T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BULANIK CEBİRSEL YAPILARA YENİ BİR BAKIŞ

Ahmet KÖŞGER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN
Eylül 2012

*Ahmet KÖŞGER* tarafından hazırlanan "*Bulanık Cebirsel Yapılara Yeni Bir Bakış*" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN

Jüri Üyeleri :

| | | |
|---|---|---|
| Prof. Dr. Sadık KELEŞ | | ________________ |
| (İnönü Üniversitesi) | Matematik Anabilim Dalı | |
| Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK | | ________________ |
| (Adıyaman Üniversitesi) | Matematik Anabilim Dalı | |
| Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN | | ________________ |
| (Adıyaman Üniversitesi) | Matematik Anabilim Dalı | |

**Yukarıdaki sonucu onaylarım.** ..../..../........

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN
Enstitü Müdürü

# ÖZET


Yüksek Lisans Tezi

BULANIK CEBİRSEL YAPILARA YENİ BİR BAKIŞ


Ahmet KÖŞGER

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı


62+v sayfa

2012

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN



Bu tezin birinci bölümünde, tez konusu ile ilgili literatürde geçen kaynaklar hakkında bazı bilgilendirmeler yapılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılan kavramların tanımları ve bu kavramlar ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bulanık ikili işleme göre belirlenen bulanık gruplar hakkında bazı temel tanım ve sonuçlardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, önceki bölümde verilen yeni tür bulanık grup kavramı kullanılarak tanımlanan bulanık halkanın yeni bir türü ile ilgili temel tanım ve özelliklerden söz edilmiştir.

Beşinci bölümde, bulanık ikili işlem, yeni tür bulanık grup ve yeni tür bulanık halka ile ilgili bir örnek verilmiştir. Ayrıca, yeni tür iki bulanık halka arasındaki homomorfizma teoremlerinden bahsedilmiştir.



**ANAHTAR KELİMELER:** Bulanık ikili işlem, bulanık grup, bölüm bulanık grup, bulanık halka, bulanık ideal, bölüm bulanık halka, bulanık homomorfizma.

# ABSTRACT


M. Sc. Thesis

A NEW VIEW OF FUZZY ALGEBRAIC STRUCTURES

Ahmet KÖŞGER

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

62+v pages

2012

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN



In the first chapter of this thesis, some informings were done about references mentioned in literature related to this thesis.

In the second chapter, the definitions of the concepts used in other chapters and some features about these concepts were given.

In the third chapter, we presented some basic definition and results of a new kind of fuzzy group determined according to fuzzy binary operation.

In the fourth chapter, it was mentioned about the basic definition and the features of a new kind of fuzzy ring defined by using a new kind of fuzzy group given in previous chapter.

In the last chapter, we gave an example of fuzzy binary operation, a new kind of fuzzy group and a new kind of fuzzy ring. Also, we presented homomorphism theorems between two new kind fuzzy rings.



**KEY WORDS:** Fuzzy binary operation, fuzzy group, factor fuzzy group, fuzzy ring, fuzzy ideal, factor fuzzy ring, fuzzy homomorphism.

# TEŞEKKÜR

Tez konusunu belirleyen ve bu tezi hazırlarken bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a ve bu çalışmanın ortaya çıkmasında sıkıntılarımızı gidermeye çalışan ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e minnet ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca akademik ve teknik konularda özverili bir biçimde yardımcı olan Sayın Arş. Gör. Ebubekir İNAN'a teşekkürlerimi sunarım.

*Ahmet KÖŞGER*

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| | | |
|---|---|---|
| $FP(G)$ | : | *G grubunun bulanık kuvvet kümesi,* |
| $F(G)$ | : | *G grubunun tüm bulanık alt gruplarının kümesi,* |
| $NF(G)$ | : | *G grubunun tüm bulanık normal alt gruplarının kümesi,* |
| $C(G)$ | : | *G grubunun merkezi,* |
| $G/H$ | : | *Bölüm bulanık grubu,* |
| $[aG]$ | : | *Kalan sınıfı,* |
| $Kerf$ | : | *f nin çekirdeği,* |
| $Imf$ | : | *f nin değer kümesi* |
| $F(H)$ | : | *H halkasının tüm bulanık alt halkalarının kümesi,* |
| $R$ | : | *G grubunda bulanık ikili işlem,* |
| $S$ | : | *H halkasında bulanık ikili işlem,* |
| $I$ | : | *İdeal,* |
| $e_\circ$ | : | *Halkanın sıfırı,* |
| $e_*$ | : | *Halkanın birim elemanı,* |
| $\triangle$ | : | *İndis kümesi,* |
| $\sim$ | : | *Denklik bağıntısı,* |
| $\cong$ | : | *İzomorf olma.* |

# İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

Günümüz matematik dünyasında önemli ve popüler bir konu olan bulanık (fuzzy) mantığı, ilk defa 1965 yılında *L. A. Zadeh* [15] tarafından verilen bulanık küme tanımıyla ortaya çıkmış ve daha sonra birçok araştırmacı bu konu üzerinde çalışmaya başlamıştır. Bunun sonucu olarak matematikte yeni çalışma alanları oluşmuş, yaşantımız içinde var olan belirsizlik kavramı matematiksel olarak incelenmeye başlanmış ve bilgisayar mühendisliği, elektrik ve elektronik mühendisliği gibi teknik alanlarda yararlı uygulamalar bulmuştur.

1971 yılında *A. Rosenfeld* [11] herhangi bir grubun bulanık alt grubu kavramını tanımladıktan sonra pek çok matematikçi cebir ile ilgili bazı kavramları ve sonuçları bulanık küme teorisine aktarmış ve bulanık cebir teorisinin gelişmesine katkıda bulunmuştur. *W. Liu* [6] da, herhangi bir halkanın bulanık alt halkası kavramını tanımlamış ve daha sonra *Z. Yue* [14], *T. K. Mukherjee* ve *M. K. Sen* [9] ve *V. N. Dixit*, *R. Kumar* ve *N. Ajmal* [5] gibi matematikçiler halkalar teorisindeki sonuçlara paralel olarak benzer sonuçlar elde etmiştir.

Bulanık alt grubu ve bulanık alt halkayı tanımlayan matematikçiler, klasik anlamda herhangi bir grubun veya herhangi bir halkanın alt küme kavramının bulanık ve ikili işlemin bulanık olmadığını kabul etmiştir. Diğer taraftan bazı matematikçiler de, bulanık anlamda küme kavramının bulanık olmadığı ve ikili işlemin de bulanık olduğu yaklaşımını benimsemiştir. Bu ikinci yaklaşımla uyumlu olarak, *M. Demirci* [3, 4] bulanık ikili işlemi ve bulanık eşitlik kavramını kullanarak smooth (düzgün) grup kavramını tanımlamıştır.

2004 yılında *X. Yuan* ve *E. S. Lee* [13] bulanık ikili işleme dayalı bulanık grubun yeni bir türünü tanımlamıştır. Daha sonra 2007 yılında *H. Aktaş* ve *N. Çağman* [2], *X. Yuan* ve *E. S. Lee*'nin bulanık ikili işleme göre belirlenen yeni tür bulanık grup tanımını kullanarak bulanık halkanın yeni bir türünü tanımlamış ve yeni tür bulanık halka ile ilgili temel sonuçlara ulaşmıştır. Ayrıca, yakın bir zamanda *M. Uçkun* [12] daha önce tanımlanan yeni tür bulanık ikili işlem, yeni tür bulanık grup ve yeni tür bulanık halka hakkında örnek vermiş ve yeni tür iki bulanık halka arasındaki homomorfizma teoremlerini incelemiştir.

Bu tezin amacı, yukarıda belirtilen çalışmaları ve kaynaklar kısmında verilen diğer çalışmaları dikkate alarak, bulanık cebirsel yapılara yeni bir bakış açısıyla bakmak ve böylece benzer konularda matematik dünyasında önceden yapılmış çalışmaların daha iyi anlaşılmasını sağlamaktır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde geçen tanımlar ve bu kavramlar ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

**Tanım 2.0.1.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere her $x \in X$ için $\mu(x) = t \in [0,\ 1]$ olacak biçimde $\mu : X \to [0,1]$ fonksiyonuna $X$ in bir bulanık (fuzzy) alt kümesi denir.*

**Tanım 2.0.2.** *$X$ in tüm bulanık alt kümelerinin kümesine $X$ in bulanık kuvvet kümesi denir ve $FP(X)$ ile gösterilir.*

**Tanım 2.0.3.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme ve $\mu \in FP(X)$ olsun. $\{\mu(x) \mid x \in X\}$ kümesine $\mu$ nün görüntüsü denir.*

**Tanım 2.0.4.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme ve $\mu \in FP(X)$ olsun. Bu durumda*

$$\mu^* = \{x \in X \mid \mu(x) > 0\}$$

*kümesine $\mu$ nün dayanağı (support) denir.*

**Uyarı 2.0.5.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme ve $\mu \in FP(X)$ olsun. Bu durumda $\mu(x) = \mu(e)$ koşulunu sağlayan $x \in X$ elemanlarının kümesi $\mu_*$ ile gösterilir, yani*

$$\mu_* = \{x \in X \mid \mu(x) = \mu(e)\}$$

*dir.*

**Tanım 2.0.6.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme ve $\mu$, $\nu$ de $X$ in bulanık kümeleri olsun. Bu durumda*

(*i*) *Her $x \in X$ için $\mu = \nu :\Leftrightarrow \mu(x) = \nu(x)$ dir.*

(*ii*) *Her $x \in X$ için $\mu \subseteq \nu :\Leftrightarrow \mu(x) \leq \nu(x)$ dir.*

(iii) *Her* $x \in X$ *için* $(\mu \cup \nu)(x) = \max\{\mu(x),\, \nu(x)\}$ *biçiminde tanımlanan* $\mu \cup \nu$ *de* $X$ *in bir bulanık kümesidir.*

(iv) *Her* $x \in X$ *için* $(\mu \cap \nu)(x) = \min\{\mu(x),\, \nu(x)\}$ *biçiminde tanımlanan* $\mu \cap \nu$ *de* $X$ *in bir bulanık kümesidir.*

(v) *Her* $x \in X$ *için* $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ *biçiminde* $\mu^c$ *(*$\mu$ *nün tümleyeni) de* $X$ *in bir bulanık kümesidir.*

**Tanım 2.0.7.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere*

$$\mu(y) = \begin{cases} t \in (0,1] & , \quad y = x \text{ ise} \\ 0 & , \quad y \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

*şeklinde tanımlanan* $\mu$ *bulanık kümesine* $X$ *in bir bulanık noktası denir ve* $x_t$ *ile gösterilir.*

**Tanım 2.0.8.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme ve* $\mu$*,* $X$ *in bir bulanık kümesi olsun. Bu durumda* $t \in [0,\, 1]$ *için*

$$U(\mu; t) = \mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$$

*kümesine* $X$ *in* $\mu$ *ye göre bir level (seviye) alt kümesi denir.*

**Tanım 2.0.9.** *$X$ ve $Y$ boştan farklı herhangi iki küme;* $\mu$*,* $X$ *in bir bulanık kümesi ve* $\nu$ *de* $Y$ *nin bir bulanık kümesi olsun. Bu durumda her* $(x,\, y) \in X \times Y$ *için*

$$(\mu \times \nu)(x,\; y) = \min\{\mu(x),\; \nu(y)\}$$

*biçiminde tanımlanan* $\mu \times \nu : X \times Y \to [0,1]$ *bulanık kümesine* $\mu$ *ile* $\nu$ *nün kartezyen çarpımı denir. Ayrıca* $X \times X$ *in bir bulanık kümesine* $X$ *üzerinde bir bulanık bağıntı denir ve* $R_\mu$ *(veya kısaca* $R$*) ile gösterilir.*

**Tanım 2.0.10.** *$X$ ve $Y$ boştan farklı herhangi iki küme ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\nu$, $Y$ nin bir bulanık kümesi ise her $x \in X$ için $\varphi^{-1}(\nu)(x) = \nu(\varphi(x))$ biçiminde tanımlanan $\varphi^{-1}(\nu)$ bulanık kümesine $\nu$ nün $\varphi$ altındaki ters görüntüsü denir.*

**Tanım 2.0.11.** *$X$ ve $Y$ boştan farklı iki küme ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\mu$, $X$ in bir bulanık kümesi ise $Y$ nin*

$$\varphi(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\varphi(z)=y} \mu(z) & , \ \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \ \textit{ise} \\ 0 & , \ \varphi^{-1}(y) = \emptyset \ \textit{ise} \end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan $\varphi(\mu)$ bulanık kümesine $\mu$ nün $\varphi$ altındaki görüntüsü denir.*

**Tanım 2.0.12.** *$X$ boştan farklı herhangi bir küme ve $R$, $X$ üzerinde bir bulanık bağıntı olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için*

(i) $R(x, x) = 1$ *(yansıma özelliği),*

(ii) $R(x, y) = R(y, x)$ *(simetri özelliği),*

(iii) $R(x, y) \geq \sup\limits_{z \in X} \min\{R(x, z), R(z, y)\}$ *(geçişme özelliği)*

*koşulları sağlanırsa $R$ ye $X$ üzerinde bir bulanık denklik bağıntısı denir. Ayrıca $a \in X$ olmak üzere her $x \in X$ için $R[a](x) = R(a, x)$ gösterimi kullanılır ve $R[a]$ ya $R$ bulanık denklik bağıntısına göre $a$ elemanı tarafından temsil edilen bulanık sınıfı denir. $X$ in $R$ bulanık denklik bağıntısına göre bütün bulanık sınıflarından oluşan küme $X/R = \{R[a] \mid a \in X\}$ ile gösterilir.*

**Tanım 2.0.13.** *$G$ bir grup ve $\mu$, $G$ nin bir bulanık kümesi olmak üzere her $x, y \in G$ için*

(i) $\mu(x \cdot y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

$(ii)$ $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

*koşulları sağlanıyorsa* $\mu$ *ye* $G$ *nin bir bulanık alt grubu denir.* $G$ *nin tüm bulanık alt gruplarının kümesi* $F(G)$ *ile gösterilir.*

**Uyarı 2.0.14.** *$G$ bir grup ve $\mu$, $G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. Bu durumda $\mu^*$ ile $\mu_*$, $G$ nin birer alt grubudur.*

**Tanım 2.0.15.** *$G$ bir grup ve $\mu$, $G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. $\mu$, $G$ nin bir değişmeli bulanık alt kümesi ise $\mu$ ye $G$ nin normal bulanık alt grubu denir. $G$ nin tüm normal bulanık alt gruplarının kümesi $NF(G)$ ile gösterilir.*

**Tanım 2.0.16.** *$G$ bir grup ve $\mu$, $G$ nin bir normal bulanık alt grubu olsun. Bu durumda*

$$G/\mu = \{x\mu \mid x \in G\}$$

*grubuna, $G$ nin $\mu$ normal bulanık alt grubuna göre belirlenen bölüm grubu denir.*

**Tanım 2.0.17.** *$H$ bir halka ve $\mu$, $H$ nin bir bulanık kümesi olmak üzere her $x$, $y \in H$ için*

$(i)$ $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

$(ii)$ $\mu(x \cdot y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

*koşulları sağlanıyorsa $\mu$ ye $H$ nin bir bulanık alt halkası denir.*

**Tanım 2.0.18.** *$H$ bir halka ve $\mu$, $H$ nin bir bulanık kümesi olmak üzere her $x$, $y \in H$ için*

$(i)$ $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

$(ii)$ $\mu(x \cdot y) \geq \mu(y)$ ( $\mu(x \cdot y) \geq \mu(x)$ )

*koşulları sağlanıyorsa $\mu$ ye $H$ nin bir bulanık sol (sağ) ideali denir. Ayrıca $\mu$, $H$ nin hem bulanık sol hem de bulanık sağ ideali ise $\mu$ ye $H$ nin bir bulanık ideali denir.*

Yukarıdaki tanımı verilen bulanık ideal kavramı aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

**Tanım 2.0.19.** *$H$ bir halka ve $\mu$, $H$ nin bir bulanık kümesi olmak üzere her $x$, $y \in H$ için*

(*i*) $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(*ii*) $\mu(x \cdot y) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$

*koşulları sağlanıyorsa $\mu$ ye $H$ nin bir bulanık ideali denir.*

**Tanım 2.0.20.** *$X$ ve $Y$ boştan farklı iki küme ve $f$, $X \times Y$ nin bir bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa $f$ ye $X$ ten $Y$ ye bir bulanık fonksiyon denir:*

(*i*) *Her $x \in X$ için $f(x, y) > \theta$ olacak biçimde $\exists y \in Y$ vardır.*

(*ii*) *Her $x \in X$ ve her $y_1$, $y_2 \in Y$ için $f(x, y_1) > \theta$ ve $f(x, y_2) > \theta$ ise $y_1 = y_2$ dir.*

**Tanım 2.0.21.** *$G$ bir grup ve $\mu$, $G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. Bu durumda $a \in G$ için*

$$(a\mu)(z) = \bigvee_{x \in \mu} R(a, x, z) \quad , \quad (\mu a)(z) = \bigvee_{x \in \mu} R(x,\ a,\ z)$$

*şeklinde tanımlanan $a\mu$ ve $\mu a$ bulanık alt kümelerine sırasıyla $\mu$ nün $a$ ya göre sol ve sağ kalan sınıfı denir.*

# 3. BULANIK GRUP

## 3.1 Bulanık İkili İşlem ve Bulanık Grubun Yeni Bir Türü

2004 yılında Yuan ve Lee [13] te, bulanık ikili işleme dayalı yeni bir tür bulanık grup kavramını tanımlamış ve bu kavram ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu bölümde Yuan ve Lee'nin tanımladığı bulanık grup tanımı ve bazı temel özellikler verilmiştir. Bundan sonra $\theta$ parametresinin seçimi $\theta \in [0, 1)$ olarak dikkate alınacaktır.

**Tanım 3.1.1.** *$G$ boştan farklı bir küme ve $R$, $G \times G \times G$ nin bir bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa $R$ ye $G$ de bir bulanık ikili işlem denir:*

*(i) Her $a,\ b \in G$ için $R(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde $\exists c \in G$ vardır.*

*(ii) Her $a,\ b,\ c_1,\ c_2 \in G$ için $R(a, b, c_1) > \theta$ ve $R(a, b, c_2) > \theta$ ise $c_1 = c_2$ dir.*

$R$, $G$ de bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcccc} R & : & F(G) \times F(G) & \longrightarrow & F(G) \\ & & (A, B) & \mapsto & R(A, B) \end{array}$$

olup, burada $F(G) = \{A \mid A : G \longrightarrow [0,\ 1)\}$ olmak üzere

$$R(A, B)(c) = \bigvee_{a,\ b \in G} (A(a) \wedge B(b) \wedge R(a, b, c)) \tag{3.1.1}$$

dir. $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ ise $R(A, B)$ gösterimi yerine $a \circ b$ kullanılabilir. O halde

$$(a \circ b)(c) = R(a, b, c),\ \forall c \in G, \tag{3.1.2}$$

$$((a \circ b) \circ c)(z) = \bigvee_{d \in G} (R(a, b, d) \wedge R(d, c, z)), \tag{3.1.3}$$

$$(a \circ (b \circ c))(z) = \bigvee_{d \in G} (R(b, c, d) \wedge R(a, d, z)) \tag{3.1.4}$$

dir.

