ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAŞLANGIÇ ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN REEL TERİMLİ N x N TRİDİAGONAL MATRİSLER İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

Bayram BALA

DANIŞMAN
Prof. Dr. Manaf MANAFLI

ADIYAMAN
2012

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

BAŞLANGIÇ ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN REEL TERİMLİ N x N TRİDİAGONAL MATRİSLER İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

Bayram BALA

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Bu çalışmada, genelleşmiş spektral fonksiyon kavramı kompleks girişleri ile N x N tridiagonal simetrik matrisler (Jacobi matrisler) için tanıtılmıştır. Genelleşmiş spektral fonksiyonun yapısı, spektral veri ve matris sayıları normalleşmesi açısından anlatılmıştır. Kompleks terimli tridiagonal matrisler için düz ve ters problemler incelenmiştir. Ayrıca incelenen problemin en önemli özelliği başlangıç şartlarında spektral parametrenin doğrusal olarak bulunmasıdır.

Haziran 2012 – 50 + V sayfa

Anahtar kelimeler : Jacobi matris, fark denklemleri, genelleşmiş spektral fonksiyon; spektral veri.

ABSTRACT

(Master Thesis)

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR TRİDİAGONAL N by N REAL HAMILTONIANS with SPECTRAL PARAMETER IN THE INITIAL CONDITIONS

Bayram BALA

University of Adıyaman
Institute of Science
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

In this paper, the concept of generalized spectral function is introduced for finite order tridiagonal symmetric matrices (Jacobi matrices) with complex entries. The structure of the generalized spectral function is described in terms of spectral data and normalizing numbers of the matrix. Inverse problems are investigated for tridiagonal N by N complex hamiltonians. Also the most important feature of the problem is that there is initial conditions, the spectral parameter linearly.

June 2012 – 50 + V pages

Key Words : Jacobi matrix; difference equation; generalized spectral function; spectral data.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda bilgi ve tecrübeleri ile her konuda bana yardımcı olan ve çalışmayla ilgili kaynak temini için imkânlarını sunan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI 'ya, maddi ve manevî desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve değerli eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bayram BALA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
H	Hibert uzayı
λ	Özdeğer
J	N x N tipinde simetrik matris
Ω	lineer fonksiyonel
$\mathbb{C}_m[\lambda]$	$\lambda \le m$ dereceli kompleks katsayılı tüm polinomlar halkası
$\mathbb{R}_m[\lambda]$	$\lambda \le m$ dereceli reel katsayılı tüm polinomlar halkası
δ	Kronecker delta sabiti
$\deg G(\lambda)$	$G(\lambda)$ polinomunun derecesi
D_n	n x n tipinde bir matrisin determinantı
Δ_n	Determinant
$M(\lambda)$	Weyl fonksiyonu
$R(\lambda)$	J matrisinin resolventi
Γ_r	Orjin merkezli r yarıçaplı daire
$\omega(\lambda)$	Basamak fonksiyonu

1.GİRİŞ

Kompleks verileri ile N x N tridiagonal simetrik matris (Jacobi matris)

$$J=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

her $n,\ a_n$ ve b_n kompleks sayıları için a_n sıfırdan farklı olmak üzere;

$$a_n,\ b_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0. \tag{1.2}$$

Gerçek durumda

$$a_n,\ b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0. \tag{1.3}$$

J Hermityen matrisi (özeşlenik) ve J matrisi için ters spektral problemin birçok versiyonu literatürde incelenmiştir (Bknz [1,2,3]).

Bilindiği gibi [4,5,6,7,8,9], genelleşmiş spektral fonksiyon olarak adlandırılan özeşlenik olmayan diferensiyel ve fark operatörleri için doğal bir spektral karakteristik olan ifade lineer topolojik uzayda lineer sürekli fonksiyoneldir. Genel olarak genelleşmiş spektral fonksiyonların yapısı hakkında çok az bilgi bulunmaktadır.

Bu çalışmada amacımız böyle bir matris için uygun spektral veri tanıtmak, başlangıç şartlarında spektral parametre bulunduğu durumlarda genelleşmiş spektral fonksiyonlar kurmak, buna paralel J matrisinin özdeğerleri, normalleşmiş sayıları ve matrisin belirlediği ters spektral problemi incelemektir.

(1.2) koşulları ile (1.1) deki J matrisi $Jy=\lambda y$ özdeğer problemi $y=\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ sütun vektörü için ikinci dereceden lineer fark denklemini verir.

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_n y_n+a_n y_{n+1}=\lambda y_n, \quad n\in\{0,1,...,N-1\}, \quad a_{-1}=0,\ a_{N-1}=1 \tag{1.4}$$

$y=\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ için, sınır koşulları

$$y_0=(1+\lambda)y_{-1}, \quad y_N=0 \tag{1.5}$$

(1.4), (1.5) problemi

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right]+q(x)y(x)=\lambda y(x), \quad x\in\left[a,b\right] \tag{1.6}$$

$$y'(a)=(1+\lambda)y(a); \qquad y(b)=0 \tag{1.7}$$

$[a,b]$ sonlu aralık olmak üzere sürekli özdeğer probleminin ayrık bir analogudur.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right]+q(x)y(x)=\lambda y(x), \quad x\in[0,\infty)$$

sürekli problemi $[0,\infty)$ yarı sonlu aralıkta (1.1) formundaki J Jacobi matrisine karşılık gelir.

Daha önce $(-\infty,\infty)$ aralığında J matrisi için genelleşmiş spektral fonksiyon ve genelleşmiş spektral fonksiyonun ters problemi üzerinde çalışmalar yapılmıştır [6,7,8,9]. Ancak, sonsuz aralıkta J matrisi için genelleşmiş spektral fonksiyonun yapısı hakkında karmaşık ve zor olduğundan fazla bir açıklama yapılmamıştır. Bu çalışmada ise $[a,b]$ aralığında J matrisi için genelleşmiş spektral fonksiyonun yapısı ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır.

İlk bölümde bu çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar, ikinci bölümde N x N tridiagonal simetrik matrisi için genelleşmiş spektral fonksiyonun yapısı incelenmiştir. Üçüncü bölümde bir önceki bölümde incelenen fonksiyonun ters problemi araştırılıp örnekler verilmiştir. Dördüncü bölümde genelleşmiş spektral fonksiyonun yapısı ve spektral veriden; beşinci bölümde spektral verinin ters probleminden bahsedilmiştir.

Altıncı bölümde reel Jacobi matrisin genelleşmiş spektral fonksiyonu tanımlanıp yedinci bölümde yapısı üzerinde durulmuş ve son bölümde ise ters problemi anlatılmıştır.

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.

$V \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye K üzerinde *lineer uzay* denir.

A) $(V,+)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) $\forall x, y \in V$ için $x+y \in V$ dir. (Kapalılık özelliği)

G2) $\forall x, y, z \in V$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir. (Birleşme özelliği)

G3) $\forall x \in V$ için $x+0=0+x=x \in V$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır.

G4) $\forall x \in V$ için $x+(-x)=(-x)+x=0$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır.

G5) $\forall x, y \in V$ için $x+y=y+x$ dir. (Değişme özelliği)

B) $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha x \in V$ dir.

L2) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ dir.

L3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ dir.

L4) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ dir.

L5) $\forall x \in V$ için $1.V=V$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada 1, K cisminin birim elemanıdır.

$K=\mathbb{R}$ olması halinde V ye *reel,* $K=\mathbb{C}$ olması halinde V ye *kompleks lineer uzay* denir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.

Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere *operatör* denir.

Tanım 3.

X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

N1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

N2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

N_3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm denir ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir *normlu lineer (vektör) uzay* denir. (Naimark, 1968).

Tanım 4.

X ve Y aynı bir K cismi üzerinde tanımlanmış iki lineer uzay olsun.

$A: X \to Y$ operatörü (dönüşümü)

i) $A(x+y) = Ax + Ay$

ii) $A(\alpha x) = \alpha(Ax), \quad \alpha \in K$

koşullarını sağlıyorsa A ya *lineer operatör (dönüşüm)* denir. (Naimark, 1968).

Tanım 5.

$K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere X, K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) olsun.

$(.,.): X \text{ x } X \to K$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar ise $(.,.)$ ye X üzerinde bir *iç çarpım,* $(X, (.,.))$ ikilisine de *iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı)* denir.

i) $\forall x \in X$ için $(x,x) \ge 0$ ve $(x,x) = 0 \iff x = 0$

ii) $\forall x, y \in X$ için $(x,y) = \overline{(y,x)}$

iii) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$

iv) $\forall x, y, z \in X$ için $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$

Tanım 6.

$(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(X, (.,.))$ iç çarpım uzayı bir *normlu vektör uzayı* olur. (Naimark, 1968).

Tanım 7.

Bir $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı $\|x\|=(x,x)^{1/2}$ normuna göre tam ise, yani $(X,(.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir. (Naimark, 1968).

Tanım 8.

$K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ olmak üzere X , K üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f:X\to K$$

operatörüne *fonksiyonel* denir. Eğer f lineer ise f ye *lineer fonksiyonel* denir. Lineer fonksiyoneller, sınırlı ise yani,

$$|f(x)|\le c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c\ge 0$ reel sayısı varsa f ye *sınırlı lineer fonksiyonel* denir. (Naimark, 1968).

Tanım 9.

H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer A operatörü için her $x\in H$ olmak üzere

$$\|Ax\|\le c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c\ge 0$ sayısı varsa A ya *sınırlı operatör* denir. Bu c sayılarının en küçüğüne A *sınırlı operatörünün normu* denir.

$$\|A\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|=\sup_{\|x\|\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

eşitliği yardımıyla norm hesaplanabilir. (Naimark, 1968).

Tanım 10.

X bir kompleks vektör uzay ve $T:X\to X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Tx=\lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x\in X$ çözümü varsa λ sayısına T operatörünün *özdeğeri* denir. Bu x çözümüne ise T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyonu* denir. (Lusternik, 1974)

2. GENELLEŞMİŞ SPEKTRAL FONKSİYON

(1.2) verileri ile (1.1) formundaki J matrisini ele alalım:

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1}=\lambda y_n,\quad n\in\{0,1,...,N-1\},\quad a_{-1}=0,\ a_{N-1}=1 \tag{2.1}$$

ikinci dereceden lineer fark denklemine eşdeğer $y=\{y_n\}_{n=-1}^{N}$ için, sınır koşulları

$$y_0=(1+\lambda)y_{-1},\quad y_N=0. \tag{2.2}$$

$y=\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ sütun vektörü için $Jy=\lambda y$ özdeğer problemini incelediğimizde

$$Jy=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{N-3}\\ y_{N-2}\\ y_{N-1}\end{bmatrix}=\lambda y$$

$$\begin{aligned} a_{-1}y_{-1}+b_0y_0+a_0y_1 &= \lambda y_0\\ a_0y_0+b_1y_1+a_1y_2 &= \lambda y_1\\ a_1y_1+b_2y_2+a_2y_3 &= \lambda y_2\\ \vdots\qquad &= \vdots\\ a_{N-2}y_{N-2}+b_{N-1}y_{N-1}+a_{N-1}y_N &= \lambda y_{N-1}\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.1) denkleminin çözümünü

$$y_{-1}=1,\quad y_0=1+\lambda \tag{2.4}$$

başlangıç koşulları ile $\{P_n(\lambda))\}_{n=-1}^{N}$ belirler. Başlangıç koşulları (2.3) de yerine yazılırsa

$$y_1=\frac{\lambda-b_0}{a_0}(1+\lambda),\quad y_2=\left[\frac{(\lambda-b_0)(\lambda-b_1)}{a_0a_1}-\frac{a_0}{a_1}\right](1+\lambda),$$

$$y_3=\left[\frac{(\lambda-b_0)(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)}{a_0a_1a_2}-\frac{a_0(\lambda-b_2)}{a_1a_2}-\frac{a_1(\lambda-b_0)}{a_0a_2}\right](1+\lambda)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde devam edilirse (2.1) denklemi elde edilir. Böylece $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{N}$ özyineleme bağıntısının

$$P_0(\lambda)=1+\lambda \tag{2.5}$$

başlangıç koşulu ile tek çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}&b_0P_0(\lambda)+a_0P_1(\lambda)=\lambda P_0(\lambda),\\&a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)+b_nP_n(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda)=\lambda P_n(\lambda),\\&n\in\{1,2,...,N-1\},\qquad a_{N-1}=1\end{aligned}\tag{2.6}$$

Burada $y_0\neq 0$ alınmalıdır. Aksi halde y_N'lerin hepsi sıfıra eşit olur. Dolayısıyla $y_0=1+\lambda$ olduğundan $\lambda\neq -1$ dir.

Lemma 1.

$$\det(J-\lambda I)=(-1)^N a_0a_1.....a_{N-1}\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}\tag{2.7}$$

olur. Bu yüzden J matrisinin özdeğerleri $\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ sıfır polinomuna denktir.

İspat.

Her $n\in\{1,2,...,N\}$ için

$$J_n=\begin{bmatrix}b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-3} & a_{n-3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-3} & b_{n-2} & a_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1}\end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı $\Delta_n(\lambda)=\det(J_n-\lambda I)$.

$N=1$ için $\det(J-\lambda I)=(-1)^1a_0\frac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)}=(-1)a_0\frac{\frac{\lambda-b_0}{a_0}(1+\lambda)}{(1+\lambda)}$ dır. Sadeleştirmeler yapılırsa $\det(J-\lambda I)=-(\lambda-b_0)$ olur ki bu da $N=1$ için $(J-\lambda I)$ matrisinin determinantına eşittir.

