spektral özelliklere göre çözeceğiz.

1. Weyl fonksiyonundan $M(\lambda)$ ya göre;

2. Spektral verilere $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ göre;

3. İki spektruma $\{\lambda_n, \varrho_n\}_{n\geq 0}$ göre;

Öncelikle ispatlarımızı $(i) - (iii)$ için yapalım. Bunun için L ile birlikte, aynı formdaki sınır katsayısı olan $\tilde{L}$ harfini dikkate alalım, ancak katsayılar $\left(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H}, \tilde{a}_k, \tilde{\alpha}_k, k = 1,2\right)$ farklıdır. Eğer belirli bir a sembolü L ile ilgili bir nesne anlamına gelirse $\tilde{a}, \tilde{L}$ ile ilgili benzer nesneyi gösterir ve $\tilde{a} = a - \tilde{a}$ $\Phi(x,\lambda)$, (5.1) in $U(\Phi) = 1, V(\Phi) = 0$ ve (5.3) sınır şartları altında bir çözümü olsun. $M(\lambda) = \Phi(0,\lambda)$ olsun. $\Phi(x,\lambda), M(\lambda)$ fonksiyonlarının Weyl çözümleri ve sınır değer problemi için Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \mathrm{S}(x,\lambda) + \mathrm{M}(\lambda).\varphi(x,\lambda) \qquad (5.43)$$

$$\langle \varphi(x,\lambda), \Phi(x,\lambda) \rangle = 1 \qquad (5.44)$$

$$\langle \varphi(x,\lambda), \Phi(x,\lambda) \rangle = \varphi'(x,\lambda).\Phi(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda).\Phi'(x,\lambda) = U(\Phi) = 1$$

$$\mathrm{M}(\lambda) = \frac{\delta(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \qquad (5.45)$$

$\delta(\lambda) = \psi(0,\lambda) = V(S)$, sınır şartları $\mathrm{U}(y) = 0,\ y(\pi) = 0$ ile (4.1) denklemi için sınır değer problemi L_1 nin ve atlama koşulları (4.3) ün karakteristik fonksiyonudur. $\{\mu_n\}_{n\geq 0}\delta(\lambda)$ nın sıfırları olsun.

Teorem 5.2.1. *Eğer $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ ise $L = \tilde{L}$ olur. Böyle Weyl fonksiyonunun şartları, operatörü tek şekilde belirler.*

İspat:

$$\varphi^{v}(x,\lambda) = O\left(|k|^{v} \exp\left(|\tau|(\pi - x)\right)\right) \qquad (5.46)$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |k| \exp(|\tau|\pi), k \in G_\delta\ G_\delta = \{k\colon |k - k_n| \geq \delta\} \qquad (5.47)$$

(5.43), (5.44) ve (5.47) yardımıyla

$$|\Phi^{v}(x,\lambda)| \leq C_\delta |k|^{v-1} \exp(-|\tau|\pi), k \in G_\delta \qquad (5.48)$$

$P(x,\lambda) = \{P_{jk}(x,\lambda)\}_{jl=1,2}$ formülü ile matrisleri tanımlayalım:

$$\begin{cases} P_{j1}(x,\lambda) = \varphi^{(j-1)}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \Phi^{(j-1)}.\widetilde{\varphi}'(x,\lambda), \\ P_{j2}(x,\lambda) = \Phi^{(j-1)}(x,\lambda).\widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \varphi^{(j-1)}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \end{cases} \quad (5.49)$$

$$P_{11}(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)$$

Buradan

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \mathrm{P}_{11}(x,\lambda).\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) - \mathrm{P}_{12}(x,\lambda).\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ \Phi(x,\lambda) = \mathrm{P}_{11}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}(x,\lambda) - \mathrm{P}_{12}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) \end{cases} \quad (5.50)$$

$$\varphi(x,\lambda) = \left[\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\right].[\widetilde{\varphi}(x,\lambda)] + \left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right].[\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)]$$

$$\varphi(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}'(x,\lambda).\widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda).\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)$$

$$\Phi(x,\lambda) = \left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right].\left[\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right] + \left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right].\left[\widetilde{\Phi}'(x,\lambda)\right]$$

$$\Phi(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \widetilde{\varphi}(x,\lambda).\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$$

(5.43) ve (5.49) ye göre, her sabit x için $P_{jl}(x,\lambda)$ fonksiyonları λ ile basit kutuplar λ_n ve $\tilde{\lambda}_n$ meromorfiktir. $G_\delta^O = G_\delta \cap \tilde{G}_\delta$ olur.

$$\varphi^{(v)}(x,\lambda) = O(|k|^v \exp(|\tau|\pi)) \quad (5.51)$$

(5.38), (5.39) ve (5.41) ifadelerinden

$$|\mathrm{P}_{12}(x,\lambda)| \le C_\delta |k|^{-1}, |\mathrm{P}_{11}(x,\lambda)| \le C_\delta, k \in G_\delta \quad (5.52)$$

