T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK SAYI DİZİLERİNİN BAZI DİZİ UZAYLARI

SİBEL YASEMİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK SAYI DİZİLERİNİN BAZI DİZİ UZAYLARI

Sibel YASEMİN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 19/12/2013 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

…………………………..
Doç. Dr. Ayhan ESİ
BAŞKAN(DANIŞMAN)

……………………..
Doç. Dr. Nazif ÇALIŞ
ÜYE

………..………………………….
Yrd. Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
ÜYE

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN
Enstitü Müdürü

Bu çalışma Adıyaman Üniversitesi Bilimsel araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.
Proje No: -

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ARALIK SAYI DİZİLERİNİN BAZI DİZİ UZAYLARI

Sibel YASEMİN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ayhan ESİ
Yıl : 2013 , Sayfa sayısı: 17

Jüri : Doç. Dr. Ayhan ESİ
: Doç. Dr. Nazif ÇALIŞ
: Yrd.Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada modülüs fonksiyonu yardımı ile aralık sayı dizilerinin bazı sınıfları tanımlanarak bu dizi uzaylarının bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Metrik, metrik uzay, tamlık, tam uzay, aralık sayısı, aralık dizi uzayı.

ABSTRACT

M.Sc THESIS

SOME SEQUENCE SPACES OF INTERVAL NUMBER SEQUENCES

Sibel YASEMİN

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic

Supervisor : Assoc.Prof. Dr. Ayhan ESİ
Year : 2013 , Number of pages: 17

Jury : Assoc. Prof. Dr. Ayhan ESİ
: Assoc. Prof. Dr. Nazif ÇALIŞ
: Asst. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

In this study which is designed as master thesis, some new classes of sequences of interval numbers are introduced by using modulus function and some properties of resulting sequence classes of interval numbers are investigated.

Key Words: Metric, metric space, completeness, complete space, interval number, interval numbers spaces.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana destek olan, özgüvenimi arttıran, hayata bakış açımı genişleten değerli hocam Doç. Dr. Ayhan ESİ'ye çok teşekkür ederim.

Çalışmalarıma maddi yönden destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteğini hep yanımda hissettiğim, tezimi yazmam ve çalışmam sırasında ciddi anlamda katkıda bulunan ve hiçbir yardımı esirgemeyen Süleyman GÖLBOL'a çok teşekkür ederim.

Küçüklüğümden bu yana yaşadığım her zorlukta ve başarıda benimle olan canım aileme; babam Yahya YASEMİN, annem Semira YASEMİN, kardeşlerim Sara, Müge, Mine, Süleyman YASEMİN'e çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

I$\mathbb{R}$: Aralık sayıları cümlesi

$\bar{l}_\infty$: Aralık değerli sınırlı diziler uzayı

$\bar{c}$: Aralık değerli yakınsak diziler uzayı

$\bar{c}_0$: Aralık değerli sıfıra yakınsak diziler uzayı

w^i : Tüm aralık sayı dizilerinin uzayı

1. GİRİŞ

Aralık aritmetiği ilk olarak Dwyer [11] tarafından 1951 yılında önerildi. 1959 ve 1962 yıllarında sırasıyla Moore ve Yang [13] aralık aritmetiğinin gelişimini ve biçimsel bir sistem olarak değerini hesaplamayı sağladılar. Daha sonra Chiao [11] 2002 yılında interval sayı dizilerini oluşturdu ve interval sayıları için alışılmış yakınsaklığı tanımladı. Son zamanlarda, sırasıyla Şengönül ve Eryılmaz [15] interval sayılarının sınırlı ve yakınsak dizilerini tanımlayıp, bunların bir tam metrik uzay olduğunu gösterdi. Esi [1], [2], [3], [4], [8] ve Esi ve arkadaşları [5], [6] ve [7] nolu referenslarda interval sayı dizilerinin çeşitli yakınsaklık tanımlarını ve bu dizi uzaylarının özelliklerini incelemişlerdir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Aralık sayı dizilerinin tanımlanması ve özelliklerinin incelenmesi hakkında ilk çalışmalar Dwyer [11],[12], Moore and Yang [13] tarafından yapılmıştır. Daha sonraları Chiao [10], Markov [14], Şengönül ve Eryılmaz [15], Esi [1], [2], [3], [4], [8], Esi ve Braha [5], Esi ve Esi [6] ve Esi ve Hazarika [7] tarafından çalışmalar yapılmıştır. Bu son çalışmalarda aralık sayılarının çeşitli dizi uzayları çalışılmış ve bu uzayların sağladığı çeşitli topolojik ve cebirsel özellikler bu çalışmalarda yer almıştır.

3. METOT VE MATERYAL

3.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir cümle ve K ise $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olsun. Bu durumda her $x,y,z \in X$ için

$$+ : XxX \to X$$
$$(x,y) \to x+y$$
$$\bullet : KxX \to X$$
$$(a,x) \to ax\ ,$$

işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise X cümlesine K cismi üzerinde bir **vektör uzayı**(lineer uzay) denir:

1. $x+y=y+x$,
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$,
3. Her $x \in X$ için $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır,
4. Her $x \in X$ için $x+(-x)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır,
5. Her $x \in X$ için $1.x=x$,
6. $a(x+y)=ax+ay$,
7. $(a+b)x=ax+bx$,
8. $a(bx)=(ab)x$.