$\Delta_1(\lambda)=\det(J_1-\lambda I)=|b_0-\lambda|$

$$\Delta_2(\lambda)=\det(J_2-\lambda I)=\begin{vmatrix}b_0-\lambda & a_0\\ a_0 & b_1-\lambda\end{vmatrix}=(b_0-\lambda)(b_1-\lambda)-a_0^{\,2}=(b_1-\lambda)\Delta_1(\lambda)-a_0^{\,2}\Delta_0(\lambda)$$

$$\Delta_3(\lambda)=\det(J_3-\lambda I)=\begin{vmatrix} b_0-\lambda & a_0 & 0 \\ a_0 & b_1-\lambda & a_1 \\ 0 & a_1 & b_2-\lambda \end{vmatrix}=(b_2-\lambda)\begin{vmatrix} b_0-\lambda & a_0 \\ a_0 & b_1-\lambda \end{vmatrix}-a_1\begin{vmatrix} b_0-\lambda & 0 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(b_2-\lambda)\Delta_2(\lambda)-a_1^{\,2}\Delta_1(\lambda)$$

benzer şekilde devam edilirse

$$\Delta_{n+1}(\lambda)=\det(J_{n+1}-\lambda I)=(b_n-\lambda)\Delta_n(\lambda)-a_{n-1}^2\Delta_{n-1}(\lambda),\quad n=1,2,...;\qquad \Delta_0(\lambda)=1 \text{ dir.}$$

Şimdi $N=n+1$ için $\det(J_{n+1}-\lambda I)=(-1)^{n+1}a_0a_1.....a_n\dfrac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim ve $N=n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$J_{n+1}-\lambda I=\begin{bmatrix} b_0-\lambda & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1-\lambda & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2-\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2}-\lambda & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-1}-\lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_n-\lambda \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı

$$\Delta_{n+1}(\lambda)=\det(J_{n+1}-\lambda I)=(b_n-\lambda)\Delta_n(\lambda)-a_{n-1}^2\Delta_{n-1}(\lambda),\quad n=1,2,...;\qquad \Delta_0(\lambda)=1$$

$\Delta_{n+1}(\lambda)$ yerine $\det(J_{n+1}-\lambda I)=(-1)^{n+1}a_0a_1.....a_n\dfrac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ ifadesi,

$\Delta_n(\lambda)$ yerine $\det(J_n-\lambda I)=(-1)^{n}a_0a_1.....a_{n-1}\dfrac{P_{n}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ ifadesi,

$\Delta_{n-1}(\lambda)$ yerine $\det(J_{n-1}-\lambda I)=(-1)^{n-1}a_0a_1.....a_{n-2}\dfrac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ ifadesi yazılırsa

$$(-1)^{n+1}a_0a_1.....a_n\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}=(b_n-\lambda)(-1)^n a_0a_1.....a_{n-1}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}-a_{n-1}^2(-1)^{n-1}a_0a_1.....a_{n-2}\frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$$

denklemi elde edilir. Denklemin her iki tarafını $(-1)^{n-1}a_0a_1.....a_{n-1}$ ifadesine bölersek $(-1)^2a_n\dfrac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}=(b_n-\lambda)(-1)\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}-a_{n-1}\dfrac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ denklemini elde ederiz. (2.1) ve (2.4) ifadeleri yardımıyla eşitlik sağlanır. $d_n=\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$, $n=0,1,2,...$ ve ancak $J_N=J$ ve $a_{n-1}=1$ için (2.7) elde edilir. ■

Negatif olmayan herhangi bir m tamsayısı için $\mathbb{C}_m[\lambda]$, $\lambda \le m$ dereceli kompleks katsayılı tüm polinomlar halkasını gösterir. $\Omega : \mathbb{C}_m[\lambda] \to \mathbb{C}$ olmak üzere $G(\lambda), H(\lambda) \in \mathbb{C}_m[\lambda]$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\langle \Omega, G(\lambda) + H(\lambda) \rangle = \langle \Omega, G(\lambda) \rangle + \langle \Omega, H(\lambda) \rangle \text{ ve } \langle \Omega, \alpha G(\lambda) \rangle = \alpha \langle \Omega, G(\lambda) \rangle$$

ise Ω lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. $\langle \Omega, G(\lambda) \rangle$, $G(\lambda)$ polinomunun üzerindeki Ω değerini gösterir.

Teorem 1.

$\Omega : \mathbb{C}_{2N}[\lambda] \to \mathbb{C}$ *bir tek lineer fonksiyon vardır.*

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \delta_{mn} \qquad m, n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{2.8}$$

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0 \qquad m \in \{0, 1, ..., N\} \tag{2.9}$$

dir. Burada δ_{mn} Kronecker Delta sabitidir.

İspat.

Ω fonksiyonunun tekliğini ispatlayalım. Varsayalım ki Ω fonksiyonu (2.8) ve (2.9) özelliklerine sahip olsun. $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ lineer uzayı için temel oluşturan

$$\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \qquad (n = 0, 1, ..., N-1), \qquad \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \qquad (m = 0, 1, ..., N) \tag{2.10}$$

$2N+1$ tane polinom vardır; çünkü polinomlar lineer bağımsız (dereceleri farklı) ve $\dim \mathbb{C}_{2N}[\lambda] = 2N+1$. Diğer taraftan, (2.8) ve (2.9)'daki Ω fonksiyoneli (2.10)'da bulunan bütün kesin değerleri alır:

$$\left\langle \Omega, \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \delta_{0n} \qquad n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{2.11}$$

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0 \qquad m \in \{0, 1, ..., N\} \tag{2.12}$$

Böylece Ω fonksiyonelinin $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayının tek bir çözümü olduğu anlaşılır. Şimdi (2.8) ve (2.9) polinomlarına karşılık gelen Ω fonksiyonelini gösterelim.

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = A_{mn} \qquad m,n \in \{0,1,...,N\} \tag{2.13}$$

Belli ki, $m,n \in \{0,1,...,N\}$ için $A_{mn} = A_{nm}$ dir. (2.11) ve (2.12)'den aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$A_{m0} = A_{0m} \qquad m \in \{0,1,...,N\} \tag{2.14}$$

$$A_{mN} = A_{Nm} \qquad m \in \{0,1,...,N\} \tag{2.15}$$

$\{P_n(\lambda)\}_0^N$, (2.6) denkleminin çözümüdür.

$P_0(\lambda) = 1 + \lambda$ 'dan ve $b_0 P_0(\lambda) + a_0 P_1(\lambda) = \lambda P_0(\lambda)$ ifadesinden $\lambda = \dfrac{b_0 P_0(\lambda) + a_0 P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ elde edilir. Bu ifade (2.6) nın 2. denkleminde yerine yazılırsa

$$a_{n-1} P_{n-1}(\lambda) + b_n P_n(\lambda) + a_n P_{n+1}(\lambda) = \left(\frac{b_0 P_0(\lambda) + a_0 P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right) P_n(\lambda),$$

$$a_{n-1} P_{n-1}(\lambda) + b_n P_n(\lambda) + a_n P_{n+1}(\lambda) = b_0 P_n(\lambda) + a_0 \frac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} P_n(\lambda),$$

$n \in \{1,2,...,N-1\}, \qquad a_{N-1} = 1$ elde edilir.

Son denklemin her iki tarafını $P_0(\lambda)$ ya bölüp Ω fonksiyoneli uygulanırsa

$$a_{n-1} \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} + b_n \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} + a_n \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} = b_0 \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} + a_0 \frac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$$

$$a_{n-1} \left\langle \Omega, \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle + b_n \left\langle \Omega, \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle + a_n \left\langle \Omega, \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = b_0 \left\langle \Omega, \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle + a_0 \left\langle \Omega, \frac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle$$

$$a_{n-1} A_{0,n-1} + b_n A_{0,n} + a_n A_{0,n+1} = b_0 A_{0,n} + a_0 A_{1,n}$$

$n = 0$ için

$a_{-1} A_{0,-1} + b_0 A_{0,0} + a_0 A_{0,1} = b_0 A_{0,0} + a_0 A_{1,0}$ denkleminden $A_{0,1} = A_{1,0}$ eşitliği elde edilir. (2.14) ile (2.15)'den

$$A_{n1} = A_{1n} = \delta_{n1}, \qquad n \in \{0,1,...,N\}. \tag{2.16}$$

yazılabilir. Genel olarak

$$a_{m-1} P_{m-1}(\lambda) + b_m P_m(\lambda) + a_m P_{m+1}(\lambda) = \lambda P_m(\lambda), \quad m \in \{1,2,...,N-1\},$$

$$a_{n-1} P_{n-1}(\lambda) + b_n P_n(\lambda) + a_n P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \quad n \in \{1,2,...,N-1\},$$

ifadelerinde birinci denklemi $\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0^2(\lambda)}$, ikinci denklemi $\dfrac{P_m(\lambda)}{P_0^2(\lambda)}$ ile çarpalım.

$$a_{m-1}\frac{P_{m-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}+b_m\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}+a_m\frac{P_{m+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}=\lambda\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)},\quad m\in\{1,2,...,N-1\}$$
$$a_{n-1}\frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}+b_n\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}+a_n\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}=\lambda\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)},\quad n\in\{1,2,...,N-1\}$$

elde edilir. Buradan

$$a_{m-1}\frac{P_{m-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}+b_m\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}+a_m\frac{P_{m+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$$
$$=a_{n-1}\frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}+b_n\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}+a_n\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)},\quad m,n\in\{1,2,...,N-1\}$$

yazılabilir.

Şimdi denklemin her iki tarafına Ω fonksiyonelini uygulayalım.

$$a_{m-1}\left\langle\Omega,\frac{P_{m-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle+b_m\left\langle\Omega,\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle+a_m\left\langle\Omega,\frac{P_{m+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle$$
$$=a_{n-1}\left\langle\Omega,\frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle+b_n\left\langle\Omega,\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle+a_n\left\langle\Omega,\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle$$

(2.14), (2.15) ve (2.16)' dan A_{mn} sınır değer problemi için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$a_{m-1}A_{m-1,n}+b_mA_{mn}+a_mA_{m+1,n}=a_{n-1}A_{n-1,m}+b_nA_{nm}+a_nA_{n+1,m},\tag{2.17}$$
$$m,n\in\{1,2,...,N-1\},$$

$$A_{n0}=A_{0n}=\delta_{n0},\quad A_{n1}=A_{1n}=\delta_{n1},\quad A_{Nn}=A_{nN}=0,\tag{2.18}$$
$$n\in\{0,1,...,N\}$$

$A_{mn}=A_{nm}$ olduğundan $b_m=b_n$ olur. Benzer şekilde $a_{m-1}=a_{n-1}$, $a_m=a_n$ yazılabilir. (2.18) kullanılarak (2.17) probleminin tek çözümü olan A_{mn} elde edilir.

$$A_{mn}=\delta_{mn},\quad m,n\in\{0,1,...,N-1\}$$
$$A_{mN}=0,\quad n\in\{0,1,...,N\}.$$

■

Tanım 11.

Teorem 1'deki Ω fonksiyoneline (1.1) deki J matrisinin *genelleşmiş spektral fonksiyonu* denir.

3. GENELLEŞMİŞ SPEKTRAL FONKSİYONUN TERS PROBLEMİ

Ters problem aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

1. Ω genelleşmiş spektral fonksiyonunun J matrisini vermesi için yöntemi yeniden kurmak mümkündür.

2. $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ da verilen belirli bir Ω lineer fonksiyonelini bulmak için gerek ve yeter şart (1.2) sınıfına ait verileri ile (1.1) formundaki bazı J matrisleri için genelleşmiş spektral fonksiyon olmasıdır.

n dereceli bir $\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomu aşağıdaki gibi olsun:

$$\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \alpha_n\left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^k\right), \qquad n \in \{0,1,\dots,N\} \tag{3.1}$$

Şimdi (2.6) denkleminin her iki tarafı $P_0(\lambda)$ ifadesine bölünürse;

$$a_{n-1}\frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} + b_n\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} + a_n\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \lambda\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$$

(3.1)'i yukarıdaki denklemde yerine yazıp a_n, b_n katsayılarını $\alpha_n, \chi_{n,k}$ değerleri cinsinden yazalım.

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}\left(\lambda^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\chi_{n-1,k}\lambda^k\right) + b_n\alpha_n\left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^k\right)$$

$$+a_n\alpha_{n+1}\left(\lambda^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\chi_{n+1,k}\lambda^k\right) = \lambda\alpha_n\left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^k\right)$$

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-1}\alpha_{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\chi_{n-1,k}\lambda^k + b_n\alpha_n\lambda^n + b_n\alpha_n\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^k$$

$$+a_n\alpha_{n+1}\lambda^{n+1} + a_n\alpha_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\chi_{n+1,k}\lambda^k = \alpha_n\lambda^{n+1} + \alpha_n\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^{k+1}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen denklemlerde bulunan λ^{n+1} terimlerinin katsayılarını birbirine eşitleyelim. Bu eşitlikten

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \quad (0 \le n \le N-2), \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_N = \alpha_{N-1}, \tag{3.2}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi λ^n terimlerinin katsayılarını birbirine eşitleyelim. Bu eşitlikten

$b_n\alpha_n + a_n\alpha_{n+1}\chi_{n+1,n} = \alpha_n\chi_{n,n-1}$ elde edilir. Burada $a_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ ifadesini yerine yazalım.

$$b_n = \chi_{n,n-1} - \chi_{n+1,n} \qquad (0 \le n \le N-1), \qquad \chi_{0,-1} = 0. \tag{3.3}$$

ifadesi elde edilir. λ^{n-1} terimlerinin katsayılarını birbirine eşitleyelim. Bu eşitlikten $a_{n-1}\alpha_{n-1} + b_n\alpha_n\chi_{n,n-1} + a_n\alpha_{n+1}\chi_{n+1,n-1} = \alpha_n\chi_{n,n-2}$ elde edilir. Denklemde a_n ve b_n ifadelerini yazalım.

$$1 + b_n\chi_{n,n-1} + \chi_{n+1,n-1} = \chi_{n,n-2}$$

ifadesi elde edilir.

(2.8) ve (2.9) bağıntılarına eşdeğer olan şu bağıntıları yazabiliriz:

$$\left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \frac{\delta_{mn}}{\alpha_m}, \qquad m = 0,1,...,n, \qquad n \in \{0,1,...,N-1\} \tag{3.4}$$

$$\left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0, \qquad m = 0,1,...,N. \tag{3.5}$$

(3.1) den

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_m \left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle + \alpha_m \sum_{j=0}^{m-1} \chi_{m,j} \left\langle \Omega, \lambda^j \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle \tag{3.6}$$

ifadesini elde ederiz. Daha sonra aşağıdaki ifadeyi de yazabiliriz:

$$\lambda^j = \sum_{i=0}^{j} c_i^{(j)} \frac{P_i(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \qquad j \in \{0,1,...,N\},$$

(2.8), (2.9) bağıntıları varsa (3.6) bağıntısından (3.4), (3.5) bağıntıları elde edilir. Tersi de doğrudur. Yani, (3.1) ile paralel olarak (3.4), (3.5) bağıntıları var ise (3.6) bağıntısından (2.8), (2.9) bağıntıları elde edilir.

$$s_l = \left\langle \Omega, \lambda^l \right\rangle, \qquad l \in \{0,1,...,2N\}, \tag{3.7}$$

bağıntısı Ω fonksiyonelinin “güç dengesi” olarak adlandırılır.

