T.C.

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONSUZ MATRİSLERLE TANIMLANAN ÖZEL OPERATÖRLER

Zeliha MAĞDEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN

2012

TEZ ONAYI

Zeliha MAĞDEN tarafından hazırlanan "Sonsuz Matrislerle Tanımlanan Özel Operatörler" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Adıyaman Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Jüri Üyeleri:
Başkan: Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. İbrahim GÜMÜŞ
Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. Gülsen KILINÇ
Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Sonsuz Matrislerle Tanımlanan Özel Operatörler

Zeliha MAĞDEN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Bu çalışmada sonsuz matrislerle tanımlanan operatörlerle ilgili sınırlılık, toplanabilirlik ve operatörün tersinin varlığı gibi bazı temel kavramlar ile Cesaro, Nörlund, Toeplitz gibi bazı özel operatörlerin bir takım temel özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonsuz matris, operatör, toplanabilme, regülerlik, terslenebilirlik.

ABSTRACT

Master Thesis

Special Operators Defined By Infinite Matrices

Zeliha MAĞDEN

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

In this study, some main concepts such as summability, boundedness, regularity and invertibility of special operators defined by infinite matrices are investigated. Some of the key features of a number of special operators defined by infinite matrices like Cesaro, Norlund, Toeplitz are examined.

Key Words: Infinite matrix, operator, summability, regularity, invertibility.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamda danışmanlığımı üstlenerek, tez çalışmam süresince yardımını ve desteğini esirgemeyen, kendimi yetiştirip geliştirmemde mühim katkıları bulunan Sayın Hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya ve Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Muhammed ALTUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, araştırmalarımın her aşamasında tavsiyelerini aldığım Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a, değerli arkadaşlarım Arş. Grv. Ebubekir İNAN'a ve Elif YILDIZ'a müteşekkirim.

İlaveten, bana sonsuz güvenerek, daima destek olan aileme ve eşim Cem MAĞDEN'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
s	Bütün dizilerin uzayı
c	Yakınsak diziler uzayı
c_0	Sıfıra yakınsayan dizi uzayı
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
ℓ	Mutlak yakınsak diziler uzayı
A'	A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
T^{-1}	T operatörünün tersi
(X,d)	Metrik Uzay
$\|.\|$	Norm Fonksiyonu
D(T)	T operatörünün tanım kümesi
R(T)	T operatörünün değer kümesi
$\rho(T)$	Resolvent (çözücü) küme
$\sigma(X)$	X' in spektrumu
supA	A kümesinin En Küçük Üst Sınırı, supremumu
B(X)	Banach uzayında tanımlı tüm sınırlı lineer operatörler kümesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. X boş olmayan bir küme ve K, reel veya karmaşık sayılar cismi olsun.

$$+: X x X \rightarrow X$$

$$\cdot: K x X \rightarrow X$$

ikili işlemleri her α, β $\in$ K ve x, y, z $\in$ X için, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K üzerinde bir **lineer uzay (vektör uzayı)** adı verilir.

L_1) x+y=y+x

L_2) (x+y)+z=x+(y+z)

L_3) x+ θ =x olacak şekilde $\theta \in$ X vardır.

L_4) Her bir x $\in$ X için x+(-x)= θ olacak şekilde bir (-x) $\in$ X vardır.

L_5) 1.x=x

L_6) α (x+y)= α x+ α y

L_7) (α + β)x= α x+ β x

L_8) α (β x)=(α β)x.

Tanım 1.2. $\emptyset \neq X$ bir küme ve XxX'te tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, d fonksiyonuna X'te bir **metrik** (veya X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu) ve (X,d) ikilisine de bir **metrik uzay** denir. $\forall$ x, y, z $\in$ X için;

M_1) d negatif olmayan, sonlu ve reel değerli bir fonksiyondur.

M_2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (Bir noktanın kendisine uzaklığı sıfırdır)

M_3) $d(x,y)=d(y,x)$ (Simetri özelliği)

M_4) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (Üçgen eşitsizliği).

Tanım 1.3. N bir lineer uzay olsun. $\|.\|: N \rightarrow R^+$ fonksiyonunun x'teki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. x, y $\in$ N ve bir α skaleri için;

N_1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$

N_2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

N_3) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna N üzerinde **norm** denir ve $(N, \|.\|)$ veya sadece N ile gösterilir.

Tanım 1.4. Dizi Uzayları: Kompleks veya reel terimli tüm $x=(x_k)$ (k=1,2,...) dizilerinin kümesi s ile gösterirsek; $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ ve α bir sabit olmak üzere,

$$x+y=(x_k+y_k) \text{ ve } \alpha x=(\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. Diğer bazı dizi uzayları:

Yakınsak diziler uzayı: $c = \{x = (x_k) : (x_k)$ yakınsak$\}$

Sıfıra yakınsayan diziler uzayı: $c_0 = \{x = (x_k) : (x_k)$ sıfıra yakınsar$\}$

Sınırlı diziler uzayı: $\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$

Mutlak yakınsak diziler uzayı: $l = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$

Bu uzaylardan c_0, c ve ℓ_∞ dizi uzayları, $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu altında ve l dizi uzayı $\|x\| = \sum_k |x_k|$ normu altında birer normlu uzaydır.

Tanım 1.5. X=(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş her hangi bir $\varepsilon > 0$ için $m,n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 1.6. B, karmaşık sayılar cismi $\mathbb{C}$'de bir vektör uzayı ve

$\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ olmak üzere;

i) B uzayında N normu, $B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı bir fonksiyondur.

ii) B uzayı N normuna göre tamdır (B'deki her Cauchy dizisinin N normuna göre limiti B'dedir).

Yukarıdaki şartları sağlayan B uzayına N normuna göre **tam, normlu lineer uzay (Banach Uzayı)** denir.

Örnek 1.2. $\mathbb{C}$-Kompleks Sayılar Kümesi $|.|$ normuna göre Banach uzayıdır.

Örnek 1.3. c-Yakınsak Diziler Kümesi $\|(z_k)\| = \sup_k |z_k|$ normu ile Banach uzayıdır.

Örnek 1. 4. ℓ_∞-Sınırlı Diziler Kümesi $\|(z_k)\| = \sup_k |z_k|$ normu ile Banach uzayıdır.

Tanım 1.7. n satır ve k sütundan ibaret olup, elemanları karmaşık sayı olan,

$$A=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,k} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix}$$

tablosuna **sonlu matris** denir. Kısaca,

$$A=(a_{i,j}) \quad (i= 0,1,2,\ldots n; \;\; j=0,1,2,\ldots k)$$

ile gösterilir.