X cümlesinin elemanlarına da **vektör** veya **nokta** adı verilir. $K=\mathbb{R}$ alınırsa X'e bir reel vektör uzayı ve $K=\mathbb{C}$ alınırsa X'e bir kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 3.1.2. Boş olmayan bir X cümlesi ve bir

$$d : XxX \to \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \to d(x,y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü her $x,y,z \in X$ için

(M1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

(M2) $d(x,y)=d(y,x)$,

(M3) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X cümlesi üzerinde **uzaklık fonksiyonu** ya da **metrik** adını alır ve bu durumda (X,d) ikilisine bir **metrik uzay** denir.

Tanım 3.1.3. X bir vektör uzayı Y, X'in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Y , X vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y'ye X'in bir (lineer) **alt uzayı** denir.

Tanım 3.1.4. X bir Kcismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to \|x\| ,$$

dönüşümü her x,y ∈ X ve her a ∈ K için

(N1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

(N2) $\|ax\|= |a|.\|x\|$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşümüne X üzerinde **norm** ve $(X, \|.\|)$ ikilisine bir **normlu vektör uzayı** adı verilir.

Tanım 3.1.5. Normlu uzay tanımında verilen üçgen eşitsizliği $K > 1$ olmak üzere

$$\|x + y\| \leq K(\|x\|+\|y\|)$$

şeklinde tanımlanırsa bu norma **quasi-norm** denir.

Tanım 3.1.6. Quasi-norm ile tanımlanmış bir vektör uzayına **quasi-vektör uzayı** denir.

Tanım 3.1.7. Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse , bu (X,d) metrik uzayına **tam metrik uzay** adı verilir.

Tanım 3.1.8. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere f:IN→X fonksiyonuna X içinde bir **dizi** denir ve f(n)=(x_n) ile gösterilir.

Tanım 3.1.9. K=$\mathbb{R}$ veya K=$\mathbb{C}$ olmak üzere her n=1,2,… için $x_n \in$ K olan x=$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ (veya kısaca x=(x_n)) şeklindeki bütün diziler kümesi K^∞ olsun. Bu durumda aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayabiliriz:

$$l_\infty = \{x = (x_n) \in K^\infty : (x_n) \text{ sınırlı} \},$$
$$c = \{ x = (x_n) \in K^\infty : (x_n) \text{ yakınsak} \},$$
$$c_0 = \{ x = (x_n) \in K^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \} \text{ [9].}$$

Tanım 3.1.10. $E \subset w^i$ olmak üzere $\bar{x}=(\bar{x}_k) \in$ E ve $|\bar{y}_k| \leq |\bar{x}_k|$ eşitsizliği sağlandığında $\bar{y}=(\bar{y}_k) \in$ E oluyorsa E aralık değerli dizi uzayına **solid (normal)** denir.

Tanım 3.1.11. f : [0,∞) → [0,∞) olsun. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa f'ye bir **modülüs fonksiyonu** denir :

(i) f(x)=0 olması için gerek ve yeter koşul x=0 olmasıdır ,

(ii) Her x,y ≥ 0 için f(x+y) ≤ f(x)+f(y) ,

(iii) f artandır ,

(iv) f, 0'da sağdan süreklidir.

(ii)'den $|f(x)-f(y)| \leq f(x-y)$ ve (iv)'den f'nin $[0,\infty)$ üzerinde her yerde sürekli olduğu görülür. Modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir [17].

Lemma 3.1.12. Her k için $p_k > 0$ ve $H=sup_k p_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C[|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}]$$

$C=\max(1,2^{H-1})$ dir.

Lemma 3.1.13. $a_k, b_k \geq 0$, k=1,2,…,n olmak üzere

a) $0< p_k \leq 1$ ise

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k{}^{p_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k{}^{p_k}$

b) $p_k \geq 1$ ise

$\{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{p_k}\}^{1/p_k} \leq \{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^{p_k}\}^{1/p_k} + \{\sum_{k=1}^{n} b_k{}^{p_k}\}^{1/p_k}$ dir [16].

3.2. Aralık Sayıları

Bu çalışmada a≤x≤b olacak şekildeki bütün x reel sayılarının oluşturduğu kapalı aralık bir aralık sayısı olarak tanımlanacaktır. Böylece reel bir aralık, bir cümle olarak göz önüne alınabilir. Aralık sayılarının cümlesini $\mathrm{I}\mathbb{R}$ ile göstereceğiz. Çalışmamız boyunca $\mathrm{I}\mathbb{R}$ nin elemanlarını temsilen $\bar{x}$ ($\bar{x}$={x ∈ ℝ: a≤x≤b }) gösterimini kullanacağız. Şimdi x_l ve x_r ile $\bar{x}$ aralık sayısının sırasıyla başlangıç ve bitim noktalarını gösterelim. Aralık sayılarının cebirsel ve analiz özelliklerini inceleyebiliriz.

Tanım 3.2.1. (Aralık Sayılarının Eşitliği):

$\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2 \in \mathrm{I}\mathbb{R}$ için

$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \iff x_{1_l} = x_{2_l}$, $x_{1_r} = x_{2_r}$

Tanım 3.2.2. (Aralık Sayılarının Toplamı):

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \{x \in \mathbb{R} : x_{1_l} + x_{2_l} \leq x \leq x_{1_r} + x_{2_r}\}$

Tanım 3.2.3. (Aralık Sayılarının Skalerle Çarpımı):

$\alpha \geq 0$ ise $\alpha\bar{x}_1 = \{ x \in \mathbb{R} : \alpha x_{1_l} \leq x \leq \alpha x_{1_r} \}$

$\alpha < 0$ ise $\alpha\bar{x}_1 = \{ x \in \mathbb{R} : \alpha x_{1_r} \leq x \leq \alpha x_{1_l} \}$

Tanım 3.2.4. (Aralık Sayılarının Çarpımı):

$\bar{x}_1.\bar{x}_2=\{x\in \mathbb{R} : \min\{x_{1_l}.x_{2_l}, x_{1_l}.x_{2_r}, x_{1_r}.x_{2_l}, x_{1_r}.x_{2_r}\} \leq x \leq$
$\max\{x_{1_l}.x_{2_l}, x_{1_l}.x_{2_r}, x_{1_r}.x_{2_l}, x_{1_r}.x_{2_r}\}\}$

Şimdi IR üzerinde d: IR x IR → $\mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$d(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\max\{|x_{1_l} - x_{2_l}|,|x_{1_r} - x_{2_r}|\}$$

şeklinde tanımlanırsa d fonksiyonu ile birlikte (IR,d) ikilisi bir tam metrik uzay olur [12].