Şimdi $\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ ve $\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ denklemlerinin (3.1) e göre açılımlarını (3.4) ve (3.5) bağıntılarında yerine yazalım.

$$\left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_n \left\langle \Omega, \lambda^n \lambda^m \right\rangle + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} \left\langle \Omega, \lambda^k \lambda^m \right\rangle$$

$$\left\langle \Omega, \lambda^N \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_N \left\langle \Omega, \lambda^N \lambda^N \right\rangle + \alpha_N \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{N,k} \left\langle \Omega, \lambda^k \lambda^N \right\rangle$$

$$\left\langle \Omega, \lambda^n \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_n \left\langle \Omega, \lambda^n \lambda^n \right\rangle + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} \left\langle \Omega, \lambda^k \lambda^n \right\rangle$$

denklemlerinden sırasıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$s_{n+m} + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} s_{k+m} = 0, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \qquad n \in \{1,2,\ldots N\} \tag{3.8}$$

$$s_{2N} + \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{N,k} s_{k+N} = 0, \tag{3.9}$$

$$s_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} s_{k+n} = \frac{1}{\alpha_n^2}, \qquad n \in \{1,2,\ldots N-1\} \tag{3.10}$$

Burada (3.8) denklemi *ters problemin temel denklemidir* ki bu problemin gerektiği gibi çözülmesini sağlar. Eğer $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında Ω lineer fonksiyoneli verilirse, s_l katsayıları bulunabilir ve her $n \in \{1,2,\ldots N\}$ sabiti için $\chi_{n,0}, \chi_{n,1}, \ldots, \chi_{n,n-1}$ bilinmeyenleri ile homojen olmayan (3.8) lineer cebirsel denklemler sistemi dikkate alınabilir.

Bu sistem bir tek çözüme sahipse ve her $n \in \{1,2,\ldots N-1\}$ için $s_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} s_{k+n} \neq 0$ ise, J matrisinin gerekli olan a_n, b_n verileri sırasıyla (3.2) ve (3.3) den bulunabilir. α_n, (3.10) denkleminden bulunur. Bir sonraki teorem ters problemin gösterilen çözüm yönteminin koşullarını verir.

Teorem 2.

$\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında tanımlı verilen bir Ω lineer fonksiyonelinin (1.2) verileri ile verilmiş olan (1.1) formundaki bazı J Jacobi matrislerinin genelleşmiş spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart aşağıda verilen koşulları sağlamasıdır:

(i) $\langle \Omega, 1 \rangle = 1$ *(normalleşme koşulu);*

(ii) $\deg G(\lambda) \leq N-1$ *koşulu ile bazı* $G(\lambda)$ *polinomları ve*

$\deg G(\lambda) = \deg H(\lambda)$ *koşulu ile bütün* $H(\lambda)$ *polinomları için,*

$$\langle \Omega, G(\lambda) H(\lambda) \rangle = 0$$

O halde $G(\lambda) \equiv 0$*;*

(iii) $\deg G(\lambda) \le N$ *koşulu ile bütün* $G(\lambda)$ *polinomları için*

$$\langle \Omega, G(\lambda)T(\lambda)\rangle = 0$$

olacak şekilde derecesi N *olan bir* $T(\lambda)$ *polinomu vardır.*

İspat.

$(\Rightarrow)$ *(i)* $\left\langle \Omega, \dfrac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \delta_{mn}$, $\quad m,n \in \{0,1,...,N-1\}$ bağıntısında $m = n = 0$ yazılırsa

$\left\langle \Omega, \dfrac{P_0(\lambda)}{P_0(\lambda)} \dfrac{P_0(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \delta_{0,0}$ elde edilir. Buradan da $\langle \Omega, 1\rangle = 1$ yazılabilir.

(ii) $G(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} c_j^{(m)} \dfrac{P_j(\lambda)}{P_0(\lambda)}$, $\quad m = \deg G(\lambda)$ açılımı yazılabilir. Benzer şekilde $H(\lambda)$ polinomu için $H(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \overline{c_j^{(m)}} \dfrac{P_j(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ dir. Burada kompleks sayı üzerindeki çizgi kompleks birleşmeyi gösterir. $\langle \Omega, G(\lambda)H(\lambda)\rangle = 0$ eşitliğini ve (2.8) bağıntısını kullanalım.

$$\left\langle \Omega, \sum_{j=0}^{m} c_j^{(m)} \frac{P_j(\lambda)}{P_0(\lambda)} \sum_{j=0}^{m} \overline{c_j^{(m)}} \frac{P_j(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0 .$$

(2.8)' den $\left\langle \Omega, \dfrac{P_j(\lambda)}{P_0(\lambda)} \dfrac{P_j(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 1$ olur. O halde

$$\sum_{j=0}^{m} \left| c_j^{(m)} \right|^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bundan dolayı $c_j^{(m)} = 0, \quad j = 0,1,...,m$ olur. $G(\lambda) \equiv 0$ ifadesi elde edilir.

(iii) $\left\langle \Omega, \dfrac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0$ ifadesinde $\dfrac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ ifadeleri yerine sırasıyla $G(\lambda)$, $T(\lambda)$ yazılırsa $\langle \Omega, G(\lambda)T(\lambda)\rangle = 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ İspat birkaç aşamada verilmiştir.

(a) Teorem koşullarını sağlayan ve $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında tanımlanan Ω lineer fonksiyoneli verilsin. $\chi_{n,k}$, $k=0,1,...,n-1$ bilinmeyenleri, (3.7) ifadesinden Ω fonksiyonelinin yardımı ile bulunan s_l ifadeleri ile (3.8) denklemine bakalım.

$$s_{n+m}+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}s_{k+m}=0, \qquad m=0,1,...,n-1, \qquad n\in\{1,2,...N\}$$

Bu denklem her $n\in\{1,2,...N\}$ sabiti için bir tek çözüme sahiptir. Bunun için

$$\sum_{k=0}^{n-1}g_k s_{k+m}=0, \qquad m=0,1,...,n-1 \tag{3.11}$$

homojen denkleminin her n için sadece aşikar çözüme sahip olduğunu göstermemiz yeterlidir. Aksini varsayalım. Bazı $n\in\{1,2,...N\}$ için (3.11) denklemi aşikar olmayan $(g_k)_0^{n-1}$ çözüme sahip olsun. $(h_m)_0^{n-1}$ bir keyfi vektör olsun. (3.11) denkleminin her iki tarafı $\sum_{m=0}^{n-1}h_m$ ile çarpılırsa

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}h_m g_k s_{k+m}=0.$$

Şimdi yukarıdaki ifadede (3.7)'den dolayı s_{k+m} yerine $\left\langle \Omega,\lambda^{k+m}\right\rangle$ ifadesini yazalım.

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}h_m g_k\left\langle \Omega,\lambda^{k+m}\right\rangle=0$$

$$\left\langle \Omega,\sum_{m=0}^{n-1}h_m\lambda^m\sum_{k=0}^{n-1}g_k\lambda^k\right\rangle=0$$

olur. Buradan da

$$G(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}g_k\lambda^k, \qquad H(\lambda)=\sum_{m=0}^{n-1}h_m\lambda^m$$

ifadelerini yerine yazdığımızda

$$\left\langle \Omega,G(\lambda)H(\lambda)\right\rangle=0 \tag{3.12}$$

$(h_m)_0^{n-1}$ bir keyfi vektör olduğundan (3.12)'den teoremdeki *(ii)* koşulundan dolayı $G(\lambda)\equiv 0$ yazılabilir. Bundan dolayı $g_0=g_1=...=g_{n-1}=0$ dır. Bu da varsayım ile çelişir. Böylece her bir $n\in\{1,2,...N\}$ için (3.8) bir tek çözüme sahiptir.

(b)

$$s_{2n}+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}s_{k+n}\neq 0,\quad n\in\{1,2,...N-1\} \tag{3.13}$$

Burada $(\chi_{n,k})_{k=0}^{n-1}$'in (3.8) temel denkleminin çözümü olduğunu gösterelim. (3.13) denkleminin sol tarafında s_{2n} , s_{k+n} yerine sırasıyla $\langle\Omega,\lambda^{2n}\rangle,\langle\Omega,\lambda^{k+n}\rangle$ ifadelerini yazıp, $n=0$ için denklemi yeniden yazılırsa

$$\langle\Omega,\lambda^{2n}\rangle+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\langle\Omega,\lambda^{k+n}\rangle=\langle\Omega,1\rangle=1=s_0$$

ifadesi elde edilir. Aksini varsayarsak, yani, bazı $n\in\{1,2,...N-1\}$ için

$$s_{2n}+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}s_{k+n}=0.$$

Bu denklem ile (3.8) denklemi birleştirilirse,

$$s_{n+m}+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}s_{k+m}=0,\quad m=0,1,...,n. \tag{3.14}$$

$(h_m)_0^n$ bir keyfi vektör olsun. (3.14) denkleminin her iki tarafını $\sum_{m=0}^{n}h_m$ ile çarpılırsa

$$\sum_{m=0}^{n}h_m s_{n+m}+\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}h_m\chi_{n,k}s_{k+m}=0$$

denklemi elde edilir. (3.7) ifadesinden s_{n+m}, s_{k+m} yerine sırasıyla $\langle\Omega,\lambda^{n+m}\rangle$, $\langle\Omega,\lambda^{k+m}\rangle$ ifadelerini yazalım.

$$\sum_{m=0}^{n}h_m\langle\Omega,\lambda^{n+m}\rangle+\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}h_m\chi_{n,k}\langle\Omega,\lambda^{k+m}\rangle=0$$

$$\left\langle\Omega,\lambda^n\sum_{m=0}^{n}h_m\lambda^m\right\rangle+\left\langle\Omega,\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}h_m\chi_{n,k}\lambda^k\lambda^m\right\rangle=0$$

elde edilen son ifadede $H(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}h_m\lambda^m$, $\chi(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^k$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\langle\Omega,[\lambda^n+\chi(\lambda)]H(\lambda)\rangle=0$$

elde edilir. Burada $(h_m)_0^n$ bir keyfi vektör olduğundan elde edilen son denklemden teoremin *(ii)* koşulundaki $G(\lambda)\equiv 0$ ifadesinden

$$\lambda^n+\chi(\lambda)\equiv 0$$

elde edilir ki $n\in\{1,2,...N-1\}$ olduğundan bu da imkansızdır. Varsayımımız bu nedenle yanlıştır.

(c) $s_{n+m}+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}s_{k+m}=0, \quad m=0,1,...,n-1, \quad n\in\{1,2,...N\}$ temel denkleminin $(\chi_{n,k})_{k=0}^{n-1}$ çözümü verilsin. $\alpha_N=\alpha_{N-1}$ ve $\alpha_0=1$ ile $s_{2n}+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}s_{k+n}=\frac{1}{\alpha_n^2}$, $n\in\{1,2,...N-1\}$ ifadesinden α_n bulunur.

Sonra $\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}=\alpha_n\left(\lambda^n+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^k\right), \quad n\in\{0,1,...,N\}$ ifadesinden $\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomları bulunur.

Şimdi (2.8), (2.9) bağıntılarını sağladığını gösterelim. (3.4), (3.5) bağıntıları, (2.8), (2.9) bağıntılarına eşdeğer olduğundan (3.4), (3.5) bağıntılarını sağladığını göstermemiz yeterlidir. (3.8) ve (3.10) ifadeleri (3.4) ve (3.5) ifadelerinin $m=0,1,...,N-1$ için doğru olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $m=N$ için sağladığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur. $\left\langle \Omega,\lambda^N\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle=0$ bu ifadenin sağlandığını göstermek için teoremdeki *(iii)* koşulunu kullanalım. Bu koşul gereği $T(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}t_k\lambda^k, \quad t_N\neq 0$ ve

$$\left\langle \Omega,\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}T(\lambda)\right\rangle=\sum_{k=0}^{N}t_k\left\langle \Omega,\lambda^k\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle=t_N\left\langle \Omega,\lambda^N\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle=0,$$

ifadeleri yazılabilir. Bundan dolayı (3.5) den $\left\langle \Omega,\lambda^N\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle=0$ ifadesi elde edilir.

(d) $\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \quad n=0,1,...N,$ polinomlarını $\chi_{n,k}$ ve α_n sayıları yardımı ile (3.1) ifadesine uygun bir şekilde kuralım. Bu polinomlar katsayıları a_n,b_n olan aşağıda ifade edilen denklemlere karşılık gelir.

$$\begin{aligned}&b_0P_0(\lambda)+a_0P_1(\lambda)=\lambda P_0(\lambda),\\&a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)+b_nP_n(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda)=\lambda P_n(\lambda),\\&n\in\{1,2,...,N-1\}, \qquad a_{N-1}=1\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$a_n=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \quad (0\le n\le N-2), \quad \alpha_0=1, \quad \alpha_N=\alpha_{N-1}, \tag{3.16}$$

$$b_n = \chi_{n,n-1} - \chi_{n+1,n} \qquad (0 \le n \le N-1), \qquad \chi_{0,-1} = 0. \tag{3.17}$$

(3.15) de yazılan denklemlerden birincisinin her iki tarafını $P_0(\lambda)$ ifadesine bölelim.

$b_0 + a_0 \dfrac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \lambda$ ifadesi elde edilir. (3.1) ifadesinden $\dfrac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \alpha_1\left(\lambda + \chi_{1,0}\right)$ dır. Yerine yazılırsa $b_0 + a_0\alpha_1\left(\lambda + \chi_{1,0}\right) = \lambda$ olur.

(3.16) ve (3.17) ifadelerinden $\alpha_0\alpha_1 = 1, \quad b_0 = -\chi_{1,0}$ yazılabildiğinden son yazılan denklem doğrudur.