Tanım 1.8. $A = (a_{n,k})$ sonsuz matrisi $\forall\, n = 0,1,2,\ldots$ ve $\forall\, k = 0,1,2,\ldots$ için $a_{n,k}$ karmaşık sayı olmak üzere,

$$A = \left(a_{n,k}\right) = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,k} & \cdots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.9. Matris Çarpımı: Sonlu matrislerde A ve B gibi iki matrisin çarpımının tanımlı olabilmesi için A matrisinin satır sayısı, B matrisinin sütun sayısına eşit olmalıdır. Eğer A bir mxn matris, B de bir nxp matris ise, C=AxB bir mxp matris olarak tanımlıdır. C=($c_{i,j}$) matrisinin i. satır ve j. sütununda bulunan c=($c_{i,j}$) elemanı, A matrisinin i.satır elemanları,

$$a_{i,1} \quad a_{i,2} \ \dots \ a_{i,n}$$

ile B matrisinin j. sütun elemanları,

$$\begin{matrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{matrix}$$

lerin karşılıklı çarpımlarının toplamına eşittir.

Matris çarpımı sonsuz matrislere genişletilirse; $c_{n,k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} b_{j,k}$ olmak üzere,

$$[a_{n,k}][\, b_{n,k}\,] = [\, c_{n,k}\,]$$

çarpımı elde edilir.

Tanım 1.10. Matris Dönüşümleri: X ile Y reel ya da karmaşık terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A = (a_{n,k})$ sonsuz bir matris olsun. Her $x \in X$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise $A = (a_{n,k})$ matrisi X uzayından Y uzayı içine bir **matris dönüşümü** tanımlar denir. $A: X \to Y$ şeklindeki matrislerin sınıfları (X,Y) ile gösterilir (Hardy 1949).

Tanım 1.11. Bir A= $(a_{n,k})$ matrisi verilmiş olsun. Her n için $A_n(x) = \sum_k^{\infty} a_{n,k} x_k$ mevcut ve $n \to \infty$ iken $A_n(x) \to a$ ise (x_k) dizisi a'ya **A**

toplanabilir ya da **A- limitlenebilir** denir ve $A-\lim_k x_k = a$ yazılır (Petersen 1966).

Tanım 1.12. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere **operatör** denir.

L ve L' aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: L \to L'$ operatörü, $\alpha \in F$ olmak üzere,

$$T(x+y)=T(x)+T(y)$$

$$T(\alpha x)=\alpha T(x)$$

şartını sağlıyorsa T' ye **lineer operatör** denir.

N ve N' normlu uzay ve $T: N \to N'$ lineer operatör olsun her $x \in N$ için,

$$\|T(x)\|' \leq K\|x\| \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa T'ye **sınırlı operatör** denir. Şimdi her $x \in \mathbb{N}-\{0\}$ için $\|T(x)\|' \leq K\|x\|$ eşitsizliğinin sağlandığı en küçük K'yı araştıralım. Burada θ'yı hariç tutabiliriz. Çünkü bu halde $\|T(\theta)\| \leq \|\theta'\| = 0$ olup bu değer için en küçük K sıfırdır. $x \neq \theta$ ise $\|x\| \neq 0$ olacağından (1.1) nin her iki tarafını $\|x\|$'e bölerek yeni bir eşitsizlik elde ederiz. Buradan K, bu eşitsizliğin solundaki ifadenin supremumu kadar küçük olabilir. Bu en küçük K'yı $\|T\|$ ile gösterelim. Yani,

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N, \quad x \neq 0\right\}$$

olsun. Buna T'nin **normu** denir. T sınırlı lineer operatör ise $\|T\| \leq K$'dır.

Bir X Banach uzayında tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi B(X) ile gösterilir.

Teorem 1.1. A=$(a_{n,k})$ ile tanımlı operatör T olsun.

i) T ∈ B(c) 'dir ancak ve ancak

$\|A\| := \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$ (1.2)

Her k için $a_k := \lim_{n\to\infty} a_{nk}$ var, (1.3)

a: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ var.

ii) T ∈ B(c_0)'dır ancak ve ancak her k için a_k=0 ve (1.2) ve (1.3) sağlanır.

iii) T ∈ B(ℓ_∞)'dir ancak ve ancak (1.2) varsa. Bu şartlarda operatör normu T,

$$\|T\|_{(\ell_\infty:\ell_\infty)} = \|T\|_{(c:c)} = \|T\|_{(c_0:c_0)} = \|A\|$$

dır.

iv) T ∈ B(ℓ_1)'dir ancak ve ancak,

$$\|A^t\| == \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

olur. Bu durumda T operatör normu $\|T\|_{(\ell_1:\ell_1)} = \|A^t\|$ şeklindedir (Altun, 2011).

Tanım 1.13. Matris Normları: $\mathbb{C}$ kompleks ve $\mathbb{R}$ de reel sayılar kümesi olmak üzere, $\|.\| : \mathbb{C}^{mxn} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa; $\|A\|$ sayısına $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin **normu** denir. Bir A matrisinin normu $\|A\|$ ile gösterilir.

i) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii) c herhangi bir karmaşık sayı olmak üzere, $\|cA\| = |c|\|A\|$

iii) A ve B aynı mertebeden matrisler olmak üzere, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

iv) A ve B çarpılabilir matrisler olmak üzere, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$'dir.

(i), (ii) ve (iii) ile verilen aksiyomlar bir matris normu için gerekli olan aksiyomlardır. (i), (ii) ve (iii) aksiyomlarını sağlayan reel değerli bir fonksiyon, genelleştirilmiş matris normu olarak tanımlanır. Böylece bir matris normu daima genelleştirilmiş matris normudur. Fakat bunun tersi doğru değildir.

$A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin bazı normları:

ℓ_1 normu (sütun): $\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\dots,n}\left[\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\right]$

ℓ_∞ normu (satır): $\|A\|_\infty = \max_{j=1,2,\dots,m}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$

ℓ_p normu: $|A|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

ℓ_p operatör normu: $\|A\|_p = \max\{|Ax|_p : x \in \mathbb{C}^n, |x|_p = 1\}$

şeklinde tanımlanır (Bronson 1999).

Tanım 1.14. X=(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) X'te bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X'te **yakınsak** denir (Bayraktar 2006).

Tanım 1.15. $\{a_n\}_0^\infty$ kompleks sayılardan oluşan bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$ varsa $\{a_n\}_0^\infty$ dizisine **Cesaro yakınsaktır** denir ve (C,1) yakınsaktır şeklinde ifade edilir.

