T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER VE SERİLER

Ayşe ELDEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN
Eylül 2012

Ayşe ELDEM tarafından hazırlanan "*Çift İndisli Diziler ve Seriler*" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç.Dr. Ayhan ESİ

Jüri Üyeleri :

Doç.Dr. Ayhan ESİ ____________________
(Adıyaman Üniv.) Matematik A.B.D.

Yrd.Doç.Dr. İbrahim GÜMÜŞ ____________________
(Adıyaman Üniv.) Matematik A.B.D.

Yrd.Doç.Dr. Önder KÖKLÜ ____________________
(Adıyaman Üniv.) Matematik A.B.D.

Yukarıdaki sonucu onaylarım. ..../..../........

Doç.Dr. Mustafa ÖZDEN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER VE SERİLER

Ayşe ELDEM

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

45+v sayfa

2012

Danışman: Doç.Dr. Ayhan ESİ

Bu yüksek lisans tezinde çift indisli dizi ve seriler çalışılıp, çift indisli seri ve dizilerin çeşitli özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Çift indisli dizi, çift indisli seri, pozitif terimli dizi, pozitif terimli seri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

DOUBLE SEQUENCES AND SERIES

Ayşe ELDEM

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

45+v pages

2012

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Ayhan ESİ

In this master thesis we studied double sequences and series and examine some properties of double sequences and series.

KEY WORDS: Double sequence, double series, sequence with positive terms, serie with positive terms.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca yardımlarını benden esirgemeyen hocam Sayın Doç.Dr. Ayhan Esi'ye teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi,
$\sum$	:	Toplam sembolü.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Tek indisli dizi ve serilerin bir genelleştirmesi olarak ortaya çıkan çift indisli dizi ve seriler özellikle son zamanlarda sıkça çalışılmaktadır. Çift indisli dizilerin yakınsaklık kriterleri arasında özellikle Pringsheim anlamında yakınsaklık sıkça kullanılmaktadır. Bu yüksek lisans tez çalışmasında da Pringsheim anlamında yakınsaklık kullanılmıştır. Bu çalışmanın amaçlarından birisi de lisans düzeyinde öğretilen tek değişkenli dizi ve serilerin bir genelleştirmesi olan çift indisli dizi ve serileri tanıtıp, bunların sağladığı özellikleri, yakınsaklık ve ıraksaklık kriterlerini araştırmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bilinen tanımlar ve temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.0.1. *X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.*

$$+ : X \times X \to X$$
$$. : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay *denir.* $\forall \alpha, \beta \in K$ *ve* $\forall x, y, z \in X$ *için*

1) $x + y = y + x,$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)\,,$

3) $x + \theta = \theta + x$ *olacak şekilde bir tek* $\theta \in X$ *vardır,*

4) $\forall x \in X$ *için* $x + (-x) = -x + x = \theta$ *olacak şekilde bir tek* $(-x) \in X$ *vardır,*

5) $1.x = x,$

6) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y,$

7) $(\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x,$

8) $\alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\,x.$

Tanım 2.0.2. $\mathbb{N}$ *doğal sayılar cümlesi ve X boş olmayan bir cümle olmak üzere*

$$s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X; \quad (n, m) \to s\,(n, m)$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna çift indisli dizi *denir.*

Çift indisli bir $s = (s(n,m))$ dizininin $s(n,m)$ elemanlarını

$$\begin{array}{ccccc} s(1,1) & s(1,2) & ... & s(1,m) & ... \\ s(2,1) & s(2,2) & ... & s(2,m) & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ s(n,1) & s(n,2) & ... & s(n,m) & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{array}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesini göstermek üzere bütün çift indisli dizilerin cümlesi, $\forall\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$s + l = (s(n,m) + l(n,m)) \text{ ve } \alpha s = (\alpha s(n,m))$$

koordinatsal toplama ve çarpma işlemleri altında bir vektör (lineer) uzaydır.

Çift indisli dizi ve seriler teorisi, tek indisli dizi ve seriler teorisinin bir genişletilmişidir. $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki üç önemli limit şartlarını sağladığını kabul edelim:

(1) $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m)$,

(2) $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} s(n,m))$,

(3) $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} s(n,m))$.

(2) ve (3) limitlerine sıralı (iterated) limitler adı verilir. $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$ olması için gerek ve yeter şart tekrarlı limitler denilen $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} s(n,m))$ ve $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} s(n,m))$ limitleri var, birbirine eşit ve

(4) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} s(n,m)$ mevcut ve

(5) Her $m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ mevcut olmasıdır.

Çift indisli seriler teorisi de çift indisli diziler teorisiyle yakından ilgilidir. Şöyleki; $z : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ çift indisli dizisine aşağıdaki üç toplamı karşılık getirelim:

(6) $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$,

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m))$,

(8) $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m))$.

(7) ve (8) toplamları mevcut ve birbirine eşit ise (6) nolu çift indisli serinin varlığından söz edebiliriz. Bunun için $(z(n,m))$ çift indisli dizinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

(9) $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ serisi yakınsak ve toplamı s dir,

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m)$ serisi her $m \in \mathbb{N}$ için yakınsak ve

(11) $\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)$ serisi her $n \in \mathbb{N}$ için yakınsaktır.

O halde tekrarlı toplamlar olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m)\right) = s$$

yazabiliriz.

3. ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER

Bu bölümde kompleks sayıların çift indisli dizilerinin yakınsaklık ve ıraksaklık tanımlarını verip, bunlara ilişkin teoremler ve çeşitli örnekler vereceğiz.

Tanım 3.0.3. *Kompleks sayıların bir çift indisli dizisi* $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Bu çift indisli diziyi* $(s(n,m))_{n,m=1}^{\infty,\infty}$ *veya kısaca* $(s(n,m))$ *şeklinde gösterelim.* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisinin kompleks bir* a *sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart* $\forall \varepsilon > 0$ *için öyle bir* $N = N(\varepsilon) > 0$ *sayısı* $\forall n, m \geq N$ *için* $|s(n,m) - a| < \varepsilon$ *olacak şekilde mevcuttur. Buradaki* a *sayısına çift indisli* $(s(n,m))$ *dizisinin* çift limiti *(veya* Pringsheim limiti *) adı verilir. Eğer böyle bir* a *sayısı yoksa* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisine* ıraksaktır *diyeceğiz.*

Tanım 3.0.4. *Çift indisli reel bir dizi* $(s(n,m))$ *olsun. Bu taktirde*

(i) $s(n,m) \to \infty$ *ise* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = \infty$ *yazacağız. Bu halde* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $K = K(\alpha) \in \mathbb{N}$ *sayısı* $\forall n, m \geq K$ *için* $s(n,m) > \alpha$ *olacak şekilde vardır.*

(ii) $s(n,m) \to -\infty$ *ise* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = -\infty$ *yazacağız. Bu halde* $\forall \beta \in \mathbb{R}$ *için* $K = K(\beta) \in \mathbb{N}$ *sayısı* $\forall n, m \geq K$ *için* $s(n,m) < \beta$ *olacak şekilde vardır.*

Örnek 3.0.5. ***(a)*** $s(n,m) = \frac{1}{n+m}$ *genel terimli* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0$ *olur. Bunu görebilmek için* $\varepsilon > 0$ *sayısı verilsin.* $N \in \mathbb{N}$ *sayısını* $N > \frac{2}{\varepsilon}$ *olacak şekilde seçelim. O halde* $\forall n, m \geq N$ *için* $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$ *olup*

$$\begin{aligned} |s(n,m) - 0| &= \left|\frac{1}{n+m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

(b) *$s(n,m) = \frac{n}{n+m}$ genel terimli $(s(n,m))$ çift indisli dizisini göz önüne alalım. Bu verilen çift indisli dizi ıraksaktır. Gerçekten yeterince büyük $n, m \in \mathbb{N}$ sayıları için, $n = m$ iken $s(n,m) = \frac{1}{2}$, $n = 2m$ iken $s(n,m) = \frac{2}{3}$ yazabiliriz. Her iki halde de verilen çift indisli dizi $n, m \to \infty$ iken herhangi bir a sayısına yakınsayamadığından bu dizi yakınsak değildir.*

(c) *$s(n,m) = n + m$ genel terimli $(s(n,m))$ çift indisli dizisini göz önüne alalım. Bu dizi için $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = \infty$. Gerçekten $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde $K > \alpha$ olacak şekilde bir $K = K(\alpha) \in \mathbb{N}$ sayısını $\forall n, m \geq K$ için $n + m > \alpha$ şeklinde bulabiliriz.*

(d) *$s(n,m) = 1 - n - m$ genel terimli $(s(n,m))$ çift indisli dizisini göz önüne alalım. Bu dizi için $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = -\infty$. Gerçekten $\beta \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde $K > \frac{-\beta}{2} + \frac{1}{2}$ olacak şekilde bir $K = K(\beta) \in \mathbb{N}$ sayısını $\forall n, m \geq K$ için -$n - m < \frac{-\beta}{2} - \frac{1}{2}$ olur, $1 - n - m < \beta$ elde ederiz.*

