T.C

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEMLERİ

Ayşe SEVİNÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEMLERİ

Ayşe SEVİNÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 03/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Manaf MANAFLI

BAŞKAN (DANIŞMAN)

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

ÜYE

Yrd. Doç. Dr. İbrahim H. GÜMÜŞ

ÜYE

Doç. Dr. Ramazan GÜRBÜZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEMLERİ

Ayşe SEVİNÇ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Yıl: 2015, Sayfa sayısı: 36

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Yrd. Doç. Dr. İbrahim H. GÜMÜŞ

Bu tezin birinci bölümünde, diferansiyel operatörler, Sturm-Liouville operatörü ve ters spektral problemler ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde kullanılan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Sturm-Liouville operatörü, dönüşüm operatörü ve düğüm noktaları için genel bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ters spektral problemler ile ilgili açıklamalar ve teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville operatörü, özdeğer, özfonksiyon, ters spektral problemleri

ABSTRACT

MSc THESIS

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH GENERALIZED FUNCTION

Ayşe SEVİNÇ

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Year: 2015, Number of pages: 36

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Assoc. Prof. Dr. Abdullah KABLAN
Asst. Prof. Dr. İbrahim H. GÜMÜŞ

In the first chapter of this thesis, informations about differential operators, Sturm-Liouville operators and inverse spectral problems are given.

In the second chapter, some fundamental definitions and theorems that use of in spectral theory of differential operators are given.

In the third chapter, general informations of Sturm-Liouville operators, tranformation operators and nodal points are examined.

In the fourth chapter, statements and theorems related to the inverse spectral problems are given.

Key words: Sturm-Liouville operator, eigenvalue, eigenfunction, inverse spectral problems.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada her konuda bana yardımcı olan ve desteğini hiç esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI 'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe SEVİNÇ

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$C[a,b]$	: $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların uzayı
H	: Hilbert uzayı
$y(x,\lambda)$	: Özfonksiyon
λ	: Özdeğer
δ	: Dirac fonksiyonu
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyonu

1. GİRİŞ

Spektral analizin ters problemleri spektral karakteristiklerinin kurtarma operatörlerinden oluşmaktadır. Böyle problemler matematik, mekanik, fizik, elektronik, jeofizik, meteoroloji ve bilimin diğer dallarında sıklıkla ortaya çıkar. Ters operatörler ayrıca matematiksel fizikte lineer olmayan evrim denklemini çözmekte önemli bir rol oynar. Ters problemler sıradan diferansiyel operatörlerin bazı özel sınıflar için çalışılmıştır. Bunlardan en basiti Sturm-Liouville operatörüdür. Bu konuya olan ilgi yeni önemli uygulamalardaki görünümünden dolayı kalıcı olarak artmaktadır ve bu günlerde ters problem teorisi dünyada yoğun olarak gelişmektedir.

Genel olarak spektral teorideki ve özel olarak ters spektral problemlerdeki en büyük başarı bir boyutlu Schrödinger operatörü olarak da adlandırılan

$$ly := -y'' + q(x)\,y = \lambda y$$

Sturm-Liouville operatörü için elde edilmiştir. Bu operatörlerin spektral teorisi üzerindeki ilk çalışmalar bir dizinin titreşimini açıklayan denklemin çözümü ile bağlantılı olarak D. Bernoulli, J.d'Alembert, L. Euler, J.Liouvile ve C. Sturm tarafından yapılmıştır. Diferansiyel ve integral operatörlerinin farklı sınıfları ve soyut uzaydaki operatörler için spektral teoride yirminci yüzyılda yoğun bir gelişme yaşandı. Burada derin fikirler G. Birkhoff, D. Hilbert, J. Von Neumann, V. Steklov, M. Stone, H. Weyl ve birçok diğer matematikçi sayesinde oluşmuştur. Ters spektral problemlerin temel sonuçları yirminci yüzyılın ikinci yarısında ortaya çıkmıştır. Sturm-Liouville operatörü için ters spektral teorideki önemli rol, dönüşüm operatörü yöntemiyle oynanmıştır. Ama bu metot Sturm-Liouville operatöründen daha karmaşık olmasıyla ters problemlerin çok önemli sınıfları için elverişli olmamıştır. Şu anda ters spektral sorunların çözümü için diğer etkili yöntemler oluşturulmuştur. Bunların arasında kontur integral yöntem fikirleri ile bağlantılı spektral dönüşüm yöntemini işaret etmektedir. Bu yöntem ters spektral problemleri için perspektif gibi görünür. Ortaya çıkan yöntemler çeşitli doğal bilim dallarındaki birçok önemli problemin çözümlenmesini sağlamıştır.

Son yıllarda, ters spektral problemlerin uygulamaları için yeni alanlar ortaya çıktı. Genellikle uygulamalarda ters sorunların diğer bir önemli sınıfı, spektral bilginin sadece bir kısım ölçümü için kullanılabilir eksik spektral bilgilerden diferansiyel denklemler kurtarma ters sorunudur. Tekillikleri ve dönüm noktaları olan diferansiyel denklemler, yüksek mertebeden diferansiyel operatörler, diferansiyel operatörlerin gecikme ya da "ikincil etki" nin diğer türleri için birçok uygulama ters problemler ile bağlantılıdır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1. X, K sayı cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to K$$

dönüşümü, her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

(i) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme bir iç çarpım, $\left(X, \langle \cdot,\cdot \rangle \right)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir $\left[\text{bkz.9}\right]$.

Tanım 2.2. $d\left(x, y\right) = \left\| x - y \right\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$ metriğine göre tam bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir $\left[\text{bkz.9}\right]$.

Tanım 2.3. $a < t < b$ olmak üzere $L^2\left[a,b\right]$ uzayı

$$L^2[a,b] = \left\{ x\left(t\right) : \int_a^b \left[x\left(t\right) \right]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f\left(x\right) \overline{g\left(x\right)} dx$$

şeklinde tanımlanır $\left[\text{bkz.8}\right]$.

Tanım 2.4. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir $\left[\text{bkz.3}\right]$.

Tanım 2.5. Bir T lineer operatörü, aşağıdaki özelikleri gerçekleyen bir operatördür:

(i) T nin $D\left(T\right)$ tanım bölgesi bir vektör uzay olup, $R\left(T\right)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzaydır.

(ii) Her x, y$\in D(T)$ ve a skaleri için,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(ax) = aTx \quad \text{dir } [\text{bkz.9}].$$

Tanım 2.6. *H* Hilbert uzayının bir alt kümesinde tanımlanan herhangi bir *F* lineer operatörünün değer kümesi reel veya kompleks sayılar kümesi ise *F*, *H* de bir lineer fonksiyoneldir denir.

Tanım 2.7. Bir $X = (X, d)$ metrik uzayında, bir (x_n) dizisini göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir $[\text{bkz.9}]$.

Tanım 2.8. $X = (X, d)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa yani $x_n \to x \in X$ ise (*X; d*) metrik uzayına tamdır denir $[\text{bkz.9}]$.

Tanım 2.9. *X* bir *K* cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\| : X \to R_+, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|ax\| = |a| \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa *X* üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir $[\text{bkz.17}]$.

Tanım 2.10. *N* ve N' normlu uzaylar ve $T : N \to N'$ lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa, T operatörü sınırlı (lineer operatör) denir [bkz.3].

Tanım 2.11. X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere $T: D(T) \to Y$, lineer olması zorunlu olmayan, herhangi bir operatör olsun. T operatörünün, bir $x_0 \in D(T)$ noktasında sürekli olması için, verilen bir sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için,

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olması gerekmektedir. Eğer her $x \in D(T)$ noktasında T sürekli ise, T operatörü süreklidir denir [bkz.9].

Tanım 2.12. $X = (X, d)$ ve $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ iki metrik uzay olsun.

(a) X 'den $\tilde{X}$ içine bir T dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer T dönüşümü uzaklıkları koruyorsa, yani, Tx ve Ty, sırasıyla, x ve y nin görüntüleri olmak üzere, her $x, y \in X$ için,

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$$

ise T dönüşümüne bir izometrik dönüşüm ya da bir izometri adı verilir.

(b) X den $\tilde{X}$ üzerine birebir ve örten bir izometrinin var olması halinde, X uzayı $\tilde{X}$ uzayı ile izometriktir denir. Bu durumda, X ve $\tilde{X}$ uzayları izometrik uzaylar adını alırlar.