Cesaro yakınsaklığı, bir dizinin terimlerinin aritmetik ortalamasının yakınsaklığı ile ilgilidir.

Teorem 1.2. $\{a_n\}_0^\infty$ L' ye yakınsarsa, o halde $\{a_n\}_0^\infty$ L' ye (C,1) yakınsar (Tersi doğru değildir).

İspat: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bir N_1 pozitif tamsayısı vardır öyle ki $n \geq N_1$ için $|a_n - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ dir. Bir N_2 pozitif tamsayısı vardır öyle ki $n \geq N_2$ için $\left|\left[a_0 + \cdots + a_{N_1-1}\right] - N_1 L\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$ olur. $N=\text{maks}\{N_1, N_2\}$ olsun. O halde $n \geq N$ için

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - L\right| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1} a_k - N_1 L\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=N_1}^{n} a_k - (n+1-N_1)L\right|$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=N_1}^{n}[a_k - L]\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=N_1}^{n}[a_k - L]\right|$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{n+1}(n+1-N_1)\frac{1}{2}\varepsilon \;\leq\; \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

$n=0,1,\ldots$ için, $a_n = 1 + (-1)^n$ örneğinden dolayı bu ifadenin tersi, doğru değildir. $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi ıraksaktır; ancak $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi, aşağıda göstereceğimiz gibi 1'e Cesaro (C,1) yakınsaktır. $\varepsilon<0$ verilsin.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \begin{cases} n+2\,, & \text{n çift ise} \\ n+1, & \text{n tek ise} \end{cases}$$

Buradan,

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[a_k - 1]\right| \leq \left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{n+1}$$

$N(\varepsilon)>(1-\varepsilon)/\varepsilon$ pozitif tamsayısını seçelim. $n \geq N(\varepsilon)$ ise $1/(n+1)<\varepsilon$, örneğin $n \geq N(\varepsilon)$ ise o halde $\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - 1\right| < \varepsilon$ olur. □

Tanım 1.16. X bir metrik uzay olsun. X teki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X'e **kompakttır** denir.

Tanım 1.17. $(N, \|\ \ \|)$ ve $(N', \|\ \ \|')$ aynı skaler cismi üzerinde normlu iki uzay olsun. $T: N \to N'$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ise $\epsilon>0$ verildiğinde $\|x - x_0\| < \delta$ için $\|T(x) - T(x_0)\|' < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ reel sayısı varsa T, $\mathbf{x_0}$ **noktasında süreklidir.** T, tüm $x_0 \in N$'de sürekli ise T'ye **süreklidir** denir.

Tanım 1.18. A, X metrik uzayının bir alt kümesi ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 her bir $D'(x_0, \varepsilon)$ delik civarı A ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa bu x_0 noktasına A'nın **yığılma noktası** denir. A'nın yığılma noktaları kümesi A' ile gösterilir.

Tanım 1.19. A, X metrik uzayının bir alt cümlesi, $x_0 \in X$, A'nın yığılma noktası olsun. A'nın yığılma noktalarının kümesi olan A' ile A'nın noktalarından ibaret olan cümleye A **nın kapanışı** denir. $\overline{A}$ ile gösterilir. Yani $\overline{A} = A \cup A'$ dır. A' nın kapalı olması için $\overline{A} = A$ olmalıdır.

Tanım 1.20. A, (X,d) metrik uzayının bir alt cümlesi olsun. Eğer $\overline{A} = X$ ise A'ya X'te **yoğundur** denir.

Tanım 1.21. L, F cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. F=$\mathbb{R}$ veya F=$\mathbb{C}$ olması durumunda, $T: L \to F$ operatörüne, yani değerleri reel veya karmaşık sayılar kümesinde olan operatöre **fonksiyonel** denir. Eğer T lineer ise **lineer fonksiyonel**; sınırlı ise yani $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ eşitsizliğini sağlayan $K \geq 0 \in \mathbb{R}$ varsa **sınırlı lineer fonksiyonel** adını alır. Bir fonksiyonelin normu da operatörlerde olduğu gibi, $\|T\| = \sup\{|T(x)| : \|x\| \leq 1\}$ ile tanımlanır.

$C(N, N') = \{T : T : N \to N'\}$ sürekli lineer operatörler kümesi, N ve N' normlu uzay olması halinde, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ normuna göre bir normlu uzaydır. Hatta B'nin Banach uzayı olması halinde $C(N, B) = \{T: T: N \to B$ sürekli lineer operatör$\}$ kümesi bir Banach uzayı olur.

N' kümesinin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olması durumunda, $C(N, \mathbb{R})$ ve $C(N, \mathbb{C})$ kümeleri Banach uzayı olur. Bu uzaylara N'nin **dual uzayı** denir. N^* ile gösterilir. Demek ki N normlu uzay ise N^* cümlesi sürekli lineer fonksiyonellerin uzayıdır.

Tanım 1.22. Özdeğerler, Özvektörler ve Spektrum: Elemanları gerçek veya karmaşık sayı olabilen bir A matrisi ve bir λ parametresi verildiğinde, $x \neq 0$ vektörü için, $Ax = \lambda x$ vektör denkleminin çözümünü veren λ değerlerine A matrisinin **özdeğerleri,** buna karşılık gelen x vektörlerine de **özvektör** denir.

X ve Y Banach uzayları ve $T: X \to Y$ sınırlı lineer operatör olsun. T'nin değer kümesini $R(T)=\{y \in Y: y=Tx; \ x \in X\}$ ile gösterelim. X uzayından kendi içine tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi B(X) olsun. X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ ise her $\phi \in X^*$ ve $x \in X$ için T'nin adjointi T^*, $(T^*\phi)(x)=\phi T(x)$ ile tanımlı olup, X'in duali olan X^* üzerinde bir sınırlı lineer operatördür. $X \neq \emptyset$ karmaşık normlu uzay ve $T: D(T) \to X$, tanım kümesi $D(T) \subset X$ olan bir lineer operatör olsun. λ karmaşık sayı ve I, D(T) üzerinde birim operatör olmak üzere, T_λ ile

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

operatörünü gösterelim. Eğer varsa bu operatörün tersine **resolvent operatör** denir ve $T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ ile tanımlanır. λ=0 ise $T_\lambda^{-1} = T^{-1}$ dir. T_λ^{-1} ile T^{-1} in çoğu özelliği λ'ya bağlıdır ve spektral teorisi bu özelliklerle ilgilidir.