(3.15) de kalan denklemlerin doğruluğunu gösterelim. $n+1$ dereceli $\lambda\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomu için $\dfrac{P_k(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \quad k = 0,1,...,n+1$ lineer bağımsız olmak üzere

$$\lambda\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \sum_{k=0}^{n+1} c_k^{(n)} \frac{P_k(\lambda)}{P_0(\lambda)} \qquad n \in \{1,2,...,N-1\}, \qquad c_N^{(N-1)} = 1, \tag{3.18}$$

ifadesi yazılabilir. Burada $c_k^{(n)}, \quad k = 0,1,...,n+1$ sabittir. *(c)* de ispatladığımız

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \delta_{mn} \qquad m,n \in \{0,1,...,N-1\}$$

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0 \qquad m \in \{0,1,...,N\}$$

ifadelerinden ve (3.18) den

$$c_k^{(n)} = \left\langle \Omega, \lambda\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_k(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle, \quad k = 0,1,...,n+1 \quad (n \in \{1,2,...,N-2\}). \tag{3.19}$$

$\lambda\dfrac{P_k(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \quad k = 0,1,...,n-2$ polinomları $n-1$ den daha küçük derecelere sahiptir. Bundan dolayı (3.19) ifadesinden (2.8) ve (2.9) kullanılarak

$$c_k^{(n)} = 0, \qquad k = 0,1,...,n-2 \qquad (n \in \{1,2,...,N-1\})$$

elde edilir. (3.18) açılımı yardımıyla

$$c_{n-1}^{(n)} \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} + c_n^{(n)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} + c_{n+1}^{(n)} \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \lambda\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \quad n \in \{1,2,...,N-1\}$$

elde edilir. Son denklemde her iki taraf $P_0(\lambda)$ ifadesi ile çarpılırsa

$$c_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(\lambda) + c_n^{(n)} P_n(\lambda) + c_{n+1}^{(n)} P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \quad n \in \{1,2,...,N-1\} \tag{3.20}$$

ifadesi bulunur. (3.19) dan dolayı $c_{n-1}^{(n)} = c_n^{(n-1)}$ dir.

$$c_{n+1}^{(n)} = \tilde{a}_{n,} \qquad c_n^{(n)} = \tilde{b}_{n,} \tag{3.21}$$

(3.20) ve (3.21) ifadelerinden

$$\tilde{a}_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + \tilde{b}_n P_n(\lambda) + \tilde{a}_n P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \qquad n \in \{1, 2, ..., N-1\} \tag{3.22}$$

ifadesi elde edilir. (3.22) denklemini $P_0(\lambda)$ ifadesine bölüp (3.1) ifadesi yerine yazıldığında

$$\tilde{a}_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = a_n \quad (0 \le n \le N-2),$$

$$\tilde{b}_n = \chi_{n,n-1} - \chi_{n+1,n} = b_n \qquad (0 \le n \le N-1).$$

ifadeleri elde edilir. Böylece *Teorem 2* nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Uyarı 1.

Yukarıdaki ters problemin çözümü şunu ifade etmektedir ki (1.1) matrisi sadece genelleşmiş spektral fonksiyon tarafından inşa edilmemiştir. Bu ifadenin doğruluğunu (3.10) ifadesindeki α_n göstermektedir. Ters problemin bir tek çözümü sağlaması için ek olarak şunu da belirtmeliyiz ki + ve – işaretleri olan bir dizi vardır. Yani, her $n \in \{1, 2, ..., N-1\}$ için $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{N-1}\}$ sonlu bir dizi ve burada σ_n, + veya – . 2^{N-1} gibi farklı diziler vardır. $n \in \{1, 2, ..., N-1\}$ için (3.10) dan α_n i belirlemek için (Şunu da hatırlamalıyız ki $\alpha_0 = 1$) σ_n i karekökten çıkarırken işaretini seçebiliriz. Böylece tam olarak aynı genelleşmiş spektral fonksiyon 2^{N-1} farklı Jacobi matrise sahiptir.

Ters problem Ω fonksiyonelinin ve + ve – işaretlerine sahip $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{N-1}\}$ dizisinin verileri yardımıyla çözüldü.

$$s_l = \langle \Omega, \lambda^l \rangle, \qquad l = 0,1,...2N. \tag{3.23}$$

ifadesinin determinantı aşağıdaki gibidir.

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}, \qquad n = 0,1,...,N. \tag{3.24}$$

Bu ifadeden dolayı *Teorem 2* aşağıdaki teoreme eşdeğerdir.

Teorem 3.

$\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında tanımlı Ω lineer fonksiyoneli verilmiş olsun. Ω fonksiyonelinin (1.2) verileri ile (1.1) formundaki J Jacobi matrisi için genelleşmiş spektral fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$D_0 = 1, \qquad D_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, ..., N-1), \qquad \text{ve} \qquad D_N = 0, \tag{3.25}$$

D_n , (3.23) ve (3.24) de tanımlıdır.

İspat.

$(\Rightarrow)$ $s_l = \left\langle \Omega, \lambda^l \right\rangle, \quad l = 0,1,...2N.$ ifadesi $l = 0$ için $s_0 = \left\langle \Omega, \lambda^0 \right\rangle = \left\langle \Omega, 1 \right\rangle = 1$ olur. $D_0 = s_0$ olduğundan $D_0 = 1$ elde edilir. *Teorem 2* den $n \leq N-1$ olmak üzere

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} g_k \lambda^k \tag{3.26}$$

polinomu ile bütün

$$H(\lambda) = \sum_{m=0}^{n} h_m \lambda^m \tag{3.27}$$

polinomları için

$$\left\langle \Omega, G(\lambda) H(\lambda) \right\rangle = 0 \tag{3.28}$$

yazılabilir. *Teorem 2* gereği $G(\lambda) \equiv 0$ dir. Burada $g_0 = g_1 = ... = g_n = 0$ dır.

(3.26) ve (3.27) yi (3.28) de yerine yazılırsa $\sum_{m=0}^{n} h_m \left(\sum_{k=0}^{n} g_k s_{k+m} \right) = 0$ ifadesi elde edilir.

Burada $h_0, h_1, ..., h_n$ ler keyfi olduklarından yazdığımız son denklem için

$$\sum_{k=0}^{n} g_k s_{k+m} = 0, \qquad m = 0,1,...,n. \tag{3.29}$$

ifadesi yazılabilir. Bu da sırasıyla $g_0, g_1, ..., g_n$ lerden oluşan cebirsel denklemlerin lineer homojen sistemidir. Bu sistemin determinantı D_n e denktir. Sistem sadece aşikar çözüme sahiptir. $g_0 = g_1 = ... = g_n = 0$. $n \leq N-1$ için $D_n \neq 0$.

Şimdi $D_N = 0$ olduğunu gösterelim.

$s_{n+m}+\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}s_{k+m}=0, \quad m=0,1,...,n-1, \quad n\in\{1,2,...N\}$ ifadesi $n=N$ için yeniden yazılırsa $s_{N+m}+\sum_{k=0}^{N-1}\chi_{N,k}s_{k+m}=0, \quad m=0,1,...,N-1$ elde edilir. Bu denklem bir tek $\chi_{N,0},\chi_{N,1},...,\chi_{N,N-1}$ çözümüne sahiptir. Daha sonra bu eşitlikler $s_{2N}+\sum_{k=0}^{N-1}\chi_{N,k}s_{k+N}=0$ denklemini kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} s_N \\ s_{N+1} \\ \vdots \\ s_{2N-1} \\ s_{2N} \end{bmatrix} + \chi_{N,0}\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \\ s_N \end{bmatrix} + \chi_{N,1}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \\ s_{N+1} \end{bmatrix} + ... + \chi_{N,N-1}\begin{bmatrix} s_{N-1} \\ s_N \\ \vdots \\ s_{2N-2} \\ s_{2N-1} \end{bmatrix} = 0.$$

Bu da şu anlama gelmektedir, D_N determinantının son sütunu diğer sütunların bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Bundan dolayı $D_N=0$.

$(\Leftarrow)$ (3.25) koşulunu sağlayan bir $\Omega:\mathbb{C}_{2N}[\lambda]\to\mathbb{C}$ fonksiyoneli verilmiş olsun. *Teorem 2* nin koşullarının sağlandığını göstermemiz yeterlidir. $\langle\Omega,1\rangle=s_0=D_0=1$. (3.26) formundaki bir $G(\lambda)$ polinomu ve (3.27) formundaki bütün $H(\lambda)$ polinomları için (3.28) yazılabilir. Bundan dolayı (3.29) ifadesi elde edilir. Bu sistemin determinantı D_n ve $n\le N-1$ için $D_n\ne 0$ olsun. O halde $g_0=g_1=...=g_n=0$ dır. Bu da $G(\lambda)\equiv 0$ olduğunu gösterir. Son olarak N dereceli bir $T(\lambda)$ polinomu ve derecesi N den küçük olan bütün $G(\lambda)$ polinomları için

$$\langle\Omega, G(\lambda)T(\lambda)\rangle=0 \tag{3.30}$$

olduğunu göstermeliyiz. O halde $t_0,t_1,...,t_N$ bilinmeyenleri ile

$$\sum_{k=0}^{N}t_k s_{k+m}=0, \qquad m=0,1,...,N \tag{3.31}$$

homojen sistemini düşünelim. Bu sistemin determinantı D_N dir. $D_N=0$ koşulundan bu sistem $t_0,t_1,...,t_N$ aşikar olmayan çözüme sahiptir. $t_N\ne 0$ dır. $t_N=0$ ise (3.31) ifadesini

$$\sum_{k=0}^{N-1}t_k s_{k+m}=0, \qquad m=0,1,...,N-1 \tag{3.32}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Bu sistemin determinantı D_{N-1} ve $D_{N-1} \neq 0$. O zaman $t_0 = t_1 = ... = t_{N-1} = 0$ ve (3.31) sisteminin $t_0, t_1, ..., t_N$ aşikar çözümü elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Oysaki (3.31) sisteminin $t_0, t_1, ..., t_N$ aşikar olmayan çözümlerine sahip olan N dereceli bir $T(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} t_k \lambda^k$ polinomu belirlenmişti. O zaman (3.31) sisteminde $s_{k+m} = \left\langle \Omega, \lambda^{k+m} \right\rangle$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\left\langle \Omega, \lambda^m T(\lambda) \right\rangle = 0, \qquad m = 0,1,...,N$$

ifadesi elde edilir. Bundan dolayı $\deg G(\lambda) \leq N$ olan bütün $G(\lambda)$ polinomları için (3.30) ifadesi doğrudur. ■

$$s_{n+m} + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} s_{k+m} = 0, \qquad m = 0,1,...,n-1, \qquad n \in \{1,2,...N\}$$

sisteminin determinantı D_{n-1} dir. $D_m^{(k)}$ $(k = 0,1,...,m)$ determinantı $(k+1)$. sütununun bileşenleri $s_{m+1}, s_{m+2}, ..., s_{2m+1}$ olan D_m determinantını değiştirerek elde edilir. O zaman (3.8) sisteminin çözümünü Cramer kuralını kullanarak bulalım.

$$s_{n+m} + \chi_{n,n-1} s_{m+n-1} + \chi_{n,n-2} s_{m+n-2} + ... + \chi_{n,0} s_m = 0$$

ifadesinden $\chi_{n,n-1} = -\dfrac{D_{n-1}^{(n-1)}}{D_{n-1}}$, $\chi_{n,n-2} = -\dfrac{D_{n-1}^{(n-2)}}{D_{n-1}}$, … , $\chi_{n,0} = -\dfrac{D_{n-1}^{(0)}}{D_{n-1}}$ ifadeleri yazılabilir. O halde

$$\chi_{n,k} = -\frac{D_{n-1}^{(k)}}{D_{n-1}}, \qquad k = 0,1,...,n-1 \tag{3.33}$$

(3.33) ifadesindeki $\chi_{n,k}$ açılımı (3.10) da yerine yazılırsa $s_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} -\dfrac{D_{n-1}^{(k)}}{D_{n-1}} s_{k+n} = \dfrac{1}{\alpha_n^2}$ olur.

$$s_{2n} - \frac{D_{n-1}^{(0)}}{D_{n-1}} s_n - \frac{D_{n-1}^{(1)}}{D_{n-1}} s_{n+1} - \frac{D_{n-1}^{(2)}}{D_{n-1}} s_{n+2} - ... - \frac{D_{n-1}^{(n-1)}}{D_{n-1}} s_{2n-1} = \frac{1}{\alpha_n^2}$$

$$\frac{D_{n-1} s_{2n} - D_{n-1}^{(0)} s_n - D_{n-1}^{(1)} s_{n+1} - ... - D_{n-1}^{(n-1)} s_{2n-1}}{D_{n-1}} = \frac{1}{\alpha_n^2}$$

$D_{n-1} s_{2n} - D_{n-1}^{(0)} s_n - D_{n-1}^{(1)} s_{n+1} - ... - D_{n-1}^{(n-1)} s_{2n-1} = D_n$ olduğundan

$$D_{n-1}^{-1} D_n = \alpha_n^{-2} \tag{3.34}$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi $D_m^{(m)} = \Delta_m$ olsun. (3.33) ve (3.34) yardımıyla (3.16) ve (3.17) ifadelerindeki a_n ve b_n ifadelerini yeniden yazalım. $a_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ ifadesinde α_n yerine $(D_{n-1}^{-1}D_n)^{-1/2}$, α_{n+1} yerine $(D_n^{-1}D_{n+1})^{-1/2}$ yazılırsa $a_n = \dfrac{(D_{n-1}^{-1}D_n)^{-1/2}}{(D_n^{-1}D_{n+1})^{-1/2}}$ olur. Son ifade düzenlendikten sonra

$$a_n = \pm(D_{n-1}D_{n+1})^{1/2} D_n^{-1}, \qquad n \in \{0,1,2,...,N-2\}, \qquad D_{-1} = 1 \tag{3.35}$$

ifadesi elde edilir. (3.17) deki b_n ifadesinde ise $\chi_{n,n-1}$ ve $\chi_{n+1,n}$ ifadeleri yerine sırasıyla $-\dfrac{D_{n-1}^{(n-1)}}{D_{n-1}}$ ve $-\dfrac{D_n^{(n)}}{D_n}$ yazılırsa $b_n = -\dfrac{D_{n-1}^{(n-1)}}{D_{n-1}} + \dfrac{D_n^{(n)}}{D_n}$ olur. Buradan da

$$b_n = \Delta_n D_n^{-1} - \Delta_{n-1} D_{n-1}^{-1}, \qquad n \in \{0,1,2,...,N-1\}, \qquad \Delta_{-1} = 0, \qquad \Delta_0 = s_1 \tag{3.36}$$

ifadesi elde edilir.