Tanım 2.13. H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olmak üzere, $T: H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ olacak şekilde bir $T^*: H_2 \to H_1$ operatörüne T nin, T^* Hilbert-adjoint operatörü denir. Eğer T = T^* ise T operatörüne self adjoint operatör denir [bkz.9].

Tanım 2.14. $T: V \to V$ lineer dönüşümü verilsin. $x \in V$ olan sıfırdan farklı bir x vektörü için $T(x) = \lambda x$ eşitliğini sağlayan bir λ sayısı varsa, λ sayısına T dönüşümünün özdeğeri, x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

Tanım 2.15. $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olacak şekilde

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)\,dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 2.16. X bir kompleks Banach uzayı, $A: X \to X$ bir lineer operatör olmak üzere $(A-\lambda I)x = y$ denklemi verilsin. $p(A) = \left\{\lambda \in C : (A-\lambda I)^{-1} \in L(X)\right\}$ regüler değerler kümesi olmak üzere $\sigma(A) = C / p(A)$ kümesine A operatörünün spektrumu denir $[\text{bkz.}3]$.

Tanım 2.17. $\lambda \in p(A)$ olmak üzere $R(\lambda, A) = (A-\lambda I)^{-1}$ operatörüne A operatörünün rezolvantası (veya çözücü operatörü) denir $[\text{bkz.}3]$.

Tanım 2.18. E lineer topolojik uzay, A ve B operatörleri $A: E \to E$, $B: E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 ise E lineer uzayın kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörüne,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanıyor,

şartlarını sağlıyorsa A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Tanım 2.19. Bir *f(z)* fonksiyonuna karşılık A ve a pozitif sayılan bulunabiliyorsa, öyle ki $r = |z| \to \infty$ iken

$$|f(z)| < Ae^{r^a}$$

ise *f(z)* fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur, a sayıların en küçüğü olan r ye ise tam fonksiyonun mertebesi denir $[\text{bkz.}7]$.

Tanım 2.20. $x \to 0$ (veya $x \to \infty$) iken eğer $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$, $f(x) = o(g(x))$ ve $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir.

Teorem 2.21. (Rouche) Γ- kapalı düzeltilebilir Jordan eğrisi üzerinde ve Γ nın iç noktalarında $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ analitik fonksiyonlar ve $z \in \Gamma$ için $|f_1(z)| > |f_2(z)|$ olsun. Bu takdirde Γ nın içinde $f_1(z) + f_2(z)$ ve $f_1(z)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayısı aynıdır [bkz.7].

Tanım 2.22. $y_1, y_2, ..., y_n$ ler ortak I aralığında tanımlı ise ve (*n-1*) kez türevleri alınabilir *n* tane fonksiyonlar olsunlar.

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Determinantına n fonksiyonunun Wronki si denir [bkz.18].

Tanım 2.23. İntegral denklemler integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar. Lineer ve homojen olup olmadıklarına bakmaksızın,

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t) u(t) dt$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t) u(t) dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t) u(t) dt$$

$$\phi(x) u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t) u(t) dt$$

gibi denklemlere Volterra integral denklemleri denilmektedir [bkz.1].

3. STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ

3.1. Sturm-Liouville Operatörü için Genel Bilgiler

Operatörlerin spektral teorisinde sık sık göz önüne alınan Sturm-Liouville operatörü

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon varsayılacaktır. Bu operatör için yukarıda belirtilen $y(x)$ fonksiyonlarının kümesi belirgin diferansiyellenebilme durumuna göre ve ayrıca $[a,b]$ aralığının sınırında belirli koşullar tarafından belirlenir.

L operatörü için en önemli sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

1. $y(a)\ \cos\alpha\ +\ y'(a)\ \sin\alpha\ =\ 0$

   $y(b)\ \cos\beta\ +\ y'(b)\ \sin\beta\ =\ 0$

2. $y(a) = y(b)$

   $y'(a) = y'(b)$

$$Ly(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(a)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olarak tanımlanan (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer problemi Sturm-Liouville problemi olarak bilinir.

$p(x), l(x)$ *ve* $r(x)$ fonksiyonları reel ve sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim. *p(x)* ve *r(x)*, $[a,b]$ aralığında pozitif fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denkleminin

$$L = -\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + l(x)y = \lambda r(x)y, \tag{3.1.3}$$

genel ifadesini göz önüne alalım. *p(x)* birinci mertebeden sürekli ve *p(x).r(x)* ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olacak şekilde

$$z=\frac{1}{c}\int_a^x\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{1/2}dx,\quad u\big(r(x)\,p(x)\big)^{1/4},\qquad \mu=c\lambda$$

dönüşümlerini yaparsak *c* burada

$$c=\frac{1}{\pi}\int_a^b\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{1/2}dx$$

olarak verilir. (3.1.3) denklemi λ ile μ yer değiştiğinde (3.1.1) formuna dönüşür. Burada

$$q(z)=\frac{Q''(z)}{Q(z)}-c^2\frac{l(x)}{r(x)}$$

$$Q(z)=\big(r(x)\,p(x)\big)^{1/4}$$

olur. Sınır değerleri değişmiyorken bu değişimin sonucu olarak $[a,b]$ aralığı $[0,\pi]$ aralığına dönüşür.

Herhangi λ_1 için göz önüne alınan sınır değer probleminin $y(x,\ \lambda_1)\neq 0$ aşîkar olmayan çözüme sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda bu bölümün başlangıcında verilen tanımda (3.1.l)-(3.1.2) sınır değer probleminin özdeğeri λ_1 ve buna karşılık gelen özfonksiyonu da $y(x,\ \lambda_1)$ olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1\neq\lambda_2$ farklı özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\ \lambda_1)$ ve $y(x,\ \lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani

$$\int_a^\pi y(x,\lambda_1)\,y(x,\lambda_2)\,dx=0\,,\qquad (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

olur.

İspat. *f(x)* ve *g(x)* iki sürekli ve iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$Lf=f''(x)-q(x)\,f(x)$$

ifadesini

$$W_x\{f,g\}=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

kullanarak iki kez kısmi integralini alırsak

$$\int_0^\pi Lf.g(x)dx=W_\pi\{f,g\}-W_0\{f,g\}+\int_0^\pi f(x)Lg(x)dx \qquad (3.1.4)$$

denklemini elde ederiz.

$f(x)=y(x,\lambda_1)$ ve $g(x)=y(x,\lambda_2)$ olsun. (3.1.2) de olan şartlardan $W_0\{f,g\}=W_\pi\{f,g\}=0$ olduğu görülür. Böylece (3.1.4) denkleminden

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx=0$$

elde edilir. Böylece $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu görülür ve lemma ispatlanmış oldu.

Lemma 3.1.2. (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. $\lambda_1 = u+iv$ kompleks bir özdeğer olsun. *q(x)* reel bir fonksiyon ve α ile β sayıları da reel olduğundan dolayı $\bar{y}(x,\lambda_1)$ özfonksiyonu da $\lambda_2=\overline{\lambda}_2=u-iv$ sayısına sahip bir özdeğer olur. Daha sonra bir önceki lemmaya dayanarak

$$\int_0^\pi |y(x,\lambda_1)|^2 dx=0$$

olduğunu görürüz ve buradan da $y(x,\lambda_1)=0$ sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.l.1. Eğer *q(x),* $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve

$$\varphi(\alpha,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi'_x(\alpha,\lambda)=\cos\alpha$$

olacak şekilde (3.1.1) denkleminin $a\le x\le b$ aralığında her *a* için bir tek $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır. Her $x\in[a,b]$ için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre tam fonksiyondur.