$X \neq \emptyset$ karmaşık normlu uzay ve tanım kümesi $D(T) \subset X$ olan $T: D(T) \to X$ bir lineer operatör olsun. T'nin regüler değeri λ, bir karmaşık sayıdır, öyle ki;

R₁) T_λ^{-1} var,

R₂) T_λ^{-1} sınırlı,

R_3) T_λ^{-1} X'te yoğun bir cümlede tanımlıdır.

T operatörünün sürekli bir tersinin belirlenmesini sağlayan, tüm regüler λ değerlerinin kümesine **resolvent (çözücü) küme** denir ve ρ(T) ile gösterilir. Bu kümenin ℂ ye göre tümleyeni olan σ(T)= ℂ\ρ(T) kümesine T nin **spektrumu** denir.

Spektrum 3'e ayrılır:

a) T_λ^{-1}'in olmadığı $\sigma_p(T)$ kümesine **nokta spektrumu**; bu kümenin üyelerine **özdeğerler** denir.

b) R_2 özelliğini sağlamayıp, R_3 özelliğini sağlayan T_λ^{-1}'in var olduğu σ_c kümesine **sürekli spektrum** denir.

c) R_3 özelliğini sağlayan T_λ^{-1}'in var olduğu σ_r kümesine **artık spektrum** denir.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Bir operatörün spektrumu, matrislerin özdeğerleri kavramının genelleştirilmesidir.

Teorem 1.3. (Hahn-Banach Teoremi): N normlu bir uzay, M, N'nin bir alt uzayı ve f, M'de tanımlı bir fonksiyonel olsun. Bu durumda f, $\|f\|_M = \|f_0\|_N$ olacak şekilde N'de tanımlı bir f_0 fonksiyoneline genişletilebilir (Bayraktar 2006).

BÖLÜM 2

KONSERVATİF, REGÜLER VE SCHUR MATRİSLER

Genel olarak verilen bir $A = (a_{n,k})$ matrisi ile ilgili şu soruyu cevaplandırabilmeliyiz: Eğer $\{z_n\}_0^\infty$ z'ye yakınsayan herhangi bir karmaşık dizi ise bu dizinin A-dönüşümü hangi hallerde (ve özellikle de aynı z limitine) yakınsar?

Yukarıdaki soruya cevap olan ve ilk olarak Otto Toeplitz (1911) tarafından ispat edilen Silverman-Toeplitz Teoremi, Toplanabilme Teorisinde önemli bir teoremdir ve matrislerin regülerliğini karakterize eder.

Öncelikle ilgili bazı tanım ve teoremlere bakalım.

Tanım 2.1. $A = (a_{n,k})$ karmaşık sayılardan oluşan sonsuz bir matris olsun.

i) Tüm kompleks ve yakınsak dizilerin A-dönüşümü var ve yakınsaksa (yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye dönüştürüyorsa) A **konservatif**tir (Powell, Shah 1972).

ii) Eğer A konservatif ve limitleri koruyorsa (yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye limitleri koruyarak dönüştürüyorsa) **regüler**dir (Powell, Shah 1972).

$A = (a_{n,k})$ karmaşık sayılardan oluşan bir matris olsun. A regüler ise $\sup_n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\right\} < \infty$ olmalıdır.

iii) $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin A-dönüşümü y'ye yakınsarsa $\{z_n\}_0^\infty$ dizisi y'ye **A-toplanabilir**dir (Maddox 1970).

iv) Eğer A tüm sınırlı dizileri yakınsak bir diziye dönüştürüyorsa **Schur matris**tir (Petersen 1966).

Şimdi yakınsaklık koruyan (konservatif) matrisleri karakterize eden ve Silverman-Toeplitz Teoreminden daha genel olan bir teorem yazalım.

Teorem 2.1. Kojima-Schur Teoremi: Bir A matrisi konservatiftir ancak ve ancak,

(i) $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = a_k$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = a$ olmasıdır.□

Şimdi ise Silverman-Toeplitz teoremini ve ispatını verelim.

Teorem 2.2. Silverman-Toeplitz Teoremi: Bir A$= (a_{n,k})$ matrisi regülerdir ancak ve ancak;

i. $\forall\, k = 0,1,2,\ldots$ için $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ (c_0 Koşulu)

ii. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$ (Satır-Toplam Koşulu)

iii. Bir M>0 için, $\sup_n \left\{\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|\right\} \leq M < \infty$ (Satır-Norm Koşulu)

(Powell, Shah 1972).

İspat: (⟸) (i), (ii) ve (iii) şartlarının var olduğunu kabul ederek A$=(a_{n,k})$ matrisinin regülerliğini ispatlayalım. $\{z_k\}_0^{\infty}$, z'ye yakınsayan bir dizi olsun. Öyleyse $\forall\, k = 0,1,2,\ldots$ için öyle bir T>0 vardır ki $|z_k| \leq$ T'dir. (iii)'den dolayı $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|\,|z_k|$ her sabit n için yakınsaktır. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|.$T yakınsak olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|\,|z_k|$ yakınsar.

$\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin z'ye yakınsadığını kabul ederek, $\{\sigma_n\}_0^\infty$ dizisinin de z'ye yakınsadığını göstereceğiz ($\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k$). Önce $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin $z = 0$'a yakınsama durumuna bakalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $N(\varepsilon)$ bulmalıyız öyle ki $n \geq N(\varepsilon)$ iken $|\sigma_n - z| = |\sigma_n| < \varepsilon$ ve dolayısıyla $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k\right| < \varepsilon$ olsun. $\sup_n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\right\} \leq M < \infty$ olduğundan ve $\{z_n\}_0^\infty$ sıfıra yakınsadığından bir pozitif $N_1(\varepsilon) = N_1$ vardır öyle ki $n \geq N_1$ iken,

$$|z_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M+1} \text{ ve } \left|z_{N_1-1}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M+1} > 0$$

(eğer $N_1 = 0$ ise $\forall\, n = 0,1,2,\ldots$ için $|z_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M+1}$ dir). $N_1 \neq 0$ ise o halde,

$$|\sigma_n| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_{n,k}\right| |z_k| + \sum_{k=N_1}^{\infty}\left|a_{n,k}\right||z_k| \qquad (2.1)$$

dir. (iii)'den dolayı

$$\sum_{k=N_1}^{\infty}\left|a_{n,k}\right||z_k| < \frac{\varepsilon}{2M+1}\sum_{k=N_1}^{\infty}\left|a_{n,k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2M+1}(M) < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (2.2)$$

dir. $N_2(0,\varepsilon), \ldots, N_2(N_1-1,\varepsilon)$ pozitif tamsayıları bulunsun öyle ki $n \geq N_2(k,\varepsilon)$ iken $\forall\, k = 0,1,\ldots,N_1-1$ için $\left|a_{n,k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2TN_1}$ dir ((i)'den dolayı). $N(\varepsilon) = \text{maks}\{N_2(0,\varepsilon), \ldots, N_2(N_1-1,\varepsilon)\}$ olsun. $n \geq N(\varepsilon)$ ise o halde

$$\left|\sum_{k=0}^{N_1-1} a_{n,k} z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_{n,k}\right||z_k| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (2.3)$$

Bu durumda (2.1), (2.2), (2.3)'ten dolayı,

$$|\sigma_n| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_{n,k}\right| |z_k| + \sum_{k=N_1}^{\infty}\left|a_{n,k}\right||z_k| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

olur. Buradan $\{\sigma_n\}_0^\infty$ dizisi sıfıra yakınsar.