(5.48) ve (5.49) den sonra eğer $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ ise, her sabit x için, $\mathrm{P}_{1l}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının hepsi λ dadır. (5.52) ile birlikte bu $\mathrm{P}_{12}(x,\lambda) = 0, \mathrm{P}_{11}(x,\lambda) = A(x)$ verir. Buradan (5.50) kullanılarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\varphi(x,\lambda) = A(x).\widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}(x,\lambda) = A(x).\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \quad (5.53)$$

ifadesi $|k| \to \infty, argk \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon],\ \varepsilon > 0$ için hesaplanırsa

$$\varphi(x,\lambda) = 2^{-1} bexp(-ik\pi).\left(1 + O(k^{-1})\right)$$

şeklinde olur. Burada $b,\ a_i, \alpha_i\ i = 1,2\ bağlı\ sabittir$. (5.44) ve (5.53) ile birlikte bütün x ve λ için $b_1 = \tilde{b}_1, A(x) = 1,\ \varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda), \tilde{\Phi}(x,\lambda) = \tilde{\Phi}(x,\lambda)$ olarak bulunur. Sonuç olarak $L = \tilde{\mathrm{L}}$ dir. □

Teorem 5.2.2. *Eğer $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n,\ \gamma_n = \tilde{\gamma}_n, n \geq 0$ ise $L = \tilde{L}$ olur. Böylece spektral verilere ait $\{\lambda_n, \gamma_n\}_{n\geq 0}$ operatörü tek şekilde belirler.*

İspat: (5.45) den Weyl fonksiyonu $M(\lambda)$ basit kutup λ_n ile meromorfiktir.

$\beta_n = \psi(0,\lambda_n) = \frac{1}{\varphi(T,\lambda_n)}, \beta_n.\gamma_n = \Delta_1(\lambda_n)$ ve (4.38) kullanılarak aşağıdaki ifade hesaplanır.

$$\underset{\lambda=\lambda_n}{Res} M(\lambda) = \frac{\delta(\lambda_n)}{\Delta_1(\lambda_n)} = \frac{\beta_n}{\Delta_1(\lambda_n)} = \frac{1}{\gamma_n} \tag{5.54}$$

$\Gamma = \{\lambda = u + iv: u = (2h^2)^2.v^2 - h^2\}$ ifadesi $Im(k) = \pm h$ ın $\lambda = k^2$ altındaki görüntüsü olsun. $\Gamma_\mathrm{n} = \Gamma \cap \{\lambda: |\lambda| \leq r_n\}$ belirtip aşağıdakileri dikkate alalım.

$$\Gamma_{\mathrm{n}0} = \Gamma_\mathrm{n} \cup \{\lambda: |\lambda| = r_n, \lambda \notin int(\Gamma)\}, \qquad \Gamma_{\mathrm{n}1} = \Gamma_\mathrm{n} \cup \{\lambda: |\lambda| = r_n, \lambda \notin int(\Gamma)\}$$

Weyl fonksiyonu $M(\lambda)$ için $\lambda \in int\Gamma_{\mathrm{n}0}$ düzenli olduğundan Cauchy teoremi yardımıyla

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}.\int_{\Gamma_{\mathrm{n}0}} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda}.d\mu, \qquad \lambda \in int(\Gamma_{\mathrm{n}0})$$

$\delta_n = \psi(x,\lambda)$ ifadesi bize

$$\delta_n = O(\exp(|\tau|\pi)) \tag{5.55}$$

verir. (5.47), (5.45) ve (5.55) i kullanarak

$$|M(\lambda)| \leq C_\delta.|k|^{-1}, k \in G_\delta \tag{5.56}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$M(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}.\int_{\Gamma_{\mathrm{n}1}} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda}.d\mu$$

olur. Bu integral rezidü teoremi yardımıyla hesaplar ve aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$M(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k.(\lambda - \lambda_k)} \tag{5.57}$$

Teoremin hipotezi altında (5.57) e baktığımızda $M(\lambda)$ ve Teorem 5.2.1 yardımıyla $L = \tilde{L}$ elde edilir. □

Teorem 5.2.3. *Eğer* $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n,\ \mu_n = \tilde{\mu}_n,\ n \geq 0$ *ise* $(0, \pi)$ *aralığında* $q(x) = \tilde{q}(x), L = \tilde{L}$ *dir.*

İspat: $\Delta(\lambda)$ dizisi, $\lambda\, nın\ derecesi\ \frac{1}{2}$ olduğundan sonuç olarak, $\Delta(\lambda)$, sıfırlarla çarpımsal bir sabite kadar tek bir şekilde belirlenir:

$$\Delta(\lambda) = C.\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \tag{5.58}$$

$$\Delta_0(\lambda) = k.\sin k\pi \tag{5.59}$$

ifadesine göre

$$\Delta_0(\lambda) = \Omega_0.\lambda.\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^0}\right), \Omega_0 = \pi$$

olur. Buradan

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)} = C.\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0.\Omega_0.\lambda}.\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^0}{\lambda_n}.\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_n}\right)$$