(3.1.2)−(3.1.4) te verilen notasyonlar kullanılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Tanım 3.1.2.** *$G$ boştan farklı bir küme ve $R$, $G$ de bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(G, R)$ ye bir bulanık grup denir:*

$(G_1)$ *Her $a$, $b$, $c$, $z_1$, $z_2 \in G$ için*

$$((a \circ b) \circ c)(z_1) > \theta \ \textit{ve} \ (a \circ (b \circ c))(z_2) > \theta \ \textit{ise} \ z_1 = z_2$$

*dir.*

$(G_2)$ *Her $a \in G$ için*

$$(e \circ a)(a) > \theta \ \textit{ve} \ (a \circ e)(a) > \theta$$

*olacak biçimde $\exists e \in G$ vardır (böyle bir $e$ elemanı varsa $e$ ye $G$ nin bir birim elemanı denir).*

$(G_3)$ *Her $a \in G$ için*

$$(a \circ b)(e) > \theta \ \textit{ve} \ (b \circ a)(e) > \theta$$

*olacak biçimde $\exists b \in G$ vardır (böyle bir $b$ elemanı varsa $b$ ye $a$ nın tersi denir).*

**Uyarı 3.1.3.** *Bulanık grubun tanımında, $a \circ b$ bulanık anlamda $G$ de ikili işlem olduğundan $G$ nin bir bulanık alt kümesidir.*

**Önerme 3.1.4.** *$(G, R)$ bir bulanık grup olsun. Bu durumda*

(*i*) *$G$ nin birim elemanı tektir.*

(*ii*) *$(a \circ a)(a) > \theta$ ise $a = e$ dir.*

$(iii)$ $(a \circ b)(d) > \theta$ *ve* $(a \circ c)(d) > \theta$ *ise* $b = c$ *dir.*

$(iv)$ $(b \circ a)(d) > \theta$ *ve* $(c \circ a)(d) > \theta$ *ise* $b = c$ *dir.*

$(v)$ *Her* $a \in G$ *için* $a$ *nın tersi tektir.*

$(vi)$ $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ *dır.*

$(vii)$ $(b^{-1} \circ a^{-1})(c) > \theta$ *ve* $(a \circ b)(d) > \theta$ *ise* $c = d^{-1}$ *dir.*

**İspat.** $(i)$ $e_1$ ve $e_2$, $G$ nin birim elemanları olsun. Bu durumda

$$(e_1 \circ e_2)(e_1) = R(e_1, e_2)(e_1) = R(e_1, e_2, e_1) > \theta,$$

$$(e_1 \circ e_2)(e_2) = R(e_1, e_2)(e_2) = R(e_1, e_2, e_2) > \theta$$

dır. Böylece $e_1 = e_2$ dir.

$(ii)$ $a$ nın tersi $b$ olsun ($b = a^{-1}$). O halde

$$((b \circ a) \circ a)(a) \geq R(b, a, e) \wedge R(e, a, a) > \theta,$$

$$(b \circ (a \circ a))(e) \geq R(a, a, a) \wedge R(b, a, e) \geq \theta$$

dır. Tanım 3.1.2 $(G_1)$ den $a = e$ dir.

$(iii)$ $R(a^{-1}, d, h) > \theta$ olacak biçimde $h \in G$ olsun. Bu durumda

$$\left(a^{-1} \circ (a \circ b)\right)(h) \geq R(a,\ b, d) \wedge R(a^{-1}, d, h) > \theta,$$

$$\left(\left(a^{-1} \circ a\right) \circ b\right)(b) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(e, b, b) > \theta$$

dır. $(G_1)$ den $b = h$ dir. Böylece $R(a^{-1},\ d,\ b) > \theta$ olur. Benzer şekilde

$$\left(a^{-1} \circ (a \circ c)\right)(b) \geq R(a, c, d) \wedge R(a^{-1}, d, b) > \theta,$$

$$\left(\left(a^{-1} \circ a\right) \circ c\right)(c) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(e, c, c) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $b = c$ dir.

$(iv)$ $R(d,\, a^{-1},\, h)$ olacak biçimde $h \in G$ olsun. O halde

$$\left((b \circ a) \circ a^{-1}\right)(h) \geq R(b, a, d) \wedge R(d, a^{-1}, h) > \theta,$$

$$\left(b \circ (a \circ a^{-1})\right)(b) \geq R(a, a^{-1}, e) \wedge R(b, e, b) > \theta$$

dır. $(G_1)$ den $h = b$ ve $R(d,\, a^{-1},\, b) > \theta$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\left((c \circ a) \circ a^{-1}\right)(b) \geq R(c, a, d) \wedge R(d, a^{-1}, b) > \theta,$$

$$\left(c \circ (a \circ a^{-1)}\right)(c) \geq R(a, a^{-1}, e) \wedge R(c, e, c) > \theta$$

dır. Böylece $b = c$ dir.

$(v)$ $b$ ve $c$, $a$ nın iki tersi olsun. Bu durumda $(a \circ b)(e) > \theta$ ve $(a \circ c)(e) > \theta$ olur ki, $(iii)$ den $b = c$ dir. Böylece $a$ nın tersi tektir.

$(vi)$ $(G, R)$ bulanık grup olduğundan

$$\left(a \circ a^{-1}\right)(e) > \theta$$

yazılabilir. $a$ yerine $a^{-1}$ yazarsak

$$\left(a^{-1} \circ \left(a^{-1}\right)^{-1}\right)(e) > \theta$$

olur. O halde $(iii)$ den dolayı $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ dır.

$(vi)$ $R(b,\, c,\, h) > \theta$ olacak şekilde $h \in G$ olsun. Bu durumda

$$\left(b \circ \left(b^{-1} \circ a^{-1}\right)\right)(h) \geq R(b^{-1}, a^{-1}, c) \wedge R(b, c, h) > \theta,$$

$$\left(\left(b \circ b^{-1}\right) \circ a^{-1}\right)\left(a^{-1}\right) \geq R(b, b^{-1}, e) \wedge R(e, a^{-1}, a^{-1}) > \theta$$

dır. Böylece $h = a^{-1}$ ve $R(b,\, c,\, a^{-1}) > \theta$ dır.

$R(d, c,\, k) > \theta$ olacak şekilde $k \in G$ olsun. O halde

$$((a \circ b) \circ c)(k) \geq R(a, b, d) \wedge R(d, c, k) > \theta,$$

$$(a \circ (b \circ c))\,(e) \geq R(b, c, a^{-1}) \wedge R(a, a^{-1}, e) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $k = e$ ve $R(d,\ c,\ e) > \theta$ dır. Böylece $c = d^{-1}$ dir. $\square$

**Teorem 3.1.5.** *$R$, $G$ de bir bulanık ikili işlem olsun ve $(G, R)$ $(G_1)$ özelliğini sağlasın. Bu durumda $(G, R)$ nin bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul,*

$(G_2)'$ *Her $a \in G$ için $(e_l \circ a)\,(a) > \theta$ olacak biçimde $\exists e_l \in G$ vardır (böyle bir $e_l$ elemanı varsa $e_l$ ye $G$ nin bir sol birim elemanı denir).*

$(G_3)'$ *Her $a \in G$ için $(b \circ a)\,(e_l) > \theta$ olacak biçimde $\exists b \in G$ vardır (böyle bir $b$ elemanı varsa $b$ ye $a$ nın sol tersi denir).*

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $(G, R)$ bulanık grup olsun. Bu durumda Tanım 3.1.2 den $(G_2)'$ ve $(G_3)'$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$ : $(G, R)$ $(G_2)'$ ve $(G_3)'$ özelliklerini sağlasın.

İlk olarak $b$, $a$ nın tersi olmak üzere $(a \circ b)(e_l) > \theta$ olduğunu gösterelim.

$c, d, h \in G$ olacak biçimde $R(a,\ b,\ c) > \theta$, $R(a,\ e_l,\ d) > \theta$ ve $R(c,\ a,\ h) > \theta$ olsun. O halde

$$(a \circ (b \circ a))\,(d) \geq R(b, a, e_l) \wedge R(a, e_l, d) > \theta,$$

$$((a \circ b) \circ a)\,(h) \geq R(a, b, c) \wedge R(c, a, h) > \theta$$

dır. Böylece $d = h$ ve $R(c,\ a,\ d) > \theta$ dır.

$k \in G$ olacak biçimde $R(d,\ b,\ k) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$(a \circ (e_l \circ b))\,(c) \geq R(e_l, b, b) \wedge R(a, b, c) > \theta,$$

$$((a \circ e_l) \circ b)\,(k) \geq R(a, e_l, d) \wedge R(d, b, k) > \theta$$

dır. Böylece $c = k$ ve $R(d,\ b,\ c) > \theta$ dır.

$u \in G$ olacak biçimde $R(c,\ c,\ u) > \theta$ olsun. O halde

$$(c \circ (a \circ b))\,(u) \geq R(a,b,c) \wedge R(c,c,u) > \theta,$$

$$((c \circ a) \circ b)\,(c) \geq R(c,a,d) \wedge R(d,b,c) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $u = c$ ve $R(c,\ c,\ c) > \theta$ dır.

Önerme 3.1.4 $(ii)$ nin ispatından $c = e_l$ ve $(a \circ b)(e_l) > \theta$ dır.

$(a \circ e_l)\,(a) > \theta$ olduğunu gösterelim. O zaman

$$(a \circ (b \circ a))\,(d) \geq R(b,a,e_l) \wedge R(a,e_l,d) > \theta,$$

$$((a \circ b) \circ a)\,(a) \geq R(a,b,e_l) \wedge R(e_l,a,a) > \theta$$

dır. Böylece $d = a$ ve $(a \circ e_l)(a) > \theta$ dır.

Dolayısıyla $(G,R)$, $(G_1) - (G_3)$ özelliklerini sağlar. O halde $(G,R)$ bir bulanık gruptur. □

Benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

**Teorem 3.1.6.** *R, G de bir bulanık ikili işlem olsun ve $(G,R)$ $(G_1)$ özelliğini sağlasın. O halde $(G,R)$ nin bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul,*

$(G_2)'$ *Her $a \in G$ için $(a \circ e_r)(a) > \theta$ olacak biçimde $\exists e_r \in G$ vardır.*

$(G_3)'$ *Her $a \in G$ için $(a \circ b)(e_r) > \theta$ olacak biçimde $\exists b \in G$ vardır.*

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $(G,R)$ bulanık grup olsun. Bu durumda Tanım 3.1.2 den $(G_2)'$ ve $(G_3)'$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$ : $(G,R)$ $(G_2)'$ ve $(G_3)'$ özelliklerini sağlasın.

İlk olarak $b$, $a$ nın tersi olmak üzere $(b \circ a)(e_r) > \theta$ olduğunu gösterelim.

$c'$, $d'$, $h' \in G$ olacak şekilde $R(b,\, a,\, c') > \theta$, $R(b,\, e_r,\, d') > \theta$ ve $R(c,\, d,\, h) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$(b \circ (a \circ b))\,(d') \geq R(a, b, e_r) \wedge R(b, e_r, d') > \theta,$$

$$((b \circ a) \circ b)\,(h') \geq R(b, a, c') \wedge R(c', b, h') > \theta$$

dır. Böylece $d' = h'$ ve $R(c',\, b,\, d') > \theta$ dır.

$k' \in G$ olacak şekilde $R(b,\, a,\, k') > \theta$ olsun. O halde

$$((b \circ e_r) \circ a)\,(c') \geq R(b, e_r, b) \wedge R(b, a, c') > \theta,$$

$$(b \circ (e_r \circ a))\,(k') \geq R(e_r, a, a) \wedge R(b, a, k') > \theta$$

dır. Böylece $c' = k'$ ve $R(c',\, a,\, k') > \theta$ dır.

$u' \in G$ olacak şekilde $R(c',\, c',\, u') > \theta$ olsun. Bu durumda

$$(c' \circ (b \circ a))\,(u') \geq R(b, a, c') \wedge R(c', c', u') > \theta,$$

$$((c' \circ b) \circ a)\,(c') \geq R(c', b, d') \wedge R(d', a, c') > \theta$$

dır. Böylece $u' = c'$ ve $R(c',\, c',\, c') > \theta$ dır.

Önerme 3.1.4 $(ii)$ nin ispatından $c' = e_r$ ve $(b \circ a)(e_r) > \theta$ dır.

$(e_r \circ a)(a) > \theta$ olduğunu gösterelim. O zaman

$$(b \circ (a \circ b))\,(d') \geq R(a, b, e_r) \wedge R(b, e_r, d') > \theta,$$

$$((b \circ a) \circ b)\,(b) \geq R(b, a, e_r) \wedge R(e_r, b, b) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $d' = b$ ve $(e_r \circ a)(a) > \theta$ dır. Böylece $(G, R)$ bir bulanık gruptur. □

**Teorem 3.1.7.** *R, G de bir bulanık ikili işlem olsun ve $(G, R)$ $(G_1)$ özelliğini sağlasın. O halde $(G,\, R)$ nin bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul, her $a,\, b \in G$ için*

$$(a \circ x)(b) > \theta, \;\; (y \circ a)(b) > \theta \qquad (3.1.5)$$

*olacak biçimde $\exists x,\, y \in G$ vardır.*

**İspat.** ($\Rightarrow$): $(G, R)$ bir bulanık grup olsun. $x$, $k \in G$ için $R(a^{-1}, b, x) > \theta$, $R(a, x, k) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$\left(a \circ \left(a^{-1} \circ b\right)\right)(k) \geq R(a^{-1}, b, x) \wedge R(a, x, k) > \theta,$$

$$\left(\left(a \circ a^{-1}\right) \circ b\right)(b) \geq R(a, a^{-1}, e) \wedge R(e, b, b) > \theta$$

dır. Böylece $k = b$ ve $R(a, x, b) > \theta$ dır.

Diğer taraftan, $y$, $k' \in G$ için $R(b, a^{-1}, y) > \theta$, $R(y, a, k') > \theta$ olsun. Bu durumda

$$\left(\left(b \circ a^{-1}\right) \circ a\right)(k') \geq R(b, a^{-1}, y) \wedge R(y, a, k') > \theta,$$

$$\left(b \circ \left(a^{-1} \circ a\right)\right)(b) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(b, e, b) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $k' = b$ ve $R(y, a, b) > \theta$ dır. Böylece (3.1.5) sağlanır.

($\Leftarrow$) : $(G, R)$ bulanık grubu $(G_1)$ ve (3.1.5) koşulunu sağlasın.

$c$, $d$, $x$, $e^* \in G$ için $R(e^*, c, c) > \theta$, $R(c, x, a) > \theta$ ve $R(e^*, a, d) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$\left(e^* \circ (c \circ x)\right)(d) \geq R(c, x, a) \wedge R(e^*, a, d) > \theta,$$

$$\left((e^* \circ c) \circ x\right)(a) \geq R(e^*, c, c) \wedge R(c, x, a) > \theta$$

dır. Böylece $d = a$ ve $R(e^*, a, a) > \theta$ yani $(e^* \circ a)(a) > \theta$ dır. (3.1.5) koşulunda $y \in G$ olduğundan $(y \circ a)(e^*) > \theta$ dır. Bu durumda Teorem 3.1.5 ten $(G, R)$ bir bulanık gruptur. $\square$

## 3.2 Bulanık Alt Gruplar ve Normal Bulanık Alt Gruplar

$(G, R)$ bir bulanık grup ve $H$, $G$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $a$, $b$, $c$, $\in H$ için $R_H(a, b, c) = R(a, b, c)$ dir. Bu durumda her $a$, $b$, $c$, $z \in H$ için

$$(a \cdot b)(c) = R_H(a, b, c) = R(a, b, c),$$

$$((a \cdot b) \cdot c)(z) = \bigvee_{z \in H} (R(a,b,x) \wedge R(x,c,z)),$$

$$(a \cdot (b \cdot c))(z) = \bigvee_{z \in H} (R(b,c,x) \wedge R(a,x,z))$$

dir.

**Tanım 3.2.1.** *$(G, R)$ bir bulanık grup ve $H$, $G$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa $H$, $G$ nin bir bulanık alt grubudur:*

$(S_1)$ *Her $a$, $b \in H$ ve her $c \in G$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ ise $c \in H$ dir.*

$(S_2)$ *Her $a$, $b$, $c$, $z_1$, $z_2 \in H$ için $((a \cdot b) \cdot c)(z_1) > \theta$ ve $(a \cdot (b \cdot c))(z_2) > \theta$ ise $z_1 = z_2$ dir.*

$(S_3)$ *Her $a \in H$ için $(a \cdot e_H)(a) > \theta$ ve $(e_H \cdot a)(a) > \theta$ olacak biçimde $\exists e_H \in H$ vardır.*

$(S_4)$ *Her $a \in H$ için $(a \cdot b)(e_H) > \theta$ ve $(b \cdot a)(e_H) > \theta$ olacak biçimde $\exists b \in H$ vardır.*

**Önerme 3.2.2.** *$H$, $G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. O zaman*

$(i)$ $e_H = e$ dir.

$(ii)$ $a$ nın $H$ deki tersi $b$, $a$ nın $G$ deki tersi $a^{-1}$ dir.

**İspat.** $(i)$ $(S_3)$ ten $(e_H \cdot a)(a) > \theta$ dır. $a = e_H$ alınırsa $(e_H \cdot e_H)(e_H) > \theta$ olur. Önerme 3.1.4 $(iii)$ ifadesini göz önüne alırsak $(e_H \cdot e_H)(e_H) > \theta$ ve böylece $e = e_H$ dir.

$(ii)$ $(b \cdot a)(e_H) = (b \circ a)(e_H) = (b \circ a)(e) > \theta$ dır. Önerme 3.1.4 $(iv)$ ten $(a^{-1} \circ a)(e) > \theta$ dır. □

**Önerme 3.2.3.** *$H$ nin $G$ de bir bulanık alt grup olması için gerek ve yeter koşul,*

($i$) *Her* $a$, $b \in H$ ve *her* $c \in G$ *için* $(a \circ b)(c) > \theta$ *ise* $c \in H$ dir.

($ii$) $a \in H$ *ise* $a^{-1} \in H$ dir.