Teorem 3.0.6 (Çift limitin tekliği). *Kompleks terimli bir çift indisli dizi bir tek çift limite sahiptir.*

İspat. $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin a ve a^* gibi iki farkli çift limitinin olduğunu kabul edelim. O halde $\varepsilon > 0$ verildiğinde N_1 ve N_2 doğal sayıları

$$\forall n, m \geq N_1 \text{ için } |s(n,m) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.0.1}$$

ve

$$\forall n, m \geq N_2 \text{ için } |s(n,m) - a^*| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.0.2}$$

olacak şekilde vardır. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ yazalım. Bu taktirde $\forall n, m \geq N$ için (3.0.1) ve (3.0.2) ifadelerinden

$$0 \leq |a - a^*| = |a - s(n,m) + s(n,m) - a^*|$$

$$\leq |s(n,m) - a| + |s(n,m) - a^*|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Yani $|a - a^*| = 0$ ve böylece $a = a^*$ olup çift limit tektir. $\square$

Tanım 3.0.7. *$\forall n, m \in \mathbb{N}$ sayıları için $|s(n,m)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ reel sayısı varsa $(s(n,m))$ çift indisli dizisine sınırlıdır denir.*

Teorem 3.0.8. *Kompleks terimli yakınsak bir çift indisli dizi sınırlıdır.*

İspat. Kabul edelimki $s(n,m) \to a$ ve $\varepsilon = 1$ olsun. Bu taktirde $\forall n, m \geq N$ için

$$|s(n,m) - a| < 1$$

olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece üçgen eşitsizliği kullanılarak, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ sayıları için

$$|s(n,m)| < 1 + |a|$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki

$$M = \max\{|s(1,1)|, |s(1,2)|, |s(2,1)|, |s(2,2)|, ..., |s(N-1, N-1)|, 1 + |a|\}.$$

Buradan açıkça, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ sayıları için $|s(n,m)| \leq M$ elde edilir, yani çift indisli dizi sınırlıdır. $\square$

Hatırlatma 3.0.9. *$(s(n,m))$ çift indisli dizisinin tekrarlı limitleri olan*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) \text{ ve } \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right)$$

limitlerinin var olmaları birbirlerine eşit olmaları anlamını taşımaz. Bunu aşağıdaki örnekle inceleyelim.

Örnek 3.0.10. *Genel terimi $s(n,m) = \frac{n}{n+m}$ olan $(s(n,m))$ çift indisli dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} s(n,m) = 1$ dir ve böylece $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = 1$ elde edilir. Ancak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} s(n,m) = 0$ olup, $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s(n,m)) = 0$ elde edilir. O halde bu çift indisli dizi için $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s(n,m)) \neq \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m))$ olduğundan çift limiti yoktur.*

Hatırlatma 3.0.11. *Yakınsak bir çift indisli dizinin her zaman tekrarlı limitleri mevcut mudur? şeklindeki bir sorunun cevabını aşağıdaki örnekle araştıralım.*

Örnek 3.0.12. *Genel terimi* $s(n,m) = (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$ *olan* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. Açıkça*

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0$$

dır. Gerçekten önceden verilen bir $\varepsilon > 0$ *için* $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ *olacak şekilde* $N \in \mathbb{N}$ *sayısını seçelim. Böylece* $\forall n,m \geq N$ *için*

$$\left|(-1)^{n+m}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

elde edilir. O halde çift indisli $(s(n,m))$ *dizisi yakınsaktır. Fakat*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right)$$

limiti mevcut değildir, çünkü $\lim_{m\to\infty} s(n,m)$ *mevcut değildir ve hatta*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right)$$

limiti de yoktur, çünkü $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ *limiti mevcut değildir.*

Hatırlatma 3.0.13. *Bir çift indisli dizinin çift limiti ve tekrarlı limitlerinin varlığı ve değerleri bu çift indisli dizinin tanımlanma şekline bağlıdır. Bu limitlerden birinin varlığı diğerlerinin varlığı veya olmamasını gerektirmeyebilir. Bunu aşağıda vereceğimiz örneklerle açıklayalım:*

Örnek 3.0.14. ***(a)*** *Genel terimi* $s(n,m) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$ *olan* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. Açıkça* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0$ *dır. Gerçekten önceden verilen bir* $\varepsilon > 0$ *için* $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ *olacak şekilde* $N \in \mathbb{N}$ *sayısını seçelim. Böylece* $\forall n,m \geq N$ *için*

$$\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

elde edilir. Ayrıca, $\lim_{m\to\infty} s(n,m) = \frac{1}{m}$ *ve* $\lim_{n\to\infty} s(n,m) = \frac{1}{n}$ *olduğundan tekrarlı limitleri mevcut ve*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right) = 0$$

dır.

(b) *Genel terimi* $s(n,m) = (-1)^{n+m}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$ *olan* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. Açıkça (a) şıkkına benzer olarak* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0$ *olur ve tekrarlı limitlerine bakacak olursak,* $\lim_{n\to\infty} s(n,m) = \frac{(-1)^m}{m}$ *olduğundan* $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = 0$ *ve* $\lim_{m\to\infty} s(n,m)$ *limiti mevcut olmadığından* $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s(n,m))$ *limiti mevcut değildir.*

(c) *Genel terimi* $s(n,m) = (-1)^{n+m}$ *olan* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. Açıkça bu çift indisli dizinin ne çift limiti ne de tekrarlı limitleri mevcut değildir.*

Teorem 3.0.15. $(s(n,m))$ *çift indisli dizisi verilsin. Kabul edelim ki* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$ *olsun. Bu taktirde* $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = a$ *olması için gerek ve yeter şart* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ *limitinin var olmasıdır.*

İspat. Teoremin gereklilik kısmı açıktır. Teoremin yeterlik kısmı için kabul edelimki $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} s(n,m) = c_m$ olsun. $m \to \infty$ için $c_m \to a$ olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ verilsin. $n, m \to \infty$ için $s(n,m) \to a$ olduğundan $n, m \geq N_1$ için

$$|s(n,m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca $\forall m \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ olduğundan $s(n,m) \to c_m$ olduğundan öyle bir $n \geq N_2$ için

$$|s(n,m) - c_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ seçelim. O halde $\forall m \geq N_1$ için

$$\begin{aligned} |c_m - a| &= |c_m - s(n,m) + s(n,m) - a| \\ &\leq |s(n,m) - c_m| + |s(n,m) - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $m \to \infty$ için $c_m \to a$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Yukarıdaki teoreme benzer bir yolla m ve n sembollerinin yer değiştirmesi ile bu teoreme benzer şekilde ispat edilebilecek aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.0.16. $(s(n,m))$ *çift indisli dizisi verilsin. Kabul edelim ki* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$ *olsun. Bu taktirde* $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s(n,m)) = a$ *olması için gerek ve yeter şart* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $\lim_{m\to\infty} s(n,m)$ *limitinin var olmasıdır.*

Şimdi Teorem 3.0.15 ve Teorem 3.0.16 birleştirilerek aşağıdaki şu sonuç elde edilir:

Teorem 3.0.17. $(s(n,m))$ *çift indisli dizisi verilsin. Kabul edelim ki* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$ *olsun. Bu taktirde*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right)$$

tekrarlı limitleri mevcut ve her ikisinin değerinin a *sayısına eşit olması için gerek ve yeter şart*

(i) $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $\lim_{m\to\infty} s(n,m)$ *limitlerinin var olmasıdır.*

Aşağıdaki örnek bize Teorem 3.0.15 ve Teorem 3.0.16 teoremlerinin karşıtlarının doğru olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.0.18. *Genel terimi* $s(n,m) = \frac{nm}{n^2+m^2}$ *olan* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. Açıkça* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $\lim_{n\to\infty} s(n,m) = 0$ *olup buradan* $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = 0$ *elde edilir. Ancak* $n = m$ *için* $s(n,m) = \frac{1}{2}$ *ve* $n = 2m$ *için* $s(n,m) = \frac{2}{5}$ *olup* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m)$ *çift limiti mevcut değildir.*

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.0.15 un kısmi olarak tersi olarak düşünülebilir. Fakat önce bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaklığı kavramını hatırlayalım:

Bir X cümlesi üzerinde tanımlı (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır deriz eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $\forall x \in X$ noktası için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa.