$\lambda \to -\infty$ alırsak

$$\Delta_0(\lambda) = -\lambda_0.\Omega_0.\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n^0}$$

ifadesini elde ederiz. (5.58) da yerine yazarsak

$$\Delta(\lambda) = \Omega_0.(\lambda - \lambda_0)\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n^0}\right) \tag{5.60}$$

elde edilir. (5.60) den itibaren $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumlarının spesifikasyonu karakteristik fonksiyon $\Delta(\lambda)$ i kesin olarak belirler. Benzer şekilde $\delta(\lambda)$ fonksiyonu $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sıfırları yardımıyla tek şekilde belirlenir. Şimdi $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n,\ \mu_n = \tilde{\mu}_n, n \geq 0$ alalım. $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)$, $\delta(\lambda) = \tilde{\delta}(\lambda)$ olur. Sonuç olarak (4.38) yardımıyla $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ elde edilir. Buradan ve Teorem 5.2.1 den $q(x) = \tilde{q}(x), h = \tilde{h}, a_i = \tilde{a}_i$ ve $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i\ i = 1,2$ olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde iki delta genelleşmiş fonksiyon katsayılı Sturm- Liouville operatörü için $(0, \pi)$ aralığında düz ve ters problemler incelenmiştir. Buradan hareketle bu iki delta genelleşmiş fonksiyon katsayısının operatöre ve spektral verilere nasıl yansıdığı görülmüştür.

Bu tezde elde edilen sonuçlar özgündür ve sonuçlar konuya derinlik kazandırmış olup bundan sonra yapılacak çalışmalara kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya, 2000, 470 s.

[2] B. M. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville Problems,* VSP, Zeist, 1987.

[3] D.G. Shepelsky, "The inverse problems of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions", *Advances in Soviet Mathematics* 19, pp. 209-231, 1994.

[4] E. A. Coddington ve N. Levinson, "Theory of ordinary differential equations" *McGraw-Hill*, New York, 1955.

[5] E.C Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions* part 1, Oxford University Press (Clarendon Press), 1962.

[6] G. Freiling ve V. Yurko, "Inverse sturm-liouville problems and their applications", *Nova Science Publ. Inc.*, Huntington. NY, 2001.

[7] I. M. Guseniev ve L. I. Mammadova, "Reconstruction of the diffusion equation with singular coefficients for two spectra". Doklady Akademii Nauk, 471:1, pp. 13-16; Eng Transl: Doklady Mathematics, 90:1. pp. 401-404, 2014.

[8] J.B. Conway, *Functions of one complex variable*. (2nd edition), Springer, New York, NY, USA, 1995.

[9] J. W. Atkinson, *An Introduction to Motivation Princeton*, N. J.: Van Nostrand, 1964.

[10] L. I. Mammadova. "Represantationon the solution of sturm-liouville equation with discontinuity conditions interior to interval". *Proceedings of IMM of NAS of Azerb.* 33, pp. 127-136, 2010.

[11] M.A. Naimark,(Lineer Diffeerential Operators, Part I, Elementary*)*, *Theory of Lineer Differential operators, Predekick Ungar Publ. Co*, New York, 1967.

[12] M. Dzh. Manafov, Description of the domain of an ordinary differential operatör with generalized potential, *Differ. Uravneniya* 32:5(1996), 706-707.

[13] M. Dzh. Manafov, “Inverse spectral problems for energy-dependent sturm-liouville equations with finitely many point δ-interactions”. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol., No. 11, pp. 1-12, 2016.

[14] M. Dzh. Manafov, "Inverse spectral problems for energy-dependent sturm-liouville equations with δ -interaction", Filomat 30:11, pp. 2935-2946, 2016.

[15] O. H. Hald, Discontinuous inverse eigenvalue problems", Comm. on Pure ad Appl. Math. 37, pp. 53-72, 1986.

[16] P. J. Jorgensen, "High temperature transport processes in lithium niobate”, *Journal of physics and chemistry of solids*, pp. 2639-2648, December, 1969.

[17] R. K. Amirov, "On sturm-liouville operators with discontinuty conditions inside an interval", *J. of Math. Anal. Appl*. 317, pp. 163-176, 2006.

[18] S.Albeverio ve F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden with an Appendix by P. Exer, *Solvable Models in Quantum Mechanics, (second edition),* AMS Chelsee Publ., 2005.

[19] V. A. Marchenko, "Sturm-liouville operators and their applications". *Operator Theory*: *Advanced and Application*, Birkhauser, Basel, 1986.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ahmet ZİNCİR
Doğum Yeri: Kahramanmaraş/Elbistan
Doğum Tarihi: 15.03.1987
Medeni Hali: Bekar
Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Nurhak Lisesi-2004
Lisans: Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Matematik Bölümü-2009
Yüksek Lisans: Adıyaman Üniversitesi – 2020
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Mehmet Akif Ersoy Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi-Merkez-Adıyaman 2015-Devam ediyor.