Böylece *Teorem 3* ün koşulları veya ona eşdeğer *Teorem 2* nin koşulları sağlandığı takdirde Ω genelleşmiş spektral fonksiyonu için verilen J matrisinin a_n, b_n verileri (3.35) ve (3.36) formüllerindeki gibi elde edilir. (3.24) de tanımlanan D_n determinantında son sütunda bulunan bileşenlerin yerine $s_{n+1}, s_{n+2}, ..., s_{2n+1}$ bileşenleri yazıldığında Δ_n determinantı elde edilir.

Şimdi ters problemin çözümü ile ilgili birkaç örnek verelim.

Örnek 1.

$\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \int_0^1 G(\lambda)d\lambda$ şeklinde tanımlanan fonksiyonel *Teorem 2* de bulunan *(i)* ve *(ii)* koşullarını sağlar; ama *(iii)* koşulunu sağlamaz.

Aslında açık olarak bellidir ki $\langle \Omega, 1 \rangle = 1$. Sonra $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \lambda^k$ polinomu ve $\deg G(\lambda) = \deg H(\lambda)$ şartıyla $H(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \lambda^k$ tüm polinomlar için

$\left\langle \Omega, G(\lambda)H(\lambda) \right\rangle = \int_0^1 G(\lambda)H(\lambda)d\lambda$ ifadesi elde edilir. Özellikle $H(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_k} \lambda^k$ kompleks eşlenik seçilirse $\int_0^1 |G(\lambda)|^2 \, d\lambda = 0$ olur ve $G(\lambda) \equiv 0$ elde edilir.

Aynı sebepten dolayı $\deg G(\lambda) = \deg T(\lambda)$ için bütün $G(\lambda)$ polinomları için $\left\langle \Omega, G(\lambda)T(\lambda) \right\rangle = 0$ olacak şekilde aynı olmayan bir $T(\lambda)$ sıfır polinomu vardır.

Örnek 2.

$\left\langle \Omega, G(\lambda) \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k G(\lambda_k)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonel Teorem 2 nin koşullarını sağlar. Burada $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ ler birbirinden farklı reel sayı, $c_1, c_2, ..., c_N$ kompleks sayı, $\sum_{k=1}^{N} c_k = 1$ ve Re $c_k > 0 \quad (k = 1, ..., N)$ dir.

Bir önceki örnekte de olduğu gibi $\left\langle \Omega, 1 \right\rangle = 1$ ifadesi açıktır. Varsayalım ki $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} g_k \lambda^k$ ve $\deg G(\lambda) = \deg H(\lambda)$ şartıyla $H(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} h_k \lambda^k$ tüm polinomlar için $\left\langle \Omega, G(\lambda)H(\lambda) \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k G(\lambda_k)H(\lambda_k) = 0$ olsun. $H(\lambda)$ ifadesi $\sum_{k=0}^{N} \overline{g_k} \lambda^k$ alınırsa $\sum_{k=0}^{N} c_k \left|G(\lambda_k)\right|^2 = 0$ ifadesi elde edilir.

Ancak, Re $c_k > 0 \quad (k = 1, ..., N)$ koşulu kullanılırsa $G(\lambda_k) = 0$ ifadesi elde edilir. Bundan dolayı $G(\lambda) \equiv 0$ dır. Çünkü $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ ler birbirinden farlı olmak zorundadır. $\deg G(\lambda) \le N - 1$ dir.

$T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_N)$ polinomu ve bütün $G(\lambda)$ polinomları için $\left\langle \Omega, G(\lambda)T(\lambda) \right\rangle = 0$ olduğundan *(iii)* koşulu da sağlanır. Böylece Ω fonksiyoneli *Teorem 2* nin koşullarını sağlamış olur.

$N = 2$ için Ω fonksiyonelini tanımlayalım. $\left\langle \Omega, G(\lambda) \right\rangle = cG(0) + (1-c)G(1)$, burada $c \neq 0$ ve $c \neq 1$ olmak üzere herhangi bir kompleks sayı. (3.35) ve (3.36) formüllerini kullanarak Ω fonksiyoneli için ters problemi çözelim.

$$s_0 = \left\langle \Omega, 1 \right\rangle = 1, \quad s_l = \left\langle \Omega, \lambda^l \right\rangle = 1 - c \qquad l = 1, 2, ...$$

$$D_{-1}=1, \qquad D_0=s_0=1,$$

Şimdi sırasıyla D_1 ve D_2 determinantının değerini bulalım.

$$D_1=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1-c \\ 1-c & 1-c \end{vmatrix}=(1-c)^2-(1-c)=(1-c)(1-c-1)=c(1-c)$$

$$D_2=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1-c & 1-c \\ 1-c & 1-c & 1-c \\ 1-c & 1-c & 1-c \end{vmatrix}=0$$

ifadeleri elde edilir. (3.36) dan $\Delta_{-1}=0, \quad \Delta_0=s_1=1-c$ olduğu açıktır.

$$\Delta_1=D_1^{(1)}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1-c \\ 1-c & 1-c \end{vmatrix}=(1-c)^2-(1-c)=(1-c)(1-c-1)=c(1-c)\,.$$

Bundan dolayı Ω fonksiyoneli *Teorem 3* ün tüm koşullarını sağlar. (3.35) ve (3.36) dan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a_0=\pm(D_{-1}D_1)^{1/2}D_0^{-1}=\pm(1.c(1-c))^{1/2}.1=\pm\sqrt{c(1-c)},$$

$$b_0=\Delta_0D_0^{-1}-\Delta_{-1}D_{-1}^{-1}=(1-c).1-0.1=1-c,$$

$$b_1=\Delta_1D_1^{-1}-\Delta_0D_0^{-1}=c(1-c).(c(1-c))^{-1}-(1-c).1=1-1+c=c.$$

Ω spektral fonksiyonu için iki $J_\pm$ matrisi vardır.

$$J_\pm=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 \\ a_0 & b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-c & \pm\sqrt{c(1-c)} \\ \pm\sqrt{c(1-c)} & c \end{bmatrix}$$

$J_\pm$ matrislerinin karakteristik polinomları $\det(J_\pm-\lambda I)=\lambda(\lambda-1)$ şeklindedir.

Örnek 3.

$N=2$ olsun. Ω fonksiyoneli $\langle\Omega,G(\lambda)\rangle=G(\lambda_0)+cG'(\lambda_0)$ şeklinde tanımlansın. Burada λ_0 ve $c\neq 0$ keyfi kompleks sayılar olmak üzere tanımlanan fonksiyonel *Teorem 2* deki koşulları sağlar. *(iii)* koşulunda bulunan $T(\lambda)$ polinomunu $T(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^2$ alabiliriz.

$$s_0=\langle\Omega,1\rangle=1, \quad s_l=\langle\Omega,\lambda^l\rangle=\lambda_0^l+cl\lambda_0^{l-1} \qquad l=1,2,...$$

$$D_{-1}=1, \qquad D_0=s_0=1,$$

Şimdi sırasıyla D_1 ve D_2 determinantının değerini bulalım.

$$D_1=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_0+c \\ \lambda_0+c & \lambda_0^2+2c\lambda_0 \end{vmatrix}=(\lambda_0^2+2c\lambda_0)-(\lambda_0+c)^2=-c^2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_0+c & \lambda_0^2+2c\lambda_0 \\ \lambda_0+c & \lambda_0^2+2c\lambda_0 & \lambda_0^3+3c\lambda_0^2 \\ \lambda_0^2+2c\lambda_0 & \lambda_0^3+3c\lambda_0^2 & \lambda_0^4+4c\lambda_0^3 \end{vmatrix}=0$$

ifadeleri elde edilir. (3.36) dan $\Delta_{-1}=0,\quad \Delta_0=s_1=\lambda_0+c$ olduğu açıktır.

$$\Delta_1=D_1^{(1)}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_0+c \\ \lambda_0^2+2c\lambda_0 & \lambda_0^3+3c\lambda_0^2 \end{vmatrix}=\lambda_0^3+3c\lambda_0^2-(\lambda_0^2+2c\lambda_0)(\lambda_0+c)=-2c^2\lambda_0\,.$$

Bundan dolayı Ω fonksiyoneli *Teorem 3* ün tüm koşullarını sağlar. (3.35) ve (3.36) dan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a_0=\pm(D_{-1}D_1)^{1/2}D_0^{-1}=\pm(1.(-c^2))^{1/2}.1=\pm ic,$$

$$b_0=\Delta_0D_0^{-1}-\Delta_{-1}D_{-1}^{-1}=(\lambda_0+c).1-0.1=\lambda_0+c,$$

$$b_1=\Delta_1D_1^{-1}-\Delta_0D_0^{-1}=(-2c^2\lambda_0).(-c^2)^{-1}-(\lambda_0+c).1=\lambda_0-c.$$

Ω spektral fonksiyonu için iki $J_\pm$ matrisi vardır.

$$J_\pm=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 \\ a_0 & b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_0+c & \pm ic \\ \pm ic & \lambda_0-c \end{bmatrix}$$

$J_\pm$ matrislerinin karakteristik polinomları $\det(J_\pm-\lambda I)=(\lambda-\lambda_0)^2$ şeklindedir.

$N=3$ alınırsa fonksiyonel $\langle \Omega, G(\lambda)\rangle=G(\lambda_0)+c_1G'(\lambda_0)+c_2G''(\lambda_0)$ şeklinde tanımlanır.

Burada λ_0, c_1, c_2 kompleks sayılar ve $c_2\neq 0,\ 2c_2-c_1^2\neq 0$ olmak zorundadır.

4. GENELLEŞMİŞ SPEKTRAL FONKSİYONUN YAPISI VE SPEKTRAL VERİ

J, (1.1) formunda bir Jacobi matris olsun. Ω, J Jacobi matrisinin genelleşmiş spektral fonksiyonu olsun. Ω fonksiyonelinin yapısı aşağıdaki teoremde tanımlanmıştır.

Teorem 4.

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ ler J matrisinin farklı özdeğerleri ve $m_1, m_2, ..., m_p$ ler ise onların çoklukları ve sırasıyla (2.7) karakteristik polinomunun kökleri olsun. J matrisi tarafından belirlenen farklı β_{kj} $(j = 1, 2, ..., m_k; k = 1, 2, ..., p)$ kompleks sayıları vardır. Herhangi bir $G(\lambda) \in \mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ polinomu için aşağıdaki formül doğrudur.

$$\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\beta_{kj}}{(j-1)!} G^{(j-1)}(\lambda_k) \tag{4.1}$$

Burada $G^{(n)}(\lambda)$, $G(\lambda)$ polinomunun λ ya göre n. dereceden türevini gösterir.

İspat.

J, (1.1) formunda bir matris olsun. Buna göre ikinci dereceden lineer fark denklemini ele alalım.

$$a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \{0, 1, ..., N-1\}, \tag{4.2}$$

Burada $\{y_n\}_{n=-1}^{N}$ istenilen çözümdür.

$$\begin{array}{ll} P_{-1}(\lambda) = 1 & P_0(\lambda) = 1 + \lambda, \\ a_{-1} = 0 & a_{N-1} = 1. \end{array} \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{ll} Q_{-1}(\lambda) = -1 & Q_0(\lambda) = 0, \\ a_{-1} = \ \ 1 & a_{N-1} = 1. \end{array} \tag{4.4}$$

(4.2) denkleminin (4.3) ve (4.4) başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözümlerinin $\{P_n(\lambda)\}_{n=-1}^{N}$ ve $\{Q_n(\lambda)\}_{n=-1}^{N}$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $n \geq 0$, n. dereceden $\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomu (birinci tür polinom), $n-1$. dereceden $Q_n(\lambda)$ polinomu (ikinci tür polinom) için

$$M(\lambda) = -\frac{Q_N(\lambda) P_0(\lambda)}{P_N(\lambda)} \tag{4.5}$$

verilsin. J matrisinin resolventi olan $R(\lambda)=(J-\lambda I)^{-1}$ matrisinin $R_{nm}(\lambda)$ girişleri aşağıdaki gibidir:

$$R_{nm}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}[Q_m(\lambda)+M(\lambda)\dfrac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}], & 0<n\le m\le N-1,\\ \dfrac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}[Q_n(\lambda)+M(\lambda)\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}], & 0<n\le m\le N-1.\end{cases} \tag{4.6}$$

f, $\mathbb{C}^N$ uzayında $f_1, f_2, ..., f_{N-1}$ bileşenleri ile keyfi bir sütun vektör olsun.

$$R(\lambda)f=-\frac{f}{\lambda}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$|\lambda|\to\infty$ olmak üzere her $n\in\{1,...,N-1\}$ için

$$f_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\left\{\sum_{m=1}^{N-1}R_{nm}(\lambda)f_m\right\}d\lambda+\int_{\Gamma_r}\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)d\lambda, \tag{4.7}$$

burada r yeterince büyük bir pozitif sayı, Γ_r, λ- düzleminde orjin merkezli r yarıçaplı bir dairedir.

Şimdi $\lambda_1,...,\lambda_p$ lerin $\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomunun farklı kökleri olduğunu gösterelim. Sırasıyla $m_1, m_2, ..., m_p$ ler onların çoklukları olmak üzere

$$\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}=c(\lambda-\lambda_1)^{m_1}.....(\lambda-\lambda_p)^{m_p}, \tag{4.8}$$

yazılabilir. Burada c bir sabit. $1\le p\le N$ ve $m_1+m_2+...+m_p=N$ elde edilir. (4.8) den $\dfrac{\mathrm{Q}_N(\lambda)P_0(\lambda)}{P_N(\lambda)}$ rasyonel fonksiyonu kısmi kesirlerin toplamı olarak yeniden yazılabilir:

$$\frac{\mathrm{Q}_N(\lambda)P_0(\lambda)}{P_N(\lambda)}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\beta_{kj}}{(\lambda-\lambda_k)^j}, \tag{4.9}$$

Burada β_{kj} , J matrisine bağlı olarak belirlenen bazı benzersiz kompleks sayılardır. (4.6) ifadesi (4.7) de yerine yazılırsa, (4.5) dikkate alınırsa ve $r\to\infty$ limiti hesaplandıktan sonra (4.9) ifadesi,

$$f_n=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\beta_{kj}}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[F(\lambda)\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_k}, \quad n\in\{0,1,...,N-1\} \tag{4.10}$$

burada

$$F(\lambda)=\sum_{m=1}^{N-1} f_m \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \tag{4.11}$$

Şimdi $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında tanımlanan Ω fonksiyonelini ele alalım:

$$\langle \Omega, G(\lambda)\rangle=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\beta_{kj}}{(j-1)!}G^{(j-1)}(\lambda_k), \qquad G(\lambda)\in\mathbb{C}_{2N}[\lambda] \tag{4.12}$$

(4.10) formülü aşağıdaki formda yazılabilir:

$$f_n=\left\langle \Omega, F(\lambda)\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle, \qquad n\in\{0,1,\dots,N-1\}. \tag{4.13}$$

(4.11) ifadesi (4.13) de yerine yazılırsa ve ortogonallik bağıntısı sağlanır.