Şimdi $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin sıfırdan farklı bir z'ye yakınsadığını düşünelim. $\{w_n\}_0^\infty$ dizisini, $\forall\ n = 0,1,2,\ldots$ için, $w_n = z_n - z$ şeklinde tanımlayalım. $\{w_n\}_0^\infty$ dizisi sıfıra yakınsadığından

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} w_k = 0$$

dır. Yani,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}(z_k - z) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k - z \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k - z \quad \text{((ii)'den)}$$

Böylece $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin A-dönüşümü z'ye yakınsar ve bundan dolayı $A = (a_{n,k})$ regülerdir.

(⇒) Şimdi $A = (a_{n,k})$ 'nın regülerliğinin (i), (ii) ve (iii) şartlarını gerektirdiğini ispatlayalım. k sabit olsun. $\{z_n\}_0^\infty$ dizisini,

$$z_n = \begin{cases} 0, & n \neq k \text{ ise} \\ 1, & n = k \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki $\{z_n\}_0^\infty$ dizisi sıfıra yakınsar. $A = (a_{n,k})$ regüler olduğundan,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} z_j = \lim_{n\to\infty} a_{n,k}$$

dır. Bu (i) durumunu ispatlar. $\forall\, n = 0,1,2,\ldots$ için $w_n = 1$ olacak şekilde $\{w_n\}_0^\infty$ dizisini tanımlayalım. $\{w_n\}_0^\infty$ 1'e yakınsadığından ve $A = (a_{n,k})$ regüler olduğundan,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} w_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

elde ederiz. Öyleyse (ii) sağlanır.

(iii) şartının ispatı için önce $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$ nın her n için yakınsadığını göstermeliyiz. Aksini kabul edelim. Bir N vardır öyle ki $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$ ıraksasın (yani $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{N,k}|=\infty$). Buradan $0 = K_0 < K_1 < K_2 \dots$ tamsayıları vardır öyle ki $\forall\, j = 1,2,\dots$ için $\sum_{k=K_{j-1}}^{K_j-1}|a_{N,k}| > 1$'dir. $\{z_k\}_0^{\infty}$ dizisini,

$$z_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \text{ veya } a_{N,k} = 0 \text{ ise} \\ \dfrac{|a_{N,k}|}{j a_{N,k}}, & a_{N,k} \neq 0 \text{ ve } K_{j-1} \leq k \leq K_j \\ & (\forall\, j = 1,2,\dots \text{ için}) \end{cases}$$

şeklinde alalım. $\{z_k\}_0^{\infty}$ kümesi sıfıra yakınsadığından ve $A = (a_{n,k})$ regüler olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k$ $\forall\ n = 0,1,2,\dots$ için, özellikle de $n = N$ için yakınsar. Fakat,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{N,k} z_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=K_{j-1}}^{K_j-1} \frac{1}{j}|a_{N,k}| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=K_{j-1}}^{K_j-1}|a_{N,k}| \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty$$

olur, yani ıraksar. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$ $\forall\, n = 0,1,2,\dots$ için yakınsar.

Şimdi $\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\right\}_0^{\infty}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğunu göstermek için $\sup_n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\right\} = \infty$ olduğunu kabul ederek bir çelişki bulalım. $\{m_k\}_0^{\infty}$, $\{n_k\}_0^{\infty}$ tamsayı dizilerini aşağıdaki şekilde oluşturalım. $m_0 = 0$ ve

$$n_0 = \min\left\{n : n \geq 1 \text{ ve } \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_{m_0,k}| < 1\right\}$$

seçelim ($\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_{m_0,k}|$ yakınsadığından n_0 vardır) . $m_0,\dots,m_{j-1}$ ve $n_0,\dots,n_{j-1}$ ($j \geq 1$ için)

$$\mathrm{m_j} = \min\left\{\mathrm{m}: \ \mathrm{m} > \mathrm{m_{j-1}}, \sum_{k=0}^{\infty}\left|\mathrm{a_{m,k}}\right| > j^2 + 2j + 2 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{n_j-1}\left|\mathrm{a_{m,k}}\right| < 1\right\}$$

olsun. Bir $\mathrm{m_j}$ tamsayısı vardır çünkü,

i) $M_1 > m_{j-1}$ seçebiliriz öyle ki $\forall\, k = 0,1,2,\ldots, n_{j-1}$ ve tüm $M \geq M_1$ için $\left|a_{M,k}\right| < 1/n_{j-1} + 1$ dir (her sabit k için $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ şartından dolayı).

ii) $M_2 > M_1$ seçebiliriz öyle ki $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{M_2,k}\right| > j^2 + 2j + 2$ olur ($\sup_n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\right\} = \infty$ şartından dolayı).

$$n_j = \min\left\{n: \ n > n_{j-1} \ \text{ ve } \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_{m_j,k}\right| < 1 \right\}$$

seçelim. Böyle bir n_j tam sayısı vardır çünkü $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{m_j,k}\right|$ yakınsaktır. $\{z_k\}_0^{\infty}$ dizisini,

$$z_k = \begin{cases} \dfrac{\left|a_{(m_{j,k})}\right|}{j a_{(m_{j,k})}}, & n_{j-1} < k \leq n_j \ \ (j = 1,2,\ldots) \text{ve } a_{m_j,k} \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu dizi sıfıra yakınsadığından ve A regüler olduğundan, $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k$ olduğunda $\{\sigma_n\}_0^{\infty}$ dizisi de yakınsak olmalıdır. O halde,

$$\left|\sigma_{m_j}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{m_j,k} z_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n_j-1} a_{m_j,k} z_k + \sum_{k=n_j-1}^{n_j} a_{m_j,k} z_k + \sum_{k=n_j+1}^{\infty} a_{m_j,k} z_k\right|$$

$$\geq \left|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_{m_j,k} z_k\right| - \sum_{k=0}^{n_{j-1}} \left|a_{m_j,k}\right| |z_k| - \sum_{k=n_{j+1}}^{\infty} \left|a_{m_j,k}\right| |z_k|.$$