Özel olarak $\bar{x}_1$=[a,a] ve $\bar{x}_2$ =[b,b] seçilirse $\mathbb{R}$ nin mutlak değer metriği

$d(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$=|a-b| elde edilir.

3.3. Aralık Sayılarının Yakınsaklığı

Tanım 3.3.1. Her $\varepsilon > 0$ için bir k_0 pozitif tamsayısı her k ≥ k_0 için d $(\bar{x}_k,\bar{x}_0) < \varepsilon$ olacak şekilde var ise $\bar{x}=(\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisine $\bar{x}_0$ aralık sayısına yakınsıyor denir ve $\lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0$ şeklinde gösterilir.

$$\lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_k x_{k_l} = x_{0_l}\ ,\ \lim_k x_{k_r} = x_{0_r}\ .$$

Çalışma boyunca w^i ile reel terimli bütün aralık sayı dizilerinin cümlesi gösterilecektir. w^i uzayı bir quasi-vektör uzayıdır ve aşağıdaki şartları sağlar [14].

$(\bar{x}_k)$, $(\bar{y}_k)$ ve $(\bar{z}_k) \in w^i$, α,β ∈ $\mathbb{R}$ olmak üzere

1. $(\bar{x}_k) + (\bar{y}_k) = (\bar{y}_k) + (\bar{x}_k)$
2. $(\bar{x}_k) + ((\bar{y}_k) + (\bar{z}_k)) = ((\bar{x}_k) + (\bar{y}_k)) + (\bar{z}_k)$
3. $(\bar{x}_k) + (\bar{y}_k) = (\bar{x}_k) + (\bar{z}_k)$ ise $(\bar{y}_k) = (\bar{z}_k)$
4. $\alpha((\bar{x}_k) + (\bar{y}_k)) = \alpha(\bar{x}_k) + \alpha(\bar{y}_k)$
5. $(\alpha+\beta)(\bar{x}_k) = \alpha(\bar{x}_k) + \beta(\bar{x}_k)$
6. $\alpha(\beta(\bar{x}_k)) = (\alpha\beta)(\bar{x}_k)$ $(\alpha\beta \geq 0)$
7. $(\bar{x}_k) = [1,1](\bar{x}_k)$ dır.

w^i nin sıfır elemanı θ=[0,0]=$\bar{0}$ şeklindedir.

3.4. Aralık Sayılarının Bazı Dizi Uzayları

Bu bölümde aralık sayılarının sıfıra yakınsak , yakınsak ve sınırlı dizi uzayları tanımlanacaktır.

Sıfıra yakınsak , yakınsak ve sınırlı aralık sayı dizilerinin cümlesini sırasıyla $\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{l}_\infty$ ile gösterelim.Yani;

$$\bar{c}_0 = \{\bar{x}=(\bar{x}_k) \in w^i : \lim_k \bar{x}_k = \theta\ ,\ \theta=[0,0]\ \},$$

$$\bar{c} = \{\bar{x}=(\bar{x}_k) \in w^i : \lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0\ ,\ \bar{x}_0 \in \text{IR}\ \},$$

$$\bar{l}_\infty = \{\bar{x}=(\bar{x}_k) \in \ w^i: sup_k\{|x_{k_l}|\ , |x_{k_r}|\}< \infty \ \},$$

olsun. $\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{l}_\infty$ uzayları w^i uzayının alt uzaylarıdır.

Ayrıca her $(\bar{x}_k)$, $(\bar{y}_k) \in \bar{c}_0$ (ya da $\bar{c}$, $\bar{l}_\infty$) için

$$\bar{d}(\bar{x}_k \ ,\bar{y}_k \ ) = sup_k max\{|x_{k_l}\text{-}\ y_{k_l}|\ , |x_{k_r}\ \text{-}\ y_{k_r}|\} \qquad (1)$$

olarak tanımlanan $\bar{d}$, metrik aksiyomlarını sağlar [15] .Böylece $(\bar{c}_0, \bar{d})$ (veya $(\bar{c}\ , \bar{d})$, $(\bar{l}_\infty, \bar{d}\ )$) bir metrik uzaydır.

Tanım 3.4.1. $\bar{y} \in \ w^i$, $\bar{y}$ = $([y_{k_l}, y_{k_r}])$ olsun. Eğer $y_{k_l} = \ y_{k_r}$ ise her k ∈ IN için $\bar{y}$= $(\bar{y}_k)$ dizisine **dejenere aralık dizisi** denir.

$\bar{x}$=$(\bar{x}_k)$ ve $\bar{y}$= $(\bar{y}_k)$ dejenere aralık dizisi ise (1) ile verilen metrik reel veya kompleks sayıların sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarında tanımlı $\bar{d}(\bar{x}_k \ ,\bar{y}_k \ ) =sup_k|x_{k_l}\ \text{-}\ y_{k_l}|$ metriğine indirgenir.