Teorem 3.0.19. $(s(n,m))$ *çift indisli dizisi verilsin ve kabul edelimki aşağıdaki şartları sağlasın:*

(i) $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = a$

ve

(ii) *m'ye göre düzgün olarak* $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ *limiti mevcut olsun. Bu taktirde* $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$ *elde edilir.*

İspat. $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi üzerinde tanımlı bir f_n fonksiyonunu $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $f_n(m) = s(n,m)$ şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde (ii) kabulunden dolayı $f(m) = \lim_{n\to\infty} s(n,m)$ olmak üzere $\mathbb{N}$ üzerinde düzgün olarak $f_n \to f$ dir. Böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $n \geq N_1$ oldukça

$$|s(n,m) - f(m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Yine (ii) kabulunden $\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = a$ olup aynı $\varepsilon > 0$ için $m \geq N_2$ olduğunda

$$|f(m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi $N = max\{N_1, N_2\}$ alırsak $n, m \geq N$ olduğunda

$$\begin{aligned} |s(n,m) - a| &\leq |s(n,m) - f(m)| + |f(m) - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki, böylece $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$ elde edilir. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Bu teoremin hipotezindeki m'ye göre düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ limitinin mevcut olması ifadesi $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ limitinin mevcut olması ifadesi ile zayıflatılamaz. Çünkü, örneğin çift indisli genel terimi $s(n,m) = \frac{nm}{n^2+m^2}$ olan $(s(n,m))$ çift indisli dizisiyi tekrar göz önüne alalım. Kolaylıkla gösterilebilir ki

(a) $(s(n,m))$ çift indisli dizisi $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $|s(n,m)| \leq 1$ olduğundan sınırlıdır,

(b) $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} s(n,m) = 0$,

(c) $m \in \mathbb{N}$ sayısına göre düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} s(n,m) \neq 0$ dır. Aslında $\forall n \in \mathbb{N}$ için $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(m) = s(n,m) = \frac{nm}{n^2+m^2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu taktirde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n - 0\| = \sup\{|f_n(m) - 0| : \ m \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$$

olması

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| \neq 0$$

olmasını gerektirir,

(d) $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = 0$,

(e) $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m)$ limiti Örnek 3.0.18 de gösterildiği gibi mevcut değildir.

□

Bu bölümden şu sonucu çıkarabiliriz: Teorem 3.0.15 da verilen $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ limitinin varlığının kabulü, $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m)$ çift limitinin varlığını göstermez. Bunu aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 3.0.20. *Genel terimi* $s(n,m) = \frac{(-1)^n}{m}$ *olan* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. İlk olarak*

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = \lim_{n,m\to\infty} \frac{(-1)^n}{m} = 0$$

elde edilir. Gerçekten $\varepsilon > 0$ *verildiğinde* $\frac{1}{N} < \varepsilon$ *olacak şekilde* $N \in \mathbb{N}$ *bulabiliriz. Öyleyse* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için*

$$\left| \frac{(-1)^n}{m} - 0 \right| = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

bulunur. Diğer taraftan $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ *mevcut olmadığından herbir sabit* $m \in \mathbb{N}$ *için* $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{m}$ *mevcut değildir.*

4. ÇİFT İNDİSLİ CAUCHY DİZİLERİ

Bu bölümde çift indisli dizilerin yakınsaklığı için önemli olan Cauchy kriterini vereceğiz.

Tanım 4.0.21. *Kompleks sayıların $(s(n,m))$ çift indisli dizisine Cauchy dizisi denir ancak ve ancak $\forall\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı $\forall p \geq n \geq N$ ve $\forall q \geq m \geq N$ için*

$$|s(p,q) - s(n,m)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bulunabilmesidir.

Teorem 4.0.22 (Çift indisli diziler için Cauchy yakınsaklık kriteri). *Kompleks sayıların $(s(n,m))$ çift indisli dizisi yakınsaktır ancak ve ancak $(s(n,m))$ çift indisli dizisi bir Cauchy dizisidir.*

İspat. Kabul edelimki $n, m \to \infty$ olduğunda $s(n,m) \to a$ olsun. Bu taktirde $\forall\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n, m \geq N$ için

$$|s(n,m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. Böylece $\forall p \geq n \geq N$ ve $\forall q \geq m \geq N$ için

$$|s(p,q) - s(n,m)| = |s(p,q) - a + a - s(n,m)|$$

$$\leq |s(p,q) - a| + |a - s(n,m)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir ki bu halde $(s(n,m))$ çift indisli dizisi bir Cauchy dizisidir.

Tersine kabul edelimki $(s(n,m))$ çift indisli dizisi bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $m = n$ ve $s(n,n) = b_n$ yazarak $\forall p \geq n \geq K$ için

$$|b_p - b_n| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $K \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece tek indisli diziler için Cauchy yakınsaklık kriterinden dolayı (b_n) dizisi a noktasına yakınsar. Böylece $\forall n \geq N_1$ için

$$|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.0.1}$$

olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $(s(n,m))$ çift indisli dizisi bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall p,q \geq n \geq N_2$ için

$$|s(p,q) - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.0.2}$$

olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ seçelim ve $n \geq N$ seçelim. Bu taktirde (4.0.1) ve (4.0.2) den dolayı $\forall p,q \geq N$ için

$$\begin{aligned} |s(p,q) - a| &\leq |s(p,q) - b_n| + |b_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $s(n,m) \to a$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar. □

5. MONOTON ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER

Bu bölümde reel sayıların artan ve azalan çift indisli dizilerini tanımlayacağız ve bu diziler için monoton yakınsaklık teoremini tıpkı tek değişkenlilerde olduğu gibi ispat edeceğiz.

Tanım 5.0.23. *Reel sayıların bir* $(s\,(n,m))$ *çift indisli dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde*

(i) $\forall\,(n,m) \leq (j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *için* $s\,(n,m) \leq s\,(j,k)$ *ise* $(s\,(n,m))$ *çift indisli dizisine* artandır*,*

(ii) $\forall\,(n,m) \leq (j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *için* $s\,(n,m) \geq s\,(j,k)$ *ise* $(s\,(n,m))$ *çift indisli dizisine* azalandır*,*

(iii) $(s\,(n,m))$ *çift indisli dizisi artan ya da azalan ise bu diziye* monotondur *diyeceğiz.*

Teorem 5.0.24 (Monoton yakınsaklık teoremi). *Reel sayıların monoton bir çift indisli dizisi yakınsaktır ancak ve ancak o çift indisli dizi sınırlı ise. Ayrıca*

(a) $(s\,(n,m))$ *çift indisli dizisi artan ve üstten sınırlı ise*

$$\lim_{n,m\to\infty} s\,(n,m) = \lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} s\,(n,m)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{m\to\infty} s\,(n,m)\Big)$$

$$= \sup\{s\,(n,m):\ n,m \in \mathbb{N}\}$$

ve

(b) $(s\,(n,m))$ *çift indisli dizisi azalan ve alttan sınırlı ise*

$$\lim_{n,m\to\infty} s\,(n,m) = \lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} s\,(n,m)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{m\to\infty} s\,(n,m)\Big)$$

$$= \inf\{s\,(n,m):\ n,m \in \mathbb{N}\}.$$

İspat. Yakınsak bir dizinin sınırlı olmasından dolayı teoremin ilk kısmı açıktır. Tersine $(s(n,m))$ çift indisli dizisi sınırlı ve monoton bir dizi olsun. Bu taktirde $(s(n,m))$ çift indisli dizisi artan yada azalan bir dizidir.

(a) Öncelikle $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin artan ve üstten sınırlı olduğunu kabul edelim. Reel sayıların supremum prensibinden dolayı

$$a^* = \sup\{s(n,m) : \ n,m \in \mathbb{N}\}$$

mevcuttur. Bu durumda $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin tekrarlı ve çift limitinin varlığını ve a^* sayısına eşit olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $a^* - \varepsilon$ sayısı $\{s(n,m) : \ n,m \in \mathbb{N}\}$ cümlesi için bir üst sınır değildir. Böylece öyle bir $K(\varepsilon)$ ve $J(\varepsilon)$ doğal sayıları vardır ki

$$a^* - \varepsilon < s(K;J)$$

yazabiliriz. Fakat $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin artan olduğundan $\forall (n,m) \geq (K;J)$ için

$$a^* - \varepsilon < s(K;J) \leq s(n,m) \leq a^* < a^* + \varepsilon$$

olur ve böylece $\forall (n,m) \geq (K;J)$ için

$$|s(n,m) - a^*| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $(s(n,m))$ çift indisli dizisi a^* sayısına yakınsar. Şimdi

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) = a^*$$

olduğunu gösterelim.$(s(n,m))$ çift indisli dizisi üstten sınırlı olduğundan her sabit $m \in \mathbb{N}$ sayısı için $\{s(n,m) : \ n \in \mathbb{N}\}$ tek indisli dizisi üstten sınırlı ve artandır. Tek indisli diziler için monoton yakınsaklık teoremi gereğince $\forall m \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} s(n,m) = \sup\{s(n,m) : \ n \in \mathbb{N}\} = l_m$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.0.15 gereğince tekrarlı limit $\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s\left(n,m\right)\right)$ vardır ve

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s\left(n,m\right)\right)=\lim_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right)=a^{*}$$

olur. Benzer olarak

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s\left(n,m\right)\right)=\lim_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right)=a^{*}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

(b) $\left(s\left(n,m\right)\right)$ çift indisli dizisi azalan ve alttan sınırlı ise $\left(-s\left(n,m\right)\right)$ çift indisli dizisi artan ve üstten sınırlıdır. Böylece (a) kısmından

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} -s\left(n,m\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} -s\left(n,m\right)\right)&=\lim_{n,m\to\infty} -s\left(n,m\right)\\&=\sup\left\{-s\left(n,m\right):\ n,m\in\mathbb{N}\right\}\\&=-\inf\left\{s\left(n,m\right):\ n,m\in\mathbb{N}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s\left(n,m\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s\left(n,m\right)\right)&=\lim_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right)\\&=\inf\left\{s\left(n,m\right):\ n,m\in\mathbb{N}\right\}\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\square$

6. LİMİT TEOREMLERİ

Teorem 6.0.25. *Bir* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisi,* $\forall n,m \in \mathbb{N}$ *için* $s(n,m) = a_n a_m$ *şeklinde ise ve* $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{m\to\infty} a_m = l_2$ *oluyorsa bu taktirde*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) = \lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = l_1 l_2$$

olur.