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $H$, $G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. Bu durumda Tanım 3.2.1 den ($i$) sağlanır. $a$, $b \in H$ için

$$(b \cdot a)(e_H) = (b \circ a)(e_H) = (b \circ a)(e)$$

dir. $G$ bulanık grup olduğundan Tanım 3.1.2 ($G_3$) ten $(b \circ a)(e) > \theta$ dır. Ters eleman özelliğinden $b = a^{-1}$ dir. Dolayısıyla $a^{-1} \in H$ dir.

$(\Leftarrow)$ : ($i$) ve ($ii$) şartları sağlansın. Her $a$, $b$, $c$, $z_1$, $z_2 \in H$ için

$$((a \cdot b) \cdot c)(z_1) = ((a \circ b) \circ c)(z_1) > \theta,$$

$$(a \cdot (b \cdot c))(z_2) = (a \circ (b \circ c))(z_2) > \theta$$

dır. Dolayısıyla

$$((a \cdot b) \cdot c)(z_1) > \theta \text{ ve } (a \cdot (b \cdot c))(z_2) > \theta \text{ ise } z_1 = z_2$$

dir.

Her $a \in H$ için $a \in G$ dir. $(e \circ a)(a) > \theta$ ve $(a \circ e)(a) > \theta$ dır. Önerme 3.2.2 ($i$) den $e_H = e$ olduğundan

$$(e_H \circ a)(a) = (e_H \cdot a)(a) > \theta,$$

$$(a \circ e_H)(a) = (a \cdot e_H)(a) > \theta$$

dır.

Her $a \in H$ için $a \in G$ dir. $G$ bulanık grup olduğundan $a^{-1} \in G$ dir. Hipotezden $a^{-1} \in H$ ve

$$(a \circ b)(e) = (a \circ a^{-1})(e) = (a \cdot a^{-1})(e) = (a \cdot b)(e) > \theta,$$

$$(b \circ a)(e) = (a^{-1} \circ a)(e) = (a^{-1} \cdot a)(e) = (b \cdot a)(e) > \theta$$

dır. Böylece $H$, $G$ nin bir bulanık alt grubudur. $\square$

**Önerme 3.2.4.** *$H_i$ $(i \in I)$, $G$ nin bir takım bulanık alt grupları olsun. Bu durumda $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$, $G$ nin bir bulanık alt grubudur.*

**İspat.** $H_i$ $(i \in I)$, $G$ nin bir takım bulanık alt grupları olsun. $\bigcap\limits_{i \in I} H_i = H$ olmak üzere, $H_i$ ler $G$ nin birer bulanık alt grubu olduğundan $e \in H_i$ dir. Böylece $e \in H$ olup $H \neq \emptyset$ dır.

$(i)$ Her $a$, $b \in H$ ve *her* $c \in G$ *için* $(a \circ b)(c) > \theta$ ise $c \in H$ olmalıdır. $a$, $b \in H$ ise $a$, $b \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$ dir. Dolayısıyla $a$, $b \in H_i$ $(i \in I)$ dir. Bu durumda $H_i$ ler $G$ nin birer bulanık alt grubu olduğundan her $c \in G$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ ise $c \in H_i$ olur. Dolayısıyla $c \in H$ dir.

$(ii)$ Her $a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olmalıdır.

$a \in H$ ise $a \in H_i$ dir. Dolayısıyla $a \in H_i$ $(i \in I)$ dir. O halde $G$ nin bulanık alt grupları $H_i$ ler olduğundan $a^{-1} \in H_i$ ve dolayısıyla $a^{-1} \in H$ dir. $\square$

**Önerme 3.2.5.** *$(G, R)$ bir bulanık grup ve*

$$C = \{x \mid x \in G \text{ ve herhangi bir } a,\ c \in G \text{ için } (x \circ a)(c) > \theta \Leftrightarrow (a \circ x)(c) > \theta\}$$

*olsun. O halde $C$, $G$ nin bir bulanık alt grubudur.*

**İspat.** $e \in C$ olduğundan $C \neq \emptyset$ dır.

$(i)$ $x_1$, $x_2 \in C$ ve $x \in G$ için $(x_1 \circ x_2)(x) > \theta$ ise $x \in C$ olmalıdır.

$a$, $c$, $d_1$, $d_2$, $b_2 \in G$ için $R(x, a, c) > \theta$, $R(a, x, d_1) > \theta$, $R(a, x_2, b_2) > \theta$ ve $R(b_2, x_1, d_2) > \theta$ olsun. $R(x_1, x_2, x) > \theta$ ve $R(x_1, x_1, x) > \theta$ kullanılırsa

$$(a \circ (x_2 \circ x_1))(d_1) \geq R(x_2, x_1, x) \wedge R(a, x, d_1) > \theta,$$

$$((a \circ x_2) \circ x_1)(d_2) \geq R(a, x_2, b_2) \wedge R(b_2, x_1, d_2) > \theta$$

dır. Böylece $d_1 = d_2$ ve $R(b_2, x_1, d_1) > \theta$ dır.

$x_1$, $x_2 \in C$ olduğundan $R(x_2, a, b_2) > \theta$, $R(x_1, b_2, d_1) > \theta$ dır. Bu durumda

$$((x_1 \circ x_2) \circ a)(c) \geq R(x_1, x_2, x) \wedge R(x, a, c) > \theta,$$

$$(x_1 \circ (x_2 \circ a))(d_1) \geq R(x_2, a, b_2) \wedge R(x_1, b_2, d_1) > \theta$$

dır. Böylece $c = d_1$ ve $R(a, x, c) > \theta$ dır.

Benzer olarak $a$, $c$, $d_1$, $d_2$, $b_2 \in G$ için $R(a, x, c) > \theta$ olsun. $R(x, a, d_1) > \theta$, $R(x_2, a, b_2) > \theta$ ve $R(x_1, b_2, d_2) > \theta$ olsun. $R(x_2, x_1, x) > \theta$ ve $R(x_2, x_2, x) > \theta$ kullanılırsa

$$((x_1 \circ x_2) \circ a)(d_1) \geq R(x_1, x_2, x) \wedge R(x, a, d_1) > \theta,$$

$$(x_1 \circ (x_2 \circ a))(d_2) \geq R(x_2, a, b_2) \wedge R(x_1, b_2, d_2) > \theta$$

dır. Böylece $d_1 = d_2$ ve $R(x_1, b_2, d_1) > \theta$ dır.

$x_1$, $x_2 \in C$ olduğundan $R(a, x_2, b_2) > \theta$, $R(b_2, x_1, d_1) > \theta$ dır. Bu durumda

$$(a \circ (x_2 \circ x_1))(c) \geq R(x_2, x_1, x) \wedge R(a, x, c) > \theta,$$

$$((a \circ x_2) \circ x_1)(d_1) \geq R(a, x_2, b_2) \wedge R(b_2, x_1, d_1) > \theta$$

dır. Böylece $c = d_1$ ve $R(x, a, c) > \theta$ dır. Dolayısıyla $x \in C$ dir.

$(ii)$ $x \in C$ ise $x^{-1} \in C$ olmalıdır.

$c$, $b$, $d \in G$ için $R(a, x^{-1}, c) > \theta$, $R(c, x, b) > \theta$ ve $R(x^{-1}, a, d) > \theta$ olsun.

Bu durumda

$$((a \circ x^{-1}) \circ x)(b) \geq R(a, x^{-1}, c) \wedge R(c, x, b) > \theta,$$

$$(a \circ (x^{-1} \circ x))(a) \geq R(x^{-1}, x, e) \wedge R(a, e, a) > \theta$$

dır. Böylece $b = a$ ve $R(c, x, a) > \theta$ dır. Ayrıca $R(x, c, a) > \theta$ dır. O halde

$$(x^{-1} \circ (x \circ c))(d) \geq R(x, c, a) \wedge R(x^{-1}, a, d) > \theta,$$

$$((x^{-1} \circ x) \circ c)(c) \geq R(x^{-1}, x, e) \wedge R(e, c, c) > \theta$$

dır. Böylece $d = c$ ve $R(x^{-1}, a, c) > \theta$ dır.

Benzer şekilde $c$, $b$, $d \in G$ için $R(x^{-1}, a, c) > \theta$, $R(x, c, b) > \theta$ ve $R(a, x^{-1}, d) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$(x \circ (x^{-1} \circ a))(b) \geq R(x^{-1}, a, c) \wedge R(x, c, b) > \theta,$$

$$((x \circ x^{-1}) \circ a)(a) \geq R(x, x^{-1}, e) \wedge R(e, a, a) > \theta$$

dır. Böylece $b = a$ ve $R(x, c, a) > \theta$ dır. Ayrıca $R(c, x, a) > \theta$ dır. O halde

$$((c \circ x) \circ x^{-1})(d) \geq R(c, x, a) \wedge R(a, x^{-1}, d) > \theta,$$

$$(c \circ (x \circ x^{-1}))(c) \geq R(x, x^{-1}, e) \wedge R(c, e, c) > \theta$$

dır. Böylece $d = c$ ve $R(a, x^{-1}, c) > \theta$ dır.

Dolayısıyla $x^{-1} \in C$ dır. Böylece Önerme 3.2.3 ten $C$, $G$ nin bir bulanık alt grubudur. □

**Tanım 3.2.6.** *$H$, $G$ bulanık grubunun bir bulanık alt grubu olsun. Her $a$, $b \in G$ ve her $h \in H$ için*

$$(a \circ (h \circ a^{-1}))(b) > \theta \Rightarrow b \in H \tag{3.2.1}$$

*ise $H$ ye $G$ nin bir normal bulanık alt grubu denir.*

**Önerme 3.2.7.** *Her $a$, $b$, $c$, $d \in G$ için*

$$((a \circ b) \circ c)(d) > \theta \Leftrightarrow (a \circ (b \circ c))(d) > \theta$$

*dır.*

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $((a \circ b) \circ c)(d) > \theta$ ve $k,\, l \in G$ için $R(b, c, k) > \theta$, $R(a, k, l) > \theta$ olsun. O halde

$$(a \circ (b \circ c))(l) \geq R(b, c, k) \wedge R(a, k, l) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $d = l$ ve $(a \circ (b \circ c))(d) > \theta$ dır.

$(\Leftarrow)$ : $(a \circ (b \circ c))(d) > \theta$ ve $k',\, l' \in G$ için $R(a, b, k') > \theta$, $R(k', c, l') > \theta$ olsun. Bu durumda

$$((a \circ b) \circ c)(l') \geq R(a, b, k') \wedge R(k', c, l') > \theta$$

dır. Böylece $d = l'$ ve $((a \circ b) \circ c)(d) > \theta$ dır. □

**Uyarı 3.2.8.** *Önerme 3.2.7,* (3.2.1) *koşulunun aşağıdaki koşula denk olduğunu gösterir:*

$$\forall a,\ b \in G,\ \forall h \in H \text{ için } ((a \circ h) \circ a^{-1})(b) > \theta \Rightarrow b \in H.$$

**Tanım 3.2.9.** *$H$, $G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. Her $a,\, z \in G$ için*

$$(aH)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a, x, z) \quad , \quad (Ha)(z) = \bigvee_{x \in H} R(x, a, z)$$

*şeklinde tanımlanan $aH$ ve $Ha$ bulanık alt kümelerine sırasıyla $H$ nin sol ve sağ kalan sınıfı denir.*

**Teorem 3.2.10.** *$H$, $G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. O zaman $H$ nin $G$ de bir normal bulanık alt grup olması için gerek ve yeter koşul, her $a,\, z \in G$ için*

$$(aH)(z) > \theta \Leftrightarrow (Ha)(z) > \theta$$

*dır.*

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $H$ bir normal bulanık alt grup olsun.

$(aH)(z) > \theta$ ve $h \in H$, $c \in G$ için $R(a,\, h,\, z) > \theta$, $R(z,\, a^{-1},\, c) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$((a \circ h) \circ a^{-1})(c) \geq R(a, h, z) \wedge R(z, a^{-1}, c) > \theta$$

dır. Böylece $c \in H$ ve $R(z,\ a^{-1},\ c) > \theta$ dır.

$v \in G$ için $R(c,\ a,\ v) > \theta$ olsun. O halde

$$((z \circ a^{-1}) \circ a)(v) \geq R(z, a^{-1}, c) \wedge R(c, a, v) > \theta,$$

$$(z \circ (a^{-1} \circ a))(z) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(z, e, z) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $v = z$ ve $R(c,\ a,\ z) > \theta$ dır. O zaman

$$(Ha)(z) = \bigvee_{x \in H} R(x, a, z) \geq R(c, a, z) > \theta$$

dır.

Diğer taraftan $(Ha)(z) > \theta$ ve $h' \in H$, $d \in G$ için $R(h',\ a,\ z) > \theta$, $R(a^{-1},\ z,\ d) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$(a^{-1} \circ (h' \circ a))(d) \geq R(h', a, z) \wedge R(a^{-1}, z, d) > \theta$$

dır. Böylece $d \in H$ ve $R(a^{-1},\ z,\ d) > \theta$ dır.

$v' \in G$ için $R(a,\ d,\ v') > \theta$ olsun. O halde

$$(a \circ (a^{-1} \circ z))(v') \geq R(a^{-1}, z, d) \wedge R(a, d, v') > \theta,$$

$$((a \circ a^{-1}) \circ z)(z) \geq R(a, a^{-1}, e) \wedge R(e, z, z) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $v' = z$ ve $R(a,\ d,\ z) > \theta$ dır. O halde

$$(aH)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a, x, z) \geq R(a, d, z) > \theta$$

dır. Böylece $(aH)(z) > \theta \Leftrightarrow (Ha)(z) > \theta$ dır.

$(\Leftarrow)$ : $(aH)(z) > \theta \Leftrightarrow (Ha)(z) > \theta$ olsun.

$a,\ c,\ z \in G$ ve $h \in H$ için $(a \circ (h \circ a^{-1}))(c) > \theta$, $R(h,\ a^{-1},\ z) > \theta$ ve

$R(a,\ z,\ c) > \theta$ olsun. O halde

$$(Ha^{-1})(z) = \bigvee_{x \in H} R(x, a^{-1}, z) \geq R(h, a^{-1}, z) > \theta$$

dır. Ayrıca

$$(a^{-1}H)(z) = \bigvee_{x\in H} R(a^{-1}, x, z) > \theta$$

dır. $h' \in H$ için $R(a^{-1},\ h',\ z) > \theta$ olsun. O halde

$$(a \circ (a^{-1} \circ h'))(c) \geq R(a^{-1}, h', z) \wedge R(a, z, c) > \theta,$$

$$((a \circ a^{-1}) \circ h')(h') \geq R(a, a^{-1}, e) \wedge R(e, h', h') > \theta$$

dır. Böylece $c = h'$ dür. $h' \in H$ olduğundan $c \in H$ dir ve $H$, $G$ nin bir normal bulanık alt grubudur. □

## 3.3 Bölüm Bulanık Grup

**Lemma 3.3.1.** *G bir bulanık grup olsun. Bu durumda*

$$R(a,\ b,\ c) > \theta \Rightarrow R(c,\ b^{-1},\ a) > \theta,\ R(a^{-1},\ c,\ b) > \theta \tag{3.3.1}$$

*dır.*

**İspat.** $R(a,\ b,\ c) > \theta$ ve $d \in G$ için $R(c,\ b^{-1},\ d) > \theta$ olsun. O halde

$$((a \circ b) \circ b^{-1})(d) \geq R(a, b, c) \wedge R(c, b^{-1}, d) > \theta,$$

$$(a \circ (b \circ b^{-1}))(a) \geq R(b, b^{-1}, e) \wedge R(a, e, a) > \theta$$

dır. Böylece $d = a$ ve $R(c,\ b^{-1},\ a) > \theta$ dır.

Diğer taraftan $R(a,\ b,\ c) > \theta$ ve $d' \in G$ için $R(a^{-1},\ c,\ d') > \theta$ olsun. O zaman

$$(a^{-1} \circ (a \circ b))(d') \geq R(a, b, c) \wedge R(a^{-1}, c, d') > \theta,$$

$$((a^{-1} \circ a) \circ b)(b) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(e, b, b) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $d' = b$ ve $R(a^{-1},\ c,\ b) > \theta$ dır. □

$H$, $G$ bulanık grubunun bir normal bulanık alt grubu ve $\sum = \{aH \mid a \in G\}$ olsun. Bu durumda $\sum$ üzerinde

$$a_1H \sim a_2H :\Leftrightarrow R(a_1^{-1}, a_2, h) > \theta \ (\exists h \in H)$$

şeklinde bir " $\sim$ " bağıntısı tanımlanabilir.

**Teorem 3.3.2.** *$\sum$ üzerinde tanımlanan " $\sim$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

**İspat.** " $\sim$ " bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını gösterelim.

$(i)$ Her $a \in G$ için $R(a, a^{-1}, e) > \theta$ olacak biçimde $\exists e \in H$ vardır ki, $aH \sim aH$ dir.

$(ii)$ $a_1H \sim a_2H$ olsun. Bu durumda $h \in H$ için $R(a_1^{-1}, a_2, h) > \theta$ dır. Lemma 3.3.1 den $R(a_2, h^{-1}, a_1) > \theta$ ve $c \in G$ için

$R(a_2^{-1}, a_1, c) > \theta$ vardır. O halde

$$((a_2^{-1} \circ a_2) \circ h^{-1})(h^{-1}) \geq R(a_2^{-1}, a_2, e) \wedge R(e, h^{-1}, h^{-1}) > \theta,$$

$$(a_2^{-1} \circ (a_2 \circ h^{-1}))(c) \geq R(a_2, h^{-1}, a_1) \wedge R(a_2^{-1}, a_1, c) > \theta$$

dır. Böylece $c = h^{-1}$ ve $R(a_2^{-1}, a_1, h^{-1}) > \theta$ dır. $h \in H$ olduğundan $h^{-1} \in H$ ve $a_2H \sim a_1H$ dir.

$(iii)$ $a_1H \sim a_2H$ ve $a_2H \sim a_3H$ olsun. Bu durumda $h, h' \in H$ için $R(a_1^{-1}, a_2, h) > \theta$ ve

$R(a_2^{-1}, a_3, h') > \theta$ dır. $c \in G$ için $R(h, h', c) > \theta$ ise $c \in H$ dir. $z$, $z' \in G$ için $R(h, a_2^{-1}, z) > \theta$, $R(z, a_3, z') > \theta$ olsun. O zaman

$$(h \circ (a_2^{-1} \circ a_3))(c) \geq R(a_2^{-1}, a_3, h') \wedge R(h, h', c) > \theta,$$

$$((h \circ a_2^{-1}) \circ a_3)(z') \geq R(h, a_2^{-1}, z) \wedge R(z, a_3, z') > \theta$$

dır. Böylece $c = z'$ dir. $R(a_1^{-1}, a_2, h) > \theta$ ve Lemma 3.3.1 kullanılırsa $R(h, a_2, a_1^{-1}) > \theta$ elde edilir. Bu durumda $z = a_1^{-1}$ ve $R(a_1^{-1}, a_3, c) > \theta$ dır. Dolayısıyla $a_1H \sim a_3H$ elde edilir. □

**Önerme 3.3.3.** *$a_1H \sim a_2H \Leftrightarrow ((a_1H)(z) > \theta \Leftrightarrow (a_2H)(z) > \theta)$ dır.*

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $a_1H \sim a_2H$ olsun. Bu durumda $a_2H \sim a_1H$ ve $h \in H$ için $R(a_2^{-1}, a_1, h) > \theta$ dır.

$$(a_1H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a_1, x, z) \geq R(a_1, h_1, z) > \theta$$

olacak biçimde $h_1 \in H$ vardır. $h_2 \in G$ için $R(h, h_1, h_2) > \theta$ olsun. O halde $h_2 \in H$ dir.