Bütün reel değerli dizilerin uzayı olan w nin, w^i uzayının dejenere olmuş şekli olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Çünkü her reel sayı bir dejenere aralıktır. Böylece w nin her bir alt uzayına bir dejenere dizi uzayı denir. l_∞, c, c_0 dizi uzayları sırasıyla dejenere sınırlı, dejenere yakınsak ve dejenere sıfıra yakınsak dizi uzayları olarak adlandırılabilir.

Tanım 3.4.2. $\bar{x}$=$(\bar{x}_k) \in \ w^i$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir k_0 ∈ IN sayısı n, m≥ k_0 için $\bar{d}(\bar{x}_n \ ,\bar{x}_m \ )< \varepsilon$ olacak şekilde mevcut ise $\bar{x}$=$(\bar{x}_k)$ aralık dizisine **aralık Cauchy dizisi** denir.

Teorem 3.4.3. $(\bar{c}_0, \bar{d})$, $(\bar{c}, \bar{d})$, $(\bar{l}_\infty, \bar{d}\ )$, (1) de tanımlanan metrik ile birer tam metrik uzaydır.

İspat: Her n ∈ IN için $(\bar{x}^n) = (\bar{x}^n_k) = (\ \bar{x}^n_0\ , \bar{x}^n_1\ ,\bar{x}^n_2\ , \dots\ ) \in \bar{c}_0$ ve $(\bar{x}^n)$ bir Cauchy dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir k_0 ∈ IN sayısı n, m≥ k_0 için $\bar{d}(\bar{x}^n_k, \bar{x}^m_k\ ) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilir. Buradan

$$\bar{d}(\bar{x}^n_k\ ,\bar{x}^m_k\ )= sup_{n,m}max\{|\ x^n_{k_l}\text{-}\ x^m_{k_l}|\ , |x^n_{k_r}\ \text{-}\ x^m_{k_r}\ |\}< \ \varepsilon$$

ve

$$|x^n_{k_l}\text{-}\ x^m_{k_l}|< \ \varepsilon \quad , |x^n_{k_r}\ \text{-}\ x^m_{k_r}\ |< \ \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $(\bar{x}^n_k)$, ℝ de bir Cauchy dizisidir. ℝ de bir Banach uzayı olduğu için $(\bar{x}^n_k)$ yakınsaktır. O halde her k ∈ IN için $\lim_{n\to\infty} \bar{x}^n_k = \bar{x}_k$ diyelim. Bu durumda her n,m ≥ k_0 için $\bar{d}(\bar{x}^n_k, \bar{x}^m_k\ )< \varepsilon$ olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} \bar{d}(\bar{x}^n_k, \bar{x}^m_k\ ) = \bar{d}(\bar{x}^n_k\ , \lim_{m\to\infty} \bar{x}^m_k\ ) = \bar{d}(\bar{x}^n_k\ , \bar{x}_k) < \varepsilon\ .$$

Böylece n→ ∞ için $\bar{x}^n \to \bar{x}$ olur.

Diğer taraftan ,

$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_k^n - \bar{x}_k^n) = sup_k \max\{|x_{k_l} - (x_{k_l}^n - x_{k_l}^n)|, |x_{k_r} - (x_{k_r}^n - x_{k_r}^n)|\}$

$\leq sup_k \max\{|x_{k_l} - x_{k_l}^n| + |x_{k_l}^n|, |x_{k_r} - x_{k_r}^n| + |x_{k_r}^n|\}$

$\leq sup_k \max\{|x_{k_l} - x_{k_l}^n|, |x_{k_r} - x_{k_r}^n|\} + sup_k \max\{|x_{k_l}|, |x_{k_r}|\}$

olduğundan $\bar{x} \in \bar{c}_0$ dir. Bu ise $(\bar{c}_0, \bar{d})$ nin bir tam metrik uzay olduğunu gösterir.

λ^i, w^i nin bir alt cümlesi olsun. Bu durumda aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.4.4. λ^i üzerindeki negatif olmayan $\| \cdot \|_{\lambda^i} = \lambda^i \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ normu aşağıdaki özellikleri sağlar:

Her $\bar{x}$, $\bar{y} \in \lambda^i$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \lambda^i \backslash \{0\}$ için

N1) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} > 0$ dır,

N2) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\bar{x} = \theta = [0,0]$ olmasıdır,

N3) $\|\bar{x} + \bar{y}\|_{\lambda^i} \leq \|\bar{x}\|_{\lambda^i} + \|\bar{y}\|_{\lambda^i}$ dir,

N4) $\|\alpha\bar{x}\|_{\lambda^i} = |\alpha|.\|\bar{x}\|_{\lambda^i}$ dir.

Kolaylıkla gösterilebilir ki $(\bar{c}_0, \bar{d})$, $(\bar{c}, \bar{d})$ ve $(\bar{l}_\infty, \bar{d})$ uzayları da birer normlu uzay haline getirilebilir. Burada

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \theta) = sup_k max\{|x_{k_l} - \theta_{k_l}|, |x_{k_r} - \theta_{k_r}|\} = sup_k max\{|x_{k_l}|, |x_{k_r}|\}$$

ve $\theta = [0,0]$; $\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{l}_\infty$ uzaylarının birim elemanıdır.

Teorem 3.4.5. $\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{l}_\infty$ uzayları $\|\bar{x}\| = sup_k max\{|x_{k_l}|, |x_{k_r}|\}$ normuyla normlu aralık uzaylarıdır.

İspat : $\lambda^i = \bar{c}_0$ ($\bar{c}$ veya $\bar{l}_\infty$) ve $\bar{x}$, $\bar{y} \in \lambda^i$ olsun.

N1) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} = sup_k max\{|x_{k_l}|, |x_{k_r}|\}$ olduğu için her $\bar{x} \in \lambda^i \backslash \{0\}$ için $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} > 0$ olduğu kolayca görülür.