İspat. Hipotezden dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_n a_m\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{m\to\infty} a_m = l_1 l_2$$

ve

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_n a_m\right)$$

$$\lim_{m\to\infty} a_m . \lim_{n\to\infty} a_n = l_2 l_1$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right) = l_1 l_2$$

bulunur. Şimdi

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = l_1 l_2$$

olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. (a_n) dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq K$ olacak şekilde $K \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ ve $\lim_{m\to\infty} a_m = l_2$ olduğundan $\forall n, m \geq N$ sayıları için

$$|a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2b} \text{ ve } |a_m - l_2| < \frac{\varepsilon}{2b}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısını bulabiliriz, burada $b = \max\{K, |l_1|\}$ olarak alınmıştır. O halde $n, m \geq N$ olduğunda

$$|s(n,m) - l_1 l_2| \leq |s(n,m) - a_n l_2| + |a_n l_2 - l_1 l_2|$$

$$= |a_n| |a_m - l_2| + |l_2| |a_n - l_1|$$

$$\leq K \frac{\varepsilon}{2b} + |l_2| \frac{\varepsilon}{2b} \leq 2b \frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon$$

elde edilir ki böylelikle $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = l_1 l_2$ elde edilmiş olur. □

Örnek 6.0.26. *$\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $s(n,m) = \frac{1}{nm}$ genel terimi ile verilmiş bir $(s(n,m))$ çift indisli dizisini göz önüne alalım. İddia ediyoruz ki*

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s(n,m) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} s(n,m) \right) = \lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0.$$

Gerçekten, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $s(n,m) = a_n a_m = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{m}\right)$ dir ve buradan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ve

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$

olur. Teorem 6.0.25 den dolayı

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{nm} \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nm} \right)$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \right) = 0$$

elde edilir.

Teorem 6.0.27. *Bir $(s(n,m))$ çift indisli dizisi, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $s(n,m) = a_n + a_m$ şeklinde ise ve $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{m\to\infty} a_m = l_2$ oluyorsa bu taktirde*

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s(n,m) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} s(n,m) \right) = \lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = l_1 + l_2$$

olur.

İspat. Hipotezden dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s\left(n,m\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_n + a_m\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{m\to\infty} a_m = l_1 + l_2$$

ve

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s\left(n,m\right)\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + a_m\right)$$

$$\lim_{m\to\infty} a_m + \lim_{n\to\infty} a_n = l_2 + l_1$$

olur. Şimdi

$$\lim_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right) = l_1 + l_2$$

olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\forall n, m \geq N$ sayıları için

$$\left|a_n - l_1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \left|a_m - l_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N = N\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ sayısını bulabiliriz. O halde $n, m \geq N$ olduğunda

$$\left|s\left(n,m\right) - \left(l_1 + l_2\right)\right| \leq \left|a_n + a_m - \left(l_1 + l_2\right)\right|$$

$$\leq \left|a_n - l_1\right| + \left|a_m - l_2\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir ki böylelikle $\lim_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right) = l_1 + l_2$ elde edilmiş olur. $\square$

Örnek 6.0.28. *$\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $s\left(n,m\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ genel terimi ile verilmiş bir $\left(s\left(n,m\right)\right)$ çift indisli dizisini göz önüne alalım. Örnek 3.0.14 da*

$$\lim_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right) = \lim_{n,m\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = 0$$

olduğunu gösterdik. Şimde Teorem 6.0.27' ü kullanarak bu sonucu şu şekilde görebiliriz:

$$\lim_{n,m\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m} = 0$$

olup, Teorem 6.0.27 den dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}=0$$

olur.

Teorem 6.0.29 (Sandöviç Teoremi). *$(x(n,m))$, $(s(n,m))$ ve $(y(n,m))$ reel sayıların çift indisli dizileri olsunlar. $\forall n,m\in\mathbb{N}$ için*

$$(x(n,m))\leq(s(n,m))\leq(y(n,m))$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty}x(n,m)=\lim_{n,m\to\infty}y(n,m)$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $(s(n,m))$ çift indisli dizisi yakınsaktır ve

$$\lim_{n,m\to\infty}x(n,m)=\lim_{n,m\to\infty}s(n,m)=\lim_{n,m\to\infty}y(n,m)$$

olur.

İspat. $a=\lim_{n,m\to\infty}x(n,m)=\lim_{n,m\to\infty}y(n,m)$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\varepsilon>0$ verildiğinde$\forall n,m\geq N$ sayıları için

$$|x(n,m)-a|<\varepsilon \text{ ve } |y(n,m)-a|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Hipotezden dolayı $\forall n,m\geq N$ sayıları için

$$x(n,m)-a\leq s(n,m)-a\leq y(n,m)-a$$

ve buradan da

$$-\varepsilon\leq s(n,m)-a\leq\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty}s(n,m)=a$$

elde edilir. □

7. ÇİFT İNDİSLİ ALT DİZİLER

Bu bölümde çift indisli alt dizileri çalışacağız ve onların yakınsaklığı ile ilgili sonuçları ve orijinal çift indisli dizinin yakınsaklığı ile bağlantılarını ispatlayacağız.

Tanım 7.0.30. *Kompleks sayıların çift indisli bir dizisi* $(s(n,m))$ *olsun. Ayrıca*

$$(k_1, r_1) < (k_2, r_2) < (k_3, r_3) < ... < (k_n, r_n) < ....$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *nin kesin artan bir dizisi olsun. Bu taktirde* $(s(k_n, r_m))$ *dizisine* $(s(n,m))$ *dizisinin bir* alt dizisi *denir.*

Aşağıdaki teoremle görüleceği gibi yakınsak bir çift indisli dizinin çift indisli bir alt dizisi de aynı limite yakınsar.

Teorem 7.0.31. $(s(n,m))$ *çift indisli dizisi bir kompleks a sayısına yakınsıyor ise bu taktirde bu çift indisli dizinin bir alt dizisi de aynı a sayısına yakınsar.*

İspat. $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin bir alt dizisi $(s(k_n, r_m))$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde $p, q \geq N$ olduğunda

$$|s(p,q) - a| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi $\forall n, m \geq N$ sayıları için

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq ... \leq k_n \leq ....$$

ve

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq ... \leq r_n \leq ....$$

olduğundan $k_n \geq n$ ve $r_m \geq m$ olur. Böylece $n, m \geq N$ ve dolayısıyla $k_n, r_m \geq N$ olduğunda

$$|s(k_n, r_m) - a| < \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{n,m\to\infty} s\left(k_n, r_m\right) = a$$

bulunmuş olur. $\square$

Teorem 7.0.32. *Eğer* $(s\,(n,m))$ *çift indisli dizisinin tekrarlı limitleri mevcut ve*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s\,(n,m)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s\,(n,m)\right) = a$$

oluyorsa, bu taktirde herhangi bir $(s\,(p_n, q_m))$ *çift indisli alt dizisi içinde tekrarlı limitler vardır ve*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s\,(p_n, q_m)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s\,(p_n, q_m)\right) = a$$

olur.

İspat. İddia 1. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} s\,(n,m) = f(n)$ mevcut ise bu taktirde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} s\,(p_n, q_m) = f(p_n)$ olur. Gerçekten $\forall n \in \mathbb{N}$ için hipotezden $\lim_{m\to\infty} s\,(n,m) = f(n)$ mevcuttur. Bu ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} s\,(p_n, q_m) = f(p_n)$ nin mevcut olmasını gerektirir. $(s\,(p_n, q_m))_{m=1}^{\infty}$ dizisi $(s\,(p_n, m))_{m=1}^{\infty}$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} s\,(p_n, m) = f(p_n)$ bulunur.

İddia 2. $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s\,(n,m)) = a$ ise $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s\,(p_n, q_m)) = a$ dır. Gerçekten, hipotezden $\lim_{m\to\infty} s\,(n,m) = f(n)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$ dır. Buradan İddia 1 ile $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m\to\infty} s\,(p_n, q_m) = f(p_n) \tag{7.0.1}$$

yazarız. Ayrıca $(f(p_n))_{n=1}^{\infty}$ dizisi $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir alt dizisi ve $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = a$ dır. Bu ve (7.0.1) ifadelerinden

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s\,(p_n, q_m)\right) = a$$

elde ederiz. Böylece iddia ispatlanmış olur. $\square$

İddia 1 ve İddia 2 nin ifadelerinde n ve m sayılarının rolleri değiştirilirse bu taktirde $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(n,m)) = a$ ise $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s(p_n, q_m)) = a$ bulunur. Bu ve İddia 2 ile teorem ispatlanmış olur.