$v \in G$ için $R(a_2, h_2, v) > \theta$ olsun. $R(a_2^{-1}, a_1, h) > \theta$ ve Lemma 3.3.1 kullanılırsa $R(a_2, h, a_1) > \theta$ elde edilir. Bu durumda

$$(a_2 \circ (h \circ h_1))(v) \geq R(h, h_1, h_2) \wedge R(a_2, h_2, v) > \theta,$$

$$((a_2 \circ h) \circ h_1)(z) \geq R(a_2, h, a_1) \wedge R(a_1, h_1, z) > \theta$$

dır. Böylece $v = z$ ve $R(a_2, h_2, z) > \theta$ dır. O zaman

$$(a_2H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a_2, x, z) \geq R(a_2, h_2, z) > \theta$$

dır.

Benzer şekilde

$$(a_2H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a_2, x, z) > \theta$$

olsun. $h_1' \in H$, $h_2' \in G$ için $R(a_2, h_1', z) > \theta$ ve $R(h, h_1', h_2') > \theta$ olsun. Bu durumda $h_2' \in H$ dir. $v' \in G$ için $R(a_1, h_2', v') > \theta$ olsun. $R(a_1^{-1}, a_2, h) > \theta$ ve Lemma 3.3.1 kullanılırsa $R(a_1, h, a_2) > \theta$ elde edilir. O halde

$$(a_1 \circ (h \circ h_1'))(v') \geq R(h, h_1', h_2') \wedge R(a_1, h_2', v') > \theta,$$

$$((a_1 \circ h) \circ h_1')(z) \geq R(a_1, h, a_2) \wedge R(a_2, h_1', z) > \theta$$

dır. Böylece $v' = z$ ve $R(a_1, h_2', z) > \theta$ dır. O halde

$$(a_1 H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a_1, x, z) \geq R(a_1, h_2', z) > \theta$$

dır.

($\Leftarrow$) : $(a_1 H)(z) > \theta \Leftrightarrow (a_2 H)(z) > \theta$ olsun. $e \in H$ için

$$(a_1 H)(a_1) = \bigvee_{x \in H} R(a_1, x, a_1) \geq R(a_1, e, a_1) > \theta,$$

$$(a_2 H)(a_{1)} = \bigvee_{x \in H} R(a_2, x, a_1) > \theta$$

elde edilir. O halde $h \in H$ için $R(a_2, h, a_1) > \theta$ vardır. Lemma 3.3.1 den

$$R(a_1^{-1}, a_2, h^{-1}) > \theta$$

elde edilir. $h^{-1} \in H$ olduğundan $a_1 H \sim a_2 H$ dir. □

$$[aH] = \{a'H \mid a'H \sim aH\} \quad , \quad \bar{a} = \{a' \mid a' \in G \text{ ve } a'H \sim aH\}$$

ve $G/H = \{[aH] \mid a \in G\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcccc} \bar{R} & : & G/H \times G/H \times G/H & \to & [0,\ 1] \\ & & ([aH], [bH], [cH]) & \longmapsto & \bar{R}([aH], [bH], [cH]) \\ & & & = & \displaystyle\bigvee_{(a',\, b',\, c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} R(a',\ b',\ c') \end{array}$$

dür.

**Teorem 3.3.4.** *$\bar{R}$, $G/H$ de bir bulanık ikili işlemdir.*

**İspat.** $(i)$ Her $a$, $b \in G$ ve $\exists c \in G$ için $R(a, b, c) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$\bar{R}([aH], [bH], [cH]) \geq R(a, b, c) > \theta$$

dır.

*(ii)* $\bar{R}([aH],[bH],[cH]) > \theta$ ve $\bar{R}([aH],[bH],[dH]) > \theta$ olsun. $[cH] = [dH]$ olduğunu gösterelim.

$a_1,\ a_1' \in \bar{a},\ b_1,\ b_1' \in \bar{b},\ c_1 \in \bar{c},\ d_1 \in \bar{d}$ için

$$R(a_1, b_1, c_1) > \theta,\ \ R(a_1', b_1', d_1) > \theta \tag{3.3.2}$$

olsun.

$a_1' \in \bar{a} \Rightarrow a_1'H \sim aH$ ve $a_1 \in \bar{a} \Rightarrow a_1H \sim aH$ dir. Aynı zamanda $aH \sim a_1H$ dir. " $\sim$ " bağıntısının geçişme özelliğinden $a_1'H \sim aH,\ aH \sim a_1H \Rightarrow a_1'H \sim a_1H$ dir. Benzer şekilde $b_1'H \sim b_1H$ dır. $h_1,\ h_2 \in H$ için

$$R(a_1', h_1, a_1) > \theta,\ \ R(b_1', h_2, b_1) > \theta \tag{3.3.3}$$

olsun.

$z \in G$ için $R(h_1, b_1', z) > \theta$ olsun. Lemma 3.3.1 den $R(z, b_1'^{-1}, h_1) > \theta$ dır. Bu durumda $b_1'^{-1}H \sim zH$ ve $h_1' \in H$ için $R(b_1'^{-1}, z, h_1') > \theta$ dır.

$y \in G$ için $R(b_1', h_1', y) > \theta$ olsun. O halde

$$(b_1' \circ (b_1'^{-1} \circ z))(y) \geq R(b_1'^{-1}, z, h_1') \wedge R(b_1', h_1', y) > \theta,$$

$$((b_1' \circ b_1'^{-1}) \circ z)(z) \geq R(b_1', b_1', e) \wedge R(e, z, z) > \theta$$

dır. Böylece $y = z$ dir.

$z',\ y' \in G$ için $R(h_1, b_1, z') > \theta,\ R(a_1', z', y') > \theta$ olsun. O zaman

$$(a_1' \circ (h_1 \circ b_1))(y') \geq R(h_1, b_1, z') \wedge R(a_1', z', y') > \theta,$$

$$((a_1' \circ h_1) \circ b_1)(c_1) \geq R(a_1', h_1, a_1) \wedge R(a_1, b_1, c_1) > \theta$$

dır. Böylece $y' = c_1$ ve $R(a_1', z', c_1) > \theta$ dır.

$t \in G$ için $R(z, h_2, t) > \theta$ olsun. O halde

$$((h_1 \circ b_1') \circ h_2)(t) \geq R(h_1, b_1', z) \wedge R(z, h_2, t) > \theta,$$

$$(h_1 \circ (b_1' \circ h_2))(z') \geq R(b_1', h_2, b_1) \wedge R(h_1, b_1', z') > \theta$$

dır. Böylece $t = z'$ ve $R(z, h_2, z') > \theta$, $y = z$ olduğundan $R(y, h_2, z') > \theta$ dır.

$h$, $v \in G$ için $R(h_1', h_2, h) > \theta$ ve $R(b_1', h, v) > \theta$ olsun. Bu durumda Tanım 3.2.1 den $h \in H$ dir ve

$$(b_1' \circ (h_1' \circ h_2))(v) \geq R(h_1', h_2, h) \wedge R(b_1', h, v) > \theta,$$

$$((b_1' \circ h_1') \circ h_2)(z') \geq R(b_1', h_1', y) \wedge R(y, h_2, z') > \theta$$

dır. Böylece $v = z'$ ve $R(b_1', h, z') > \theta$ dır.

$v' \in G$ için $R(d_1, h, v') > \theta$ olsun. O halde

$$((a_1' \circ b_1') \circ h)(v') \geq R(a_1', b_1', d_{1)} \wedge R(d_1, h, v') > \theta,$$

$$(a_1' \circ (b_1' \circ h))(c_1) \geq R(b_1', h, z') \wedge R(a_1', z', c_1) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $v' = c_1$ ve $R(d_1, h, c_1) > \theta$ dır.

$R(d_1, h, c_1) > \theta$ ya Lemma 3.3.1 uygulanırsa $R(d_1^{-1}, c_1, h) > \theta$ olur. Bu durumda $d_1H \sim c_1H$ dir. Bundan başka $c_1 \in \bar{c} \Rightarrow c_1H \sim cH$ ve $d_1 \in \bar{d} \Rightarrow d_1H \sim dH$ dir. " $\sim$ " bağıntısının geçişme özelliğinden $d_1H \sim c_1H$ ve $c_1H \sim cH \Rightarrow d_1H \sim cH$ ve dolayısıyla $cH \sim d_1H$ dir. Böylece $cH \sim d_1H$ ve $d_1H \sim dH$ olduğundan $cH \sim dH$ dir. Dolayısıyla $[cH] = [dH]$ dir.

Böylece $\bar{R}$, $G/H$ de bir bulanık ikili işlemdir. □

$\bar{R}$, $G/H$ de bir bulanık ikili işlem olduğundan

$$([aH] \circ [bH])([cH]) = \bar{R}([aH], [bH], [cH]) \tag{3.3.4}$$

$$(([aH] \circ [bH]) \circ [cH])([dH]) = \bigvee_{x \in G} \bar{R}([aH], [bH], [xH]) \wedge \bar{R}([xH], [cH], [dH]) \tag{3.3.5}$$

$$([aH] \circ ([bH] \circ [cH]))([fH]) = \bigvee_{x \in G} \bar{R}([bH], [cH], [xH]) \wedge \bar{R}([aH], [xH], [fH]) \tag{3.3.6}$$

dir.

**Teorem 3.3.5.** $(G/H, \bar{R})$ *bir bulanık gruptur.*

**İspat.** Tanım 3.1.2 deki $(G_1)$, $(G_2)$ ve $(G_3)$ koşulları sağlanmalıdır.

$(G_1)$ $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$, $d$, $f \in G$ ve $h$, $h'$, $h'' \in H$ için

$$(([aH] \circ [bH]) \circ [cH])([dH]) > \theta, \ ([aH] \circ ([bH] \circ [cH]))([fH]) > \theta \tag{3.3.7}$$

olsun.

$a \in \bar{a} \Rightarrow aH \sim aH$ ve $a' \in \bar{a} \Rightarrow a'H \sim aH$ dir. " $\sim$ " bağıntısının geçişme özelliğinden $a'H \sim aH$ dir. Benzer şekilde $bH \sim b'H$, $cH \sim c'H$, $dH \sim dH$ ve $fH \sim fH$ dir.

$$\begin{aligned}
(([aH] \circ [bH]) \circ [cH])([dH]) &= \bigvee_{x \in G} \bar{R}([aH], [bH], [xH]) \wedge \bar{R}([xH], [cH], [dH]) \\
&= \bigvee_{x \in G} R(a, b, x) \wedge R(x, c, d) \\
&\geq R(a, b, x) \wedge R(x, c, d) > \theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
([aH] \circ ([bH] \circ [cH]))([fH]) &= \bigvee_{x \in G} \bar{R}([bH], [cH], [x'H]) \wedge \bar{R}([aH], [x'H], [fH]) \\
&= \bigvee_{x \in G} R(b', c', x') \wedge R(a', x', f) \\
&\geq R(b', c', x') \wedge R(a', x', f) > \theta
\end{aligned}$$

dır. Aynı zamanda $a'H \sim aH$, $b'H \sim bH$, $c'H \sim cH$ olduğundan $R(a', h, a) > \theta$, $R(b', h, b) > \theta$ ve $R(c', h, c) > \theta$ dır. $z \in G$ için $R(a', b', z) > \theta$ olsun. Bu durumda $R(a, b, x') > \theta$, $R(a', h, a) > \theta$, $R(b', h, b) > \theta$ ve Teorem 3.3.4 ün ispatından $\exists k \in H$ için $R(z, k, x') > \theta$ dır. $z' \in G$ için $R(z, c, z') > \theta$ olsun. Bu durumda $R(x', c, d) > \theta$, $R(z, k, x') > \theta$, $R(c', h'', c) > \theta$, $R(z, c, z') > \theta$ ve Teorem 3.3.4 ün ispatından $\exists h''' \in H$ için $R(z', h''', d) > \theta$ dır.

$$(a' \circ (b' \circ c'))(f) \geq R(b', c', x') \wedge R(a', x', f) > \theta,$$

$$((a' \circ b') \circ c')(z') \geq R(a', b', z) \wedge R(z, c', z') > \theta$$

olduğundan $z' = f$ ve $R(f, h''', d) > \theta$ dır. O halde $fH \sim dH$ ve $[fH] = [dH]$ dir.

$(G_2)$ Her $[aH] \in G/H$ için $\exists [eH] \in G/H$ vardır ki

$$([aH] \circ [eH])([aH]) = \bar{R}([aH], [eH], [aH]) \geq R(a, e, a) > \theta,$$

$$([eH] \circ [aH])([aH]) = \bar{R}([eH], [aH], [aH]) \geq R(e, a, a) > \theta$$

dır.

$(G_3)$ Her $[aH] \in G/H$ için $\exists [a^{-1}H] \in G/H$ vardır ki

$$([aH] \circ [a^{-1}H])([eH]) = \bar{R}([aH], [a^{-1}H], [eH]) \geq R(a, a^{-1}, e) > \theta,$$

$$([a^{-1}H] \circ [aH])([eH]) = \bar{R}([a^{-1}H], [aH], [eH]) \geq R(a^{-1}, a, e) > \theta$$

dır. Böylece Tanım 3.1.2 ye göre $(G/H, \bar{R})$ bir bulanık gruptur. □

**Tanım 3.3.6.** *$(G/H, \bar{R})$ ye $G$ nin $H$ normal bulanık alt grubuna göre bir bölüm bulanık grubu denir.*

## 3.4 Bulanık Grup Homomorfizmaları

**Tanım 3.4.1.** *$(G_1, R_1)$, $(G_2, R_2)$ iki bulanık grup ve $\varphi : G_1 \to G_2$ bir fonksiyon olsun. Her $a$, $b$, $c \in G_1$ için*

$$R_1(a, b, c) > \theta \Rightarrow R_2(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) > \theta$$

*ise $\varphi$ ye bir bulanık grup homomorfizması denir. Ayrıca, $\varphi$ birebir ise $\varphi$ ye bir bulanık grup monomorfizması, $\varphi$ örten ise $\varphi$ ye bir bulanık grup epimorfizması ve $\varphi$ hem birebir hem de örten ise $\varphi$ ye bir bulanık grup izomorfizması denir.*

**Teorem 3.4.2.** *$(G, R)$ bir bulanık grup ve $H$, $G$ nin bir normal bulanık alt grubu olsun. Bu durumda $(G/H, \bar{R})$ bir bölüm bulanık grup ise*

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & G & \to & G/H \\ & & a & \longmapsto & [aH] \end{array}$$

*bir bulanık grup epimorfizmasıdır.*

**İspat.** $\varphi$ nin bir bulanık grup homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $a$, $b$, $c \in G$ için $R(a, b, c) > \theta$ olsun. O halde $\bar{R}$, $G/H$ de bir bulanık ikili işlem olduğundan

$$\bar{R}(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) = \bar{R}([aH], [bH], [cH]) \geq R(a, b, c) > \theta$$

dır. Ayrıca, $\varphi$ nin tanımından $\varphi$ nin örtenliği açıktır. Böylece $\varphi$ bir bulanık grup epimorfizmasıdır. □

**Önerme 3.4.3.** *$\varphi : (G_1, R_1) \to (G_2, R_2)$ bir bulanık grup homomorfizması olsun. Bu durumda*

*(i)* $\varphi(e_1) = e_2$ *dir.*

*(ii)* $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ *dir.*

**İspat.** $(i)$ Her $a,\ b \in G_1$ için $R(a,\ e_1,\ a) > \theta$ olacak biçimde $\exists e_1 \in G_1$ vardır. Bu durumda $\varphi$ bir bulanık grup homomorfizması olduğundan

$$R_1(a, e_1, a) > \theta \Rightarrow R_2(\varphi(a), \varphi(e_1), \varphi(a)) > \theta$$

dır. $(G_2, R_2)$ bulanık grubunun etkisiz elemanının tekliğinden $\varphi(e_1) = e_2$ dir.

$(ii)$ $(G_1, R_1)$ bulanık grup olduğundan her $a \in G_1$ için $R_1(a,\ a^{-1},\ e_1) > \theta$ dır. Bu durumda $\varphi$ bir bulanık grup homomorfizması olduğundan

$$\begin{aligned} R_1(a, a^{-1}, e_1) > \theta \ &\Rightarrow \ R_2(\varphi(a), \varphi(a^{-1}), \varphi(e_1)) > \theta \\ &\Rightarrow \ R_2(\varphi(a), \varphi(a^{-1}), e_2) > \theta \end{aligned}$$

dır. $(G_2, R_2)$ bulanık grubunda her elemanın bir tek tersi olduğundan $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ dir. □

**Teorem 3.4.4.** $\varphi : (G_1, R_1) \to (G_2, R_2)$ *bir bulanık grup homomorfizması olsun. Bu durumda*

$(i)$ *$H_1$, $G_1$ in bir bulanık alt grubu ise $\varphi(H_1)$, $G_2$ nin bir bulanık alt grubudur.*

$(ii)$ *$H_2$, $G_2$ nin bir bulanık alt grubu ise $\varphi^{-1}(H_2)$, $G_1$ in bir bulanık alt grubudur.*

$(iii)$ *$N$, $G_2$ nin bir normal bulanık alt grubu ise $\varphi^{-1}(N)$, $G_1$ in bir normal bulanık alt grubudur.*

$(iv)$ *$Ker\varphi = \{x \in G_1 \mid \varphi(x) = e_2\}$, $G_1$ in bir normal bulanık alt grubudur.*

$(v)$ *$\varphi$ nin bir bulanık grup monomorfizması olması için gerek ve yeter koşul, $Ker\varphi = \{e_1\}$ olmasıdır.*

**İspat.** $(i)$ $H_1$, $G_1$ in bir bulanık alt grubu olsun. Bu durumda her $a,\ b \in H_1$ ve her $c \in G_1$ için $R_1(a, b, c) > \theta$ ise $c \in H_1$ dir. Her $a',\ b' \in \varphi(H_1)$ ve her $c' \in G_2$ için $R_2(a', b', c') > \theta$ olsun. O halde $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ olacak şekilde $a,\ b \in H_1$ vardır.