N2) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} = 0 \Leftrightarrow sup_k max\{|x_{k_l}|, |x_{k_r}|\} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \theta$

N3) $\|\bar{x} + \bar{y}\|_{\lambda^i} = sup_k max\{|x_{k_l} + y_{k_l}|, |x_{k_r} + y_{k_r}|\}$

$\leq sup_k max\{|x_{k_l}| + |y_{k_l}|, |x_{k_r}| + |y_{k_r}|\}$

$= sup_k max\{(|x_{k_l}|, |x_{k_r}|) + (|y_{k_l}|, |y_{k_r}|)\}$

$\leq sup_k max\{(|x_{k_l}|, |x_{k_r}|)\} + sup_k max\{(|y_{k_l}|, |y_{k_r}|)\}$

$= \|\bar{x}\|_{\lambda^i} + \|\bar{y}\|_{\lambda^i}$

N4) $\|\alpha\bar{x}\| = sup_k max\{|\alpha x_{k_l}|, |\alpha x_{k_r}|\}$

$= |\alpha|.sup_k max\{(|x_{k_l}|, |x_{k_r}|)\}$

$= |\alpha|.\|\bar{x}\|_{\lambda^i}$

Bu durumda $\|\bar{x}\|_{\lambda^i}$, λ^i üzerinde bir normdur. Böylece ispat biter.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

f bir modülüs fonksiyonu, s ≥ 0 bir reel sayı ve p=(p_k) pozitif sayıların $0 \leq h = inf_k p_k \leq p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$ şartını sağlayan bir dizisi olmak üzere,

$\bar{l}_\infty$(f,p,s)={$\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ w^i : $sup_k\ k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} < \infty$, s ≥ 0 }

$\bar{c}$(f,p,s)={$\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ w^i : $\lim_k k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0))]^{p_k} = 0$, s ≥ 0, bazı $\bar{A}_0 \in w^i$ için}

$\bar{c}_0$(f,p,s)={$\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ w^i : $\lim_k k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} = 0$, s ≥ 0 } ve

$\bar{l}$(f,p,s)={$\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ w^i : $\sum_k k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} < \infty$, s ≥ 0 }

dizi uzaylarını tanımlayalım.

Teorem 4.1. $\bar{l}_\infty$(f,p,s), $\bar{c}$(f,p,s), $\bar{c}_0$(f,p,s) ve $\bar{l}$(f,p,s) cümleleri koordinatsal toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

İspat : $\bar{l}_\infty$(f,p,s) cümlesi üzerinde

$$+ : \bar{l}_\infty(f,p,s) \times \bar{l}_\infty(f,p,s) \to \bar{l}_\infty(f,p,s)$$

$$\bullet : \mathbb{R} \times \bar{l}_\infty(f,p,s) \to \bar{l}_\infty(f,p,s)$$

işlemlerini tanımlayalım. $\bar{A}, \bar{B} \in \bar{l}_\infty$(f,p,s) olsun. Bu durumda

$$sup_k\ k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} < \infty,$$

$$sup_k\ k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0}))]^{p_k} < \infty$$

yazılabilir. O halde

$$\bar{d}(\bar{A}_k + \bar{B}_k,\bar{0}) \leq \bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}) + \bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0})$$

ve f bir modülüs fonksiyonu olduğundan

$$f(\bar{d}(\bar{A}_k + \bar{B}_k,\bar{0})) \leq f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}) + \bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0}))$$
$$\leq f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})) + f(\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0}))$$

elde edilir. Ayrıca p=(p_k) pozitif terimli dizisi için

$0 \leq$ h= $inf_k p_k \leq p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$ ve M=max(1,2^{H-1}) olduğundan

$$[f(\bar{d}(\bar{A}_k + \bar{B}_k,\bar{0}))]^{p_k} \leq [f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})) + f(\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0}))]^{p_k}$$
$$\leq M[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} + M[f(\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0}))]^{p_k}$$

olur. (k^{-s}) sınırlı olduğundan

$sup_k\ k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k + \bar{B}_k,\bar{0}))]^{p_k} \leq$

$sup_k\ k^{-s}M[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))^{p_k}] + sup_k\ k^{-s}M[f(\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0}))]^{p_k} < \infty$

Böylece $\bar{A} + \bar{B} \in \bar{l}_\infty$(f,p,s) elde edilir.

Şimdi de $\bar{A} \in \bar{l}_\infty$(f,p,s) ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$sup_k\ k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} < \infty$ yazılabilir.

$\bar{d}(\alpha\bar{A}_k,\bar{0}) = |\alpha|\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})$ ve f modülüs fonksiyonu olduğundan

$$f(\bar{d}(\alpha\bar{A}_k,\bar{0})) = f(\ |\alpha|\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})) \leq |\alpha|\ f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))$$

ve p=(p_k) pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olduğundan

$$[f(\bar{d}(\alpha\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} \leq |\alpha|^{p_k}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k}$$

elde edilir. (k^{-s}) sınırlı olduğundan

$sup_k\ k^{-s}[f(\bar{d}(\alpha\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} \leq sup_k k^{-s}|\alpha|^{p_k}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} < \infty$

elde edilir. Böylece $\alpha\bar{A} \in \bar{l}_\infty$(f,p,s) olur.

Diğer dizi uzayları için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2. $\bar{c}_0$(f,p,s), $\bar{c}$(f,p,s), $\bar{l}_\infty$(f,p,s) dizi uzayları

$$\bar{d}_\infty(\bar{A},\bar{B}) = sup_k k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{B}_k))]^{p_k/M}$$

metriğine ve $\bar{l}$(f,p,s) cümlesi de

$$\bar{d}_p(\bar{A},\bar{B}) = \{\textstyle\sum_k k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{B}_k))]^{p_k}\}^{1/M}$$

metriğine göre tam metrik uzaylardır. Burada M=max(1, $sup_k p_k = H < \infty$) dir.