Şimdi reel sayıların her çift indisli dizisi monoton olmak zorunda değil iken her çift indisli dizinin bir monoton alt diziye sahip olduğunu göstereceğiz.

Teorem 7.0.33. *Reel sayıların her çift indisli dizisi monoton bir alt diziye sahiptir.*

İspat. Teoremi ispat edebilmek için $(p,q) \leq (n,m)$ olmak üzere $\forall (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $s(p,q) \geq s(n,m)$ ise $s(p,q)$ elemanına peak eleman diyelim. Yani $s(p,q)$ elemanı kendinden önce gelen terimli elemanları aşmasın. Şimdi iki durumda $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin sonsuz yada sonlu çoklukta peak elemanına sahip olduğunu göz önüne alalım.

Durum 1. $(s(n,m))$ çift indisli dizisi sonsuz çoklukta peak elemanına sahip olsun. Bu halde peak noktalarını artan indislere göre sıralayalım. Böylece

$$(p_1,q_1) < (p_2,q_2) < (p_3,q_3) < ... < (p_k,q_k) < ....$$

olacak şekilde

$$s(p_1,q_1), s(p_2,q_2), s(p_3,q_3), ..., s(p_k,q_k), ...$$

elemanları vardır. Herbir eleman bir peak noktası olduğundan

$$s(p_1,q_1) \geq s(p_2,q_2) \geq s(p_3,q_3) \geq ... \geq s(p_k,q_k) \geq ...$$

yazılır. Böylece peak elemanlarının $(s(p_k,q_k))$ alt dizisi $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin azalan bir alt dizisidir.

Durum 2. $(s(n,m))$ çift indisli dizisi sonlu tane peak elemanına sahip olsun (hiç olmayabilirde). Bu peak elemanları

$$s(p_1,q_1), s(p_2,q_2), s(p_3,q_3), ..., s(p_j,q_j)$$

ve $k_1 = p_j + 1$ ve $r_1 = q_j + 1$ olarak seçelim. Bu taktirde (k_1, r_1) son peak elemanının ötesindeki bir indistir. Böylece $s(k_1, r_1)$ bir peak elemanı olmadığından $s(k_1, r_1) < s(k_2, r_2)$ olacak şekilde $(k_2, r_2) > (k_1, r_1)$ noktası vardır. $s(k_2, r_2)$ bir peak elemanı olmadığından $s(k_2, r_2) < s(k_3, r_3)$ olacak şekilde $(k_3, r_3) > (k_2, r_2)$ noktası vardır. Böylece devam edilerek $(s(n, m))$ çift indisli dizisinin bir $(s(k_n, r_m))$ artan alt dizisine ulaşırız. Böylece teorem ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 7.0.34 (Balzano-Weierstrass Teoremi). *Reel sayıların sınırlı bir çift indisli dizisi monoton yakınsak bir alt diziye sahiptir.*

İspat. $(s(n, m))$ reel sayıların sınırlı bir çift indisli dizisi olsun. Teorem 7.0.33 den bu dizi monoton bir $(s(k_n, r_m))$ alt dizisi sahiptir. Bu alt dizi sınırlı olduğundan Monoton Yakınsaklık Teoremi 5.0.24 gereğince yakınsaktır. $\square$

Sonuç 7.0.35. $(s(n, m))$ *reel sayıların sınırlı bir çift indisli dizisi ise bu taktirde* $(s(k_n, r_m))$ *yakınsak alt dizisinin*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(k_n, r_m)\right) \;\; \textit{ve} \; \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(k_n, r_m)\right)$$

tekrarlı limitleri var ve çift limit olan $\lim_{n,m\to\infty} s(k_n, r_m)$ *limitine eşittir.*

İspat. $(s(n, m))$ reel sayıların sınırlı bir çift indisli dizisi olduğundan Teorem 7.0.34 den bu dizi $\lim_{n,m\to\infty} s(k_n, r_m)$ mevcut olacak şekilde monoton bir $(s(k_n, r_m))$ alt dizisine sahiptir ve bu alt dizi sınırlı olduğundan Monoton Yakınsaklık Teoremi 5.0.24 den dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(k_n, r_m)\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(k_n, r_m)\right) = \lim_{n,m\to\infty} s(k_n, r_m)$$

elde edilir. $\square$

Çift indisli dizilerin alt dizileri çift indisli dizilerin ıraksaklığını test etmek için de kullanılır. Bunu aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem 7.0.36 (Iraksaklık Kriteri). *Kompleks sayıların bir çift indisli dizisi* $(s(n,m))$ *olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $(s(n,m))$ *çift indisli dizisi bir* $a \in \mathbb{C}$ *sayısına yakınsak değildir.*

(ii) *Bir* $\varepsilon_o > 0$ *sayısı herhangi bir* $k \in \mathbb{N}$ *için* $n_k, m_k \geq k$ *ve*

$$|s(n_k, m_k) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde $n_k, m_k \in \mathbb{N}$ *sayıları vardır.*

(iii) *Bir* $\varepsilon_o > 0$ *sayısı ve* $(s(n,m))$ *çift indisli dizisinin* $(s(n_k, m_k))$ *alt dizisi* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için*

$$|s(n_k, m_k) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde vardır.

İspat. **(i)⇒(ii)**. $(s(n,m))$ çift indisli dizisi bir $a \in \mathbb{C}$ sayısına yakınsak değil ise o zaman bir $\varepsilon_o > 0$ vardır öyleki $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$n_k, m_k \geq k \Rightarrow |s(n_k, m_k) - a| < \varepsilon_o$$

ifadesi yanlıştır. Yani $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|s(n_k, m_k) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde $n_k, m_k \geq k$ doğal sayıları vardır.

(ii)⇒(iii).$\varepsilon_o > 0$ sayısı (ii) deki gibi olsun ve $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ sayılarını

$$n_1, m_1 \geq 1 \text{ ve } |s(n_1, m_1) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ sayılarını

$$n_2 \geq n_1 + 1, m_2 \geq m_1 + 1 \text{ ve } |s(n_2, m_2) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde seçelim ve $n_3, m_3 \in \mathbb{N}$ sayılarını

$$n_3 \geq n_2 + 1, m_3 \geq m_2 + 1 \text{ ve } |s(n_3, m_3) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde seçelim. Bu şekilde devam ederek $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde sıralı çiftlerin kesin artan $\{(n_k, m_k)\}$ dizisini elde ederiz. Böylece $(s(n,m))$ çift indisli dizisi

$$|s(n_k, m_k) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde $(s(n_k, m_k))$ alt dizisini bulmuş oluruz.

(iii)⇒(i). Kabul edelim ki bir $\varepsilon_o > 0$ sayısı ve $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|s(n_k, m_k) - a| \geq \varepsilon_o$$

olacak şekilde $(s(n_k, m_k))$ alt dizisi var olsun. Bu taktirde $(s(n,m))$ çift indisli dizisi $a \in \mathbb{C}$ noktasına yakınsayamaz. Çünkü eğer $s(n,m) \to a$ olsaydı Teorem 7.0.31 den $(s(n_k, m_k))$ alt dizisi de a noktasına yakınsardı. Ancak bu ise kabulümüz ile çelişir. □

Teorem 7.0.37. *Kompleks sayıların sınırlı bir çift indisli dizisi $(s(n,m))$ olsun. Bu taktirde bu dizinin her alt dizisi bir $a \in \mathbb{C}$ sayısına yakınsak ise bu taktirde $(s(n,m))$ çift indisli dizisi a noktasına yakınsaktır.*

İspat. Aksini kabul edelim. Yani $(s(n,m))$ çift indisli dizisi a noktasına yakınsamasın. O halde Teorem 7.0.36 Iraksaklık Teoremi gereğince bir $\varepsilon_o > 0$ ve $(s(n,m))$ çift indisli dizisinin bir alt dizisi $(s(n_k, m_k))$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|s(n_k, m_k) - a| \geq \varepsilon_o \tag{7.0.2}$$

olacak şekilde vardır. $(s(n,m))$ çift indisli dizisi sınırlı olduğundan $(s(n_k, m_k))$ alt dizisi de sınırlı olur. Balzano-Weierstrass Teoremi'nden $(s(n_k, m_k))$ dizisinin

$(s(n_p, m_q))$ gibi yakınsak bir alt dizisi vardır. Böylece hipotezden $\lim_{p,q\to\infty} s(n_p, m_q) = a$ olur. Bunun anlamı $\forall p, q \in \mathbb{N}$ için

$$|s(n_p, m_q) - a| < \varepsilon \tag{7.0.3}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır.$(s(n_p, m_q))$ dizisinin her terimi $(s(n_k, m_k))$ dizisinin de terimi olduğundan (7.0.2) ifadesinin (7.0.3) ile çeliştiğini görürüz ki bu da teoremi ispatlar. $\square$

8. ÇİFT İNDİSLİ SERİLER

Bu bölümde çift indisli serileri tanımlayıp onların yakınsaklığı ve ıraksaklığının tanımlarını vereceğiz. Daha sonra çift indisli ve tekrarlı çift seriler arasındaki ilişkiyi ve tekrarlı çift serilerin eşitliği hakkında bir gerek şartı vereceğiz.