$H_1$, $G_1$ in bir bulanık alt grubu olduğundan $R_1(a,b,c) > \theta$ dır. Böylece Önerme 3.2.3 ten $\varphi(c) = c' \in \varphi(H_1)$ dır. Ayrıca, her $a' \in \varphi(H_1)$ için $(a')^{-1} \in \varphi(H_1)$ dir. Dolayısıyla $\varphi(H_1)$, $G_2$ nin bir bulanık alt grubudur.

*(ii)* $H_2$, $G_2$ nin bir bulanık alt grubu olsun. Bu durumda her $a'$, $b' \in H_2$ ve her $c' \in G_2$ için $R_2(a', b', c') > \theta$ ise $c' \in H_2$ dir. Her $a$, $b \in \varphi^{-1}(H_2)$ ve her $c \in G_1$ için $R_1(a,b,c) > \theta$ olsun. O halde $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ olacak şekilde $a'$, $b' \in H_2$ vardır. $R_2(a', b', c') > \theta$ olduğundan ve Önerme 3.2.3 ten $c' = \varphi(c) \in H_2$ olup, $c \in \varphi^{-1}(H_2)$ dir. Ayrıca, her $a \in \varphi^{-1}(H_2)$ için $a^{-1} \in \varphi^{-1}(H_2)$ dir. Böylece $\varphi^{-1}(H_2)$, $G_1$ in bir bulanık alt grubudur.

Benzer şekilde *(iii)*, *(iv)* ve *(v)* in de ispatı yapılabilir. □

**Teorem 3.4.5.** (Temel Homomorfizma Teoremi) *$\varphi : (G_1, R_1) \to (G_2, R_2)$ bir bulanık grup epimorfizması olsun. O halde $H = Ker\varphi$ olmak üzere $G_1/H$, $G_2$ ye izomorfiktir.*

**İspat.**

$$\begin{array}{rcrcl} \psi & : & G_1/H & \to & G_2 \\ & & [aH] & \mapsto & \varphi(a) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\psi$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

*(i)* $aH \sim bH$ ve $h \in H$ için $R_1(a,h,b) > \theta$ olsun. O halde $R_2(\varphi(a), \varphi(h), \varphi(b) > \theta$ dır. $h \in Ker\varphi$ olduğundan $\varphi(h) = e_2$ dir. Dolayıyısıyla $\varphi(a) = \varphi(b)$ dir. Böylece $\psi$ iyi tanımlıdır.

*(ii)* Her $y \in G_2$ için $\varphi(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in G_1$ vardır. Dolayısıyla $\psi([xH]) = y$ dir. Bu durumda $\psi$ örtendir.

*(iii)* $\psi([aH]) = \psi([bH])$ olsun. Bu durumda $\varphi(a) = \varphi(b)$ dir. $c \in G_1$ için $R_1(a^{-1}, b, c) > \theta$ ise $R_2(\varphi(a^{-1}), \varphi(b), \varphi(c)) > \theta$ dır. $\varphi(a) = \varphi(b)$ olduğundan $\varphi(c) = e_2$ dir. Böylece $c \in H$ ve $aH \sim bH$ dir. Dolayısıyla $[aH] = [bH]$ dir. Bu durumda $\psi$

birebirdir.

$(iv)$ $R_1([aH],[bH],[cH]) > \theta$ olsun. O halde $R_1(a,h_1,a_1) > \theta,\ R_1(b,h_2,b_1) > \theta$, $R_1(c_1,h_3,c) > \theta$ ve $R_1(a_1,b_1,c_1) > \theta$ olacak biçimde $a_1,\ b_1,\ c_1 \in G$ ve $h_1,\ h_2,\ h_3 \in H$ vardır. $d \in G$ için $R_1(a,b,d) > \theta$ olsun. Teorem 3.3.4 ün ispatına benzer olarak, $\exists h^{'} \in H$ için $R_1(d,h',c) > \theta$ dır. Böylece $dH \sim cH$ ve $\varphi(c) = \varphi(d)$ dir.

$R_1(a,b,d) > \theta$ olduğundan $R_2(\varphi(a),\varphi(b),\varphi(d)) > \theta$ dır. Bu durumda

$$R_2(\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)) > \theta$$

dır. Böylece $\psi$ bir bulanık grup izomorfizmasıdır. $\square$

# 4. BULANIK HALKA

## 4.1 Bulanık Halkanın Yeni Bir Türü

2007 yılında Aktaş ve Çağman [2] de, üçüncü bölümde verilen Yuan ve Lee'nin tanımladığı bulanık grup kavramını kullanarak yeni bir tür bulanık halka kavramını tanımlamış ve bu kavramı karakterize eden önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu bölümde Aktaş ve Çağman'ın tanımladığı bulanık halka tanımı ve bazı temel özellikler verilmiştir.

**Tanım 4.1.1.** *$H$ boştan farklı bir küme ve $S$, $H \times H \times H$ nin bir bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa $S$ ye $H$ de bir bulanık ikili işlem denir:*

(i) *Her $a$, $b \in H$ için $S(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde $\exists c \in H$ vardır.*

(ii) *Her $a$, $b$, $c_1$, $c_2 \in H$ için $S(a, b, c_1) > \theta$ ve $S(a, b, c_2) > \theta$ ise $c_1 = c_2$ dir.*

$H$ boştan farklı bir küme ve $R$ ile $S$, $H$ de iki bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} R : F(H) \times F(H) & \longrightarrow & F(H) \\ (A, B) & \mapsto & R(A, B) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rcl} S : F(H) \times F(H) & \longrightarrow & F(H) \\ (A, B) & \mapsto & S(A, B) \end{array}$$

olup, burada $F(H) = \{A \mid A : H \longrightarrow [0, 1) \text{ bir fonksiyon}\}$ olmak üzere

$$R(A, B)(c) = \bigvee_{a,b \in H} (A(a) \wedge B(b) \wedge R(a, b, c)),$$

$$S(A, B)(c) = \bigvee_{a,b \in H} (A(a) \wedge B(b) \wedge S(a, b, c))$$

dir. $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ ise $R(A, B)$, $S(A, B)$ gösterimleri yerine sırasıyla $a \circ b$ ve $a * b$ kullanılabilir. O halde

$$(a \circ b)(c) = R(a, b, c), \tag{4.1.1}$$

$$(a * b)(c) = S(a,b,c), \tag{4.1.2}$$

$$((a \circ b) \circ c)(z) = \bigvee_{d \in H} (R(a,b,d) \wedge R(d,c,z)), \tag{4.1.3}$$

$$(a \circ (b \circ c))(z) = \bigvee_{d \in H} (R(b,c,d) \wedge R(a,d,z)), \tag{4.1.4}$$

$$(a * (b \circ c))(z) = \bigvee_{d \in H} (R(b,c,d) \wedge S(a,d,z)), \tag{4.1.5}$$

$$((a * b) \circ (a * c))(z) = \bigvee_{d \in H} (S(a,b,d) \wedge S(a,c,e) \wedge R(d,e,z)) \tag{4.1.6}$$

dir.

(4.1.1)−(4.1.6) da verilen notasyonlar kullanılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Tanım 4.1.2.** *$H$ boştan farklı bir küme ve $R$ ile $S$, $H$ de iki bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(H, R, S)$ ye bir bulanık halka denir:*

$(H_1)$ *$(H, R)$ bir değişmeli bulanık gruptur.*

$(H_2)$ *Her $a,\ b,\ c,\ z_1,\ z_2 \in H$ için*

$$((a * b) * c)(z_1) > \theta \ \textit{ve}\ (a * (b * c))(z_2) > \theta \ \textit{ise}\ z_1 = z_2$$

*dir.*

$(H_3)$ *Her $a,\ b,\ c,\ z_1,\ z_2 \in H$ için*

$$((a \circ b) * c)(z_1) > \theta \ \textit{ve}\ ((a * c) \circ (b * c))(z_2) > \theta \ \textit{ise}\ z_1 = z_2,$$

$$(a * (b \circ c))(z_1) > \theta \ \ \textit{ve}\ ((a * b) \circ (a * c))(z_2) > \theta \ \textit{ise}\ z_1 = z_2$$

*dir.*

Her $a, b \in H$ için $(a * b)(c) > \theta \Leftrightarrow (b * a)(c) > \theta$ ise $(H, R, S)$ ye bir *değişmeli (komütatif) bulanık halka* denir. Ayrıca, her $a \in H$ için $(a * e_*)(b) > \theta$ ve $(e_* * a)(c) > \theta$ ise $b = c$ olacak biçimde bir $e_*$ elemanı varsa $(H, R, S)$ ye *birimli bulanık halka* denir. $e_\circ$ etkisiz elemanına da $(H, R, S)$ bulanık halkasının sıfır elemanı denir.

**Teorem 4.1.3.** $(H, R, S)$ *bir bulanık halka olsun. Bu durumda her* $a$, $b \in H$ *için*

$(i)$

$$(a * b)(b) > \theta \text{ ve } (a * b)(e_\circ) > \theta \text{ ise } b = e_\circ,$$

$$(b * a)(b) > \theta \text{ ve}(b * a)(e_\circ) > \theta \text{ ise } b = e_\circ$$

dır.

$(ii)$ $(H, R)$ de $b$ nin tersi $b^{-1}$ olmak üzere

$$(a * b^{-1})(v) > \theta \text{ ve } (a * b)(w) > \theta \text{ ise } v = w^{-1},$$

$$(a^{-1} * b)(s) > \theta \text{ ve } (a * b)(t) > \theta \text{ ise } s = t^{-1}$$

dir.

$(iii)$ $(a^{-1} * b^{-1})(u) > \theta$ ve $(a * b)(v) > \theta$ ise $u = v$ dir.

**İspat.** $(i)$ Tanım 4.1.1 den $b = e_\circ$ dır.

$(ii)$ $c \in H$ için $R(u, v, c) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$((a * b^{-1}) \circ (a * b))(c) \geq (S(a, b^{-1}, u) \wedge S(a, b, v) \wedge R(u, v, c)) > \theta,$$

$$(a * (b^{-1} \circ b))(e_\circ) \geq (R(b^{-1}, b, e_\circ) \wedge S(a, e_\circ, e_\circ)) > \theta$$

dır. $(H_3)$ ten $c = e_\circ$ ve $R(u, v, e_\circ) > \theta$ dır. Böylece $(H, R)$ değişmeli bulanık grup olduğundan $u = v^{-1}$ dir.

Ayrıca, $d \in H$ için $S(u^{'}, v^{'}, c^{'}) > \theta$ olsun. O halde

$$((a^{-1} * b) \circ (a * b))(c^{'}) \geq (S(a^{-1}, b, u^{'}) \wedge S(a, b, v^{'}) \wedge R(u^{'}, v^{'}, c^{'})) > \theta,$$

$$((a^{-1} \circ a) * b)(e_\circ) \geq (R(a^{-1}, a, e_\circ) \wedge S(e_\circ, b, e_\circ)) > \theta$$

dır. $(H_3)$ ten $c^{'} = e_\circ$ ve $R(u^{'}, v^{'}, e_\circ) > \theta$ dır. Böylece $(H, R)$ değişmeli bulanık grup olduğundan $u^{'} = v^{'-1}$ dir.

$(iii)$ $(a^{-1} * b^{-1})(w) > \theta$ olsun. O halde $(ii)$ koşulundan $(a^{-1} * b)(w^{-1}) > \theta$ ve $(i)$ koşulundan $S(e_\circ, b, e_\circ) > \theta$ dır. $z \in H$ için $R(u,\, w^{-1},\, z) > \theta$ olsun. O halde

$$((a * b) \circ (a^{-1} * b))(z) \geq (S(a, b, u) \wedge S(a^{-1}, b, w^{-1}) \wedge R(u, w^{-1}, z)) > \theta,$$

$$((a \circ a^{-1}) * b)(e_\circ) \geq (R(a, a^{-1}, e_\circ) \wedge S(e_\circ, b, e_\circ)) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $(H_3)$ ten $z = e_\circ$ ve $R(u, w^{-1}, e_\circ) > \theta$ dır.

Böylece $(H, R)$ değişmeli bulanık grup olduğundan $v = (u^{-1})^{-1} = u$ dur. $\square$

**Tanım 4.1.4.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $a \in H$ sıfır elemandan farklı $(a \neq e_\circ)$ olmak üzere, $(a * b)(e_\circ) > \theta$ $((b * a)(e_\circ) > \theta)$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $b$ elemanı varsa $a$ ya $H$ nin bir sol (sağ) sıfır böleni denir. Ayrıca, $a \in H$ elemanı hem sol hem de sağ sıfır bölen ise $a$ ya $H$ nin bir sıfır böleni denir.*

**Önerme 4.1.5.** *Bir $(H, R, S)$ bulanık halkasının sıfır bölensiz olması için gerek ve yeter koşul, her $a$, $b$, $c \in H$ $(a \neq e_\circ)$ için*

$$(a * b)(d) > \theta \text{ ve } (a * c)(d) > \theta \text{ ise } b = c \tag{4.1.7}$$

*veya*

$$(b * a)(d) > \theta \text{ ve } (c * a)(d) > \theta \text{ ise } b = c \tag{4.1.8}$$

*olmasıdır.*

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $H$ sıfır bölensiz olsun. $(a*c)(d) > \theta$ ise Teorem 4.1.3 ten $(a*c^{-1})(d^{-1}) > \theta$ dır. $H$ bir bulanık halka olduğundan her $a, b, c \in H$ için

$$((a * b) \circ (a * c^{-1}))(e_\circ) \geq (S(a, b, d) \wedge S(a, c^{-1}, d^{-1}) \wedge R(d, d^{-1}, e_\circ)) > \theta,$$

$$(a * (b \circ c^{-1}))(e_\circ) \geq (R(b, c^{-1}, d) \wedge S(a, d, e_\circ)) > \theta$$

dır. $H$ sıfır bölensiz ve $a \neq e_\circ$ olduğundan $k = e_\circ$ ve böylece $S(a, k, e_\circ) > \theta$ dır. Dolayısıyla $R(b, c^{-1}, e_\circ) > \theta$ dır. Böylece $(H, R)$ bir bulanık grup olduğundan $b = c$ dir.

Benzer şekilde, $(c * a)(d) > \theta$ ise Teorem 4.1.3 ten $(c^{-1} * a)(d^{-1}) > \theta$ dır. $H$ bir bulanık halka olduğundan her $a, b, c \in H$ için

$$((b * a) \circ (c^{-1} * a))(e_\circ) \geq (S(b, a, d) \wedge S(c^{-1}, a, d) \wedge R(d, d^{-1}, e_\circ)) > \theta,$$

$$((b \circ c^{-1}) * a)(e_\circ) \geq (R(b, c^{-1}, d') \wedge S(k', a, e_\circ)) > \theta$$

dır. $H$ sıfır bölensiz ve $a \neq e_\circ$ olduğundan $k' = e_\circ$ ve böylece $S(k',\ a,\ e_\circ) > \theta$ dır. Dolayısıyla $R(b,\ c^{-1},\ e_\circ) > \theta$ dır. $(H, R)$ bir bulanık grup olduğundan $b = c$ dir.

$(\Leftarrow)$ : $a \neq e_\circ$ ve (4.1.7) ve (4.1.8) özellikleri sağlansın. Bu durumda $(a*b)(e_\circ) > \theta$ ve $(a * e_\circ)(e_\circ) > \theta$ ise (4.1.7) den $b = e_\circ$ dır. □

**Tanım 4.1.6.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka olsun. Bu durumda*

- *(i)* *$(a*b)(d) > \theta \Longleftrightarrow (b*a)(d) > \theta$ ise $(H, R, S)$ ye değişmeli bulanık halka denir.*
- *(ii)* *Her $a \in H$ için $(e_* * a)(a) > \theta$ ve $(a * e_*)(a) > \theta$ olacak biçimde $\exists e_* \in H$ var ise $(H, R, S)$ ye birimli bulanık halka denir.*
- *(iii)* *$(H, R, S)$ birimli bulanık halka olsun. Her $a \in H$ için $(a * b)(e_*) > \theta$ ve $(b * a)(e_*) > \theta$ olacak biçimde $\exists b \in H$ var ise $b$ ye $a$ nın bir tersi denir ve $b = a_*^{-1}$ ile gösterilir.*

**Teorem 4.1.7.** *$(H, R, S)$ bulanık halkasının birim elemanı $(e_*)$ var ise $e_*$ tektir.*

**İspat.** $(H, R, S)$ nin birim elemanları $e'_*$, $e''_*$ olsun. O halde

$$(e'_* * e''_*)(e'_*) > \theta \text{ ve } (e'_* * e''_*)(e''_*) > \theta$$

dır. Bu durumda $S(e'_*, e''_*, e'_*) > \theta$ ve $S(e'_*, e''_*, e''_*) > \theta$ dır. Böylece $e'_* = e''_*$ dır. Dolayısıyla $e_*$ tektir. □

## 4.2 Bulanık Alt Halkalar ve Bulanık İdealler

$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $H'$, $H$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $a, b, c \in H'$ için

$$R_{H'}(a, b, c) = R(a, b, c) \text{ ve } S_{H'}(a, b, c) = S(a, b, c)$$

olmak üzere

$$(a \circledcirc b)(c) = R_{H'}(a, b, c) = R(a, b, c), \tag{4.2.1}$$

$$(a \circledast b)(c) = S_{H'}(a, b, c) = S(a, b, c), \tag{4.2.2}$$

$$(a \circledast (b \circledcirc c))(z) = \bigvee_{x \in H'} (R(b, c, x) \wedge S(a, x, z)) \ (\forall z \in H'), \tag{4.2.3}$$

$$((a \circledast b) \circledcirc (a \circledast c))(z) = \bigvee_{x,y \in H'} (S(a, b, x) \wedge S(a, c, y) \wedge R(x, y, z)) \ (\forall z \in H') \tag{4.2.4}$$

dür. O halde aşağıdaki tanımlar ve sonuçlar elde edilir.

**Tanım 4.2.1.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $H'$, $H$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(H', R_{H'}, S_{H'})$ ye $(H, R, S)$ nin bir bulanık alt halkası denir:*

*(i) Her $a, b \in H'$ ve her $c \in H$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ ise $c \in H'$ ve $(a * b)(c) > \theta$ ise $c \in H'$ dür.*

*(ii) $(H', R_{H'}, S_{H'})$ bir bulanık halkadır.*

**Önerme 4.2.2.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $H'$, $H$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. O halde $(H', R_{H'}, S_{H'})$ nün $H$ nin bir bulanık alt halkası olması için gerek ve yeter koşul,*

*(i) Her $a, b \in H'$ ve $c \in H$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ ise $c \in H'$ ve $(a * b)(c) > \theta$ ise $c \in H'$,*

*(ii) Her $a \in H'$ için $a^{-1} \in H'$*

*olmasıdır.*

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $(H', R, S)$, $(H, R, S)$ nin bir bulanık alt halkası olsun. Bu durumda Tanım 4.2.1 den $(i)$ koşulu sağlanır. Ayrıca, $(H, R, S)$ bir bulanık halka olduğundan $(H, R)$ değişmeli bulanık gruptur. Dolayısıyla her $a \in H$ için $a^{-1} \in H$ dir. $H'$, $H$ nin boştan farklı bir alt kümesi olduğundan $a \in H'$ için $a^{-1} \in H'$ dır. Böylece $(ii)$ koşulu da sağlanır.