Buradan,

$$\left|\sigma_{m_j}\right| \geq \frac{1}{j}\left|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_{m_j,k}\right| - 1 - 1 = \frac{1}{j}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{m_j,k}\right| - \sum_{k=0}^{n_j-1}\left|a_{m_j,k}\right| - \sum_{k=n_j+1}^{\infty}\left|a_{m_j,k}\right|\right) - 2$$

$$\geq \frac{1}{j}((j^2 + 2j + 2) - 1 - 1) - 2 = \frac{1}{j}(j^2 + 2j) - 2 = j$$

olur. $\{\sigma_n\}_0^\infty$ ıraksaktır çünkü alt dizisi, $\{\sigma_{m_j}\}_0^\infty$ sınırsızdır. Bu istediğimiz çelişkiyi verir. Bu yüzden bir M>0 için $\sup_n\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\} \leq M < \infty$ olur ve teoremin ispatı tamamlanır. □

$A = (a_{n,k})$ 'nın regülerliğini ispatlarken kullandığımız Silverman-Toeplitz Teoreminin (iii) şartını ispatlamanın daha kolay bir yolu vardır. (iii) şartının gerekliliği, teorem 2.4'de ifade edilmiş olup, ispatı *Düzgün Sınırlılık Prensibi (Uniform Boundedness Principle)* ile yapılacaktır.

Önce Düzgün Sınırlılık Prensibine bakalım.

Teorem 2.3. (Düzgün Sınırlılık Prensibi): X Banach uzayı, Y normlu uzay ve $\{T_n\}$, T_n: X⟶Y şeklinde tanımlı bir sürekli lineer operatörler ailesi olsun. Bu durumda ∀ x ∈ X için ∃ C_x: $\sup_n\|T_n(x)\| < C_x < \infty$ ise $\sup_n\|T_n\| < C < \infty$ olur (Powell, Shah 1972).

Banach-Steinhouse Teoremi olarak da bilinen Düzgün Sınırlılık Prensibi "Bir Banach uzayından normlu uzaya tanımlı sürekli lineer operatörler kümesi sınırlıdır." şeklinde de ifade edilebilir.

Satır-Norm Koşulu olarak ifade ettiğimiz (iii) şartının gerekliliğini gösteren teorem ve ispatı aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.4. $A = (a_{n,k})$ regüler ise, bir M>0 için,

$$\sup_n\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\} \leq M < \infty$$

dir.

İspat : $A=(a_{n,k})$ regüler ise $\forall$ n için $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$ yakınsaktır ($\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|<\infty$). $A_n\colon c\longrightarrow\mathbb{C}$, $A_n z=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}z_k$ olsun. c'de bir z elemanını sabitleyelim. Bu durumda, $(A_n z)\in c$ olduğundan bir T sayısı vardır ki, $|A_n z|\leq T$'dir. O halde Düzgün Sınırlılık Prensibi uygulanabilir demektir. Yani, $\sup_n\|A_n\|<\infty$ olur. Şimdi, $A_n\colon c\longrightarrow\mathbb{C}$ bir operatör ve

$$x_k=\begin{cases}\dfrac{|a_{n,k}|}{a_{n,k}} & k\leq N \text{ ve } a_{n,k}\neq 0,\\ 0 & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

$$\|A_n\|=\sup_{\|z\|=1}\|A_n z\|=\sup_{\|z\|=1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}x_k\right|\leq\sup_{\|z\|=1}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}||x_k|\leq\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\|A_n\|=\sup_{\|z\|=1}\|A_n z\|\geq\sup_{\|z\|=1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}z_k\right|\geq\sup_{\|z\|=1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}x_k\right|=\sum_{k=0}^{N}|a_{n,k}|$$

yani,

$$\|A_n\|\geq\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$$

dır. Böylece,

$$\|A_n\|=\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$$

elde edilir.

$$\|A_n\|=\sup_{z\neq\theta}\frac{|A_n z|}{\|z\|}=\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|$$

olduğundan,

$$\sup_n\|A_n\|=\sup_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\right)<\infty$$

olur. □

Tanım 2.2. (Matris Kuvveti): $A=(a_{n,k})$, m pozitif tamsayı ve $a_{n,k}^1=a_{n,k}$ olmak üzere, $A^m=(a_{n,k}^m)$

$$(a_{n,k}^m)=(a_{n,k}^m)(a_{n,k}^{m-1})$$

ile tanımlanabilir. Bu genel matris çarpımıdır (Powel, Shah 1972).

Teorem 2.5. $k>n$ için $a_{n,k}=0$ olan $A=(a_{n,k})$ matrisi regüler m herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere A^m matrisi de regülerdir (Powell, Shah 1972).

İspat: $A=A^1=(a_{n,k}^1)$ matrisinin regülerliğini biliyoruz. A^k nın k=1,…,m-1 (m≥2) için regüler olduğunu düşünelim. A^m nin de regüler olduğunu göstermek istiyoruz. $\{z_k\}_0^\infty$ z'ye yakınsayan bir karmaşık sayı dizisi olsun. $\{\sigma_n\}_0^\infty$, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin $A^m=(a_{n,k}^m)$ dönüşümü olsun. Yani,

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}^m z_k=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}^m z_k$$

olur. $\{t_n\}_0^\infty$, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin $A^{m-1}=(a_{n,k}^{m-1})$ dönüşümü olsun. Yani,

$$t_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}^{m-1}z_k=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}^{m-1}z_k$$

dır. $\{t_n\}_0^\infty$ A^{m-1} regüler olduğundan z'ye yakınsar.

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}^m z_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{h=k}^{n}a_{n,h}^1 z_k\, a_{n,h}^{m-1}\right)z_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_{n,h}^1\left(\sum_{h=k}^{h}a_{h,k}^{m-1}z_k\right)=\sum_{h=0}^{n}a_{n,h}^1 t_n.$$

$A^1=(a_{n,k}^1)$ regüler ve σ_n, z'ye yakınsayan $\{t_n\}_0^\infty$ dizisinin A^1 dönüşümü olduğundan $\{\sigma_n\}_0^\infty$ z' ye yakınsar ve A^m regülerdir (Powell, Shah 1972).