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle=\delta_{mn}, \qquad m,n\in\{0,1,\dots,N-1\} \tag{4.14}$$

Ayrıca (4.8) ve (4.12) den

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right\rangle=0, \qquad m\in\{0,1,\dots,N\} \tag{4.15}$$

ifadesi yazılabilir. Bu da *Teorem 1* den dolayı şu anlama gelmektedir ki J matrisinin genelleşmiş spektral fonksiyonu (4.12) formuna sahiptir. ■

Tanım 12.

Teorem 4 den dolayı

$\{\lambda_k,\beta_{kj}(j=1,\dots,m_k,k=1,\dots,p)\}$ birleşimi J matrisinin genelleşmiş spektral fonksiyonunun yapısını belirler. Böylece bu birleşime J matrisinin spektral verisi denir. Her $k\in\{1,2,\dots,p\}$ için

$\{\beta_{k1},\dots,\beta_{km_k}\}$

dizisine λ_k özdeğeri ile J matrisinin *normalize dizisi* denir.

Eğer (1.1) formunda verilen J matrisinin ilk satırı ve ilk sütunu silinirse aşağıdaki matris elde edilir:

$$\begin{aligned} a_n^{(1)}&=a_{n+1}, \quad n\in\{0,1,\dots,N-3\},\\ b_n^{(1)}&=b_{n+1}, \quad n\in\{0,1,\dots,N-2\}.\end{aligned} \quad \text{olmak üzere}$$

$J^{(1)}$ matrisine J matrisinin *birinci kesilmiş matrisi* denir.

$$J^{(1)}=\begin{bmatrix} b_0^{(1)} & a_0^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0^{(1)} & b_1^{(1)} & a_1^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-4}^{(1)} & a_{N-4}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-4}^{(1)} & b_{N-3}^{(1)} & a_{N-3}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-3}^{(1)} & b_{N-2}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Teorem 5.

J matrisinin β_{kj} normalize sayıları, kısmi kesirler ile

$$-\frac{\det(J^{(1)}-\lambda I)}{\det(J-\lambda I)}$$

rasyonel fonksiyonları çözümlenerek hesaplanabilir.

İspat.

Sırasıyla $P_n^{(1)}(\lambda)$ ve $Q_n^{(1)}(\lambda)$ polinomlarının $J^{(1)}$ matrisine karşılık gelen birinci ve ikinci tür polinomlar olduğunu gösterelim. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$P_n^{(1)}(\lambda)=a_0Q_{n+1}(\lambda)P_0(\lambda), \quad n\in\{0,1,...,N-1\}, \tag{4.16}$$

$$Q_n^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{a_0}\{(\lambda-b_0)Q_{n+1}(\lambda)P_0(\lambda)-P_{n+1}(\lambda)P_0(\lambda)\}, \quad n\in\{0,1,...,N-1\}. \tag{4.17}$$

Bu eşitliklerin her iki tarafı da aynı fark denkleminin çözümüdür.

$$a_{n-1}^{(1)}y_{n-1}+b_n^{(1)}y_n+a_n^{(1)}y_{n+1}=\lambda y_n, \quad n\in\{0,1,...,N-2\}, \quad a_{N-2}^{(1)}=1,$$

ve iki taraf da $n=0$ için denktir. Bundan dolayı eşitlik, çözümler için teklik teoremini sağlar.

Sonuç olarak, *Lemma 1* den ve (4.16) dan

$$\det(J^{(1)}-\lambda I)=(-1)^{N-1}a_0^{(1)}a_1^{(1)}a_{N-2}^{(1)}\frac{P_N^{(1)}(\lambda)}{P_0(\lambda)}=(-1)^{N-1}a_1.....a_{N-1}a_0\frac{Q_N(\lambda)P_0(\lambda)}{P_0(\lambda)}.$$

(2.7) den

$$-M(\lambda)=\frac{Q_N(\lambda)P_0(\lambda)}{P_N(\lambda)}=-\frac{\det(J^{(1)}-\lambda I)}{\det(J-\lambda I)}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (4.9) ifadesiyle aynıdır. ■

5. SPEKTRAL VERİNİN TERS PROBLEMİ

Ters spektral problem demek J matrisini kurtarma problemi demektir, yani verileri a_n ve b_n olan spektral veri.

Teorem 6.
Kompleks sayıların keyfi bir birleşimi verilsin.

$$\{\lambda_k, \beta_{kj}(j = 1,..., m_k, k = 1,..., p)\} \tag{5.1}$$

burada $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ $(1 \le p \le N)$ *ler farklı,* $(1 \le m_k \le N)$, *ve* $m_1 + m_2 + ... + m_p = N$. *Bu birleşimin sırasıyla (1.2) verileri ile (1.1) formundaki bazı* J *Jacobi matrisleri için spektral veri olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:*

(i) $\sum_{k=1}^{p} \beta_{k1} = 1$

(ii) $n \in \{1, 2, ..., N-1\}$ *için* $D_n \neq 0$ *ve* $D_N = 0$, *burada* D_n, *(3.24) deki gibidir.*

$$s_l = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_{kl}} \binom{l}{j-1} \beta_{kj} \lambda_k^{l-j+1} \tag{5.2}$$

$n_{kl} = \min\{m_k, l+1\}$, $\binom{l}{j-1}$ *iki terimli katsayı.*

İspat.
$(\Rightarrow)$ Gerekliliğin ispatı *Teorem 3* deki gibidir. J matrisinin genelleşmiş spektral fonksiyonu (4.1) den dolayı spektral veri tarafından tanımlanır ve (5.2) sayısı $\langle \Omega, \lambda^l \rangle$ ifadesine denktir. Ayrıca, $\sum_{k=1}^{p} \beta_{k1} = \langle \Omega, 1 \rangle = s_0 = D_0$.

Teorem 2 nin *(iii)* koşulu aşağıdaki ifadeye sahiptir.

$$T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} ... (\lambda - \lambda_p)^{m_p} \tag{5.3}$$

Bundan dolayı (5.2) ifadesi doğrudur.

$(\Leftarrow)$ Varsayalım ki (5.1) katsayıları sayıları teoremdeki koşulları sağlasın. Bu verileri kullanarak (4.1) formülünden $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayındaki Ω fonksiyonelini kuralım. Ω fonksiyoneli *Teorem 3* koşullarını sağlar. Bundan dolayı Ω genelleşmiş spektral fonksiyonu için (1.1) formunda bir J matrisi vardır. Şimdi (5.1) birleşiminin J kurtarma matrisi için spektral veri olduğunu ispatlayalım. Bunun için (4.3) başlangıç koşulları altında (4.2) denkleminin çözümü olan $\frac{P_{-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \frac{P_0(\lambda)}{P_0(\lambda)}, ..., \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomlarını tanımlayalım. Bu da J matrisini kurmak demektir. (2.8), (2.9) bağıntıları ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$a_n = \left\langle \Omega, \lambda \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle, \qquad n \in \{0,1,...,N-2\} \tag{5.4}$$

$$b_n = \left\langle \Omega, \lambda \frac{P_n^2(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle, \qquad n \in \{0,1,...,N-1\} \tag{5.5}$$

Özellikle (4.8) ifadesinin sırasıyla $m_1,...,m_p$ çoklukları ile J matrisinin özdeğerleri olan $\lambda_1,...,\lambda_p$ leri sağladığını göstermektedir. (5.3) deki gibi $T(\lambda)$ tanımlansın. c bir sabit olmak üzere $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$a_{N-2} \frac{P_{N-2}(\lambda)}{P_0(\lambda)} + b_{N-1} \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} + cT(\lambda) = \lambda \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} \tag{5.6}$$

yazılabilir. Doğruluğu gösterilirse buradan ve $y_k = P_k(\lambda)$, $n = N-1$ eşitlikleri ile (4.2) den $a_{N-1} \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} = cT(\lambda)$ ifadesi elde edilir.

$\deg \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} = n \quad (0 \le n \le N-1)$, $\qquad \deg T(\lambda) = m_1$+...+m$_p$=N $\qquad$ olduğundan $\frac{P_{-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \frac{P_0(\lambda)}{P_0(\lambda)}, ..., \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}, T(\lambda)$ derecesi N ye eşit ya da küçük olan bütün polinomların lineer uzayının bir temelini oluşturur. Bundan dolayı aşağıdaki ayrıştırma yapılabilir.

$$\lambda \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} = cT(\lambda) + \sum_{n=0}^{N-1} c_n \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \tag{5.7}$$

burada $c, c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ ler sabit. (5.3) ve (4.1) den dolayı

$$\left\langle \Omega, T(\lambda) \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0, \quad n \in \{0,1,...,N\} \ .$$

(5.7) ifadesini açacak olursak

$$\lambda \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} = cT(\lambda) + c_0 \frac{P_0(\lambda)}{P_0(\lambda)} + c_1 \frac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} + ... + c_{N-2} \frac{P_{N-2}(\lambda)}{P_0(\lambda)} + c_{N-1} \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$$

Bundan dolayı (2.8), (2.9) ve (5.4), (5.5) bağıntılarından

$$c_n = 0 \quad (0 \le n \le N-3), \qquad c_{N-2} = a_{N-2}, \qquad c_{N-1} = b_{N-1}.$$

Böylece (5.6) ifadesinin doğruluğu kanıtlanır.

Şimdi her bir $k \in \{1,...,p\}$ için $\{\beta_{k1},...,\beta_{km_k}\}$ dizisinin λ_k özdeğerleri ile birleştirilen J matrisinin normalize serisi olduğu gösterilmelidir. Daha önce λ_k nın m_k çokluğu ile J matrisinin bir özdeğeri olduğu gösterilmişti. λ_k özdeğeri ile birleştirilen J matrisinin normalize serisi $\{\beta_{k1},...,\beta_{km_k}\}$ şeklinde olsun. Bundan dolayı $\langle \Omega, G(\lambda) \rangle$ için (4.1) de β_{kj} yerine β_{kj} yazılırsa (4.1) ifadesi ile taraf tarafa çıkarılırsa her $G(\lambda) \in \mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ için

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\beta_{kj} - \beta_{kj}}{(j-1)!} G^{(j-1)}(\lambda_k) = 0$$

ifadesi elde edilir. $G^{(j-1)}(\lambda_k)$ değerleri keyfi değerler olabilir. Her k ve j için $\beta_{kj} = \beta_{kj}$. ■

Teorem 6 koşulları altında J matrisinin a_n ve b_n verileri (5.1) birleşimi için spektral veridir. Böylece (3.35) ve (3.36) formülleri yeniden kurulmuş olur.

6. REEL JACOBİ MATRİSİN GENELLEŞMİŞ SPEKTRAL FONKSİYONUNU TANIMLAMA

Bu bölümde, kompleks Jacobi matrisinin genelleşmiş spektral fonksiyonu üzerinden reel Jacobi matrisinin genelleşmiş spektral fonksiyon tanımlanmıştır. m negatif olamayan bir tamsayı olsun. $\mathbb{R}_{2m}[\lambda]$, reel katsayılı $\lambda \leq 2m$ dereceli bütün polinomların halkasını göstermektedir.

Tanım 13.

$G(\lambda) \geq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty$ eşitsizliğini sağlayan ve sıfır olmayan bütün $G(\lambda) \in \mathbb{R}_{2m}[\lambda]$ polinomları için $\langle \Omega, G(\lambda) \rangle > 0$ ise $\mathbb{C}_{2m}[\lambda]$ uzayında tanımlanan Ω lineer fonksiyoneli pozitiftir denir.

Lemma 2.

Ω fonksiyoneli $\mathbb{C}_{2m}[\lambda]$ uzayında pozitif fonksiyonel ise $\mathbb{R}_{2m}[\lambda]$ uzayında sadece reel değer alır.

İspat.

Ω fonksiyoneli için $k \in \{0,1,...,m\}$ olmak üzere $\langle \Omega, \lambda^{2k} \rangle$ değerleri reeldir. Aynı zamanda pozitiftir. Yanısıra, $k \in \{1,2,...,m\}$ olmak üzere λ^{2k-1} tek terimlisi $2k$ dereceli negatif olmayan iki polinomun bir farkını belirtir:

$$2\lambda^{2k-1} = \lambda^{2k-2}(\lambda+1)^2 - \lambda^{2k-2}(\lambda^2+1).$$

Bundan dolayı $k \in \{1,2,...,m\}$ olmak üzere $\langle \Omega, \lambda^{2k-1} \rangle$ değerleri hem reel hem de iki pozitif sayının farkıdır. Böylece $n \in \{0,1,...,2m\}$ için $\langle \Omega, \lambda^n \rangle$ değeri reeldir. Bundan dolayı $G(\lambda) \in \mathbb{R}_{2m}[\lambda]$ olmak üzere $\langle \Omega, G(\lambda) \rangle$ reeldir. ■

Lemma 3.

Her $n \in \{0,1,...,m\}$ için $D_n > 0$ ise Ω lineer fonksiyoneli $\mathbb{C}_{2m}[\lambda]$ uzayında pozitiftir. Burada

$$s_l = \langle \Omega, \lambda^l \rangle, \qquad l = 0,1,...,2m \ \textit{olmak üzere}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}, \qquad n = 0,1,...,m.$$

İspat.

$$G(\lambda) \geq 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty \tag{6.1}$$

eşitsizliğini sağlayan ve sıfır olmayan herhangi bir $G(\lambda) \in \mathbb{R}_{2m}[\lambda]$ polinomu aşağıdaki gibi belirlenir.

$$G(\lambda) = [A(\lambda)]^2 + [B(\lambda)]^2 \tag{6.2}$$

burada $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ derecesi m ye eşit ya da küçük olan reel katsayılı polinomlardır. Gerçekten (6.1) den $\deg G(\lambda) = 2p$ olsa bile $p \leq m$ dir. Bundan dolayı lineer çarpanların ayrıştırması aşağıdaki gibidir:

$$G(\lambda) = c\prod_{k=1}^{p}(\lambda - \alpha_k - i\beta_k)(\lambda - \alpha_k + i\beta_k),$$

burada $c > 0$, $\beta_k \geq 0$, α_k reeldir ($\alpha_k + i\beta_k$ kökler arasındadır). Yukarıdaki ifade düzenlenip yazılırsa

$$\sqrt{c}\prod_{k=1}^{p}(\lambda - \alpha_k - i\beta_k) = A(\lambda) + iB(\lambda),$$

ifadesi elde edilir. $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ reel katsayılı ve (6.2) ifadesini sağlayan polinomlar olsun. x_k, y_k reel sayı olmak üzere

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^{p} x_k \lambda^k, \qquad B(\lambda) = \sum_{k=1}^{p} y_k \lambda^k.$$

$$\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \sum_{j,k=0}^{p} s_{j+k} x_j x_k + \sum_{j,k=0}^{p} s_{j+k} y_j y_k.$$

Bu da *Lemmanın* doğruluğunu gösterir. ■

Teorem 7.