İspat. $\varphi(x,\lambda)=\sin\alpha$ - $(x - a)\cos a$ ve $n>0$ için

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)\,dt$$

olsun. q sürekli bir fonksiyon olduğundan $a\le x\le b$ için $q(x)<M$ olur. $|\lambda|\le N$ olsun. $a\le x\le b$ için $|\varphi_0(x,\lambda)|\le K$ olur. Bundan dolayı

$$|\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_0(x,\lambda)|\le\int_a^x(M+N)K.(x-t)\,dt=\frac{1}{2}K.(M+N).(x-a^2)$$

$n\ge 2$ için

$$\varphi_n(x,\lambda)=\varphi_{n-1}(x,\lambda)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}.\{\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\}(x-t)dt$$

$$|\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)|\le(M+N)(b-a)\int_a^x|\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)|dt$$

elde ederiz. Bunun sonucu olarak

$$|\varphi_2(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)|\le\frac{1}{2}K(M+N)^2(b-a)\int_a^x(t-a)^2\,dx$$

$$=\frac{K(M+N)^2(b-a)(x-a)^3}{3!}$$

elde ederiz ve genelikle

$$|\varphi_n(x,\lambda)=\varphi_{n-1}(x,\lambda)|\le\frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

şeklindedir. Bu nedenle

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\}\qquad(3.l.5)$$

$a\le x\le b$ için x e göre düzgün ve $|\lambda|\le N$ için λ ya göre düzgün yakınsak bir seridir.

$n\ge 2$ olduğunda,

$$\varphi_n'(x,\lambda)=\varphi_{n-1}'(x,\lambda)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\}dt$$

$$\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\varphi_{n-1}(x,\lambda)\varphi_{n-2}(x,\lambda)$$

elde ederiz. (3.1.5) serisini bir veya iki kez diferansiyellersek

$$\varphi''_n(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi''_n(x,\lambda)-\varphi''_{n-1}(x,\lambda)\right\}$$

$$=\varphi''_1(x,\lambda)-\varphi''_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi''_n(x,\lambda)-\varphi''_{n-1}(x,\lambda)\right\}$$

$$=\left(q(x)-\lambda\right)\left(\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\varphi''_{n-1}(x,\lambda)-\varphi''_{n-2}(x,\lambda)\right\}\right)$$

$$=\left\{q(x)-\lambda\right\}\varphi(x,\lambda)$$

buluruz. Böylece $\varphi(x,\lambda)$, (3.1.1) denklemini sağlar. Ayrıca $\varphi_n(x,\lambda)$ fonksiyonunun yapısı ve (3.1.5) serisinin düzgün yakınsak olmasından dolayı $\varphi(x,\lambda)$, λ değişkenine göre tam fonksiyondur.

3.2. Dönüşüm Operatörleri

Sturm-Lioville operatörü için ters problem teorisinde önemli bir rol, dönüşüm operatörleri tarafından oynanmıştır. Dönüşüm operatörleri tüm λ lar için iki farklı Sturm-Liouville denkleminin çözümlerini bağlar. Dönüşüm operatörü ilk Delsarte ve Levitan'ın genelleştirilmiş çeviri operatörleri teorisinde ortaya çıktı. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörleri Povzner tarafından inşa edildi. Ters problem teorisinde dönüşüm operatörleri Gelfand, Levitan ve Marchenko tarafından kullanıldı.

Teorem 3.2.1. $C(x,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki gösterim geçerlidir:

$$C(x,\lambda)=\cos kx+\int_0^x K(x,t)\cos kt\,dt\,,\qquad \lambda=k^2 \tag{3.2.1}$$

$K(x,t)$ sürekli reel fonksiyon olmak üzere

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt\qquad \text{dir.} \tag{3.2.2}$$

İspat. $\varphi(x,\lambda)=\cos kx+h\dfrac{\sin kx}{k}+\displaystyle\int_0^x\frac{\sin k(x-t)}{k}q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt$ denkleminde $h=0$ için $C(x,\lambda)$ aşağıdaki integral denkleminin çözümü olur:

$$C(x,\lambda)=\cos kx+\int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t)C(t,\lambda)\,dt \tag{3.2.3}$$

Burada

$$\frac{\sin k(x-t)}{k}=\int_t^x \cos k(s-t)\,ds$$

olduğundan

$$C(x,\lambda)=\cos kx+\int_0^x q(t)C(t,\lambda)\left(\int_t^x \cos k(s-t)ds\right)dt$$

olur ve bundan dolayı

$$C(x,\lambda)=\cos kx+\int_0^x\left(\int_0^t q(\tau)C(\tau,\lambda)\cos k(t-\tau)\,d\tau\right)dt$$

olur. Ardışık yaklaşım metodu

$$C(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x,\lambda), \tag{3.2.4}$$

$$C_0=\cos kx, \qquad C_{n+1}(x,\lambda)=\int_0^x\left(\int_0^t q(\tau)C(\tau,\lambda)\cos k(t-\tau)\,d\tau\right)dt \tag{3.2.5}$$

ifadelerini verir. Aşağıdaki temsili sahip olduğu indüksiyon ile gösterelim:

$$C_n(x,\lambda)=\int_0^x K_n(x,t)\cos kt\,dt \tag{3.2.6}$$

Burada $K_n(x,t)$, λ ya bağlı değildir.

İlk önce $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$ formülünü kullanarak $C_1(x,\lambda)$ yı hesaplayalım:

$$C_1(x,\lambda)=\int_0^x\left(\int_0^t q(\tau)\cos k\tau\cos k(t-\tau)\,d\tau\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x \cos kt\left(\int_0^t q(\tau)\,d\tau\right)dt+\frac{1}{2}\left(\int_0^t q(\tau)\cos(t-2\tau)\,d\tau\right)dt$$

Burada $t-2\tau=s$ değişken değişimi ikinci integralini verir.

$$C_1(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^x \cos kt\left(\int_0^t q(\tau)d\tau\right)dt+\frac{1}{4}\int_0^x\left(\int_{-t}^t q\left(\frac{t-s}{2}\right)\cos ks\,ds\right)dt$$

Elde ettiğimiz ikinci integral entegrasyon sırasını değiştirilerek

$$C_1(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^x \cos kt\left(\int_0^t q(\tau)d\tau\right)dt+\frac{1}{4}\int_0^x \cos ks\left(\int_s^x q\left(\frac{t-s}{2}\right)dt\right)ds$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-x}^0 \cos ks\left(\int_{-s}^x q\left(\frac{t-s}{2}\right)dt\right)ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x \cos kt\left(\int_0^t q(\tau)d\tau\right)dt+\frac{1}{4}\int_0^x \cos ks\left(\int_s^x\left(q\left(\frac{t-s}{2}\right)+q\left(\frac{t+s}{2}\right)\right)dt\right)ds$$

Böylece (3.2.6), *n=1* için geçerli olup

$$K_1(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t q(\tau)d\tau+\frac{1}{4}\int_t^x\left(q\left(\frac{s-t}{2}\right)+q\left(\frac{s+t}{2}\right)\right)ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)d\xi\,,\quad t\le x \tag{3.2.7}$$

Şimdi de (3.2.6) denkleminin $n\ge 1$ için de geçerli olduğunu varsayalım. O zaman (3.2.6) denklemini (3.2.5) te yerine koyalım:

$$C_{n+1}=\int_0^x\int_0^t q(\tau)\cos(t-\tau)\int_0^\tau K_n(\tau,s)\cos ks\,ds\,d\tau\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\int_o^t q(\tau)\int_0^\tau K_n(\tau,s)\left(\cos k(s+t-\tau)+\cos(s-t+\tau)\right)ds\,d\tau\,dt$$

Sırasıyla $s+t-\tau=\xi$ ve $s-t+\tau=\xi$ dönüşümlerini yaptığımızda

$$C_{n+1}(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^x\int_o^t q(\tau)\int_{t-\tau}^t K_n(\tau,\xi+\tau-t)\cos k\xi\,d\xi\,d\tau\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x\int_o^t q(\tau)\int_{\tau-t}^{2\tau-t} K_n(\tau,\xi+t-\tau)\cos k\xi\,d\xi\,d\tau\,dt$$

olur. Entegrasyon sırası değiştirilerek aşağıdaki ifade elde edilir:

$$C_{n+1}(x,\lambda)=\int_0^x K_{n+1}(x,t)\cos kt\,dt$$

Burada

$$K_{n+1}(x,T)=\frac{1}{2}\int_t^x\left(\int_{\xi-t}^{\xi} q(\tau)K_n(\tau,t+\tau-\xi)\,d\tau\right)+\int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} q(\tau)K_n(\tau,t-\tau+\xi)\,d\tau$$

$$+\int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} q(\tau)K_n(\tau,-t-\tau+\xi)\,d\tau\,d\xi \qquad (3.2.8)$$

olur. (3.2.6) yı (3.2.4) te yerine koyduğumuzda (3.2.1) e ulaşırız.