Teorem 2.6. $A=(a_{n,k})$ regüler matris ise sınırlı ve ıraksak bir $\{z_n\}_0^\infty$ dizisi vardır öyle ki, $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin A-dönüşümü ıraksar (Powell, Shah 1972).

Teorem 2.7. $\{z_k\}_0^\infty$ sınırlı bir dizi ise bir A regüler matrisi vardır öyle ki $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin A dönüşümü yakınsar (Powell, Shah 1972).

Teorem 2.8. $\{z_k\}_0^\infty$ ve $\{w_k\}_0^\infty$ sınırlı diziler ve $\{z_k\}_0^\infty$ ıraksak olmak üzere bir A regüler matrisi vardır öyle ki $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin A dönüşümü $\{w_k\}_0^\infty$ dır (Powell, Shah 1972).

Teorem 2.9. $\{z_k\}_0^\infty$ sınırlı dizi ve $\{w_k\}_0^\infty$ keyfi bir dizi olmak üzere bir A regüler matrisi vardır öyle ki $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin A-dönüşümü $\{w_k\}_0^\infty$ dır (Powell, Shah 1972).

Tanım 2.3. Eğer regüler ve verilmiş $-\infty$'a veya $+\infty$'a ıraksayan reel bir $\{x_n\}_0^\infty$ dizisinin A-dönüşümü de $-\infty$' a veya $+\infty$' a ıraksar ise A reel dönüşümüne **tamamen regülerdir** denir (Powel, Shah 1972).

Tanım 2.4. Eğer tüm n=0,1,... ve $k \geq k_0$ için $a_{n,k} \geq 0$ olacak şekilde bir k_0 varsa $A=(a_{n,k})$ **pozitif**tir (Powel, Shah 1972).

Teorem 2.10. $A=(a_{n,k})$ reel dönüşümü regüler ve pozitif ise A tamamen regülerdir (Powel, Shah 1972).

Teorem 2.11. $A=(a_{n,k})$ reel dönüşümü alt üçgensel ve tamamen regüler ise A regüler ve pozitiftir (Powell, Shah 1972).

Schur matris yakınsaklık üreten matris olarak bilinmektedir. Aşağıdaki teorem, bir matrisin Schur matris olması için gerek ve yeter şartları göstermektedir. Açıktır ki regüler bir matris tüm sınırlı dizileri limitleyemediğinden (sınırlı dizileri sınırlı dizilere dönüştürmediğinden) bu koşullardan birini sağlamaz.

Teorem 2.12. Bir $A = (a_{m,n})$ matrisinin Schur Matris olması için gerek ve yeter şartlar şunlardır:

a) Her n için $\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ var ve

b) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|$ her m için yakınsaktır ve bu yakınsama düzgündür (Petersen 1966).

İspat i) (⇐) A matrisinin iki koşulu da sağladığını düşünelim. $\{s_n\}$ sonlu bir dizi ise (b)'den dolayı, A dönüşümü

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n$$

ile verilir. Bununla birlikte, seriler m' ye düzgün yakınsar. $\{t_m\}$'nin düzgün yakınsadığını göstermek istiyoruz.

Verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir N vardır öyle ki, her m için,

$$\left|t_m - \sum_{n=1}^{N} a_{mn}\, s_n\right| < \varepsilon$$

dir. Her n için $\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ var olduğundan, bir M vardır öyle ki her $m_1, m_2 > M$ için,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_{m_1,n}s_n - \sum_{n=1}^{N} a_{m_2,n}s_n\right| < \varepsilon$$

olur. $m_1, m_2 > M$ olduğundan,

$$\left|t_{m_1} - t_{m_2}\right| \le \left|t_{m_1} - \sum_{n=1}^{N} a_{m_1,n}s_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} a_{m_1,n}s_n - \sum_{n=1}^{N} a_{m_2,n}s_n\right|$$

$$+\left|\sum_{n=1}^{N} a_{m_2,n}s_n - t_{m_2}\right| < 3\varepsilon.$$

Buradan $\{t_m\}$ yakınsar.

ii) (⇒) A bir Schur matris olsun.

(a) $$e_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & (n = k) \\ 0, & (n \neq k) \end{cases}$$

ile tanımlı $\left\{e_n^{(k)}\right\}$ (k=1,2,...) dizilerini alalım.

$$t_n^{(k)} = a_{m,k}$$

ve $\left\{e_n^{(k)}\right\}$ sınırlı olduğundan, $\lim_{m\to\infty} a_{m,k}$ vardır. Bu limiti α_k ile gösterelim.

(b) Schur matris kesin bir limitleme metodu olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{m,n}\right|$ her m için yakınsar ve Silverman-Toeplitz teoreminden bir K vardır öyle ki, her m için $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{m,n}\right| < K$'dır. Ayrıca her N için, $\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n| \leq K$'dır, öyleyse $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ yakınsar.

$b_{m,n} = a_{m,n} - \alpha_n$ ile tanımlanan $B = \left(b_{m,n}\right)$ matrisi kesinlikle Schur matrisidir. $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{m,n}\right|$'nin düzgün yakınsadığını göstererek $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{m,n}\right|$'nin düzgün yakınsaklığını kurabiliriz.

Varsayalım ki, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{m,n}\right|$ düzgün yakınsamasın. Bu demektir ki, öyle bir $\gamma>0$ vardır ki, her ν tamsayısı için, bir $\mu_j(\nu)$ tamsayı dizisi vardır öyle ki, $\sum_{n=\nu}^{\infty}\left|b_{\mu j(\nu),n}\right| > 5\gamma$ dir. Her n için, $m\to\infty$ iken $b_{m,n}\to 0$ olmasından yararlanarak, m_k tam sayılarından oluşan bir dizi ve ν_k tam sayılarından oluşan artan bir dizi kuralım.