Tanım 8.0.38. *Kompleks sayılar üzerinde bir çift indisli dizi $z : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olsun ve $(s(n,m))$ çift indisli dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$$s(n,m) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} z(i,j) \right).$$

Burada (z,s) çiftine bir çift indisli seri *denir ve bu seri $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ şeklinde gösterilip, kısaca $\sum z(n,m)$ şeklinde yazılır. Herbir $z(n,m)$ sayısı çift indisli serinin bir terimi ve her bir $(s(n,m))$ dizisi bir* kısmi toplam *olarak adlandırılır.*

Şimdi çift indisli seri için yakınsaklık ve ıraksaklık tanımlarını verelim: Bir çift indisli seri için

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = s$$

oluyor ise $\sum z(n,m)$ çift indisli serisi s toplamına yakınsaktır denir. Eğer böyle bir limit yok ise $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ seriye ıraksaktır denir. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m))$ ve $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m))$ serilerine çift indisli serinin tekrarlı serileri adı verilir.

Teorem 8.0.39. *Eğer $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ çift indisli serisi yakınsak ise $\lim_{n,m\to\infty} z(n,m) = 0$ dır.*

İspat. $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ çift indisli serisi bir s sayısına yakınsadığından bu serinin kısmi toplamlar dizisi $(s(n,m))$ dizisi de s'ye yakınsar. Bu taktirde $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n, m \geq N$ için

$$|s(n,m) - s| < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısını bulabiliriz. Böylece $\forall n, m \geq N$ için

$$|z(n,m)| = |s(n,m) + s(n-1,m-1) - s(n,m-1) - s(n-1,m)|$$

$$\leq |s(n,m)-s| + |s(n-1,m-1)-s| + |s(n,m-1)-s| + |s(n-1,m)-s|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Dolayısıyla $\lim_{n,m\to\infty} z(n,m) = 0$ elde edilir. □

Teorem 8.0.40 (Çift indisli seriler için Cauchy Yakınsaklık Kriteri). *Kompleks sayıların $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ çift indisli serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart serinin kısmi toplamlar dizisi $(s(n,m))$ 'in bir Cauchy dizisi olmasıdır.*

İspat. Tanım 8.0.38 ve çift indisli diziler için Cauchy Yakınsaklık Kriteri (Teorem 4.0.22) gereğince ispat açıktır. □

Şimdi ispatı kolaylıkla yapılabilecek olan aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 8.0.41. *Kompleks sayıların $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ çift indisli serisi s_1 değerine yakınsak ve $\sum_{n,m=1}^{\infty} w(n,m)$ çift indisli serisi de s_2 değerine yakınsak ise, bu taktirde*

(a) $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m) + \sum_{n,m=1}^{\infty} w(n,m)$ *çift indisli serisi de s_1+s_2 değerine yakınsar,*

(b) *Herhangi bir $c \in \mathbb{C}$ sayısı için $\sum_{n,m=1}^{\infty} cz(n,m)$ çift indisli seri de cs_1 değerine yakınsar.*

Aşağıdaki sonuç bir çift indisli serinin yakınsaklığı için gerek ve yeter şartı ve yakınsak çift indisli bir serinin tekrarlı serilerinin birbirine eşit olacağını ifade eder. Bu sonucun ispatı ise Teorem 3.0.17 deki gibi yapılabilir.

Teorem 8.0.42. *Kabul edelimki $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ çift indisli serisi yakınsak ve toplamı da s olsun. Bu taktirde*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m)$ *serisi $\forall m \in \mathbb{N}$ için yakınsak ve*

(b) $\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)$ *serisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için yakınsaktır.*

Bu halde tekrarlı toplamlar olarak bu çift indisli seri için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}z(n,m)\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}z(n,m)\right)=s$$

yazabiliriz.

9. NEGATİF OLMAYAN TERİMLİ ÇİFT İNDİSLİ SERİLER

Bu bölümde negatif olmayan terime sahip çift indisli seriler için bazı yakınsaklık testlerini inceleyeceğiz.

Teorem 9.0.43. *Bir negatif olmayan terimli çift indisli* $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ *serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart kısmi toplamlar dizisinden oluşan* $\{s(n,m): \ n,m \in \mathbb{N}\}$ *cümlesinin sınırlı olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki $\forall n,m \in \mathbb{N}$ için $z(n,m) \geq 0$ olacak şekilde $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ çift indisli serisi verilsin. Eğer $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ yakınsak ise bu taktirde kısmi toplamlar dizisi $(s(n,m))$ yakınsaktır ve Teorem 3.0.8 dan dolayı sınırlıdır. Böylece $\{s(n,m): \ n,m \in \mathbb{N}\}$ cümlesi de sınırlıdır. □

Karşıt olarak kabul edelim ki $\{s(n,m): \ n,m \in \mathbb{N}\}$ cümlesi sınırlı olsun. Bu taktirde kısmi toplamlar dizisi $(s(n,m))$ de sınırlı olur. $z(n,m)$ çift indisli serinin terimleri negatif olmadığından $(s(n,m))$ dizininin artan olduğu açıktır. Böylece Monoton Yakınsaklık Teoremi 5.0.24. gereğince $(s(n,m))$ dizisi yakınsak olur ve böylece $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ serisi yakınsak olur.

Sonuç 9.0.44. *Negatif olmayan terimli bir* $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ *çift indisli serisi ya sonlu bir* s *sayısına yakınsar ya da* $\infty'a$ *ıraksar.*

İspat. Çift indisli $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ serisinin kısmi toplamlar cümlesi $S = \{s(n,m): \ n,m \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu taktirde iki durum söz konusu olur: □

1. S cümlesi sınırlıdır, yani $\sup S = s \geq 0$ dır ve böylece Monoton Yakınsaklık Teoremi 5.0.24 veya Teorem 9.0.43 den kısmi toplamlar dizisi $(s(n,m))$ s'ye yakınsar ve $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m) = s$ olur.

2. S cümlesi sınırlı değil ise $\lim_{n,m\to\infty} s\,(n,m) = \infty$ ve böylece çift indisli $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ serisi sonsuza ıraksar.

Örnek 9.0.45. $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 3^m}$ *çift indisli serisi yakınsaktır. Çünkü,* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için kısmi toplamlar*

$$s(n,m) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^m}\right)$$

olup, $\sum_n \frac{1}{2^n}$ *ve* $\sum_m \frac{1}{3^m}$ *serileri yakınsak olduğundan öyle bir* $M > 0$ *sayısını* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için*

$$s(n,m) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^m}\right) \leq M$$

olacak şekilde bulabiliriz. Böylece $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için* $0 \leq s(n,m) \leq M$ *olur. Böylece* $S = \{s(n,m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ *cümlesi sınırlıdır ve Teorem 9.0.43 den dolayı verilen* $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 3^m}$ *çift indisli serisi yakınsak olur.*

Teorem 9.0.46 (Karşılaştırma Testi). *Kabul edelim ki* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için* $0 \leq u(n,m) \leq v(n,m)$ *olsun. Bu taktirde*

(a) *Eğer* $\sum_{n,m=1}^{\infty} v(n,m)$ *çift indisli serisi yakınsak ise* $\sum_{n,m=1}^{\infty} u(n,m)$ *çift indisli serisi yakınsak,*

(b) *Eğer* $\sum_{n,m=1}^{\infty} u(n,m)$ *çift indisli serisi ıraksak ise* $\sum_{n,m=1}^{\infty} v(n,m)$ *çift indisli serisi ıraksaktır.*

İspat. **(a)** Kabul edelim ki $\sum_{n,m=1}^{\infty} v(n,m)$ çift indisli serisi yakınsak ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer $(s^{\imath}(n,m))$ dizisi $\sum_{n,m=1}^{\infty} v(n,m)$ çift indisli serisinin kısmi toplamlar dizisi ise, $\forall p \geq n \geq N$ ve $\forall q \geq m \geq N$ için

$$|s^{\imath}(p,q) - s^{\imath}(n,m)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Böylece $(s(n,m))$ dizisi $\sum_{n,m=1}^{\infty} u(n,m)$ çift indisli serisinin kısmi toplamlar dizisini göstermek üzere $\forall p \geq n \geq N$ ve $\forall q \geq m \geq N$ için

$$|s(p,q) - s(n,m)| \leq |s^{\imath}(p,q) - s^{\imath}(n,m)| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Bu ise bize $\sum_{n,m=1}^{\infty} u(n,m)$ çift indisli serisinin yakınsaklığını verir.

(b) Kabul edelim ki $\sum_{n,m=1}^{\infty} u(n,m)$ çift indisli serisi ıraksak olsun. Sonuç 9.0.44 den $\lim_{n,m\to\infty} s\,(n,m) = \infty$ olduğunu biliyoruz. Hipotezden dolayı $\forall n,m \in \mathbb{N}$ için $s(n,m) \leq s^{\imath}\,(n,m)$ olduğundan $\lim_{n,m\to\infty} s^{\imath}\,(n,m) = \infty$ elde edilir. Böylece $\sum_{n,m=1}^{\infty} v(n,m)$ çift indisli serisi ıraksaktır. $\square$

Örnek 9.0.47. *$\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n 3^m}$ çift indisli serisi yakınsaktır. Çünkü, $\forall n,m \in \mathbb{N}$ için $\sin \frac{1}{2^n 3^m} \leq \frac{1}{2^n 3^m}$ olup, Örnek 9.0.45 kullanılarak $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 3^m}$ çift indisli serisi yakınsak olduğundan ve Karşılaştırma Testi gereğince $\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n 3^m}$ çift indisli serisi yakınsak olur.*

Şimdi aşağıda ispatlayacağımız teoremi ileride kullanacağız.