$$K(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t) \qquad (3.2.9)$$

Bunu (3.2.7) ve (3.2.8) izler. Bu da

$$\left|K_n(x,t)\right|\le\left(Q(x)\right)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\quad Q(x):=\int_0^x\left|q(\xi)\right|d\xi$$

Gerçekten de (3.2.7), $t\le x$ için sağlanır,

$$\left|K_1(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}}\left|q(\xi)\right|d\xi+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\left|q(\xi)\right|d\xi\le\int_0^x\left|q(\xi)\right|d\xi=Q(x)$$

Ayrıca, eğer belirli bir $n\ge 1$ için $\left|K_n(x,t)\right|$ sonucu geçerlidir, daha sonra (3.2.8) gereğince

$$\left|K_{n+1}(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi}\left|q(\tau)\right|\left(Q(\tau)\right)^n\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}+\int_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi}\left|q(\tau)\right|\left(Q(\tau)\right)^n\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}d\tau\right)d\xi$$

$$\le\int_0^x\int_0^{\xi}\left|q(\tau)\right|\left(Q(\tau)\right)^n\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}d\tau\,d\xi\le\int_0^x\left(Q(\xi)\right)^{n+1}\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}d\xi\le\left(Q(x)\right)^{n+1}\frac{x^n}{n!}$$

Böylece $0\le t\le x\le\pi$ için (3.2.9) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır ve $K(x,\ t)$ fonksiyonu süreklidir. (3.2.7) ve (3.2.8) ye göre

$$K_1(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \qquad K_{n+1}(x,x)=0, \qquad n\geq 1$$

biçimindeki (3.2.2) denklemine ulaşırız.

T operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Tf(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)\,dt$$

$C(x,\lambda)$ için T operatörü dönüşüm operatörü olarak adlandırılır. Burada önemli nokta $K(x,t)$ çekirdeği λ ya bağlı değildir.

3.3. Düğüm Noktaları (Özfonksiyonların Sıfırları)

$$y''+\lambda y=0, \qquad y'(0)=y'(\pi)=0$$

Basit sınır değer problemini

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=\cos x,\ \varphi_2(x)=\cos 2x,...,\ \varphi_n(x)=\cos nx,...$$

özfonksiyonları ve

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=1^2,\ \lambda_2=2^2,...,\ \lambda_n=n^2,...$$

şeklinde olan özdeğerlerle birlikte dikkate alalım.

Özfonksiyonların sıfırlarının aşağıdaki iki özelliğe sahip olduğu açıktır.

1) *n.* özfonksiyon $(0,\pi)$ aralığında n tam sıfıra sahiptir,

2) *n.* ve $(n+1)$. özfonksiyonun sıfırları birbirine karışmıştır, yani $(n+1)$. özfonksiyonun sıfırı n. özfonksiyonun herhangi iki sıfırı arasındadır.

Teorem 3.3.1.

$$u''+g(x)u=0 \tag{3.3.1}$$

$$v''+h(x)v=0 \tag{3.3.2}$$

denklemleri için eğer tüm $[a,b]$ aralığında $g(x)<h(x)$ ise bu durumda birinci

denklemin sıfır olmayan çözümünün iki ardışık sıfırı arasında ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı bulunacaktır**.**

İspat. (3.3.1) denklemini v ile (3.3.2) denklemini u ile çarpıp birbirlerinden çıkarırsak

$$u''v - v''u = \frac{d}{dx}\{u'v - v'u\} = \{h(x) - g(x)\}uv \tag{3.3.3}$$

elde ederiz. x_1 ve x_2 nin u nun iki sıfırı arasında olduğunu belirtelim, x_1 den x_2 ye kadar (3.3.3) eşitliğini integrallersek

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \{h(x) - g(x)\}u(x)v(x)dx$$

elde edilir.

(x_1, x_2) aralığında v nin her yerde sıfıra eşit olmadığını farz edelim. (x_1, x_2) aralığında genelliği bozmadan u>0 ve v>0 olduğunu varsayalım. Dolayısıyla son denklemin sağ tarafı pozitiftir. $u \geq 0$ varsayımından dolayı x_1 noktasında u fonksiyonu artandır. Dolayısıyla $u'(x_1) > 0$ dır. Benzer şekilde $u'(x_2) < 0$ dır. Bundan dolayı

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0$$

olur ve bu bir çelişkidir. Buna göre teorem ispatlanmış olur.

Sonuç.

$$y'' + g(x)y = 0, \qquad -\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty$$

denkleminin hiçbir çözümü $g(x) < -m^2$ < 0 için birden fazla sıfıra sahip değildir.

Teorem 3.3.2 (Karşılaştırma Teoremi). (3.3.1) denkleminin

$$u(a) = \sin\alpha, \qquad u'(a) = -\cos\alpha \tag{3.3.4}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $u(x)$ ve (3.3.2) denkleminin aynı başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $v(x)$ olsun. Ayrıca tüm $[a,b]$ aralığında $g(x)$<$h(x)$ olsun. Eğer $a < x \leq b$ aralığında $u(x)$ fonksiyonu *m* tane sıfıra sahipse bu taktirde aynı aralıkta $v(x)$ in *m* den az olmayacak şekilde sıfırları mevcut olup $v(x)$ in *k*. sıfırı $u(x)$

in *k*. sıfırından küçüktür.

Lemma 3.3.1. Eğer x_0, $a < x_0 < b$, $\varphi(x, \lambda_o)$ fonksiyonunun kökü ise o zaman yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısına $\exists \delta > 0$ sayısı karşılık gelir ve $|\lambda - \lambda_o| < \delta$ olacak şekilde $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_o| < \varepsilon$ aralığında sadece bir sıfırı vardır.

Teorem 3.3.3 (Sturm Osilasyon Teoremi). (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer probleminin sürekli artan $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ özdeğerlerinin sınırsız bir dizisi var olsun. Bu durumda λ_m özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu tam $a < x < b$ aralığında *m* tane sıfıra sahiptir.

İspat. (3.3.4) başlangıç şartlarını sağlayan (3.1.1) denkleminin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Teorem 3.3.2 den dolayı λ artarken $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalmamaktadır. $a \le x \le b$ için $|q(x)| < c$ olsun. (3.1.1) denklemini

$$y'' + (\lambda + c) y = 0$$

denklemi ile karşılaştıralım. Bu denklemin (3.3.4) başlangıç şartlarını sağlayan çözüm fonksiyonu

$$y = \sin\alpha . \cosh\left\{(-\lambda - c)^{1/2} (x - a)\right\} - \cos\alpha \cdot (-\lambda - c)^{1/2} \sinh\left\{(-\lambda - c)^{1/2} (x - a)\right\}$$

şeklindedir.

λ nın negatif değerleri ile mutlak değerlerinin yeterince büyük değerleri için bu fonksiyonun sıfır noktalarının olmadığı açıktır. Bu sebeple tekrar Teorem 3.4.2 den faydalandığımızda λ nın negatif değerlerinin yeterince büyük mutlak değerleri için $\varphi(x, \lambda)$ sıfırlarının mevcut olmadığını görürüz. Ancak

$$y'' + (\lambda - c) y = 0$$

denklemini seçtiğimizde pozitif ve sınırsız artan λ lar için $\varphi(x, \lambda)$ çözümünün sıfırlarının sayısının [*a*,*b*] aralığında sınırsız olarak arttığını görmüş oluruz.

$\varphi(x, \lambda) = 0$ denklemini göz önüne alalım. Lemma 3.3.l den dolayı bu denklemin kökleri λ ya bağlı sürekli fonksiyonlardır. Diğer yandan Teorem 3.3.2 den dolayı λ artarken $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun her sıfırı sola kaymış olur; fakat sıfırların sayısı azalmadığı için *a* noktasından dışarı sıfır çıkamaz. Lemma 3.4.1 in sonucundan dolayı yeni sıfırlar *b* noktasından içeri girer. $\varphi(b,\lambda)$=0 olacak biçimde μ_o, λ parametresinin birinci değeri olsun. Böyle değerin var olacağı apaçık ortadadır. $\varphi(b,\lambda)$=0 olacak şekilde μ_1, λ parametresinin ikinci değeri olsun. $\varphi(b,\mu_m)=0$ ve $\varphi(x,\mu_m)$ fonksiyonu (*a*,*b*) aralığının içinde *m* tane sıfıra sahip olacak şekilde $\mu_0,\mu_1,...,\mu_m,...$ sayı dizisi bu özelliklere sahiptir. Eğer $\sin\beta = 0$ ise bu takdirde (3.1.2) sınır şartlarından ikincisi sağlanıyor ve bu nedenle μ_m sayıları özdeğerlerdir. ((3.3.4) den dolayı birincisini de sağlar.) Bu durumda teorem ispatlanmıştır.