$(\Leftarrow)$ : $(i)$ ve $(ii)$ koşulları sağlansın. O halde $(H', R)$, $(H, R)$ nin bir bulanık alt grubudur. $(H, R, S)$ bulanık halka olduğundan $(H, R)$ değişmeli bulanık gruptur. Böylece $(H', R)$ de değişmeli bulanık gruptur. Dolayısıyla Tanım 4.1.2 den $(H_1)$ özelliği sağlanır. $H'$, $H$ nin boştan farklı bir alt kümesi olduğundan $(H_2)$ ve $(H_3)$ koşulları da sağlanır. □

**Önerme 4.2.3.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve*

$$C = \{x \mid x \in H \text{ ve herhangi bir } a, c \in H \text{ için } (x * a)(c) > \theta \Longleftrightarrow (a * x)(c) > \theta\}$$

*olsun. O halde $C$, $H$ nin bir bulanık alt halkasıdır.*

**İspat.** $e_\circ \in C$ olduğundan $C \neq \emptyset$ dır.

$(i)$ $x_1$, $x_2 \in C$ ve $x \in H$ için $(x_1 \circ x_2)(x) > \theta$ ise $x \in C$ olmalıdır.

$a$, $c$, $d_1$, $d_2$, $b_1$, $b_2 \in H$ için $S(x, a, c) > \theta$, $S(a, x, d_1) > \theta$, $S(a, x_1, b_1) > \theta$, $S(a, x_2, b_2) > \theta$ ve $R(b_1, b_2, d_2) > \theta$ olsun. $R(x_1, x_2, x) > \theta$ ve $R(x_2, x_1, x) > \theta$ kullanılırsa

$$(a * (x_1 \circ x_2))(d_1) \geq R(x_1, x_2, x) \wedge S(a, x, d_1) > \theta,$$

$$((a * x_1) \circ (a * x_2))(d_2) \geq S(a, x_1, b_1) \wedge S(a, x_2, b_2) \wedge R(b_1, b_2, d_2) > \theta$$

dır. Böylece $d_1 = d_2$ ve $R(b_1, b_2, d_2) > \theta$ dır. $x_1, x_2 \in C$ olduğundan $S(x_2, a, b_2) > \theta$, $S(x_1, a, b_1) > \theta$ ve $R(b_2, b_1, d_1) > \theta$ dır. Bu durumda

$$((x_2 \circ x_1) * a)(c) \geq R(x_2, x_1, x) \wedge S(x, a, c) > \theta,$$

$$((x_2 * a) \circ (x_1 * a))(d_1) \geq S(x_2, a, b_2) \wedge S(x_1, a, b_1) \wedge R(b_2, b_1, d_1) > \theta$$

dır. Böylece $c = d_1$ ve $S(a, x, c) > \theta$ dır. Benzer şekilde, $S(a, x, c) > \theta$ ise $S(x, a, c) > \theta$ dır. O halde $x \in C$ dir.

Bundan başka, $x_1$, $x_2 \in C$ ve $x \in H$ için $(x_1 * x_2)(x) > \theta$ ise $x \in C$ olmalıdır.

$a$, $c$, $d_1$, $d_2$, $b \in H$ için $S(x, a, c) > \theta$, $S(a, x, d_1) > \theta$, $S(a, x_2, b) > \theta$ ve $S(b, x_1, d_2) > \theta$ olsun. $S(x_1, x_2, x) > \theta$ ve $S(x_2, x_1, x) > \theta$ kullanılırsa

$$(a * (x_2 * x_1))(d_1) \geq S(x_2, x_1, x) \wedge S(a, x, d_1) > \theta,$$

$$((a * x_2) * x_1)(d_2) \geq S(a, x_2, b) \wedge S(b, x_1, d_2) > \theta$$

dır. Böylece $d_1 = d_2$ ve $S(b, x_1, d_1) > \theta$ dır. $x_1, x_2 \in C$ olduğundan $S(x_2, a, b) > \theta$, $S(x_1, b, d_1) > \theta$ dır. Bu durumda

$$((x_1 * x_2) * a)(c) \geq S(x_1, x_2, x) \wedge S(x, a, c) > \theta,$$

$$(x_1 * (x_2 * a))(d_1) \geq S(x_2, a, b) \wedge S(x_1, b, d_1) > \theta$$

dır. Böylece $c = d_1$ ve $S(a, x, c) > \theta$ dır. Benzer şekilde, $S(a, x, c) > \theta$ ise $S(x, a, c) > \theta$ dır. O halde $x \in C$ dir.

$(ii)$ $x \in C$ ise $x^{-1} \in C$ olmalıdır.

$c$, $b$, $d \in H$ için $R(a, x^{-1}, c) > \theta$, $R(c, x, b) > \theta$ ve $R(x^{-1}, a, d) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$((a \circ x^{-1}) \circ x)(b) \geq R(a, x^{-1}, c) \wedge R(c, x, b) > \theta,$$

$$(a \circ (x^{-1} \circ x))(a) \geq R(x^{-1}, x, e_\circ) \wedge R(a, e_\circ, a) > \theta$$

dır. Böylece $b = a$ ve $R(c, x, a) > \theta$ dır. Ayrıca, $R(x, c, a) > \theta$ dır. Bu durumda

$$(x^{-1} \circ (x \circ c))(d) \geq R(x, c, a) \wedge R(x^{-1}, a, d) > \theta,$$

$$((x^{-1} \circ x) \circ c)(c) \geq R(x^{-1}, x, e_\circ) \wedge R(e_\circ, c, c) > \theta$$

dır. Böylece $c = d$ ve $R(x^{-1}, a, c) > \theta$ dır. Diğer taraftan, $c, b, d \in H$ için $R(x^{-1}, a, c) > \theta$, $R(x, c, b) > \theta$ ve $R(a, x^{-1}, d) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$(x \circ (x^{-1} \circ a))(b) \geq R(x^{-1}, a, c) \wedge R(x, c, b) > \theta,$$

$$((x \circ x^{-1}) \circ a)(a) \geq R(x, x^{-1}, e_\circ) \wedge R(e_\circ, a, a) > \theta$$

dır. Böylece $b = a$ ve $R(x, c, a) > \theta$ dır. Ayrıca, $R(c, x, a) > \theta$ dır. Bu durumda

$$((c \circ x) \circ x^{-1})(d) \geq R(c, x, a) \wedge R(a, x^{-1}, d) > \theta,$$

$$(c \circ (x \circ x^{-1}))(c) \geq R(x, x^{-1}, e_\circ) \wedge R(c, e_\circ, c) > \theta$$

dır. Böylece $c = d$ ve $R(a, x^{-1}, c) > \theta$ dır.

Dolayısıyla $x^{-1} \in C$ dir. Böylece Önerme 4.2.2 den $C$, $H$ nin bir bulanık alt halkasıdır. □

**Tanım 4.2.4.** *$I$, $H$ bulanık halkasının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $I$ ya $H$ nin bir bulanık ideali denir:*

*(i) Her $x$, $y \in I$ ve her $z \in H$ için $(x \circ y)(z) > \theta$ ise $z \in I$ dır.*

*(ii) Her $x \in I$ için $x^{-1} \in I$ dır.*

*(iii) Her $s \in I$ ve her $x$, $y$, $r \in H$ için*

$$(r * s)(x) > \theta \text{ ise } x \in I \text{ ve } (s * r)(y) > \theta \text{ ise } y \in I$$

*dır.*

**Uyarı 4.2.5.** *Yukarıdaki tanıma göre, $H$ bulanık halkasının bir bulanık ideali $H$ nin bir bulanık alt halkasıdır.*

**Teorem 4.2.6.** *$I_i$ $(i \in \triangle)$, $H$ nin bir takım bulanık idealleri olsun. O halde $\bigcap_{i\in\triangle} I_i$, $H$ nin bir bulanık idealidir.*

$I$, $H$ bulanık halkasının bir bulanık ideali ve $\Omega = \{a \circ I \mid a \in H\}$ olsun. Bu durumda $\Omega$ üzerinde

$$a_1 \circ I \sim a_2 \circ I :\Longleftrightarrow \exists u \in I \text{ için } R(a_1^{-1}, a_2, u) > \theta$$

şeklinde bir " $\sim$ " bağıntısı tanımlanabilir.

**Teorem 4.2.7.** *$\Omega$ üzerinde tanımlanan " $\sim$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

**İspat.** Teorem 3.3.2 nin ispatına benzer olarak gösterilebilir. □

Bulanık halkalar teorisinde bulanık idealler, bulanık gruplar teorisindeki normal bulanık alt gruplar gibi benzer bir rol oynar. Örneğin, $(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $I$ da $H$ nin bir bulanık ideali olsun. Bu durumda $(I, R)$, $(H, R)$ nin bir bulanık alt grubudur. $(H, R)$ değişmeli olduğundan $(I, R)$, $(H, R)$ nin bir normal bulanık alt grubudur. Sonuç olarak, aşağıdaki işlemlerle $H/I$ bölüm bulanık grubu tanımlanabilir:

$$([a \circ I] \oplus [b \circ I])(c \circ I) = \bar{R}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) = \bigvee_{(a',b',c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} R(a', b', c'),$$

$$([a \circ I] \otimes [b \circ I])(c \circ I] = \bar{S}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) = \bigvee_{(a',b',c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} S(a', b', c').$$

Bu işlemler dikkate alınırsa $H/I$ bir bulanık halka olarak yapılandırılabilir. Ayrıca, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(([a \circ I] \oplus [b \circ I]) \oplus [c \circ I])([d \circ I]) = \bigvee_{x \in H} (\bar{R}([a \circ I], [b \circ I], [x \circ I]) \wedge \bar{R}([x \circ I], [c \circ I], [d \circ I])),$$

$$([a \circ I] \oplus ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([y \circ I]) = \bigvee_{x \in H} (\bar{R}([b \circ I], [c \circ I], [x \circ I]) \wedge \bar{R}([a \circ I], [x \circ I], [y \circ I])),$$

$$([a \circ I] \otimes ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([z \circ I]) = \bigvee_{d \in H} (\bar{R}([b \circ I], [c \circ I], [d \circ I]) \wedge \bar{S}([a \circ I], [d \circ I], [z \circ I])),$$

$$(([a\circ I]\otimes[b\circ I])\oplus([a\circ I]\otimes[c\circ I]))([z\circ I])=\bigvee_{d\in H}(\bar{S}([a\circ I],[b\circ I],[d\circ I])$$
$$\wedge\,\bar{S}([a\circ I],[c\circ I],[y\circ I])$$
$$\wedge\,\bar{R}([d\circ I],[y\circ I],[z\circ I])).$$

**Teorem 4.2.8.** *$(H,R,S)$ bir bulanık halka ve $I$, $H$ nin bir bulanık ideali olsun. Bu durumda $(H/I,\bar{R})$ bölüm bulanık grubu*

$$([a\circ I]\otimes[b\circ I])(c\circ I)=\bar{S}([a\circ I],[b\circ I],[c\circ I])=\bigvee_{(a',b',c')\in\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c}}S(a',b',c')$$

*ile bir bulanık halkadır.*

**İspat.** $(H/I,\bar{R})$ bir bulanık grup olmak üzere, $([a\circ I]\oplus[b\circ I])([c\circ I])>\theta$ olsun. $(H,R)$ bir değişmeli bulanık grup olduğundan

$$\begin{aligned}([a\circ I]\oplus[b\circ I])([c\circ I])&=\bar{R}([a\circ I],[b\circ I],[c\circ I])\\&=\bigvee_{(a',b',c')\in\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c}}R(a',b',c')>\theta\\&\Leftrightarrow\bigvee_{(b',a',c')\in\bar{b}\times\bar{a}\times\bar{c}}R(b',a',c')\\&=\bar{R}([b\circ I],[a\circ I],[c\circ I])\\&=([b\circ I]\oplus[a\circ I])([c\circ I])>\theta\end{aligned}$$

dır. Böylece $(H/I,\bar{R})$ bir değişmeli bulanık gruptur, yani $(H_1)$ koşulu sağlanır.

$(([a\circ I]\oplus[b\circ I])\otimes[c\circ I])([d\circ I])>\theta$ ve $(([a\circ I]\otimes[c\circ I])\oplus([b\circ I]\otimes[c\circ I]))([y\circ I])>\theta$ olsun. O halde $a_1,\ a_1',\ b_1,\ b_1',\ c_1,\ c_1',\ d_1,\ y_1\in H$ için $a_1\circ I\sim a_1'\circ I\sim a\circ I$, $b_1\circ I\sim b_1'\circ I\sim b\circ I$, $c_1\circ I\sim c_1'\circ I\sim c\circ I$, $d_1\circ I\sim d\circ I$, $y_1\circ I\sim y\circ I$ olmak üzere

$$R(a_1,b_1,x_1')\wedge S(x_1',c_1,d_1)>\theta,$$

$$S(a_1',c_1',x_2')\wedge S(b_1',c_1',x_3')\wedge R(x_2',x_3',y_1)>\theta,$$

$$R(a_1',u_1,a_1)>\theta,\ \ R(b_1',u_2,b_1)>\theta,\ \ R(c_1',u_3,c_1)>\theta$$

olacak biçimde $u_1,\ u_2,\ u_3 \in I$ ve $x_1^{'},\ x_2^{'},\ x_3^{'} \in H$ vardır. $R(a_1^{'}, b_1^{'}, z_1) > \theta$ olacak biçimde $z_1 \in H$ olsun. Bu durumda $R(a_1, b_1, x_1^{'}) > \theta$, $R(a_1^{'}, u_1, a_1) > \theta$, $R(a_1^{'}, b_1^{'}, z_1) > \theta$, $R(b_1^{'}, u_2, b_1) > \theta$ ve Teorem 3.3.4 ün ispatından $R(z_1, u, x_1^{'}) > \theta$ olacak biçimde $\exists u \in I$ vardır.

$I$ bir bulanık ideal olduğundan $S(z_1, u_3, u_3^{'}) > \theta$, $S(u, c_1^{'}, u^{'}) > \theta$, $S(u, u_3, u_5) > \theta$, $R(u_3^{'}, u^{'} u_6) > \theta$, ve $R(u_6, u_5, u_7) > \theta$ olacak biçimde $u_3^{'}, u^{'}, u_5, u_6, u_7 \in I$ vardır. $S(z_1, c_1^{'}, z_2) > \theta$ olacak biçimde $z_2 \in H$ olsun. $S(x_1^{'}, c_1, d_1) > \theta$, $R(z_1, u, x_1^{'}) > \theta$, $R(c_1^{'}, u_3, c_1) > \theta$, $S(z_1, c_1^{'}, z_2) > \theta$ ve Teorem 3.3.4 ün ispatından $R(z_2, u_7, d_1) > \theta$ olacak biçimde $u_7 \in I$ vardır.

$$((a_1^{'} \circ b_1^{'}) * c_1^{'})(z_2) \geq (R(a_1^{'}, b_1^{'}, z_1) \wedge S(z_1, c_1^{'}, z_2)) > \theta,$$

$$((a_1^{'} * c_1^{'}) \circ (b_1^{'} * c_1^{'}))(y_1) \geq (S(a_1^{'}, c_1^{'}, x_2^{'}) \wedge S(b_1^{'}, c_1^{'}, x_3^{'}) \wedge R(x_2^{'}, x_3^{'}, y_1)) > \theta$$

olduğundan $z_2 = y_1$ ve $R(y_1, u_7, d_1) > \theta$ dır. O halde $y_1 \circ I \sim d \circ I$ olur ve böylece $[y \circ I] = [d \circ I]$ dır.

Benzer şekilde, $([a \circ I] \otimes ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([d \circ I]) > \theta$ ve $(([a \circ I] \otimes [b \circ I]) \oplus ([a \circ I] \otimes [c \circ I]))([y \circ I]) > \theta$ ise $[y \circ I] = [d \circ I]$ olur. Dolayısıyla $(H_3)$ koşulu da sağlanır.

Diğer taraftan $(H_2)$ koşulunun geçerli olduğu Teorem 3.3.5 in ispatına benzer olarak gösterilebilir. □

**Tanım 4.2.9.** *$(H/I, \bar{R}, \bar{S})$ ye $H$ nin $I$ bulanık idealine göre bir bölüm bulanık halkası denir.*

## 4.3 Bulanık Halka Homomorfizmaları

**Tanım 4.3.1.** *$(H_1, R_1, S_1)$, $(H_2, R_2, S_2)$ iki bulanık halka ve $\varphi : H_1 \to H_2$ bir fonksiyon olsun. Her $a$, $b$, $c \in H_1$ için* *(i)* $R_1(a,b,c) > \theta \Rightarrow R_2(\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)) > \theta,$

*(ii)* $S_1(a,b,c) > \theta \Rightarrow S_2(\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)) > \theta$

*ise $\varphi$ ye bir bulanık halka homomorfizması denir. Ayrıca, $\varphi$ birebir ise $\varphi$ ye bir bulanık halka monomorfizması, $\varphi$ örten ise $\varphi$ ye bir bulanık halka epimorfizması ve $\varphi$ hem birebir hem de örten ise $\varphi$ ye bir bulanık halka izomorfizması denir.*

**Önerme 4.3.2.** $\varphi : (H_1, R_1, S_1) \to (H_2, R_2, S_2)$ *bir bulanık halka homomorfizması olsun. Bu durumda*

*(i)* $\varphi(e_1) = e_2$ *dir.*

*(ii)* $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ *dir.*

**İspat.** *(i)* $\varphi$ bir bulanık halka homomorfizması olduğundan her $a \in H_1$ için

$$R_1(a, e_1, a) > \theta \Longrightarrow R_2(\varphi(a), \varphi(e_1), \varphi(a)) > \theta$$

ve $\varphi(a) \in H_2$ için $R_2(\varphi(a), e_2, \varphi(a)) > \theta$ dır. Bu durumda

$$((\varphi(a)^{-1} \circ \varphi(a)) \circ \varphi(e_1)) \geq R_2(\varphi(a)^{-1}, \varphi(a), \varphi(e_1)) \wedge R_2(\varphi(e_1), \varphi(e_1), e_2) > \theta,$$

$$(\varphi(a)^{-1} \circ (\varphi(a) \circ \varphi(e_1)))(e_2) \geq R_2(\varphi(a), \varphi(e_1), \varphi(a)) \wedge R_2(\varphi(a)^{-1}, \varphi(a), e_2) > \theta$$

olduğundan $\varphi(e_1) = e_2$ dir.