Teorem 9.0.48. *$\forall n,m \in \mathbb{N}$ için $0 \leq a\,(n,m) < \infty$ olsun ve $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ birebir bir dönüşüm olsun. Bu taktirde*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a(n,m)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a\,(\phi\,(k))$ *ve*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a(n,m)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n,m)\right)$ *dir.*

İspat. **(a)** İlk olarak herhangi bir α reel sayısını (a) nın sağ tarafından küçük olacak şekilde seçelim. $\sum_{k=1}^{k_o} a\,(\phi\,(k)) > \alpha$ olacak şekilde bir $k_o \in \mathbb{N}$ sayısını seçelim ve

$$\{\phi\,(k) : \; 1 \leq k \leq k_o\} \subset \{(n,m) : \; 1 \leq n \leq n_o, 1 \leq m \leq m_o\}$$

olacak şekilde n_o, m_o doğal sayılarını seçelim. Bu taktirde

$$\alpha < \sum_{k=1}^{k_o} a\,(\phi\,(k)) \leq \sum_{n=1}^{n_o} \left(\sum_{m=1}^{m_o} a\,(n,m)\right) \leq \sum_{n=1}^{n_o} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a\,(n,m)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a\,(n,m)\right)$$

yazabiliriz. α keyfi olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\,(\phi\,(k)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a\,(n,m)\right) \tag{9.0.1}$$

yazabiliriz. Şimdi β reel sayısının (a) ifadesinin sol tarafından küçük olacak şekilde seçelim ve

$$\beta < \sum_{n=1}^{n_1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a\left(n,m\right) \right)$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısını seçelim. n_1 üzerinden tümevarım uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{n_o} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a\left(n,m\right) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a\left(n,m\right) \right)$$

elde edilir ve buradan

$$\beta < \sum_{m=1}^{m_1} \left(\sum_{m=1}^{n_1} a\left(n,m\right) \right) \tag{9.0.2}$$

olacak şekilde $m_1 \in \mathbb{N}$ sayısını seçelim. Şimdi

$$\left\{(n,m) : \ 1 \leq n \leq n_1, 1 \leq m \leq m_1 \right\} \subset \left\{\phi\left(k\right) : \ 1 \leq k \leq k_1 \right\}$$

olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ sayısını seçelim. Böylece

$$\sum_{n=1}^{n_1} \left(\sum_{m=1}^{m_1} a\left(n,m\right) \right) \leq \sum_{k=1}^{k_1} a\left(\phi\left(k\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a\left(\phi\left(k\right)\right) \tag{9.0.3}$$

elde edilir. (9.0.2) ve (9.0.3) birleştirilirse

$$\beta < \sum_{k=1}^{\infty} a\left(\phi\left(k\right)\right) \tag{9.0.4}$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak (9.0.4) ve β sayısının keyfi olması kullanılarak (9.0.1) eşitsizliğinin tersi ispatlanır ve böylece (a) elde edilir.

(b) Bu ifade aşağıdaki eşitlik elde edildiğinde (a) ifadesinden elde edilir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a\left(n,m\right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a\left(\phi\left(k\right)\right). \tag{9.0.5}$$

Bu ifadeyi elde etmek için ilk olarak

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a\left(n,m\right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a\left(n,m\right) \right) \tag{9.0.6}$$

ve

$$b\left(n,m\right) = a\left(n,m\right) \tag{9.0.7}$$

yazalım ve

$$\phi(k) = (m,n) \text{ } ise \text{ } \psi(k) = (n,m) \text{ } yazarak \text{ } b(\psi(k)) = a(\phi(k)) \tag{9.0.8}$$

elde edelim. O halde $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ birebir bir dönüşümdür. Böylece bu teoremin (a) kısmını $b(n,m)$ ve ψ fonksiyonuna uygulayarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} b(n,m)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b(\psi(k)) \tag{9.0.9}$$

elde edilir. Böylece (9.0.6), (9.0.7) ve (9.0.8), (9.0.5) birlikte ele alınırsa (9.0.9) ifadesi elde edilir. □

Uyarı 9.0.49. *Teorem 9.0.48 nın ifadesinde eğer $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $a(n,m) \geq 0$ hipotezi yoksa teorem geçersiz olur. Örneğin*

$$a(n,m) = \begin{cases} 1, \ n = m+1, \ m, 1, 2, 3, ... \\ -1, \ n = m-1, \ m, 1, 2, 3, ... \\ 0, \ diğer \ hallerde \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a(n,m)\right) = 1 \ ve \ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n,m)\right) = -1$$

olup, Teorem 9.0.48 daki gibi herhangi bir ϕ dönüşümü için $\sum_{k=1}^{\infty} a(\phi(k))$ serisinin terimleri sıfıra gitmediğinden seri ıraksar.

Tekrarlı serilerin eşitliği için gerek şartları gelecek bölümde işleyeceğiz.

10. ÇİFT SERİLERİN MUTLAK YAKINSAKLIĞI

Tanım 10.0.50. *Eğer kompleks sayıların* $\sum_{n,m=1}^{\infty} |z\,(n,m)|$ *çift indisli serisi yakınsak ise* $\sum_{n,m=1}^{\infty} z\,(n,m)$ *çift indisli serisine mutlak yakınsaktır denir.* $\sum_{n=1}^{\infty} |\sum_{m=1}^{\infty} z\,(n,m)|$ *serisi yakınsak ise* $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} z\,(n,m))$ *çift indisli serisine mutlak yakınsaktır diyeceğiz.*

Teorem 10.0.51. *Her mutlak yakınsak çift indisli seri yakınsaktır.*

İspat. Kabul edelim ki $\sum_{n,m=1}^{\infty} z\,(n,m)$ çift indisli serisi mutlak yakınsak olsun. Bu taktirde $\sum_{n,m=1}^{\infty} |z\,(n,m)|$ çift indisli seri yakınsaktır ve böylece Cauchy Yakınsaklık Kriteri 8.0.40 gereğince bu serinin kısmı toplamlar dizisi $(s^{\imath}(n,m))$ bir Cauchy dizisidir. O halde $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall p \geq n \geq N$ ve $\forall q \geq m \geq N$ için

$$|s^{\imath}(p,q) - s^{\imath}(n,m)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Eğer $\sum_{n,m=1}^{\infty} z\,(n,m)$ çift indisli serinin kısmi toplamlar dizisi $(s(n,m))$ ise$\forall p \geq n \geq N$ ve $\forall q \geq m \geq N$ için

$$|s(p,q) - s(n,m)| \leq |s^{\imath}(p,q) - s^{\imath}(n,m)| < \varepsilon$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $(s(n,m))$ dizisi Cauchy dizisi olduğundan Cauchy Yakınsaklık Kriteri 8.0.40 gereğince $\sum_{n,m=1}^{\infty} z\,(n,m)$ çift indisli serisi yakınsaktır. □

Aşağıda vereceğimiz teoremde ölçüm teorisinden iyi bilinen ünlü Fubini Teoremi'ne benzer şekilde genel düzenlemeler yapılırsa mutlak yakınsaklığın varlığı toplamları değiştirmez. Hatta kompleks sayılarda çift indisli serilerin tekrarlı serinin eşitliği için gerek şartı sağlar.

Teorem 10.0.52. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için* $z\,(n,m) \in \mathbb{C}$ *olsun ve* $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *birebir bir dönüşüm olsun. Bu taktirde herhangi üç toplam*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|z(n,m)|\right)$, $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|z(n,m)|\right)$ *ve* $\sum_{k=1}^{\infty}|z(\phi(k))|$ *sonludur ve böylece*

(b) $\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m), (n \in \mathbb{N})$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m), (m \in \mathbb{N})$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)\right)$, $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m)\right)$ *ve* $\sum_{k=1}^{\infty} z(\phi(k))$ *serileri mutlak yakınsak ve bu serilerin hepsi aynı toplama sahiptir.*