İspat : Öncelikle $\bar{c}_0$(f,p,s) cümlesinin verilen $\bar{d}_\infty(\bar{A},\bar{B})$ metriği ile metrik uzay olduğunu göstermek kolaydır.

$\bar{c}_0$(f,p,s) nin tamlığını gösterebilmek için $\bar{c}_0$(f,p,s) uzayında $\bar{A}^i_k$={$\bar{A}^i_0, \bar{A}^i_1$, ...} olmak üzere herhangi bir Cauchy dizisi alalım. O halde her $\varepsilon > 0$ ve i,j $\geq n_0(\varepsilon)$ olmak üzere

$$\bar{d}_\infty(\bar{A}^i,\bar{A}^j) = sup_k k^{-s}[f(\bar{d}\left(\bar{A}^{(i)}_k,\bar{A}^{(j)}_k\right))]^{p_k/M} < \varepsilon \qquad (4.2.1)$$

olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısını bulabiliriz. Böylece her bir sabit k ∈ IN sayısı için (4.2.1) ifadesinden i,j $\geq n_0(\varepsilon)$ için

$$k^{-s}[f(\bar{d}\left(\bar{A}^{(i)}_k,\bar{A}^{(j)}_k\right))]^{p_k/M} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{i,j\to\infty} k^{-s}[f(\bar{d}\left(\bar{A}^{(i)}_k,\bar{A}^{(j)}_k\right))]^{p_k/M} = 0 \qquad (4.2.2)$$

olması demektir. Her k ∈ IN için $k^{-s} \neq 0$ ve f sürekli olduğundan (4.2.2) den

$$f[\ \lim_{i,j\to\infty} \bar{d}\left(\bar{A}^{(i)}_k,\bar{A}^{(j)}_k\right)] = 0$$

elde edilir. f modülüs fonksiyonu olduğundan bu ifadeden de

$$\lim_{i,j\to\infty} \bar{d}\left(\bar{A}^{(i)}_k,\bar{A}^{(j)}_k\right) = 0$$

elde edilir. Bu ise $(\bar{A}_k^{(i)})$ dizisinin her sabit k için IR de Cauchy dizisi olduğunu gösterir. IR uzayı $\bar{d}$ metriğine göre tam olduğundan i→ ∞ için $\bar{A}_k^i \to \bar{A}_k$ diyelim. Bu şekilde tanımlanan sonsuz tane limit yardımıyla $(\bar{A}_k)$=($\bar{A}_0, \bar{A}_1, \ldots$) dizisini tanımlayalım. Şimdi (4.2.2) ifadesinde $j \to \infty$ için ve k ∈ IN ler üzerinden supremum alırsak $\bar{d}_\infty(\bar{A}_k^{(i)}, \bar{A}_k) \leq \varepsilon$ elde edilir. Her i ∈ IN için $\bar{A}^i$={$\bar{A}_k^{(i)}$} ∈ $\bar{c}_0$(f,p,s) olduğundan $k_0(\varepsilon)$ ∈ IN sayısı her k ≥ k_0 için

$$k^{-s}[f(\bar{d}\left(\bar{A}_k^{(i)}, \bar{0}\right))]^{p_k} < \varepsilon$$

olacak şekilde seçilebilir. Böylece C = max$(1,2^{H-1})$ olmak üzere her i, k ∈ IN için

$$k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{0}))]^{p_k} \leq \mathrm{C}k^{-s}[f(\bar{d}\left(\bar{A}_k^{(i)}, \bar{A}_k\right))]^{p_k} + \mathrm{C}k^{-s}[f(\bar{d}\left(\bar{A}_k^{(i)}, \bar{0}\right))]^{p_k}$$

eşitsizliğinden dolayı her k ≥ $k_0(\varepsilon)$ için $k^{-s}[f(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{0}))]^{p_k} \leq 2\varepsilon$ elde edilir.

Bu ise $\bar{A}$=$(\bar{A}_k)$ ∈ $\bar{c}_0$(f,p,s) olduğunu gösterir. {$\bar{A}_k^{(i)}$} keyfi bir Cauchy dizisi olduğundan $\bar{c}_0$(f,p,s) bir tam uzaydır.

Diğer dizi uzayları için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.3. a) $inf_k p_k$=h $>$ 0 olsun. Eğer $\bar{A}$=$(\bar{A}_k)$ ∈ $\bar{c}$ ise $\bar{A}$=$(\bar{A}_k)$ ∈ $\bar{c}$(f,p,s) dir.

b) Eğer $\bar{A}$=$(\bar{A}_k)$ ∈ $\bar{c}$(p,s) ise $\bar{A}$=$(\bar{A}_k)$ ∈ $\bar{c}$(f,p,s) dir.

c) Eğer $\beta = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise $\bar{c}$(p,s) = $\bar{c}$(f,p,s) dir.