*(ii)* $\varphi$ bir bulanık halka homomorfizması olduğundan her $a \in H_1$ için

$$R_1(a, a^{-1}, e_1) > \theta \Rightarrow R_2(\varphi(a), \varphi(a^{-1}), \varphi(e_1)) > \theta$$

dır. *(i)* den $\varphi(e_1) = e_2$ olduğunu biliyoruz. O halde $R_2(\varphi(a), \varphi(a^{-1}), e_2) > \theta$ dır. Böylece $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ dir. □

**Teorem 4.3.3.** $\varphi : (H_1, R_1, S_1) \longrightarrow (H_2, R_2, S_2)$ *bir bulanık halka homomorfizması olsun. Bu durumda* *(i)* $\operatorname{Im}\varphi$*, $H_2$ nin bir bulanık alt halkasıdır.*

*(ii)* $Ker\varphi$*, $H_1$ in bir bulanık idealidir.*

**İspat.** *(i)* $\varphi(e_1) = e_2 \in \operatorname{Im}\varphi$ ve $\operatorname{Im}\varphi \neq \emptyset$ dır. $R_1(x_1, x_2, x) > \theta$ olacak biçimde $x$, $x_1$, $x_2 \in H_1$ var ise $\varphi$ bir bulanık halka homomorfizması olduğundan

$$R_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x)) > \theta$$

dır. Böylece $\varphi(x) \in \operatorname{Im}\varphi$ dir. $x^{-1} \in H_1$ için $R_1(x, x^{-1}, e_1) > \theta$ olsun. O halde $R_2(\varphi(x), \varphi(x^{-1}), \varphi(e_1)) > \theta$ dır. Önerme 4.3.2 den

$$R_2(\varphi(x), \varphi(x^{-1}), \varphi(e_1)) = R_2(\varphi(x), \varphi(x)^{-1}, e_2) > \theta$$

dır. Dolayısıyla $\varphi(x)^{-1} \in \operatorname{Im}\varphi$ dir.

*(ii)* $e_1 \in Ker\varphi$ ve $Ker\varphi \neq \emptyset$ dır. $x$, $y \in Ker\varphi$ için $R_1(x, y, z) > \theta$ olsun. Bu durumda $\varphi$ bir bulanık halka homomorfizması olduğundan $R_2(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)) = R_2(e_2, e_2, \varphi(z)) > \theta$ dır. Böylece $\varphi(z) = e_2$ olup, $z \in Ker\varphi$ dir. Ayrıca, $x \in Ker\varphi$ için $R_1(x, x^{-1}, e_1) > \theta$ ise $R_2(\varphi(x), \varphi(x^{-1}), \varphi(e_1)) = R_2(e_2, \varphi(x^{-1}), e_2) > \theta$ dır. Dolayısıyla $\varphi(x^{-1}) = e_2$, yani $x^{-1} \in Ker\varphi$ dir. Diğer taraftan $x \in Ker\varphi$ ve $r \in H_1$ için $S_1(x, r, u) > \theta$ ise $S_2(\varphi(x), \varphi(r), \varphi(u)) > \theta$ dır. $\varphi(x) = e_2$ olduğundan $S_2(e_2, \varphi(r), \varphi(u)) > \theta$ dır. O halde Teorem 4.1.3 ten $\varphi(u) = e_2$ dir. Benzer şekilde, $x \in Ker\varphi$ ve $r \in H_1$ için $S_1(r, x, v) > \theta$ ise $S_2(\varphi(r), \varphi(x), \varphi(v)) > \theta$ dır. $\varphi(x) = e_2$ olduğundan $S_2(\varphi(r), e_2, \varphi(v)) > \theta$ dır. Bu durumda Teorem 4.1.3 ten $\varphi(v) = e_2$ dir. Böylece $Ker\varphi$, $H_1$ in bir bulanık idealidir. □

**Teorem 4.3.4.** $\varphi : (H_1, R_1, S_1) \longrightarrow (H_2, R_2, S_2)$ *bir bulanık halka epimorfizması olsun. O halde $N = Ker\varphi$ olmak üzere $H_1/N$, $H_2$ ye izomorfiktir.*

**İspat.** Teorem 3.4.5 ten

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & H_1/N & \to & H_2 \\ & & [r \circ N] & \mapsto & \varphi(r) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\psi$ fonksiyonu bir bulanık grup monomorfizmasıdır. Bu durumda $S_1([a \circ N], [b \circ N], [c \circ N]) > \theta$ ise $S_2(\psi([a \circ N]), \psi([b \circ N]), \psi([c \circ N])) > \theta$ olduğu gösterilmelidir. $S_1([a \circ N], [b \circ N], [c \circ N]) > \theta$ olsun. O halde $S_1(a, n_1, a_1) > \theta$, $S_1(b, n_2, b_1) > \theta$, $S_1(c, n_3, c_1) > \theta$, $S_1(a_1, b_1, c_1) > \theta$ olacak biçimde $a_1$, $b_1$, $c_1 \in H_1$ ve $n_1$, $n_2$, $n_3 \in N$ vardır. $S_1(a, b, d) > \theta$ olacak biçimde $d \in H_1$ olsun. Teorem 3.3.4 ün ispatına benzer olarak $S_1(d, n^{'}, c) > \theta$ olacak biçimde $\exists n^{'} \in N$ vardır. Bu durumda $d \circ N \sim c \circ N$ ve $\varphi(c) = \varphi(d)$ dir. $S_1(a,\, b,\, d) > \theta$ olduğundan $S_2(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(d)) > \theta$ ve dolayısıyla $S_2(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) > \theta$ elde edilir. Böylece $\psi$ bir bulanık halka izomorfizmasıdır. $\square$

# 5. BULANIK HALKALARA YENİ BİR BAKIŞ

## 5.1 Yeni Tür Bulanık Halkalar İle İlgili Örnek

2012 yılında Uçkun [12] de, üçüncü ve dördüncü bölümde tanımları verilen bulanık ikili işlem, yeni tür bulanık grup ve yeni tür bulanık halka ile ilgili bir örnek vermiş ve ayrıca yeni tür iki bulanık halka arasındaki homomorfizma teoremlerini ispatlamıştır. Bu bölümde Uçkun'un yeni tür bulanık grup ve yeni tür bulanık halka örneği ve yeni tür bulanık halkalar ile ilgili homomorfizma teoremleri verilmiştir.

**Örnek 5.1.1.** $H = \{[\bar{0},\bar{0},\bar{0}],\ [\bar{1},\bar{0},\bar{0}],\ [\bar{1},\bar{1},\bar{0}],\ [\bar{0},\bar{1},\bar{0}]\} \subset (\mathbb{Z}_2)_{1\times 3}$ *boştan farklı bir küme olsun. Hesaplamaları kolay bir şekilde yapabilmek için aşağıdaki gösterimler kullanılabilir:*

$a = [\bar{0},\ \bar{0},\ \bar{0}]$, $b = [\bar{1},\ \bar{0},\ \bar{0}]$, $c = [\bar{1},\ \bar{1},\ \bar{0}]$, $d = [\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{0}]$.

$\theta = 0.7$ *olmak üzere, $R$ ve $S$ aşağıda verildiği gibi $H$ de tanımlanan bulanık ikili işlemler olsun.*

$$
\begin{array}{llll}
R(a,a,a) = 0.9 & R(b,a,a) = 0.2 & R(c,a,a) = 0.2 & R(d,a,a) = 0.4 \\
R(a,a,b) = 0.3 & R(b,a,b) = 0.9 & R(c,a,b) = 0.3 & R(d,a,b) = 0.1 \\
R(a,a,c) = 0.2 & R(b,a,c) = 0.4 & R(c,a,c) = 0.9 & R(d,a,c) = 0.2 \\
R(a,a,d) = 0.0 & R(b,a,d) = 0.2 & R(c,a,d) = 0.2 & R(d,a,d) = 0.8 \\
R(a,b,a) = 0.2 & R(b,b,a) = 0.8 & R(c,b,a) = 0.4 & R(d,b,a) = 0.1 \\
R(a,b,b) = 0.8 & R(b,b,b) = 0.2 & R(c,b,b) = 0.1 & R(d,b,b) = 0.4 \\
R(a,b,c) = 0.2 & R(b,b,c) = 0.1 & R(c,b,c) = 0.9 & R(d,b,c) = 0.3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
R(a,b,d)=0.2 & R(b,b,d)=0.3 & R(c,b,d)=0.4 & R(d,b,d)=0.9 \\
R(a,c,a)=0.1 & R(b,c,a)=0.4 & R(c,c,a)=0.8 & R(d,c,a)=0.2 \\
R(a,c,b)=0.3 & R(b,c,b)=0.9 & R(c,c,b)=0.1 & R(d,c,b)=0.1 \\
R(a,c,c)=0.9 & R(b,c,c)=0.4 & R(c,c,c)=0.0 & R(d,c,c)=0.3 \\
R(a,c,d)=0.1 & R(b,c,d)=0.1 & R(c,c,d)=0.3 & R(d,c,d)=0.9 \\
R(a,d,a)=0.4 & R(b,d,a)=0.2 & R(c,d,a)=0.2 & R(d,d,a)=0.8 \\
R(a,d,b)=0.1 & R(b,d,b)=0.9 & R(c,d,b)=0.1 & R(d,d,b)=0.4 \\
R(a,d,c)=0.3 & R(b,d,c)=0.3 & R(c,d,c)=0.9 & R(d,d,c)=0.2 \\
R(a,d,d)=0.9 & R(b,d,d)=0.1 & R(c,d,d)=0.3 & R(d,d,d)=0.1
\end{array}
$$

*dir. Bu durumda*

$(G_1)$ *Her* $a,\ b,\ c,\ z_1,\ z_2 \in H$ *için*

$$((a \circ b) \circ c))(z_1) > 0.7 \text{ ve } (a \circ (b \circ c))(z_2) > 0.7 \text{ ise } z_1 = z_2$$

*dir,*

$(G_2)$ *Her* $a \in H$ *için*

$$(e_\circ \circ a)(a) > 0.7 \text{ ve } (a \circ e_\circ)(a) > 0.7$$

*olacak biçimde* $e_\circ \in H$ *vardır,*

$(G_3)$ *Her* $a \in H$ *için*

$$(a \circ b)(e_\circ) > 0.7 \text{ ve } (b \circ a)(e_\circ) > 0.7$$

*olacak biçimde* $b \in H$ *vardır.*

*Yukarıdaki koşullar sağlandığından* $(H, R)$ *bir bulanık gruptur.*

*Bundan başka*

$$
\begin{array}{llll}
S(a,a,a)=0.8 & S(b,a,a)=0.9 & S(c,a,a)=0.9 & S(d,a,a)=0.8 \\
S(a,a,b)=0.1 & S(b,a,b)=0.3 & S(c,a,b)=0.2 & S(d,a,b)=0.1 \\
S(a,a,c)=0.3 & S(b,a,c)=0.1 & S(c,a,c)=0.4 & S(d,a,c)=0.3 \\
S(a,a,d)=0.5 & S(b,a,d)=0.2 & S(c,a,d)=0.3 & S(d,a,d)=0.2 \\
S(a,b,a)=0.9 & S(b,b,a)=0.8 & S(c,b,a)=0.8 & S(d,b,a)=0.9 \\
S(a,b,b)=0.2 & S(b,b,b)=0.4 & S(c,b,b)=0.3 & S(d,b,b)=0.2 \\
S(a,b,c)=0.4 & S(b,b,c)=0.2 & S(c,b,c)=0.2 & S(d,b,c)=0.4 \\
S(a,b,d)=0.1 & S(b,b,d)=0.1 & S(c,b,d)=0.4 & S(d,b,d)=0.1 \\
S(a,c,a)=0.9 & S(b,c,a)=0.8 & S(c,c,a)=0.8 & S(d,c,a)=0.9 \\
S(a,c,b)=0.1 & S(b,c,b)=0.5 & S(c,c,b)=0.1 & S(d,c,b)=0.3 \\
S(a,c,c)=0.2 & S(b,c,c)=0.1 & S(c,c,c)=0.2 & S(d,c,c)=0.5 \\
S(a,c,d)=0.4 & S(b,c,d)=0.2 & S(c,c,d)=0.3 & S(d,c,d)=0.2 \\
S(a,d,a)=0.8 & S(b,d,a)=0.9 & S(c,d,a)=0.9 & S(d,d,a)=0.8 \\
S(a,d,b)=0.4 & S(b,d,b)=0.3 & S(c,d,b)=0.4 & S(d,d,b)=0.1 \\
S(a,d,c)=0.3 & S(b,d,c)=0.1 & S(c,d,c)=0.1 & S(d,d,c)=0.3 \\
S(a,d,d)=0.1 & S(b,d,d)=0.4 & S(c,d,d)=0.3 & S(d,d,d)=0.4
\end{array}
$$

*tür. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlandığında* $(H,R,S)$ *bir bulanık halkadır:*

$(H_1)$ $(H,R)$ *bir değişmeli bulanık gruptur.*

$(H_2)$ *Her* $a,\ b,\ c,\ z_1,\ z_2 \in H$ *için*

$$((a*b)*c)(z_1) > 0.7 \text{ ve } (a*(b*c))(z_2) > 0.7 \text{ ise } z_1 = z_2$$

*dir.*

$(H_3)$ *Her* $a,\ b,\ c,\ z_1,\ z_2 \in H$ *için*

*(i)* $(a*(b\circ c))(z_1) > 0.7$ *ve* $((a*b)\circ(a*c))(z_2) > 0.7$ *ise* $z_1 = z_2$,

*(ii)* $((a\circ b)*c)(z_1) > 0.7$ *ve* $((a*c)\circ(b*c))(z_2) > 0.7$ *ise* $z_1 = z_2$.

*dir.*

## 5.2 Homomorfizma Teoremleri

**Teorem 5.2.1.** *$(H_1, R_1, S_1)$ ve $(H_2, R_2, S_2)$ bulanık iki halka ve $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ bir bulanık homomorfizma olsun. Bu durumda*

- *(i) $J$, $H_2$ nin bir bulanık ideali ise $\varphi^{-1}(J)$, $H_1$ in $Ker\varphi$ yi içeren bir bulanık idealidir.*
- *(ii) $I$, $H_1$ in $Ker\varphi$ yi içeren bir bulanık ideali ise $\varphi^{-1}(\varphi(I)) = I$ dır.*
- *(iii) $\varphi$ örten ve $I$, $H_1$ in bir bulanık ideali ise $\varphi(I)$ da $H_2$ nin bir bulanık idealidir.*
- *(iv) $\varphi$, $H_1$ in $Ker\varphi$ yi içeren bulanık idealleri ile $H_2$ nin bulanık idealleri arasında içermeyi koruyan bir birerbir eşleme belirler. Başka bir deyişle $I$, $H_1$ in $Ker\varphi$ yi içeren bir bulanık ideali ise $\varphi(I)$ da $H_2$ nin bir bulanık idealidir ve ayrıca $J$ de $H_2$ nin bir bulanık ideali ise $\varphi^{-1}(J)$ de $H_1$ in bir bulanık idealidir.*

**İspat.** *(i)* $J$, $H_2$ nin bir bulanık ideali olsun. $\varphi(e_\circ) = e'_\circ \in J$ olduğundan $e_\circ \in \varphi^{-1}(J)$ olup, $\varphi^{-1}(J) \neq \emptyset$ dir. $R_1(x_1, x_2, h) > \theta$ olacak biçimde $x_1$, $x_2 \in \varphi^{-1}(J)$ ve $h \in H_1$ olsun. $\varphi$ bir bulanık homomorfizma olduğundan $R_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(h)) > \theta$ dır. Bu durumda $\varphi(h) \in J$ ve dolayısıyla $h \in \varphi^{-1}(J)$ dir.

$x \in \varphi^{-1}(J)$ olsun. O halde $\varphi(x) \in J$ ve $J$, $H_2$ nin bir bulanık ideali olduğundan $(\varphi(x))^{-1} \in J$ dir. Bu durumda $\varphi$ bir bulanık homomorfizma olduğundan $\varphi(x^{-1}) \in J$ olur ki, $x^{-1} \in \varphi^{-1}(J)$ dir.

Diğer taraftan $S_1(x, h, a) > \theta$ olacak biçimde $x \in \varphi^{-1}(J)$ ve $a$, $h \in H_1$ olsun. $\varphi$ bir bulanık homomorfizma olduğundan $S_2(\varphi(x), \varphi(h), \varphi(a)) > \theta$ olup, $\varphi(x) \in J$ ve $J$, $H_2$ nin bir bulanık ideali olduğundan $\varphi(a) \in J$, $a \in \varphi^{-1}(J)$ dir. Benzer şekilde

$x \in \varphi^{-1}(J)$ ve $b$, $h \in H_1$ için $S_1(h, x, b) > \theta$ ise $b \in \varphi^{-1}(J)$ dir. Böylece $\varphi^{-1}(J)$, $H_1$ in bir bulanık idealidir. Ayrıca $x \in Ker\varphi$ olsun. $J$, $H_2$ nin bir bulanık ideali olduğundan $\varphi(x) = e'_\circ \in J$ ve $x \in \varphi^{-1}(J)$ dir. Dolayısıyla $Ker\varphi \subseteq \varphi^{-1}(J)$ dir.

$(ii)$ Her $x \in I$ için $\varphi(x) \in \varphi(I)$ olduğundan $x \in \varphi^{-1}(\varphi(I))$ dır. Böylece $I \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(I))$ dır. $x \in \varphi^{-1}(\varphi(I))$ olsun. Bu durumda $\varphi(x) \in \varphi(I)$ ve dolayısıyla $\varphi(x) = \varphi(a)$ olacak biçimde $a \in I$ vardır. $\varphi(x) = \varphi(a)$ olduğundan $R_2(\varphi(a), (\varphi(x))^{-1}, e'_\circ) > \theta$ dır. $H_1$ bir bulanık halka ve $a$, $x \in H_1$ olduğundan $R_1(a, x^{-1}, c) > \theta$ olacak biçimde $c \in H_1$ vardır. $\varphi$ bir bulanık homomorfizma olduğundan

$$R_2(\varphi(a), \varphi(x^{-1}), \varphi(c)) = R_2(\varphi(a), (\varphi(x))^{-1}, \varphi(c)) > \theta$$

dır. Böylece $\varphi(c) = e'_\circ$ yani $c \in Ker\varphi$ dir. $Ker\varphi \subseteq I$ olduğundan $c \in I$ dır. $I$, $H_1$ in bir bulanık ideali ve $R_1(a, x^{-1}, c) > \theta$ olduğundan $x \in I$ dır. Dolayısıyla $\varphi^{-1}(\varphi(I)) \subseteq I$ dır.

$(iii)$ $\varphi$ örten ve $I$, $H_1$ in bir bulanık ideali olsun. Bu durumda $\varphi(I)$ nın $H_2$ nin bir bulanık ideali olduğu kolayca gösterilebilir.