Şimdi $\sin\beta \neq 0$ olduğunu varsayalım ve $u(x)$, $v(x)$ Teorem 3.3.2 de dikkate alınan fonksiyonlar olsun. Böylelikle

$$\frac{d}{dx}\left\{u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\right\} = 2uu'\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)+u^2\left(\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v}\right)-u^2\left(\frac{u'^2}{u^2}-\frac{v'^2}{v^2}\right) \tag{3.3.5}$$

$$=\frac{\left(u'v-v'u\right)^2}{v^2}+u^2\left\{h(x)-g(x)\right\}>0$$

olur. Bu nedenle v nin sıfırlanmadığı her aralıkta $u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)$ fonksiyonu monoton bir şekilde artar. $u(x)$ ve $v(x)$ in (*a*,*b*) aralığının içinde eşit sayıda sıfırlara sahip olduğunu farz edelim.

x_v, $u(x)$ fonksiyonunun *b* noktasına en yakın kökü olsun. $x_v \le x \le b$ aralığında $v(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının olmadığını gösterelim. Teorem 3.3.2 den dolayı *a* ve x_v arasında $v(x)$ fonksiyonunun en az *v* sayıda sıfırları bulunur. Eğer *v(x)*, $x_v \le x \le$ b aralığında sıfıra sahip olursa bu takdirde (*a*,*b*) aralığının tamamında $v(x)$ fonksiyonunun bizim varsayımımıza rağmen $u(x)$ fonksiyonundan daha fazla sıfıra sahip olur. (3.3.5) ifadesini x_v den ve *b* ye integralini alırsak

$$u^2(b)\left\{\frac{u'(b)}{u(b)}-\frac{v'(b)}{v(b)}\right\} \ge u^2(x_v)\left\{\frac{u'(x_v)}{u(x_v)}-\frac{v'(x_v)}{v(x_v)}\right\}=0$$

olur ve bundan dolayı

$$\frac{u'(b)}{u(b)} > \frac{v'(b)}{v(b)} \tag{3.3.6}$$

elde ederiz. $\mu_m < \lambda' < \lambda'' < \mu_{m+1}$ olduğunda $\varphi(x,\lambda') = u(x)$ ve $\varphi(x,\lambda'') = v(x)$ olsun. (3.3.6) ya göre $\varphi'(b,\lambda)/\varphi(b,\lambda)$ fonksiyonu (μ_m, μ_{m+1}) aralığında monoton azalır. $\varphi(b,\mu_m) = \varphi(b,\mu_{m+1})$ olduğu için + ∞ dan - ∞ a kadar azalması gerekir. Bu nedenle

$$\frac{\varphi'(b,\lambda_{m+1})}{\varphi(b,\lambda_{m+1})} = -\cot\beta$$

olmak üzere (μ_m, μ_{m+1}) aralığının içinde bir tane λ_m noktası bulunur. Bunun sonucu olarak λ_{m+1} özdeğerdir ve $\varphi(x,\lambda_m)$, (a,b) aralığında $\varphi(x,\mu_m)$ fonksiyonu gibi çok sayıda sıfırı vardır yani *m* tanedir.

4. GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEMLERİ

4.1. Genelleşmiş Fonksiyon Katsayılı Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Karakteristiklerinin İncelenmesi

$$-y''+q(x)y=\lambda^2 y,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right), \tag{4.1.1}$$

$$U(y):=y'(0)=0,\qquad V(y):=y(\pi)=0 \tag{4.1.2}$$

$$y(\frac{\pi}{2}+0)-y(\frac{\pi}{2}-0)=\alpha y'(\frac{\pi}{2}),\qquad y'(\frac{\pi}{2}+0)=y'(\frac{\pi}{2}-0)=y'(\frac{\pi}{2}) \tag{4.1.3}$$

olarak verilen sınır değer problemini inceleyelim. Burada λ spektral parametre, $q(x),\alpha$ reeldir.

Kayıt edelim ki (4.1.1) ile (4.1.3) problemi

$$-y''+\left(\alpha\delta'\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+q(x)y\right)=\lambda y \tag{4.1.4}$$

problemine denktir, burada δ', δ Dirac fonksiyonunun türevidir. Ayrıca (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer problemini *L=L(q)* ile gösterelim.

y(x) ve *z(x)* fonksiyonları $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ aralıklarında sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\langle y,z\rangle := yz'-y'z$ olarak alalım. *y(x)* ve *z(x)* fonksiyonlarını (4.1.3) teki şartlara uygun olarak yazarsak

$$yz'-y'z=y(\frac{\pi}{2}+0)\cdot z'(\frac{\pi}{2}+0)-y'(\frac{\pi}{2}+0)\cdot z(\frac{\pi}{2}+0)$$

$$=\left[y(\frac{\pi}{2}-0)+\alpha y'(\frac{\pi}{2}-0)\right]\cdot z'(\frac{\pi}{2}-0)-y'(\frac{\pi}{2}-0)\cdot\left[z(\frac{\pi}{2}-0)+\alpha z'(\frac{\pi}{2}-0)\right]$$

$$=y(\frac{\pi}{2}-0)\cdot z'(\frac{\pi}{2}-0)+\alpha y'(\frac{\pi}{2}-0)\cdot z'(\frac{\pi}{2}-0)$$

$$-y'(\frac{\pi}{2}-0)\cdot z(\frac{\pi}{2}-0)-\alpha y'(\frac{\pi}{2}-0)\cdot z'(\frac{\pi}{2}-0)$$

$$= y\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\cdot z'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\cdot z\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

olur. Böylece $\langle y,z\rangle$ ifadesi $x=\frac{\pi}{2}$ noktasında süreklidir.

$\varphi(x,\lambda)$ yı $\varphi(0,\lambda)=1$, $\varphi'(0,\lambda)=0$ başlangıç ve (4.1.3) birleştirme şartlarını sağlayan ve (4.1.1) denkleminin bir çözümü olarak alalım. Bu durumda $U(\varphi)=0$, $\Delta(\lambda):=-V(\varphi)$ olsun. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ nın derecesi $\frac{1}{2}$ olmak üzere tamdır ve bu fonksiyonun sıfırları L operatörünün özdeğerleridir.

$\lambda=k^2$ alalım. $|\lambda|\to\infty$ için x den düzgün eşit olmak üzere aşağıdakiler doğrudur $[bkz.5]$.

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi(0,\lambda)\cos kx+\varphi'(0,\lambda)\frac{\sin kx}{k}+\int_0^x\frac{\sin k(x-t)}{k}q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt$$

$$=\cos kx+\int_0^x\frac{\sin k(x-t)}{k}q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt$$

$$=\cos kx+\frac{1}{k}\int_0^x\sin k(x-t)q(t)\cos kt\,dt+\frac{1}{k^2}\int_0^x\sin k(x-y)q(y)\,dy$$

$$\int_0^y\sin k(y-t)q(t)\cos kt\,dt+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\cos kx+\frac{1}{2k}\int_0^x q(t)\,dt\cdot\sin kx+\frac{1}{2k}\int_0^x\sin k(x-2t)\cdot q(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2k^2}\int_0^x\sin k(x-y)q(y)\,dy\int_0^y\left(q(t)\,dt\right)\sin ky\,dy+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\cos kx+\frac{1}{2k}\int_0^x q(t)\,dt\cdot\sin kx+\frac{1}{4k^2}\left(q(x)-q(0)\right)\cos kx$$

$$-\frac{1}{8k^2}\left[\int_0^x q(t)\,dt\right]^2\cos kx+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\cos kx+\frac{1}{2k}\int_0^x q(t)\,dt\sin kx+\frac{1}{4k^2}\left\{\left(q(x)-q(0)\right)-\frac{1}{2}\left[\int_0^x q(t)\,dt\right]^2\right\}\cos kx$$

$$+o\left(\frac{1}{k^2}\exp\left(|\tau|x\right)\right) \qquad (4.1.5)$$

elde edilir. Burada $\tau=\operatorname{Im}k$ dır. Aynı zamanda

$$\varphi'(x,\lambda)=-k\sin kx+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt\cos kx+\frac{1}{4k}\left\{\left(q(x)-q(0)\right)+\frac{1}{2}\left[\int_0^x q(t)\,dt\right]^2\right\}\sin kx$$

$$+o\left(\frac{1}{k}\exp\left(|\tau|x\right)\right), \quad x<\frac{\pi}{2} \qquad (4.1.6)$$