İspat. Teorem 9.0.48 gereğince (a) daki üç serinin hepsi aynı toplama sahiptir ve hipotezden bu seriler sonludur. Negatif olmayan terimli serilerin sonsuza eşit hiçbir terimi olmadığından (b) ve (c) deki seriler mutlak yakınsak ve böylece yakınsak olurlar. Şimdi $b_n = \sum_{m=1}^{\infty} z(n,m), (n \in \mathbb{N})$ diyelim. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|b_n| = \lim_{q\to\infty}\left|\sum_{m=1}^{q} z(n,m)\right| \le \lim_{q\to\infty}\sum_{m=1}^{q}|z(n,m)| = \sum_{m=1}^{\infty}|z(n,m)|$$

olduğundan Karşılaştırma Testi 9.0.46 gereğince

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|z(n,m)|\right) < \infty$$

olur ve böylece (d) deki birinci seriler mutlak yakınsaktır. Benzer şekilde (d) deki ikinci seriler de mutlak yakınsaktır ve Teorem 9.0.48 gereğince üçüncü serilerde mutlak yakınsak olur. Şimdi $\sum_{k=1}^{\infty} z(\phi(k)) = s$ diyelim. Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$ yani (d) deki birinci ve üçüncü seriler aynı toplama sahip olduğunu gösterelim: İkinci ve üçüncü serilerde aynı toplama sahip olduğu benzer şekilde gösterilebilir. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $k_o \in \mathbb{N}$ sayısını

$$\sum_{k=k_o+1}^{\infty}|z(\phi(k))| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.0.1}$$

ve

$$\left|s - \sum_{k=1}^{k_o} z(\phi(k))\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.0.2}$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $p_o, q_o \in \mathbb{N}$ sayılarını

$$\{\phi(k): \ 1 \leq k \leq k_o\} \subset \{(n,m): \ 1 \leq n \leq p_o, 1 \leq m \leq q_o\}$$

olacak şekilde seçelim. Burada $p \geq p_o$ ve $q \geq q_o$ olduğunda $\sum_{k=1}^{k_o} z(\phi(k))$ sonlu toplamının her terimi $\sum_{n=1}^{p}(\sum_{m=1}^{q} z(n,m))$ sonlu toplamında bir $z(n,m)$ terimi gibi görünür ve böylece son toplamdan (10.0.1) deki toplamı çıkarırsak

$$\left|\sum_{n=1}^{p}\left(\sum_{m=1}^{q} z(n,m)\right) - \sum_{k=1}^{k_o} z(\phi(k))\right| \leq \sum_{k=k_o+1}^{\infty} |z(\phi(k))| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.0.3}$$

elde edilir. Şimdi

$$p \geq p_o \Rightarrow \left|s - \sum_{n=1}^{p} b_n\right| < \varepsilon \tag{10.0.4}$$

olduğunu iddia ediyoruz. (10.0.4) ifadesi sağlanırsa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$ olur ve ispat tamamlanır. Bunu gösterebilmek için $p \geq p_o$ sabit olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{m=1}^{q} z(n,m) = b_n$$

olduğundan tümevarım metodu ile

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{n=1}^{p}\left(\sum_{m=1}^{q} z(n,m)\right) = \sum_{n=1}^{p} b_n$$

olur. Bu taktirde $q \geq q_o$ seçerek

$$\left|\sum_{n=1}^{p}\left(\sum_{m=1}^{q} z(n,m)\right) - \sum_{n=1}^{p} b_n\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.0.5}$$

elde ederiz. (10.0.2), (10.0.3) ve (10.0.5) birleştirilerek

$$\left|s - \sum_{n=1}^{p} b_n\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

elde edilir. $p \geq p_o$ keyfi olduğundan (10.0.4) sağlanmış olur. □

Uyarı 10.0.53. ***(i)*** *Önceki teoremdeki notasyonlarda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |z(n,m)|\right) \ \textit{veya} \ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |z(n,m)|\right)$$

serilerinin sonlu olma hipotezinin zayıflatılmasının gerekliliği

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)\right) \; veya \; \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m)\right)$$

ile verilen tekrarlı serilerin mutlak yakınsaklığı ile zayıflatılamaz. Örneğin Uyarı 9.0.49. örneğinde (b) ve (c) deki tüm seriler ve (d) deki ilk iki serinin (Teorem 10.0.52) mutlak yakınsak olduğunu gösterir fakat (d) deki ilk iki seri yani tekrarlı seriler aynı toplama sahip değildir.

(ii) *Teorem 10.0.52.'ün hipotezi doğru olmasa bile*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m)\right)$$

eşitliği vardır. Örneğin $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için* $z(n,m) = \frac{(-1)^{n+m}}{nm}$ *alalım.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{nm}\right) = (\log 2)^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{nm}\right)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 10.0.54. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için* $z(n,m) \in \mathbb{C}$ *olsun ve* $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *birebir ve üzerine bir dönüşüm olsun. Bu taktirde*

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} z(\phi(k))$ *serisi mutlak yakınsaktır ancak ve ancak* $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ *serisi mutlak yakınsaktır.*

(b) $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ *serisi s toplamına mutlak yakınsak ise bu taktirde* $\sum_{k=1}^{\infty} z(\phi(k)) = s$ *olur.*

İspat. (a) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $T_k = |z(\phi(1))| + |z(\phi(2))| + ... + |z(\phi(k))|$ ve $\forall p, q \in \mathbb{N}$ için $S(p,q) = \sum_{n=1}^{p}\left(\sum_{m=1}^{q} |z(n,m)|\right)$ şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $T_k \leq S(p,q)$ olacak şekilde bir $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çifti vardır ve tersine olarak $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sayı çifti için $S(p,q) \leq T_r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu eşitsizlikler $\sum_{k=1}^{\infty} |z(\phi(k))|$ serisinin kısmı toplamlar dizisinin sınırlı bir cümlesine sahip olduğunu gösterir. Böylece Teorem 9.0.43 ile birlikte (a) sağlanır.

(b) $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ serisinin s toplamına mutlak yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu taktirde (a) dan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} z(\phi(k))$ serisi $s^{\imath}$ toplamına mutlak yakınsaktır. (b) yi ispatlamak için $s = s^{\imath}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunu gösterebilmek için $T = \lim_{p,q\to\infty} S(p,q)$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $N \in \mathbb{N}$ sayısını $\forall p, q > N$ için

$$0 \leq T - S(p,q) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.0.6}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$t_k = \sum_{n=1}^{k} z(\phi(n)), \ S(p,q) = \sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{q} z(n,m)$$

yazalım. $1 \leq n \leq N+1$ ve $1 \leq m \leq N+1$ için M sayısını öyle seçelim ki t_M, $z(n,m)$ biçimindeki tüm terimleri içersin. Bu taktirde $t_M - S(N+1,N+1)$ ifadesi ya $n > N$ yada $m > N$ için terimlerin toplamıdır. Buradan eğer $n \geq M$ ise (10.0.6) den

$$|t_n - S(N+1,N+1)| \leq T - S(N+1,N+1) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.0.7}$$

ve

$$|s - S(N+1,N+1)| \leq T - S(N+1,N+1) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.0.8}$$

olur. Böylece (10.0.7) ve (10.0.8) den dolayı $\forall n \geq M$ için

$$|t_n - s| < \varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ elde edilir. Böylece istenildiği gibi $s^{\imath} = \lim_{n\to\infty} t_n = s$ elde edilmiş olur. □

Teorem 10.0.54 ve Teorem 10.0.56 birlikte düşünülürse aşağıdaki temel sonuca ulaşılır ki bu bize kompleks sayılarda çift indisli serilerin yakınsaklığı için tekrarlı serilerinin eşit olması için gerek şarttır.

Teorem 10.0.55. *$\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $z(n,m) \in \mathbb{C}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|z(n,m)|\right)$, $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|z(n,m)|\right)$ ve $\sum_{n,m=1}^{\infty}|z(n,m)|$ serileri yakınsak ise bu taktirde aşağıdaki serilerin hepsi mutlak yakınsaktır*

(a) $\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m), (n \in \mathbb{N})$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m), (m \in \mathbb{N})$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} z(n,m)\right)$, $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z(n,m)\right)$ *ve* $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ *serilerinin hepsi aynı toplama sahiptir.*

Bu teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki serilerin çoklu çarpımı ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 10.0.56. *Kompleks sayıların sırasıyla a ve b toplamlarına mutlak yakınsak iki serisi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ olsun. $z : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu $z(n,m) = a_n b_m$ şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m)$ çift indisli serisi mutlak yakınsaktır ve $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m) = ab$ dir.*

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|z(n,m)|\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|\right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right) < \infty$ olduğundan Teorem 10.0.55 gereğince seri mutlak yakınsaktır ve $\sum_{n,m=1}^{\infty} z(n,m) = ab$ olduğu kolayca görülür. □

11. KAYNAKLAR

[1] T. M. Apostol, Mathematical Analysis , Second edition, Addison Wesley,1974.

[2] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Secondedition, Wiley and Sons, 1992.

[3] W. W. L. Chen, Fundamentals of Analysis, Published by W. W. L. Chen viaInternet, 2003.

[4] A. Garcia-Martinez, Webbed spaces, double sequences, and the Mackey convergence condition, Internat. J. Math. and Math. Sci., Vol 22, No. 3(1999), 521-524.

[5] S. L. Gupta and N. Rani, Principles of Real Analysis, Vikas PuplishingHouse, New Delhi, 1998.

[6] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Third edition, McGraw-Hill, 1976.31

[7] K. R. Stromberg, An Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth,1981.32

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe ELDEM 12.05.1987 tarihinde Adıyaman'da doğdu. Adıyaman Atatürk Lisesi (Y.D.A)'ni bitirdikten sonra Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. 2012 yılında Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programını bitirdi. Temel ilgi alanları Analiz ve Fonksiyonlar Teorisidir.