$\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ *uzayında tanımlanan* Ω *lineer fonksiyoneli (1.3) verileri ile (1.1) formundaki bir reel Jacobi matris için genelleşmiş spektral fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:*

(i) $\langle \Omega, 1 \rangle = 1$

(ii) $\mathbb{C}_{2N-2}[\lambda]$ *uzayında* Ω *pozitiftir.*

(iii) $\deg G(\lambda) \le N$ *olmak üzere bütün* $G(\lambda)$ *polinomları için*

$\langle \Omega, G(\lambda)T(\lambda) \rangle = 0$ *olacak şekilde* $\deg T(\lambda) = N$ *olan bir* $T(\lambda)$ *polinomu vardır.*

İspat.

$(\Rightarrow)$ (2.8) den $m = n = 0$ için $\langle \Omega, 1 \rangle = 1$ dir. Reel J Jacobi matrisinin Ω genelleşmiş spektral fonksiyonunun $\mathbb{C}_{2N-2}[\lambda]$ uzayındaki pozitifliğin ispatı için

$$G(\lambda) \ge 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan ve sıfır olmayan keyfi bir $G(\lambda) \in \mathbb{R}_{2N-2}[\lambda]$ polinomu tanımlansın. Bu polinom *Lemma 3* den dolayı

$$G(\lambda) = [A(\lambda)]^2 + [B(\lambda)]^2 \tag{6.3}$$

ifadesi yazılabilir. Burada $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ derecesi $N-1$ e eşit ya da küçük olan reel katsayılı polinomlardır. $\mathbb{R}_{N-1}[\lambda]$ uzayının temelini oluşturan $\frac{P_0(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \frac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \ldots, \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ reel katsayılı polinomları için aşağıdaki ifade yazılabilir. c_k, d_k sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \frac{P_k(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \qquad B(\lambda) = \sum_{k=1}^{N-1} d_k \frac{P_k(\lambda)}{P_0(\lambda)}.$$

Bundan dolayı (2.8) deki "ortogonalllik" özelliği kullanıldığında (6.3) ifadesinden $\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \sum_{j,k=0}^{N-1} (c_k^2 + d_k^2) > 0$ elde edilir.

Ω fonksiyonelinin özelliği $T(\lambda) = \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ alınırsa (2.9) dan teoremin *(iii)* koşulunu gerektirir. Böylece *(iii)* koşulu sağlanmış olur.

$(\Leftarrow)$ Teoremin koşulları, yani *Teorem 2* nin bütün koşulları sağlansın. Aslında sadece *Teorem 2* nin *(ii)* koşulu ispatlanması gerekir. $\deg G(\lambda) = n \le N-1$ olacak şekilde bazı $G(\lambda)$ ve $\deg H(\lambda) = n$ olan bütün $H(\lambda)$ polinomları için,

$$\langle \Omega, G(\lambda)H(\lambda) \rangle = 0 \tag{6.4}$$

olsun. $G(\lambda) \equiv 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} g_k \lambda^k, \qquad H(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} h_j \lambda^j,$$

İfadeleri ve (6.4) gereği

$$\sum_{j=0}^{n} h_j \left(\sum_{k=0}^{n} g_k s_{k+j} \right) = 0.$$

$h_0, h_1, ..., h_n$ $(h_n \neq 0)$ keyfi olduğundan, son denklem

$$\sum_{k=0}^{n} g_k s_{k+j} = 0, \quad j = 0,1,...,n. \tag{6.5}$$

Elde edilen son ifade $g_0, g_1, ..., g_n$ ile ilgili olan cebirsel denklemleri lineer homojen sistemidir ve bu sistemin determinantı D_n determinantına denktir. Teoremin (ii) koşulundan ve *Lemma 3* den dolayı $D_n > 0$. Böylece $D_n \neq 0$ ve bundan dolayı (6.5) sistemi sadece aşikar çözüme sahiptir $g_0 = g_1 = ... = g_n = 0$.

Böylece *Teorem 2* nin bütün koşulları sağlanır. O halde, genellikle, Ω genelleşmiş spektral fonksiyonu için (1.2) verileri ile (1.1) formunda bir kompleks J Jacobi matrisi vardır. J matrisi (3.35), (3.36) formülleri kullanılarak elde edilir. J matrisinin reel olduğu gösterilmesi kaldı. *Lemma 2* ve *Lemma 3* den $n \in \{0,1,...,N-1\}$ için $D_n > 0$ yazılır ve Δ_n determinantları reeldir. Bundan dolayı (3.35), (3.36) formülleri J matrisinin reel olduğunu gösterir. ■

Aşağıdaki teoremin ispatı *Teorem 3* ün ispatı ile eşdeğerdir.

Teorem 8.

$\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında tanımlı Ω lineer fonksiyoneli verilmiş olsun. Ω fonksiyonelinin (1.3) verileri ile (1.1) formundaki reel J Jacobi matrisi için genelleşmiş spektral fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$D_0 = 1, \qquad D_n \neq 0 \quad (n = 1,2,...,N-1), \qquad \text{ve} \qquad D_N = 0,$$

D_n *, (3.23) ve (3.24) de tanımlıdır.*

Teorem 8 koşulları altında J matrisinin a_n ve b_n verileri ki spektral fonksiyon olan Ω fonksiyoneli (3.35) ve (3.36) formülleri tarafından yeniden kurulmuştur.

7. REEL JACOBİ MATRİSLERİN GENELLEŞMİŞ SPEKTRAL FONKSİYONUNUN YAPISI

Bu bölümde (1.2) verileri ile (1.1) formundaki herhangi bir J Jacobi matrisi için iki lemma ispatlanmıştır. J Jacobi matrisinin sahip olduğu (4.2) denklemi verilsin. Sırasıyla (4.3) ve (4.4) başlangıç koşullarını sağlayan denklemin çözümleri $\{P_n(\lambda)\}_{n=-1}^{N}$ ve $\{Q_n(\lambda)\}_{n=-1}^{N}$ olsun.

Lemma 4.

$$P_{N-1}(\lambda)Q_N(\lambda)-P_N(\lambda)Q_{N-1}(\lambda)=1+\lambda \tag{7.1}$$

denklemi doğrudur.

İspat.

$$\begin{aligned} &a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)+b_nP_n(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda)=\lambda P_n(\lambda),\\ &n\in\{0,1,...,N-1\}, \qquad a_{-1}=0, \quad a_{N-1}=1,\\ &a_{n-1}Q_{n-1}(\lambda)+b_nQ_n(\lambda)+a_nQ_{n+1}(\lambda)=\lambda Q_n(\lambda),\\ &n\in\{0,1,...,N-1\}, \qquad a_{-1}=1, \quad a_{N-1}=1, \end{aligned} \tag{7.2}$$

denklemleri sırasıyla $Q_n(\lambda)$ ve $P_n(\lambda)$ çarpılıp

$$a_{n-1}Q_n(\lambda)P_{n-1}(\lambda)+b_nQ_n(\lambda)P_n(\lambda)+a_nQ_n(\lambda)P_{n+1}(\lambda)=\lambda Q_n(\lambda)P_n(\lambda),$$

$$a_{n-1}P_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda)+b_nP_n(\lambda)Q_n(\lambda)+a_nP_n(\lambda)Q_{n+1}(\lambda)=\lambda P_n(\lambda)Q_n(\lambda),$$

elde edilen iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa

$$a_{n-1}[P_{n-1}(\lambda)Q_n(\lambda)-P_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda)]=a_n[P_n(\lambda)Q_{n+1}(\lambda)-P_{n+1}(\lambda)Q_n(\lambda)], \quad n\in\{1,2,...,N-1\}$$

$P_n(\lambda)$ ve $Q_n(\lambda)$ çözümlerinin Wronskianı olan $a_n[P_n(\lambda)Q_{n+1}(\lambda)-P_{n+1}(\lambda)Q_n(\lambda)]$ ifadesi $n\in\{0,1,...,N-1\}$ e bağlı değildir.

$n=0$ için $a_0[P_0(\lambda)Q_1(\lambda)-P_1(\lambda)Q_0(\lambda)]$ ifadesi düzenlenip yeniden yazılırsa $a_0[(1+\lambda).\dfrac{1}{a_0}-\dfrac{\lambda-b_0}{a_0}.0]=1+\lambda$ olur ve bütün $n\in\{0,1,...,N-1\}$ ler için eşit olduğundan $n=N-1$ alındığında (7.1) ifadesi elde edilir. ■

Lemma 5.

$$P_{N-1}(\lambda)P_N'(\lambda)-P_N(\lambda)P_{N-1}'(\lambda)=\sum_{n=0}^{N-1}P_n^2(\lambda), \qquad (7.3)$$

denklemi doğrudur ve türev λ parametresine göredir.

İspat.

(7.2) denklemi $P_0(\lambda)$ a bölünüp

$$a_{n-1}\frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}+b_n\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}+a_n\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)}=\lambda\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$$

λ ya göre türevi alınırsa

$$a_{n-1}\frac{P_{n-1}'(\lambda)P_0(\lambda)-P_{n-1}(\lambda)P_0'(\lambda)}{P_0^2(\lambda)}+b_n\frac{P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-P_n(\lambda)P_0'(\lambda)}{P_0^2(\lambda)}$$

$$+a_n\frac{P_{n+1}'(\lambda)P_0(\lambda)-P_{n+1}(\lambda)P_0'(\lambda)}{P_0^2(\lambda)}=\frac{(P_n(\lambda)+\lambda P_n'(\lambda))P_0(\lambda)-\lambda P_n(\lambda)P_0'(\lambda)}{P_0^2(\lambda)}$$

ifadesi elde edilir. Düzenlemeler yapılıp

$$a_{n-1}P_{n-1}'(\lambda)P_0(\lambda)-a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)P_0'(\lambda)+b_nP_n'(\lambda)P_0(\lambda)-b_nP_n(\lambda)P_0'(\lambda)$$

$+a_nP_{n+1}'(\lambda)P_0(\lambda)-a_nP_{n+1}(\lambda)P_0'(\lambda)=P_n(\lambda)P_0(\lambda)+\lambda P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-\lambda P_n(\lambda)P_0'(\lambda)$ olur.

$P_0'(\lambda)=(1+\lambda)'=1$ yerine yazılırsa

$$a_{n-1}P_{n-1}'(\lambda)P_0(\lambda)+b_nP_n'(\lambda)P_0(\lambda)+a_nP_{n+1}'(\lambda)P_0(\lambda)-(a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)+b_nP_n(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda))$$

$=P_n(\lambda)P_0(\lambda)+\lambda P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-\lambda P_n(\lambda)$ olur.

Son olarak $a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)+b_nP_n(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda)=\lambda P_n(\lambda)$ olduğundan

$$\begin{aligned}&a_{n-1}P_{n-1}'(\lambda)+b_nP_n'(\lambda)+a_nP_{n+1}'(\lambda)=P_n(\lambda)+\lambda P_n'(\lambda)\\&n\in\{0,1,...,N-1\},\qquad a_{-1}=0,\quad a_{N-1}=1.\end{aligned} \qquad (7.4)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi (7.2) denklemi $\left(\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right)'$ ifadesi ile çarpılıp

$$a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)\left(\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right)'+b_nP_n(\lambda)\left(\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right)'+a_nP_{n+1}(\lambda)\left(\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right)'=\lambda P_n(\lambda)\left(\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}\right)'$$

$$a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)\frac{(P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-P_n(\lambda)P_0'(\lambda))}{P_0^2(\lambda)}+b_nP_n(\lambda)\frac{(P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-P_n(\lambda)P_0'(\lambda))}{P_0^2(\lambda)}$$
$$+a_nP_{n+1}(\lambda)\frac{(P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-P_n(\lambda)P_0'(\lambda))}{P_0^2(\lambda)}=\lambda P_n(\lambda)\frac{(P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-P_n(\lambda)P_0'(\lambda))}{P_0^2(\lambda)}$$

düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)P_n'(\lambda)P_0(\lambda)+b_nP_n(\lambda)P_n'(\lambda)P_0(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda)P_n'(\lambda)P_0(\lambda)$$
$$-P_n(\lambda)(a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)+b_nP_n(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda))=\lambda P_n(\lambda)P_n'(\lambda)P_0(\lambda)-\lambda P_n(\lambda)P_n(\lambda)$$

$$a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)P_n'(\lambda)+b_nP_n(\lambda)P_n'(\lambda)+a_nP_{n+1}(\lambda)P_n'(\lambda)=\lambda P_n(\lambda)P_n'(\lambda)$$

elde edilen son ifade ile, (7.4) ifadesinin $P_n(\lambda)$ ile çarpılıp

$$a_{n-1}P_{n-1}'(\lambda)P_n(\lambda)+b_nP_n'(\lambda)P_n(\lambda)+a_nP_{n+1}'(\lambda)P_n(\lambda)=P_n^2(\lambda)+\lambda P_n'(\lambda)P_n(\lambda)$$

elde edilen ifade taraf tarafa çıkarılırsa

$$a_{n-1}[P_{n-1}(\lambda)P_n'(\lambda)-P_{n-1}'(\lambda)P_n(\lambda)]-a_n[P_{n+1}'(\lambda)P_n(\lambda)-P_{n+1}(\lambda)P_n'(\lambda)]=-P_n^2(\lambda)$$

$n\in\{0,1,...,N-1\}$ olur.