Şimdi $x>\frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu kuralım:

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}+0,\lambda\right)\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi'\left(\frac{\pi}{2}+0,\lambda\right)\frac{\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt \qquad (4.1.7)$$

Bu durumda

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}+0,\lambda\right)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}-0,\lambda\right)+\alpha\varphi'\left(\frac{\pi}{2}-0,\lambda\right)$$

$$=\cos k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\cdot\sin k\frac{\pi}{2}+\alpha\left[-k\sin k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\cos k\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4k}\left\{\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]^2\right\}\sin k\frac{\pi}{2}\right]+o\left(\frac{1}{k}\exp\left(|\tau|\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= -k\alpha \sin k\frac{\pi}{2} + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right)\cos k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt + \frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right) - q(0)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]^2\right\}\sin k\frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{k}\exp\left(|\tau|\frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{4.1.8}$$

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -k\sin k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt \cdot \cos k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4k}\left\{\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right) - q(0)\right) + \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]^2\right\}\sin k\frac{\pi}{2}$$

$$+ o\left(\frac{1}{k}\exp\left(|\tau|\frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{4.1.9}$$

Bu bulunan (4.1.8) ve (4.1.9) ifadelerini (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak;

$$\varphi(x,\lambda) = \left[-k\alpha\sin k\frac{\pi}{2} + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right)\cos k\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt + \frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right) - q(0)\right) + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]^2\right\}\sin k\frac{\pi}{2}\right]\cos k\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \left(-sink\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt \cdot \cos k\frac{\pi}{2}\right) sink\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} sink(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt + o\left(\frac{1}{k}\exp(|\tau|x)\right)$$

$$= -k\alpha\sin k\frac{\pi}{2}\cos k\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right)\cos k\frac{\pi}{2}\cos k\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt+\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\right]^2\right\}\sin k\frac{\pi}{2}\cos k\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\sin k\frac{\pi}{2}\sin k\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\cos k\frac{\pi}{2}\sin k\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} sink(x-t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt+o\left(\frac{1}{k}\exp(|\tau|x)\right)$$

$$=-k\frac{\alpha}{2}\left[\sin kx+\sin k(\pi-x)\right]+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\right)\left[\cos k(\pi-x)+\cos kx\right]$$

$$+\frac{1}{4k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt+\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\right]^2\right\}\left[\sin kx+\sin k(\pi-x)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\cos kx-\cos k(\pi-x)\right]+\frac{1}{4k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\left[\sin kx-\sin k(\pi-x)\right]$$

$$+\frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt+o\left(\frac{1}{k}\exp(|\tau|x)\right)$$

$$=-k\frac{\alpha}{2}\left[\sin kx+\sin k(\pi-x)\right]+\left[1+\frac{\alpha}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\right]coskx+\frac{\alpha}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\cdot\cos k(\pi-x)$$

$$+\frac{1}{4k}\left\{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt+\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\right]^2\right\}\sin kx$$

$$+\frac{1}{4k}\left\{\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt\right]^2\right\}\sin k(\pi-x)$$

$$+\frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt+o\left(\frac{1}{k}\exp(|\tau|x)\right)$$

$$=-k\frac{\alpha}{2}\left[\sin kx+\sin k(\pi-x)\right]+\left[1+\frac{\alpha}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt\right]coskx+\frac{\alpha}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt\cdot\cos k(\pi-x)$$

$$+\frac{1}{4k}\left\{2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt+\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt\right]^{2}\right\}\sin kx$$

$$+\frac{1}{4k}\left\{\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt\right]^{2}\right\}\sin k(\pi-x)$$

$$+\frac{\alpha}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}q(t)dt\cdot\cos kx+\frac{\alpha}{8k}\left[-q(x)\sin kx+q\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin k(\pi-x)\right]$$

$$-\frac{\alpha}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}q(t)dt\cdot\cos k(\pi-x)+\frac{\alpha}{8k}\left[q(x)\sin k(\pi-x)-q\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin kx\right]$$

$$-\frac{\alpha}{8k}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt.\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}q(t)dt.\sin k(\pi-x)+\frac{1}{2k}\left(1+\frac{\alpha}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt\right).\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}q(t)dt.\sin kx$$

$$+O\left(\frac{1}{k^{2}}\exp|\tau|x\right)$$

$$=-k\frac{\alpha}{2}\left[\sin k\pi+\sin k(\pi-x)\right]+\left[1+\frac{\alpha}{4}\int_{0}^{x}q(t)dt\right]\cos kx$$

$$+\frac{\alpha}{4}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}q(t)dt\right)\cos k(\pi-x)+\frac{1}{4k}\left\{2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt+\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)\right.$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(-q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(x)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]^2+\left(2+\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right)\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} q(t)\,dt\Bigg\}\sin kx$$

$$+\frac{1}{4k}\left\{\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)-q(0)\right)+\frac{\alpha}{2}\left(q(x)+q\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]^2\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} q(t)\,dt\right\}\sin k(\pi-x)+O\left(\frac{1}{k^2}\exp|\tau|x\right) \qquad (4.1.10)$$

elde edilir.

$\Delta(\lambda)=-\varphi(\pi,\lambda)$ olduğu için

$$=k\frac{\alpha}{2}\sin k\pi+\cos k\pi\left(1+\frac{\alpha}{4}\int_0^{\pi} q(t)\,dt\right)+\frac{\alpha}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(t)\,dt\right)$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left[k\sin k\pi-\frac{\cos k\pi}{2}\left(\frac{-4}{\alpha}-\int_0^{\pi} q(t)\,dt\right)+\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(t)\,dt\right)\right]$$

$$+o\left(\exp|\tau|\pi\right) \qquad (4.1.11)$$

olur. Burada

$$w=\frac{-4}{\alpha}-\int_0^{\pi} q(t)\,dt$$

$$w_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(t)\,dt$$

$n\to\infty$ için (4.1.9) formülünü kullanarak bilinen yöntemin $\left(\text{bkz.}[5]\right)$ uygulamalarıyla

$$\sqrt{\lambda_n}=k_n=n+\frac{1}{2\pi n}\left(w+(-1)^{n-1}w_1\right)+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.1.12)$$

elde edilir.

Aynı formdaki ancak farklı katsayılarla $\tilde{q}$ ile sınır değer problemi $\tilde{L} = L(\tilde{q})$ yı L ile birlikte düşünelim. α nın L ile ilişkili belirli bir sembol olduğunu kabul ettiğimizden daha sonra $\tilde{\alpha}$, $\tilde{L}$ ile ilgili benzer bir nesneyi ifade edecektir.

Teorem 4.1. Eğer herhangi bir $n \in N \cup \{0\}$ için

$$\lambda_n = \tilde{\lambda}_n , \quad \langle y_n, \tilde{y}_n \rangle_{x=\frac{\pi}{2}-0} = 0$$

ise $(0,\pi)$ aralığında hemen hemen her yerde $q(x) = \tilde{q}(x)$ olur.

İspat.

$$-y''(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda^2 y(x,\lambda), \qquad -\tilde{y}''(x,\lambda) + \tilde{q}(x)\tilde{y}(x,\lambda) = \lambda^2 \tilde{y}(x,\lambda),$$

$$y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = 1, \qquad \tilde{y}(0,\lambda) = 0, \quad \tilde{y}'(0,\lambda) = 1,$$

Buna göre $r(x) = q(x) - \tilde{q}(x)$ olmak üzere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(x) y(x,\lambda)\tilde{y}(x,\lambda)\,dx = \langle y_n, \tilde{y}_n \rangle_{x=\frac{\pi}{2}-0} \qquad \text{dir.} \tag{4.1.13}$$

$n \in N \cup \{0\}$ için $\langle y_n, \tilde{y}_n \rangle_{x=\frac{\pi}{2}-0} = 0$ dır. Bunu (4.1.13) de yerine yazarsak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(x) y(x,\lambda_n)\tilde{y}(x,\lambda_n)\,dx = 0, \qquad n \in N \cup \{0\} \tag{4.1.14}$$

olur.