$(iv)$ $M$, $H_1$in $Ker\varphi$ yi içeren bütün bulanık ideallerinin bir kümesi ve $M'$ de $H_2$ nin bütün bulanık ideallerinin bir kümesi olsun. Her $I \in M$ için $\psi(I) = \varphi(I)$ şeklinde tanımlanan $\psi : M \to M'$ fonksiyonunu ele alalım. $\varphi$ iyi tanımlı olduğundan $\psi$ de iyi tanımlıdır. $I_1$, $I_2 \in M$ için $\varphi(I_1) = \varphi(I_2)$ olsun. $\varphi^{-1}(\varphi(I_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(I_2))$ olduğundan $(ii)$ gereğince $I_1 = I_2$ elde edilir. Dolayısıyla $\psi$ birebirdir. $J \in M'$ olsun. $(ii)$ den $\varphi^{-1}(J) \in M$ dir. $y \in \varphi(\varphi^{-1}(J))$ olsun. Bu durumda $y = \varphi(x)$ olacak biçimde bir $x \in \varphi^{-1}(J)$ vardır. $y = \varphi(x)$ olduğundan $\phi(x) \in J$ olup, $\varphi(\varphi^{-1}(J)) \subseteq J$ dir. Diğer taraftan $x \in J$ olsun. $x \in J \subseteq H_2 = \varphi(H_1)$ olduğundan $\varphi(a) = x$ olacak biçimde $a \in H_1$ vardır. O halde $\varphi(a) \in J$ ve dolayısıyla $a \in \varphi^{-1}(J)$ dir. Böylece $x = \varphi(a) \in \varphi(\varphi^{-1}(J))$ olup, $J \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(J))$ dir. Bu durumda $\psi(\varphi^{-1}(J)) = \varphi(\varphi^{-1}(J)) = J$ dir. Böylece $\psi$ örtendir.

$I_1 \subset I_2$ olacak biçimde $I_1$ ve $I_2$, $H_1$ in bulanık idealleri olsun. O halde $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$, yani $\psi(I_1) \subseteq \psi(I_2)$ dir. $\psi : M \to M'$ birebir olduğundan, $\psi(I_1) = \psi(I_2)$ ise $I_1 = I_2$ dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\psi(I_1) \neq \psi(I_2)$ dir. Bu durumda $\psi(I_1) \subset \psi(I_2)$ dir. Karşıt olarak $\psi(I_1) \subset \psi(I_2)$, yani $\varphi(I_1) \subset \varphi(I_2)$ olsun. Bu durumda $\varphi^{-1}(\varphi(I_1)) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(I_2))$ olup, $(ii)$ den $I_1 \subseteq I_2$ dir. $\varphi(I_1) \subset \varphi(I_2)$ olduğundan $I_1 \neq I_2$ dir. Böylece $I_1 \subset I_2$ dir. $\square$

$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $I_1$ ile $I_2$ de $H$ nin boştan farklı iki alt kümesi olsun. O halde

$$I_1 \circ I_2 := \{c \in H \mid (a_1 \circ a_2)(c) > \theta,\ \forall a_1 \in I_1 \text{ ve } \forall a_2 \in I_2\}$$

kümesini ele alalım.

**Lemma 5.2.2.** $(H, R, S)$ *bir bulanık halka ve* $I_1$ *ile* $I_2$ *de* $H$ *nin bulanık idealleri olsun. O halde* $I_1 \circ I_2$, $H$ *nin bir bulanık idealidir.*

**İspat.** $I_1$ ve $I_2$, $H$ nin bulanık idealleri olduğundan $e_\circ \in I_1$ ve $e_\circ \in I_2$ dır. $(e_\circ \circ e_\circ)(e_\circ) > \theta$ olduğundan $e_0 \in I_1 \circ I_2$ olur ki, $I_1 \circ I_2 \neq \emptyset$ dir. Her $c_1$, $c_2 \in I_1 \circ I_2$ ve $c \in H$ için $(c_1 \circ c_2)(c) > \theta$ ise $c \in I_1 \circ I_2$ dir. $c_1$, $c_2 \in I_1 \circ I_2$ ise $(a_1 \circ a_2)(c_1) > \theta$ ve $(b_1 \circ b_2)(c_2) > \theta$ olacak biçimde $a_1$, $b_1 \in I_1$ ve $a_2$, $b_2 \in I_2$ vardır. Böylece $R(a_1, a_2, c_1) > \theta$ ve $R(b_1, b_2, c_2) > \theta$ dır.

$I_1$ ve $I_2$, $H$ nin bulanık idealleri olduğundan $R(a_1, b_1, d_1) > \theta$ ve $R(a_2, b_2, d_2) > \theta$ olacak biçimde $d_1 \in I_1$ ve $d_2 \in I_2$ vardır. $R(d_1, d_2, t) > \theta$ olacak biçimde $t \in H$ olsun. $d_1 \in I_1$ ve $d_2 \in I_2$ olduğundan $t \in I_1 \circ I_2$ dir. $R(a_1, b_1, d_1) > \theta$ olduğundan $R(d_1, b_1^{-1}, a_1) > \theta$ dır. $R(a_2, d_1, t_1) > \theta$ ve $R(t_1, b_1^{-1}, t_2) > \theta$ olacak biçimde $t_1$, $t_2 \in H$ olsun. O halde

$$(a_2 \circ (d_1 \circ b_1^{-1}))(c_1) \geq R(d_1, b_1^{-1}, a_1) \wedge R(a_1, a_2, c_1) > \theta,$$

$$((a_2 \circ d_1) \circ b_1^{-1})(t_2) \geq R(a_2, d_1, t_1) \wedge R(t_1, b_1^{-1}, t_2) > \theta$$

dır. Böylece $c_1 = t_2$ ve $R(c_1, b_1, t_1) > \theta$ dır. $R(t_1, b_2, c_3) > \theta$ olacak biçimde $c_3 \in H$ olsun. Bu durumda

$$(c_1 \circ (b_1 \circ b_2))(c) \geq R(b_1, b_2, c_2) \wedge R(c_1, c_2, c) > \theta,$$

$$((c_1 \circ b_1) \circ b_2)(c_3) \geq R(c_1, b_1, t_1) \wedge R(t_1, b_2, c_3) > \theta$$

dır.Dolayısıyla $c = c_3$ ve $R(t_1, b_2, c) > \theta$ dır. Ayrıca

$$(b_2 \circ (a_2 \circ d_1))(c) \geq R(a_2, d_1, t_1) \wedge R(t_1, b_2, c) > \theta,$$

$$((b_2 \circ a_2) \circ d_1)(t) \geq R(a_2, b_2, d_2) \wedge R(d_1, d_2, t) > \theta$$

olduğundan $c = t$ dir. Böylece $c \in I_1 \circ I_2$ dır. Her $c \in I_1 \circ I_2$ için $c^{-1} \in I_1 \circ I_2$ dir. $c \in I_1 \circ I_2$ olduğundan $R(a_1, a_2, c) > \theta$ olacak biçimde $a_1 \in I_1$ ve $a_2 \in I_2$ vardır. $I_1$ ve $I_2$, $H$ nin bulanık idealleri olduğundan her $h \in H$ için $S(a_1, h, k_1) > \theta$ ve $S(a_2, h, k_2) > \theta$ olacak biçimde $k_1 \in I_1$ ve $k_2 \in I_2$ vardır. $R(k_1, k_2, t) > \theta$ olacak biçimde $t \in H$ olsun. $k_1 \in I_1$ ve $k_2 \in I_2$ olduğundan $t \in I_1 \circ I_2$ dır. O halde

$$((a_1 \circ a_2) * h)(k) \geq R(a_1, a_2, c) \wedge S(c, h, k) > \theta,$$

$$((a_1 * h) \circ (a_2 * h)(t) \geq S(a_1, h, k_1) \wedge S(a_2, h, k_2) \wedge R(k_1, k_2, t) > \theta$$

dır. Böylece $t = k$ ve $k \in I_1 \circ I_2$ dir. Bu durumda $I_1 \circ I_2$, $H$ nin bir sağ bulanık idealidir. Benzer şekilde $I_1 \circ I_2$, $H$ nin bir sol bulanık idealidir. Böylece $I_1 \circ I_2$, $H$ nin bir bulanık idealidir. □

**Tanım 5.2.3.** $(H, R, S)$ *bir bulanık halka ve* $I_1$ *ile* $I_2$ *de* $H$ *nin boştan farklı iki alt kümesi olsun. Bu durumda*

$$I_1 \circ I_2 = \{c \in H \mid (a_1 \circ a_2)(c) > \theta,\ \forall a_1 \in I_1 \ \textit{ve}\ \forall a_2 \in I_2\}$$

*kümesine* $H$ *nin iki bulanık idealinin bir bulanık toplamı denir.*

**Teorem 5.2.4.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $I$, $H$ nin bir bulanık ideali olsun. Bu durumda her $a \in H$ için*

$$\begin{aligned} \pi \ : \ H &\longrightarrow \quad H/I \\ a &\longmapsto \ \pi(a) = \ [a \circ I] \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanan $\pi$ fonksiyonu bir bulanık homomorfizmadır ve buna bulanık kanonik homomorfizma denir.*

**İspat.** $R(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde $a$, $b$, $c \in H$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{R}(\pi(a), \pi(b), \pi(c)) &= \bar{R}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) \\ &= ([a \circ I] \oplus [b \circ I])(c \circ I) \\ &= \bigvee_{(a',\, b',\, c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} R(a', b', c') \\ &\geq R(a, b, c) > \theta \end{aligned}$$

dır. $S(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde $a$, $b$, $c \in H$ olsun. O halde Teorem 4.2.8 den

$$\begin{aligned} \bar{S}(\pi(a), \pi(b), \pi(c)) &= \bar{S}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) \\ &= ([a \circ I] \otimes [b \circ I])(c \circ I) \\ &= \bigvee_{(a',\, b',\, c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} S(a', b', c') \\ &\geq S(a, b, c) > \theta \end{aligned}$$

dır. Böylece $\pi$ bir bulanık homomorfizmadır. $\square$

**Teorem 5.2.5.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $I_1$ ile $I_2$ de $H$ nin boştan farklı iki alt kümesi olsun. Bu durumda $(I_1 \circ I_2)/I_2 \cong I_1/(I_1 \cap I_2)$ dir.*

**İspat.** Her $a \in I_2$ için $R(e_\circ,\, a,\, a) > \theta$ dır. O halde $e_\circ \in I_1$ olduğundan $I_2 \subseteq I_1 \circ I_2$ dir. Böylece $I_2$, $I_1 \circ I_2$ nin bir bulanık idealidir.

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ I_1 &\longrightarrow \ (I_1 \circ I_2)/I_2 \\ a &\longmapsto \quad \varphi(a) = \quad [a \circ I_2] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi$ fonksiyonunu ele alalım. $\varphi$ fonksiyonunun tanımından $\varphi$ nin örtenliği açıktır.

$(i)$ $a$, $b \in I_1$ için $a = b$ olsun. $R(a, b^{-1}, e_\circ) > \theta$ ve $e_\circ \in I_2$ olduğundan $a \circ I_2 \sim b \circ I_2$ ve dolayısıyla $[a \circ I_2] = [b \circ I_2]$ dir. Böylece $\varphi$ iyi tanımlıdır.

$(ii)$ $R(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde $a$, $b$, $c \in I_1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\bar{R}([a \circ I_2], [b \circ I_2], [c \circ I_2]) &= \bigvee_{(a',\, b',\, c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} R(a', b', c') \\ &\geq R(a, b, c) > \theta\end{aligned}$$

dır. Böylece $\bar{R}(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) > \theta$ dır.

$(iii)$ $S(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde $a$, $b$, $c \in I_1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\bar{S}([a \circ I_1], [b \circ I_2], [c \circ I_2]) &= \bigvee_{(a',b',c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} S(a', b', c') \\ &\geq S(a, b, c) > \theta\end{aligned}$$

dır. Böylece $\bar{S}(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) > \theta$ dır.

$(iv)$

$$\begin{aligned}Ker\varphi &= \{a \in I_1 \mid \varphi(a) = [e_\circ \circ I_2]\} \\ &= \{a \in I_1 \mid [a \circ I_2] = [e_\circ \circ I_2]\} \\ &= \{a \in I_1 \mid a \circ I_2 \sim e_\circ \circ I_2\} \\ &= \{a \in I_1 \mid R(a^{-1}, e_\circ, h) > \theta,\ \exists h \in I_2\} \\ &= \{a \in I_1 \mid a \in I_2\} = I_1 \cap I_2\end{aligned}$$

dır. Böylece Teorem 4.3.4 ten $(I_1 \circ I_2)/I_2 \cong I_1/(I_1 \cap I_2)$ dir. □

**Teorem 5.2.6.** *$(H, R, S)$ bir bulanık halka ve $I_1$ ile $I_2$ de $I_1 \subseteq I_2$ olacak biçimde $H$ nin boştan farklı iki alt kümesi olsun. O halde $(H/I_1)/(I_2/I_1) \cong H/I_2$ dir.*

**İspat.**

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & H/I_1 & \longrightarrow & H/I_2 \\ & & [a \circ I_1] & \longmapsto & \varphi([a \circ I_1]) = [a \circ I_2] \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi$ fonksiyonunu ele alalım. $\varphi$ fonksiyonunun tanımından $\varphi$ nin örtenliği açıktır.

$(i)$ $a, b \in H$ için $[a \circ I_1] = [b \circ I_1]$ olsun. $a \circ I_1 \sim b \circ I_1$ olduğundan $R(a^{-1}, b, h) > \theta$ olacak biçimde $h \in I_1$ vardır. $I_1 \subseteq I_2$ olduğundan $h \in I_2$ dir. Böylece $a \circ I_2 \sim b \circ I_2$ ve $[a \circ I_2] = [b \circ I_2]$ dir.

$(ii)$ $\bar{R}([a \circ I_1], [b \circ I_1], [c \circ I_1]) > \theta$ olsun. $R(a_1, b_1, c_1) > \theta$ olacak biçimde $a_1 \in \bar{a}$, $b_1 \in \bar{b}$, $c_1 \in \bar{c}$ vardır. Bu durumda $a_1 \circ I_1 \sim a \circ I_1$, $b_1 \circ I_1 \sim b \circ I_1$, $c_1 \circ I_1 \sim c \circ I_1$ olur ve böylece $R(a_1, h_1, a) > \theta$, $R(b_1, h_2, b) > \theta$, $R(c_1, h_3, c) > \theta$ olacak biçimde $h_1$, $h_2$, $h_3 \in I_1$ vardır. Ayrıca $I_1 \subseteq I_2$ olduğundan $h_1$, $h_2$, $h_3 \in I_2$ dir. $R(a, b, u) > \theta$ olacak biçimde $u \in H$ olsun. Teorem 3.3.4 ün ispatına benzer olarak $R(c_1, h, u) > \theta$ olacak biçimde $\exists h \in I_2$ vardır. Bu durumda $c \circ I_2 \sim u \circ I_2$ ve sonuçta

$$\bar{R}([a \circ I_2], [b \circ I_2], [u \circ I_2]) = \bar{R}([a \circ I_2], [b \circ I_2], [c \circ I_2]) > \theta$$

dır.

$(iii)$ $\bar{S}([a \circ I_1], [b \circ I_1], [c \circ I_1]) > \theta$ olsun. $(ii)$ nin ispatına benzer olarak $\bar{S}([a \circ I_2], [b \circ I_2], [c \circ I_2]) > \theta$ dır.

$(iv)$

$$\begin{aligned} Ker\varphi &= \{[a \circ I_1] \in H/I_1 \mid \varphi([a \circ I_1]) = [e_\circ \circ I_2]\} \\ &= \{[a \circ I_1] \in H/I_1 \mid [a \circ I_2] = [e_\circ \circ I_2]\} \\ &= \{[a \circ I_1] \in H/I_1 \mid a \circ I_2 \sim e_\circ \circ I_2\} \\ &= \{[a \circ I_1] \in H/I_1 \mid R(a^{-1}, e_\circ, h) > \theta,\ \exists h \in I_2\} \\ &= \{[a \circ I_1] \in H/I_1 \mid a \in I_2\} \\ &= I_2/I_1 \end{aligned}$$

dir. Böylece Teorem 4.3.4 ten $(H/I_1)/(I_2/I_1) \cong H/I_2$ dir. $\square$

# 6. KAYNAKLAR


[1] Aktaş, H., *Successive sums in smooth groups and smooth cylic groups*, Utilitas Math. **17** (2006), 23-31.

[2] Aktaş, H. and Çağman N., *A type of fuzzy ring*, Arch. Math. Logic **46** (2007), 165-177.

[3] Demirci, M., *Smooth groups*, Fuzzy Sets and Systems **117** (2001), 431- 437.

[4] Demirci, M., *Smooth subgroups and smooth homomorphisms*, Fuzzy Sets and Systems **117** (2001), 439-446.

[5] Dixit, V. N., Kumar R. and Ajmal N., *On fuzzy rings*, Fuzzy Sets and Systems **49** (1992), 205-213.

[6] Liu, W., *Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals*, Fuzzy Sets and Systems **8** (1982), 133-139.

[7] Malik, D. S. and Mordeson, J. N., *Fuzzy homomorphisms of rings*, Fuzzy Sets and Systems **46** (1992), 139-146.

[8] Mordeson, J. N. and Malik, D. S., *Fuzzy Commutative Algebra*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

[9] Mukherjee, T. K. and Sen, M. K., *On fuzzy ideals of a ring I*, Fuzzy Sets and Systems **21** (1987), 99-104.

[10] Öztürk, M. A., Jun Y. B. and Yazarlı H., *A new view of fuzzy gamma rings*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **39** (2010), 365-378.

[11] Rosenfeld, A., *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl. **35** (1971), 512-517.

[12] Uçkun, M., *Homomorphism theorems in the new view of fuzzy rings*, Filomat (2012, *submitted*).

[13] Yuan X. and Lee, E. S., *Fuzzy group based on fuzzy binary operation*, Computers Math. Appl. **47** (2004), 631-641.

[14] Yue Z., *Prime L-fuzzy ideals and primary L-fuzzy ideals*, Fuzzy Sets and Systems **27** (1988), 345-350.

[15] Zadeh, L. A., *Fuzzy Sets*, Inform. and Control **8** (1965), 338-353.

# ÖZGEÇMİŞ

| | | |
|---|---|---|
| Adı Soyadı | : | Ahmet Köşger |
| Doğum Yeri | : | Malatya |
| Doğum Tarihi | : | 19 Mayıs 1988 |
| Medeni Hali | : | Bekar |
| Yabancı Dili | : | İngilizce |
| Eğitim Durumu | | |
| Lise | : | Sümer Lisesi / 2005 |
| Lisans | : | İnönü Üniversitesi / 2010 |
| Çalıştığı Kurum | : | Battalgazi Tarım Meslek Lisesi<br>(2011-2012 Eğitim-Öğretim Yılı Sözleşmeli Öğretmen) |