İspat : a) Kabul edelim ki $\bar{A}$=$(\bar{A}_k)$ ∈ $\bar{c}$ dir. Bu takdirde $\lim_{k\to\infty} \bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0)$ = 0 olacak şekilde $\bar{A}_0$ ∈ $\bar{c}$ vardır. f modülüs fonksiyonu olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))] = \mathrm{f}[\lim_{k\to\infty} \bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0)] = \mathrm{f}(0) = 0$$

yazabiliriz. $inf_k p_k$ = h $>$ 0 ve $\lim_{k\to\infty}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^h$ = 0 olduğundan 0$< \varepsilon <$ 1 olmak üzere ∃k_0 ∈ IN sayısını her k $>$ k_0 için bu son eşitlikten

$$[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^h < \varepsilon < 1 \text{ ve } p_k \geq h$$

olduğundan bütün k lar için

$$[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^{p_k} \leq [\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^h < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece

$$\lim_{k\to\infty}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^{p_k} = 0$$

bulunur. Ayrıca (k^{-s}) sınırlı olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} k^{-s}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Bu da $\bar{A}$=$(\bar{A}_k)$ ∈ $\bar{c}$(f,p,s) olması demektir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

b) $\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ $\bar{c}$(p,s) olsun. Bu takdirde $k \to \infty$ için a_k=$k^{-s}[\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0)]^{p_k} \to 0$ yazabiliriz. $\varepsilon > 0$ verilsin. f modülüs fonksiyonu 0 noktasında sürekli olduğundan 0< $\delta < 1$ sayısını 0≤ $t \leq \delta$ için f(t) < ε olacak şekilde seçebiliriz. Şimdi

$$I_1 = \{ \text{k} \in \text{IN} : \bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0) \leq \delta \}$$

$$I_2 = \{ \text{k} \in \text{IN} : \bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0) > \delta \}$$

cümlelerini oluşturalım. k ∈ I_2 ve $\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0) > \delta$ için

$$\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0) < \bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0).\delta^{-1} < 1 + [\![\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0).\delta^{-1}]\!]$$

yazabiliriz. Burada ⟦.⟧ tamdeğeri göstermektedir. Şimdi modülüs fonksiyonunun özelliklerini kullanarak, $\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0) > \delta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0)) &\leq (1 + [\![\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0).\delta^{-1}]\!])\text{f}(1) \\ &\leq 2\text{f}(1)\, \bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0).\delta^{-1} \end{aligned}$$

ve k ∈ I_1 için $\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0) \leq \delta$ olduğundan

$$\text{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0)) < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece

$$k^{-s}[\text{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^{p_k} = k^{-s}[\text{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^{p_k}{}_{I_1} + k^{-s}[\text{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^{p_k}{}_{I_2}$$

yazarak

$$k^{-s}[\text{f}(\bar{d}(\bar{A}_k, \bar{A}_0))]^{p_k} < k^{-s}\varepsilon^H + [2\text{f}(1)\,\delta^{-1}]^H.a_k$$

elde edilir. Böylece $k \to \infty$ için limite geçilirse $\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ $\bar{c}$(f,p,s) elde edilir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

c) (b) şıkkında $\bar{c}$(p,s) ⊂ $\bar{c}$(f,p,s) olduğu gösterildi. Şimdi $\bar{c}$(f,p,s) ⊂ $\bar{c}$(p,s) olduğunu gösterelim. Herhangi bir f modülüs fonksiyonu için β ile verilen limitin varlığı Maddox[18] tarafından Inclusion between FK-spaces and Kuttner's theorem adlı çalışmasında önerme1 ile verilmiştir. $\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ $\bar{c}$(f,p,s) olsun. $\beta > 0$ ve her t≥ 0 için f(t) ≥ βt yazılabilir. Böylece bu eşitsizlikten $\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ $\bar{c}$(p,s) olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 4.4. f ve g modülüs fonksiyonları ve s, s_1, $s_2 \geq 0$ olacak şekilde reel sayılar olsunlar. Bu takdirde

a) $\bar{c}$(f,p,s) ∩ $\bar{c}$(g,p,s) ⊂ $\bar{c}$(f+g,p,s)

b) Eğer $s_1 \leq s_2$ ise $\bar{c}$(f,p, s_1) ⊂ $\bar{c}$(f,p, s_2) dir.

İspat : a) $\bar{A}$=($\bar{A}_k$) ∈ $\bar{c}$(f,p,s) ∩ $\bar{c}$(g,p,s) olsun. Bu takdirde C = max(1,2^{H-1}) ve a_k, b_k ∈ ℂ sayıları için $|\, a_k + b_k|^{p_k} \leq$ C($|\, a_k|^{p_k} + |\, b_k|^{p_k}$) eşitsizliği kullanılarak

$$[(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0))]^{p_k} = [\mathrm{f}\left(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0)\right)+\mathrm{g}\left(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0)\right)]^{p_k}$$

$$\leq \mathrm{C}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0))]^{p_k} + \mathrm{C}[\mathrm{g}(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0))]^{p_k}$$

elde edilir. (k^{-s}) sınırlı olduğundan

$$k^{-s}[(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0))]^{p_k} \leq \mathrm{C}k^{-s}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0))]^{p_k} + \mathrm{C}k^{-s}[\mathrm{g}(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{A}_0))]^{p_k}$$

olur. $\bar{A}=(\bar{A}_k) \in \bar{c}$(f,p,s) ∩ $\bar{c}$(g,p,s) olduğundan kolayca $\bar{A}=(\bar{A}_k) \in \bar{c}$(f+g,p,s) elde edilir.

Teorem 4.5. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde

a) $\bar{l}_\infty \subset \bar{l}_\infty$(f,p,s) ,

b) Eğer f sınırlı ise böylece $\bar{l}_\infty$(f,p,s) $= w^i$ dir.