$x \le \pi/2$ için aşağıdaki gösterim doğrudur:

$$y(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x K(x,t)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,dt,$$

$$\tilde{y}(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \tilde{K}(x,t)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,dt$$

Burada $K(x,t)$, λ ya bağlı olmayan sürekli fonksiyondur. Bundan dolayı

$$2\lambda^2 y(x,\lambda)\tilde{y}(x,\lambda) = 1 - \cos 2\lambda x - \int_0^x V(x,t)\cos 2\lambda t\, dt \qquad (4.1.15)$$

Burada $V(x,t)$, λ ya bağlı olmayan sürekli fonksiyondur. (4.1.15) ifadesini (4.1.14) de yerine yazarsak

$$\int_0^{\pi/2}\left(r(x) + \int_x^{\pi/2} V(t,x) r(t)\, dt \right)\cos 2\lambda_n x\, dx = 0, \qquad n \in N \cup \{0\},$$

Kosinüs fonksiyonunun tamlığından aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$r(x) + \int_x^{\pi/2} V(t,x) rtdt = 0$$

Bu denklem homojen Volterra integral denklemidir ve sadece $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $r(x)=0$ dışında çözümü yoktur. $q(x)=\tilde{q}(x)$ olduğunu ispatlamak için $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ aralığında olarak $\hat{L}$ problemini dikkate alacağız;

$$-y''(x,\lambda) + q_1(x) y(x,\lambda) = \lambda^2 y(x,\lambda), \quad q_1(x) = q(\pi - x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$U(y) := y'(0,\lambda) = 0,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}+0,\lambda\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}-0,\lambda\right), \qquad y\left(\frac{\pi}{2}+0,\lambda\right) - y\left(\frac{\pi}{2}-0,\lambda\right) = \alpha y'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$$

Burada $\langle y_n, \tilde{y}_n \rangle_{x=\frac{\pi}{2}+0} = 0$ dır. Doğrudan hesaplayarak $\tilde{y}_n(x) = y_n(\pi - x)$ ifadesinin $\hat{L}$ probleminin ve $\tilde{y}_n\left(\frac{\pi}{2}-0,\lambda\right) = y_n\left(\frac{\pi}{2}+0,\lambda\right)$ ifadesinin sonucu olduğu görülür. Böylece L ek problemi için Teorem 4.1 in varsayım şartları yerine getirilmiştir. Eğer yukarıda yaptığımız ispatı tekrar ettiğimizde $r(\pi - x) = 0$ ve $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ aralığında $q(x) = \tilde{q}(x)$ olduğunu görürüz.

4.2. Ters Düğüm Problemleri

Süreksizlik şartları olmaksızın ters düğüm problemle ilgili çalışmalar Hald ve McLaughlin tarafından başlatıldı. Ters düğüm problemler özfonksiyonların düğüm (sıfırları) operatörlerinin inşasında oluşur. Ters düğüm problemler süreksizlik olmaksızın klasik Sturm-Liouville için oldukça kapsamlı çalışıldı. Aralık içindeki süreksizlik koşullarıyla sınır değer problemleri genellikle uygulamalarda görünür. Bu gibi problemler süreksiz materyal özellikleriyle bağlantılıdır. Ters düğüm problemleri tamamen kendi düğümlerinden sınır verilerini ve potansiyeli belirler. Bu bölümde ters düğüm problemleri süreksizlik şartlarıyla düşüneceğiz. Bu bölümün ilk kısımda teklik teoremlerini ve düğüm noktaların yoğun alt kümesinden olan $(0,\pi)$ aralığı üzerindeki kurtarma potansiyeli olan *q(x)* in prosedürüne ulaşacağız. İkinci kısımda da ters düğüm ve ters spektral problem arasında bağlantı kuracağız. Bu ilişkiler ve ikinci bölümün sonuçları kullanılarak; ek sınırlamalar altında aralığın bir kısmında yer alan düğüm noktalarının alt kümesinden oluşan $(0,\pi)$ aralığı üzerinde potansiyelin oluşturulacağı ispatlanabilir.

Sınır değer problemi *L*'nin öz fonksiyonları, $y_n(x)=\varphi(x,\lambda_n)$ formuna sahiptir. $y_n(x)$, gerçel değerli fonksiyon olmak üzere (4.1.12) yi (4.1.5) ve (4.1.10) un içine yerleştirilerek aşağıdaki $n\to\infty$, x için asimptotik formülü elde ederiz:

$$y_n(x)=\cos nx+\frac{1}{2\pi n}\left(\pi\int_0^x q(t)\,dt-\left(w+(-1)^{n-1}w_1\right)x\right)\sin nx+o\left(\frac{1}{n}\right),\ x<\frac{\pi}{2} \tag{4.2.1}$$

$$\begin{aligned}y_n(x)=&-n\frac{\alpha}{2}\left(1+(-1)^{n-1}\right)\sin nx+\frac{1}{8\pi n}\left(w+(-1)^{n-1}w_1\right)\sin nx\Bigg[\alpha(-1)^n(\pi-x)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}q(t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}q(t)\,dt\right)\\&-2\alpha\left(1+(-1)^{n-1}\right)-4x\left(1+\frac{\alpha}{4}\int_0^x q(t)\,dt\right)\Bigg]+\cos nx\Bigg[\left(1+\frac{\alpha}{4}\int_0^x q(t)\,dt\right)\\&-\frac{\alpha}{4\pi}\left(w+(-1)^{n-1}w_1\right)\left(x+(-1)^n(\pi-x)\right)+\frac{\alpha}{4}(-1)^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}q(t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}q(t)\,dt\right)\Bigg]\\&+o\left(\frac{1}{n}\right),\ x>\frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

$$y_n(x) = \cos nx + \frac{1}{2\pi n}\left(\pi\int_0^x q(t)\,dt - (w-w_1)x\right)\sin nx + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x < \frac{\pi}{2}, \qquad n = 2m \tag{4.2.3}$$

$$y_n(x) = \cos nx + \frac{1}{2\pi n}\left(\pi\int_0^x q(t)\,dt - (w+w_1)x\right)\sin nx + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x < \frac{\pi}{2}, \qquad n = 2m+1 \tag{4.2.4}$$

$$y_n(x) = \left[1 + \frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt - \frac{\alpha}{4}(w-w_1)\right]\cos nx + \frac{(w-w_1)}{8\pi n}\left[-\alpha\pi\int_0^x q(t)\,dt - (2\alpha+4)x\right.$$

$$\left. + 2\alpha\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]\sin nx + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x > \frac{\pi}{2}, \quad n = 2m \tag{4.2.5}$$

$$\frac{y_n(x)}{n} = -\alpha\sin nx + \frac{1}{n}\left[\frac{\alpha}{2}\int_0^x q(t)\,dt + 1 - \frac{\alpha}{4\pi}(w+w_1)(2x-\pi) - \frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt\right]\cos nx$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x > \frac{\pi}{2}, \quad n = 2m+1 \tag{4.2.6}$$

L sınır değer problemi için benzer Sturm's salınım teoremi doğrudur. Daha doğrusu, $y_n(x)$ özfonksiyonu tam olarak $(0,\pi)$ aralığında n tane (basit) sıfıra sahiptir. Yani; $0 < x_n^1 < ... < x_n^n < \pi$ dir. $X_L := \left\{x_n^j\right\}_{n\ge 1,\, j=\overline{1,n}}$ sınır değer problemi L nin düğümleri olarak adlandırılmaktadır. $X_L^k := \left\{x_{2m-k}^j\right\}_{m\ge 1,\, j=\overline{1,2m-k}}$, $k = 0, 1$ olarak gösterilir. Açıkça $X_L^0 \cup X_L^1 = X_L$ dir. Ters düğüm problemler, verilen X_B düğüm noktalar kümesi veya bazı kısımları potansiyel olarak $q(x)$ den oluşur.