Son denklemin $n=0,1,...,m$ $(m\le N-1)$ değerleri için toplamı alınırsa ve (4.3) başlangıç koşulları kullanılırsa

$$a_m[P_{m+1}'(\lambda)P_m(\lambda)-P_{m+1}(\lambda)P'_m(\lambda)]=\sum_{n=0}^{m}P_n^2(\lambda),\qquad m\in\{0,1,...,N-1\}$$

ifadesi elde edilir. $m=N-1$ alınıp $a_{N-1}=1$ olduğu dikkate alınırsa lemma ispatlanmış olur. ■

Lemma 6.

(1.3) verileri ile (1.1) formundaki herhangi bir reel J Jacobi matrisi için $\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ *polinomlarının kökleri basittir.*

İspat.

$\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomunun bir kökü λ_0 olsun. (2.7) den dolayı λ_0, J matrisinin bir özdeğeridir ve reeldir. (7.3) de $\lambda=\lambda_0$ ve $\dfrac{P_N(\lambda_0)}{P_0(\lambda_0)}=0$ (yani $P_N(\lambda_0)=0$) alınırsa

$$P_{N-1}(\lambda_0)P_N'(\lambda_0) = \sum_{n=0}^{N-1} P_n^2(\lambda_0) \tag{7.5}$$

olur. Burada $P_n(\lambda)$ reel katsayılara sahip ve λ nın reel değerleri için eşitliğin sağ tarafı sıfırdan farklıdır ve $P_0(\lambda) = 1 + \lambda \neq 0$. Sonuç olarak, $P_N'(\lambda_0) \neq 0$ olur ki bu da $\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomunun kökü olan λ_0 ın basit olduğunu gösterir. ■

Lemma 7.

(1.3) verileri ile (1.1) formundaki herhangi bir reel J Jacobi matrisi tam olarak N reel ve farklı özdeğere sahiptir.

İspat.

J matrisinin özdeğerlerinin gerçekliği Hermityen olmasından anlaşılmaktadır. (2.7) den $\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomunun kökleri ile J matrisinin özdeğerleri denktir. N dereceli olan bu polinom N köke sahiptir. *Lemma 6* dan dolayı bu kökler birbirinden farklıdır. ■

Bir sonraki teorem reel Jacobi matrisin genelleşmiş spektral fonksiyonunun yapısını tanımlamaktadır.

Teorem 9.

J, (1.3) verileri ile (1.1) formunda bir reel Jacobi matrsi ve Ω, bu matrisin genelleşmiş spektral fonksiyonu olsun. Herhangi bir $G(\lambda) \in \mathbb{C}_{2N}[\lambda]$

$$\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \sum_{k=1}^{N} \beta_k G(\lambda_k), \tag{7.6}$$

Burada $\lambda_1, ..., \lambda_N$ ler J matrisinin özdeğerleri ve $\beta_1, ..., \beta_N$ ler pozitif reel sayılar olmak üzere J matrisi tarafından bir tek determinanta sahiptir.

İspat.

Lemma 6 dan, $\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomunun $\lambda_1, ..., \lambda_N$ kökleri basittir. Bundan dolayı (7.6) formülü (4.1) den ve (4.9) un ayrışmasından

$$\frac{Q_N(\lambda)}{P_N(\lambda)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\beta_k}{\lambda-\lambda_k}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$Q_N(\lambda_k)=\beta_k P_N'(\lambda_k) \tag{7.7}$$

olup diğer taraftan, (7.1) ve (7.3) için $\lambda=\lambda_k$ alınıp $P_N(\lambda_k)=0$ olmak üzere yeniden hesaplanırsa sırasıyla

$$P_{N-1}(\lambda_k)Q_N(\lambda_k)=1+\lambda, \tag{7.8}$$

$$P_{N-1}(\lambda_k)P_N'(\lambda_k)=\sum_{n=0}^{N-1}P_n^2(\lambda_k), \tag{7.9}$$

ifadeleri elde edilir. (7.7), (7.8) ve (7.9) ifadeleri karşılaştırılarak (7.8) ile (7.9) ifadesi taraf tarafa bölünürse

$$\beta_k=(1+\lambda)\left\{\sum_{n=0}^{N-1}P_n^2(\lambda_k)\right\}^{-1}, \tag{7.10}$$

olur. Bu nedenle $\beta_k>0$ dır. ■

$\{P_n(\lambda_k)\}_{n=0}^{N-1}$, J matrisinin λ_k özdeğerine karşılık gelen özvektörü olduğundan (7.10) formülünden dolayı β_k sayıları J matrisinin normalize sayıları diye adlandırılır.

Tanım 14.

(1.3) verileri ile (1.1) formundaki J matrisinin özdeğerlerinin birleşimi ve normalize sayılarına $\{\lambda_k,\beta_k \ (k=1,...,N)\}$ *matrisin spektral verisi* denir.

Uyarı 2.

Varsayalım ki $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N$ olmak üzere $\omega(\lambda)$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında azalmayan basamak fonksiyonu olsun.

$$\omega(\lambda)=\sum_{\lambda_k\le\lambda}\beta_k$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\lambda_k\le\lambda$ değil ise $\omega(\lambda)=0$ dır. Böylece J matrisinin özdeğerleri $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun artış noktalarıdır. (7.6) eşitliğinden

$$\langle\Omega,G(\lambda)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}G(\lambda)d\omega(\lambda),$$

yazılabilir. Buradaki integral Stieljes integralidir. Bundan dolayı (4.14) ortogonal bağıntısından

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(\lambda)P_n(\lambda)d\omega(\lambda)=\delta_{mn}, \qquad m,n\in\{0,1,...,N-1\}$$

ve (4.13) açılımından

$$f_n=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)P_n(\lambda)d\omega(\lambda)=\delta_{mn}, \qquad n\in\{0,1,...,N-1\}$$

yazılabilir. Burada $F(\lambda)$, (4.11) de tanımlandığı gibidir:

$$F(\lambda)=\sum_{m=0}^{N-1} f_m P_m(\lambda).$$

Böyle bir $\omega(\lambda)$ fonksiyonu bir J matrisinin spektral fonksiyondur (Bknz. [21]). Bu açıklamalar genelleşmiş spektral fonksiyon teriminin kompleks durumu içindir.

8. REEL JACOBİ MATRİSLER İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEM

Reel Jacobi matrisler için ters spektral problem spektral veri tarafından matrisin kurtarma problemidir.

Teorem 10.

$$\{\lambda_k, \beta_k \quad (k = 1, ..., N)\} \tag{8.1}$$

sayılarının keyfi bir birleşimi verilsin. Bu birleşim (1.3) verileri ile (1.1) formundaki reel J Jacobi matrisi için spektral veri olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:

(i) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ sayıları reel ve farklıdır,

(ii) $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N$ sayıları pozitiftir ve $\sum_{k=1}^{N} \beta_k = 1.$

İspat.

$(\Rightarrow)$ Teoremin gerek şartı yukarıda ispatlanmıştır.

$(\Leftarrow)$ Varsayalım ki teoremin iki koşulunu da sağlayan (8.1) birleşimi olsun. Bu verilerden dolayı

$$\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \sum_{k=1}^{N} \beta_k G(\lambda_k), \qquad G(\lambda) \in \mathbb{C}_{2N}[\lambda] \tag{8.2}$$

olacak şekilde $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında Ω fonksiyoneli tanımlansın. Ω fonksiyoneli *Teorem 7* nin koşullarını sağlar. Bundan dolayı

$$\langle \Omega, 1 \rangle = \sum_{k=1}^{N} \beta_k = 1,$$

elde edilir. Şimdi

$$G(\lambda) \geq 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan ve sıfır olmayan keyfi bir $G(\lambda) \in \mathbb{R}_{2N-2}[\lambda]$ polinomu tanımlansın. *Lemma 3* ün ispatından bu polinom aşağıdaki gibi gösterilir:

$$G(\lambda) = [A(\lambda)]^2 + [B(\lambda)]^2.$$

Burada $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ derecesi $N-1$ e eşir ya da küçük reel katsayılı polinomlardır.

$$\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \sum_{k=1}^{N} \beta_k G(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k [A(\lambda)]^2 + \sum_{k=1}^{N} \beta_k [B(\lambda)]^2 \geq 0. \tag{8.3}$$

(8.3) deki eşitliğin doğru olmadığı gösterilmelidir. (8.3) eşitliği var ise bütün β_k pozitif sayıları için

$$A(\lambda_1) = A(\lambda_2) = ... = A(\lambda_N) = 0 \text{ ve } B(\lambda_1) = B(\lambda_2) = ... = B(\lambda_N) = 0\,.$$

Bundan dolayı $A(\lambda) \equiv 0$ ve $B(\lambda) \equiv 0$ dır. Çünkü $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ ler farklı ve $\deg A(\lambda) \le N-1,\ \deg B(\lambda) \le N-1$. Dolayısıyla $G(\lambda) \equiv 0$ olur ki bu da bir çelişkidir. Sonuç olarak,

$$T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1).....(\lambda - \lambda_N),$$

için *Teorem 7* nin *(iii)* koşulu herhangi bir $G(\lambda)$ polinomu için sağlanır.

$$\langle \Omega, G(\lambda)T(\lambda) \rangle = \sum_{k=1}^{N} \beta_k G(\lambda_k) T(\lambda_k) = 0.$$

Böylece (8.2) de tanımlanan Ω fonksiyoneli *Teorem 7* nin bütün koşullarını sağlar. Bundan dolayı Ω genelleşmiş spektral fonksiyonu için (1.3) verileri ile (1.1) formunda bir reel J Jacobi matrisi vardır. Ayrıca, *Teorem 6* nın koşullarının yeterliliğinin ispatından dolayı $\{\lambda_k, \beta_k \ (k = 1, ..., N)\}$ birleşimi kurtarılan J matrisi için spektral veridir. ■

Teorem 10 un koşulları altında J matrisinin a_n ve b_n verileri spektral veri olan (8.1) birleşimi için (3.35) ve (3.36) formülleri tarafından yeniden kurulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Guseinov G.Sh., *Inverse Spectral Problems for Tridiagonal N by N Complex Hamiltonians*, Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Appl. (2009), 28 pages.

[2] Boley D., Golub G.H., A survey of matrix inverse eigenvalue problems, *Inverse Problems* 3 (1987), 595-622.

[3] Ikramov Kh.D., Chugunov V.N., Inverse matrix eigenvalue problems, *J. Math. Sciences* 98 (2000), 51-136.

[4] Chu M.T., Golub G.H., Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms and applications, Oxford University Press, New York, 2005.

[5] Marchenko V.A., Expansion in eigenfunctions of non-selfadjoint singular second order differential operators, *Mat. Sb.* 52 (1960), 739-788 (in Russian).

[6] Rofe-Beketov F.S., Expansion in eigenfunctions of infinite systems of differential equations in the non-selfadjoint and selfadjoint cases. *Mat. Sb.* 51 (1960), 293-342 (in Russian)

[7] Guseinov G.Sh., Determination of an infinite non-selfadjoint Jacobi matrix from the generalized spectral function, *Mat. Zametki* 23 (1978), 237-248 (English transl.: *Math. Notes* 23 (1978), 130-136).

[8] Guseinov G.Sh., The inverse problem from the generalized spectral matrix for a second order non-selfadjoint difference equation on the axis, *Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk* (1978), no. 5, 16-22 (in Russian).

[9] Kishakevich Yu.L., Spectral function of Marchenko type for a difference operator of an even order, *Mat. Zametki* 11 (1972), 437-446 (English tranl.: *Math. Notes* 11 (1972), 266-271).

[10] Kishakevich Yu.L., On an inverse problem for non-selfadjoint difference operators, *Mat. Zametki* 11 (1972), 661-668 (English tranl.: *Math. Notes* 11 (1972), 402-406).

[11] Bender C.M, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, *Rep. Progr. Phys*. 70 (2007), 947-1018, hep-th / 0703096.

[12] Znojil M., Matching method and exact solvability of discrete PT- symmetric square wells, *J. Phys. A: Math. Gen*. 39 (2006), 10247-10261, quant- ph / 0605209.

[13] Znojil M., Maximal couplings PT- symmetric chain models wtih the real spectrum of energies, *J. Phys. A: Math. Theor*. 40 (2007), 4863-4875, math- ph / 0703070.

[14] Znojil M., Tridiagonal PT- symmetric N by N Hamiltonians and fine- tuning of their observability domains in the strongly non- Hermitian regime, *J. Phys. A: Math. Theor*. 40 (2007), 13131-13148, arXiv: 0709.1569.

[15] Allakhverdiev B.P., Guseinov G.Sh., On the spectral theory of dissipative difference operators of second order, *Mat. Sb*. 180 (1989), 101-118 (English Transl.: *Math. USSR Sbornik* 66(1990), 107-125).

[16] Guseinov G.Sh., Completeness of the eigenvectors of a dissipative second order difference operator, *J. Difference Equ. Appl*. 8 (2002), 321-331.

[17] Van Moerbeke P., Mumford D., The spectrum of difference operators and algebraic curves, *Acta Math*. 143 (1979), 93-154.

[18] Sansuc J.J., Tkachenko V., Spectral parametrization of non-selfadjoint Hill's operators, *J. Differential Equations* 125 (1996), 366-384.

[19] Egorova I., Golinskii L., Discrete spectrum for complex perturbations of periodic Jacobi matrices, *J. Differential Equ. Appl*. 11 (2005), 1185-1203, math.SP / 0503627.

[20] Atkinson F.V., Discrete and continuous boundary value problems, Acedemic Press, New York, 1964.

[21] Akhiezer N.I., The classical moment problem and some related questions in analysis, Hafner, New York, 1965.

[22] Berenzanskii Yu.M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, *Translations of Mathematical Monograps*, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[23] Nikishin E.M., Sorokin V.N., Rational approximations and orthogonality, *Translations of Mathematical Monograps*, Vol. 92, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.

[24] Teschl G., Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices, *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 72, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2000.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Ad	**:**	Bayram
Soyad	**:**	Bala
Baba Adı	**:**	Zahir
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri	**:**	Nusaybin / Mardin
Doğum Tarihi	**:**	16.08.1986
Medeni Hali	**:**	Evli

EĞİTİM DURUMU

Fitnat Nuri Tekerekoğlu Anadolu Lisesi (Gaziantep)	2000–2004
İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2005–2009
Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tezsiz Yüksek Lisans Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği	2009–2010
Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Tezli Yüksek Lisans	2010-2012

YABANCI DİL

İngilizce

ÇALIŞTIĞI KURUM

Gaziantep Seviye Dergisi Dershaneleri (Matematik Öğretmeni)	2011-2012