İspat : a) $\bar{A}=(\bar{A}_k) \in \bar{l}_\infty$ olsun. Bu takdirde $sup_k \bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}) < \infty$ olduğundan $\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}) \leq$M olacak şekilde M ≥ 0 sayısı bulunabilir. f modülüs fonksiyonu olduğundan (f($\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})$)) dizisi de sınırlıdır. O halde

$$k^{-s}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} \leq k^{-s}[M\mathrm{f}(1)]^{p_k}$$

$$\leq k^{-s}[M\mathrm{f}(1)]^{H} < \infty$$

olur. Yani $\bar{A}=(\bar{A}_k) \in \bar{l}_\infty$(f,p,s) dir.

b) f modülüs fonksiyonu sınırlı olsun. Bu takdirde herhangi bir $\bar{A}=(\bar{A}_k) \in w^i$ için

$$k^{-s}[\mathrm{f}(\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0}))]^{p_k} \leq k^{-s}L^{p_k} \leq k^{-s}L^{H} < \infty$$

olur. O halde $\bar{l}_\infty$(f,p,s) = w^i elde edilir.

Teorem 4.6. $\bar{l}_\infty$(p), $\bar{c}_0$(p), $\bar{l}$(p) uzayları solid uzaylardır.

İspat : Herhangi bir $\bar{A}=(\bar{A}_k)$ interval sayı dizisi $\bar{l}_\infty$(p), $\bar{c}_0$(p), $\bar{l}$(p) uzaylarından herhangi birine ait olmak üzere $\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0}) \leq \bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})$ sağlansın. O halde

$$sup_k[\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0})]^{p_k} \leq sup_k[\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})]^{p_k} < \infty$$

$$\lim_k[\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0})]^{p_k} \leq \lim_k[\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})]^{p_k} = 0 \text{ ve}$$

$$\sum_k[\bar{d}(\bar{B}_k,\bar{0})]^{p_k} \leq \sum_k[\bar{d}(\bar{A}_k,\bar{0})]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki bu da $\bar{B}=(\bar{B}_k)$ dizisinin bu uzaylara ait bir eleman olacağını gösterir.

Teorem 4.7. $\bar{l}_\infty$(f,p,s), $\bar{c}_0$(f,p,s), $\bar{l}$(f,p,s) uzayları solid uzaylardır.

İspat : Teorem 4.6 ve modülüs fonksiyonunun artanlığı kullanılarak ispat verilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Esi, A., (2011). *Strongly almost λ-convergence and statistically almost λ-convergence of interval numbers*, Scientia Magna, 7(2) : 117-122.

[2] Esi, A., (2012). *A new class of interval numbers*, Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science, pp. 98-102.

[3] Esi, A., (2012). *Lacunary sequence spaces of interval numbers*, Thai Journal of Mathematics, 10(2) : 445-451.

[4] Esi, A., (2012). *Double lacunary sequence spaces of double sequence of interval numbers*, Proyecciones Journal of Mathematics, 31(1) : 297-306.

[5] Esi, A. and Braha, N., (2013). *On asymptotically λ-statistical equivalent sequences of interval numbers*, Acta Scientarium Technology, 35(3) : 515-520.

[6] Esi, A. and Esi, A., (2013). *Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences of interval numbers,* International Journal of Mathematics and Its Applications, 1(1) : 43-48.

[7] Esi, A. and Hazarika, B., (2013). *Some ideal convergence of double $\wedge$-interval number sequences defined by Orlicz function*, Global Journal of Mathematical Analysis, 1(3) : 110-116.

[8] Esi, A., (2014). *Statistical and lacunary statistical convergence of interval numbers in topological groups*, Acta Scientarium Technology, (Basılacak).

[9] Kreyzing, E., (1978). *Introduction Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons, Inc, Canada.

[10] Kuo-Ping Chiao, (2002). *Fundamental properties of interval vector max-norm*, Tamsui Oxford Journal of Mathematics, 18(2) : 219-233.

[11] Dwyer, P.S., (1951). *Linear Computation*, New York, Wiley.

[12] Dwyer, P.S., (1953). *Error of matrix computation, simultaneous equations and eigenvalues*, National Bureu of Standarts, Applied Mathematics Series, 29 : 49-58.

[13] Moore , R.E. and Yang, C.T., (1962). *Interval Analysis I*, LMSD-285875, Lockheed Missiles and Spaces Company.

[14] Markov, S., (2005). Quasilinear *spaces and their relation to vector spaces*, Electronic Journal on Mathematics of Computation, 2(1).

[15] Şengönül, M. and Eryılmaz, A., (2010). *On the sequence spaces of interval numbers*, Thai Journal of Mathematics, 8(3) : 503-510.

[16] Ruckle, W.H., (1973). *FK spaces in which the sequence of coordinat vectors in bounded*, Canad. J. Math., 25 : 973-978.

[17] Maddox, I.J., (1986). *Sequence spaces defined by a modulus*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100 : 161-166.

[18] Maddox, I.J., (1987). *Inclusion between FK spaces and Kuttner's theorem*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 101 : 523-527.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sibel YASEMİN
Doğum Yeri :Yüreğir
Doğum Tarihi :12/10/1987
Medeni Hali :Bekar
Yabancı Dili :İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Cumhuriyet Lisesi (2000-2003) (Adana)
Lisans : Kocaeli Üniversitesi(2004-2008) (Kocaeli)
Yüksek Lisans :Çukurova Üniversitesi (2009-2010) (Tezsiz Yüksek Lisans) (Adana)
: Adıyaman Üniversitesi(2011-2013) (Adıyaman)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl
Adana Özel Utku Dershanesi (2008-2009)
Adana Metod Dershanesi (2009-2010)
Adana Seyhan Hürriyet İlköğretim Okulu (2010) (Ücretli Öğretmen)
Adana Yüreğir Damar Arıkoğlu Suat Güçlü İlköğretim Okulu (2010-2011)(Ücretli Öğretmen)
Siirt Üniversitesi (2012-halen)(Araştırma Görevlisi)