$$\alpha_n^j = \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \quad \gamma_n^j = j\frac{\pi}{n} = \alpha_n^j + \frac{\pi}{2n}$$

olacak şekilde ifade edebiliriz. (4.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerini göz önüne alarak $n \to \infty$ aşağıdaki asimptotik formülleri elde edebiliriz:

$$x_n^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi n^2}\left(\pi\int_0^{\alpha_n^j} q(t)\,dt - (w-w_1)\alpha_n^j\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad x_n^j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 2m \tag{4.2.7}$$

$$x_n^j=\alpha_n^j+\frac{1}{2\pi n^2}\left(\pi\int_0^{\alpha_n^j}q(t)dt-(w+w_1)\alpha_n^j\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad x_n^j\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\quad n=2m+1 \tag{4.2.8}$$

$$x_n^j=\alpha_n^j+\frac{1}{8\pi n^2}(w-w_1)\left(-\alpha\pi\int_0^{\alpha_n^j}q(t)dt-(2\alpha+4)\alpha_n^j+d_0\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad x_n^j\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\quad n=2m \tag{4.2.9}$$

$$x_n^j=\gamma_n^j+\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{2}\int_0^{\gamma_n^j}q(t)dt-\frac{\alpha}{4\pi}(w+w_1)(2\gamma_n^j-\pi)+d_1\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad x_n^j\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\ n=2m+1 \tag{4.2.10}$$

elde ederiz. Böylece

$$\left.\begin{aligned} d_0&=\frac{2\alpha\pi}{\left[1+\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt-\frac{\alpha}{4}(w-w_1)\right]}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt\\ d_1&=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}q(t)dt\end{aligned}\right\} \tag{4.2.11}$$

olur. Burada x_L^k setleri $k=0,\ 1$ olmak üzere $(0,\pi)$ aralığında yoğundur. Bu formülleri kullanarak aşağıdaki iddiaya ulaşırız.

Teorem 4.2. $k=0\vee 1$ ve $x\in(0,\pi)$ olsun. $\lim_{n\to\infty}x_n^{j_n}=x$ olacak şekilde $\{x_n^{j_n}\}\in x_L^k$ seçildiğinde sonlu limit bulunur.

$$\left.\begin{aligned} g_k(x)&=\lim_{n\to\infty}2n\left(x_n^{j_n}n-\left(j_n-\frac{1}{2}\right)\pi\right),\quad x_n^j\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ g_k(x)&=\lim_{n\to\infty}8n\left(x_n^{j_n}n-\left(j_n-\frac{1}{2}\right)\pi\right),\quad x_n^j\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\ n=2m\\ g_k(x)&=\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{j_n}n-(j_n\pi)\right),\quad x_n^j\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\ n=2m+1\end{aligned}\right\} \tag{4.2.12}$$

ve

$$\left.\begin{aligned}
&g_k(x)=\int_0^x q(t)dt-\frac{w+(-1)^{k+1}w_1}{\pi}x \qquad x\le\frac{\pi}{2}\\
&g_k(x)=\left(w+(-1)^{k+1}w_1\right)\int_0^x q(t)dt-\frac{2\alpha+4}{\pi}x+\frac{d_k}{\pi},\ x\ge\frac{\pi}{2},\ n=2m\\
&g_k(x)=\int_0^x q(t)dt\cdot\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha\left(w+(-1)^{k+1}w_1\right)(2x-\pi)}{4\pi}+\frac{d_k}{4\pi},\ x\ge\frac{\pi}{2},\ n=2m+1
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.13}$$

Burada d_0 ve d_1 (4.2.11) ile tanımlanır.

Şimdi teklik ve ters düğüm probleminin çözümünün inşasını veren teoremi ifade edelim.

Teorem 4.3. $k=0\vee 1$ kayıt edelim. Varsayalım ki, $X\subset X_L^k$, $[0,\pi]$ de yoğun olan düğüm noktalarının alt kümesi ve $X=\tilde{X}$ olsun. Bu durumda hemen hemen her yerde $[0,\pi]$de $q(x)=\tilde{q}(x)$olur. Aynı zamanda $q(x)$ fonksiyonu aşağıdaki formülle inşa edilebilir:

$$q(x)=g_k'(x)-\frac{1}{\pi}\left(g_k(\pi)-g_k(0)\right), \tag{4.2.14}$$

burada $g_k(x)$, (4.2.13) formülünden hesaplanır.

İspat. (4.2.13) formülünü ve $\int_0^\pi q(x)dx=0$ ifadesini (4.2.14) formülüne uygulayalım. (4.2.13) ü dikkate alalım.

$$g_k'(x)=q(x)-\left(\frac{w+(-1)^{k+1}w_1}{\pi}\right) \tag{4.2.15}$$

Bundan dolayı

$$g_k(\pi)-g_k(0)=\int_0^\pi q(x)dx-\left(w+(-1)^{k+1}w_1\right)=-\left(w+(-1)^{k+1}w_1\right) \tag{4.2.16}$$

Böylece (4.2.14), (4.2.15) ve (4.2.16) dan doğruca elde edilmiş olur. Eğer $X=\tilde{X}$ olursa (4.2.12) den $x\in[0,\pi]$ için $g_k(x)=\tilde{g}_k(x)$ olur. (4.2.14) sayesinde $[0,\pi]$

aralığında $q(x)=\tilde{q}(x)$ olur.

KAYNAKLAR

1. Aksoy, Y., (1983). İntegral denklemler. Yıldız Üniversitesi Yayınları, Cilt:1, Sayı:166.
2. Ambarzumian V.A., (1929). ÄUber eine frage der figenwerttheorie, Zs. f. Phys. 53, 690-695.
3. Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel analiz, Gazi Kitabevi, Ankara
4. Borg, G., (1946). Eine umkerung der Sturm-Liouville eigenwertaufgabe, Acta Math. 76, 1-96
5. Freiling , G., Yurko V. A., (2001). Inverse Sturm-Liouville problems and their applicantions, NOVA Science Publishers, New York.
6. Gelfand, I.M. and Levitan. B.M., (1951). On the determination of a differential equation from its spectrum, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Math., 15, 309-360; Amer. Math. Soc.Transl.l (1955),253-304
7. İdemen M., (1999). Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi, Işık Üni., 208, İstanbul
8. Jorgens, K., (1964). Spectral theory of second-order ordinary differential operators, Aarhus, 230s., Denmark.
9. Kreyszig, E. (1989). Introductory functional analysis with applications, John Wiley & Sons Inc. New York-Chichester-Brisbane-Toronto.
10. Levitan , B.M. and Gasımov, M.G., (1964). Determination of a differential equations by two its spectra, Russian Math. surveys, 19, 1-63.
11. Levitan, B.M.,(1987). Inverse Sturm-Liouville problems, Utrecht, 239, Netherlands.
12. Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., (1991). Sturm-Liouville and dirac operators. Kluver Academic Piblisherz, 345, Netherland.
13. Manafov, M. Dzh. and Kablan A. (2015). Inverse spectral and inverse nodal problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations with δ interactions, Electronic Journal of Differential Equations, No.26, pp. 1-10.
14. Manafov, M. Dzh. (2014). Inverse spectral and inverse nodal problems for Sturm-Liouville equations with δ and δ' interactions, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry (to appear).
15. Marchenko , V.A., (1977). Sturm-Liouville operators and their applications, Proc. Roy.Soc., 79(A), 25-12.
16. McLaughlin, J.R.,(1988). Inverse spectral theory using nodal points as data-a uniqueness results, J, Diff. Eqns. 73, 354-362.
17. Musayev, B. ve Alp M. (2000). Fonksiyonel analiz, Balcı Yayınları, Ankara
18. Sezer, M., (1995). Diferansiyel denklemler-II, İzmir
19. Yurko V.A., Sheih C.T., (2008). Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 347, 266–272.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayşe SEVİNÇ

Doğum Yeri : Adıyaman/Besni

Doğum Tarihi : 01.12.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

EĞİTİM DURUMU

Lise : Yusuf Kalkavan Anadolu Lisesi (Mersin) 2002-2006

Lisans : Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2007-2011

ÇALIŞTIĞI KURUMLAR

Kızılin Yılmaz Yığılı Ortaokulu 2012-2013

A.C. Yamazaki Ortaokulu 2013-2015