$\nu=1$ alırsak, öyle bir m_1 vardır ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{m_1 n}\right| > 5\gamma \quad \text{ve} \quad \left|b_{m_1 1}\right| < \gamma$$

dir. Genel olarak, ν_k sayılarını tamsayı seçersek, öyle m_k sayıları vardır ki,

$$\sum_{n=\nu_{k+1}}^{\infty}\left|b_{m_k,n}\right| > 5\gamma \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\nu_k}\left|b_{m_k,n}\right| < \gamma$$

dir. Sonra $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{m_k,n}\right|$ yakınsadığı için, $\nu_{k+1}\ (> \nu_k)$ seçebiliriz öyle ki,

$$\sum_{n=\nu_{k+1}+1}^{\infty}\left|b_{m_k,n}\right| < \gamma$$

ve buradan da

$$\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}\left|b_{m_k,n}\right| > 3\gamma$$

elde edilir. Şimdi,

$$s_n = \begin{cases} (-1)^k \operatorname{sgn}(b_{m_k,n}), & \nu_k + 1 \le n \le \nu_{k+1} \text{ olduğunda } (k = 1,2,\dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $|s_n| \le 1$; ancak s_n 'in B-dönüşümü $\{t_m\}$ öyle ki; k tek sayı olduğunda,

$$t_{mk} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{m_k,n} s_n \ge \left(-\sum_{n=1}^{\nu_k} + \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} - \sum_{n=\nu_{k+1}+1}^{\infty}\right)\left|b_{m_k,n}\right| > \gamma$$

ve benzer olarak, k çift olduğunda $t_{mk} < -\gamma$ olur. Buradan $\{t_m\}$ ıraksak olduğundan (b_{mn}) Schur matrisi olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.12.1. Bir matris hem regüler hem de Schur matris olamaz. Çünkü $A = (a_{m,n})$ regüler ise A tarafından ıraksak bir diziye dönüştürülebilen sınırlı bir dizi vardır.

İspat: $A = (a_{m,n})$ regüler bir Schur matrisi olsun. Buradan her n için $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \alpha_n$ vardır ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ yakınsar. Üstelik $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n}$'nin düzgün yakınsaklığı,

$$m \to \infty \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} \to \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tag{2.4}$$

ile sağlanır. Oysaki Silverman-Toeplitz teoremi (i)'den $\alpha_n = 0$, (ii)'den dolayı m→∞ için $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} \to 1$ olur ki bu da (2.4) ile çelişir.

Sonuç 2.12.2. $A = (a_{m,n})$ matrisi her sınırlı diziyi sıfıra limitler ancak ve ancak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|$ her m için yakınsar ve m→∞ iken,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| \tag{2.5}$$

dir.

İspat: i) (⇐) Varsayalım ki (2.5) koşuları sağlansın. Eğer $\{s_n\}$ sınırlı bir dizi ise ($|s_n| \leq H$ diyelim) A-dönüşümü olan $\{t_m\}$ vardır ve m→∞ için,

$$|t_m| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n} s_n| \leq H \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| \to \infty$$

olur.

ii) (⇒) Varsayalım ki A tüm sınırlı dizileri sıfıra limitlesin. Önce,

$$e_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & (n = k) \text{ ise} \\ 0, & (n \neq k) \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı $\left\{e_n^{(k)}\right\}$ dizilerini düşünelim. O zaman, m→∞ iken

$$a_{m,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} e_n^{(k)} = t_m^{(k)} \to 0 \qquad (2.6)$$

olur. Şimdi, A kesinlikle Schur matrisi olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|$ her m için yakınsar ve m'de düzgün yakınsar. Böylece, bir ε>0 için bir N tamsayısı vardır öyle ki her m için,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_{m,n}| < \varepsilon$$

olur. Aynı zamanda (2.6) den dolayı bir M tamsayısı vardır öyle ki, m>M için,

$$\sum_{n=1}^{N}|a_{m,n}| < \varepsilon$$

olur. Sonuç olarak m>M için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}| = \sum_{n=1}^{N}|a_{m,n}| + \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_{m,n}| < 2\varepsilon$$

olur ki buradan (2.5) sağlanır.

BÖLÜM 3

TOPLANABİLİRLİK METODLARI

Tanım 3.1. Cesaro Dönüşümü:

$$A = (a_{n,k}) \text{ ve } a_{n,k} = \begin{cases} 0 & k > n \text{ için} \\ \frac{1}{n+1} & k \leq n \text{ için} \end{cases}$$

ve $\{z_n\}_0^\infty$ kompleks bir dizi olsun. $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin A-dönüşümü olan $\{\sigma_n\}_0^\infty$ dizisi,

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} z_k = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{n+1}\right) z_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n z_k$$

şeklindedir. Eğer $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi yakınsıyorsa $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin bu özel dönüşümüne **Cesaro (C,1) dönüşümü** denir (Powel, Shah 1972).

(C,1) ile gösterilen birinci mertebeden Cesaro matrisi:

$$(C,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix}$$

Örnek 3.1. Cesaro dönüşümünün regülerliğini inceleyelim.

$$(C,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix}$$

i) $\forall\ k = 0,1,2,\dots$ için $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$, yani satırların limiti sıfırdır.

ii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$, sütunların toplamının limiti 1. Yani,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)=1$$

iii) Bir M>0 için, $\sup_n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\right\} \leq M < \infty$.

$$\sup_n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\right\} = \sup_n\{1\} = 1 < \infty$$

Yani sütunların mutlak toplamlarının supremumu 1' dir. Böylece Cesaro matrisi regülerdir.

Tanım 3.2. $\{a_n\}$ bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisin k-ıncı kısmi toplamı $s_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$ olsun. $A \in \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} s_k = A$$

ise $\{s_n\}$ dizisi **Cesaro toplanabilirdir** denir.

Örnek 3.2. $n\geq 1$ için $a_n=(-1)^{n+1}$ olmak üzere $\{a_n\}$ dizisi, 1,-1,1,-1,... alalım. Kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$=1,0,1,0,... yakınsak değildir. Öte yandan terimleri $\{(s_1+\cdots s_n)/n\}$ şeklinde tanımlı,

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{6},\frac{4}{7},\frac{4}{8},\ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}=\frac{1}{2}$$

olduğundan $\{a_n\}$ dizisinin Cesaro toplamı $\frac{1}{2}$ dir.

$n\geq 1$ için $a_n=1$ olsun. $\{a_n\}$ dizisi 1,1,1,1,... dir. $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisi 1,2,3,4,... ve sonsuza ıraksar. Terimleri $\{(s_1+\cdots s_n)/n\}$ ile tanımlı dizi, $\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{6}{3},\frac{10}{4},\ldots$ şeklindedir. Buradan bu dizi de sonsuza ıraksar ve Cesaro toplanabilir değildir.

Tanım 3.3. Nörlund Dönüşümü: $\{q_n\}_0^\infty$, $q_0 > 0$ olmak üzere negatif olmayan reel sayıların bir dizisi olsun. $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$ şeklinde tanımlayalım.

i) Nörlund Dönüşümü $(N,q_n)=(a_{n,k})$

$$a_{n,k} = \begin{cases} q_{n-k}/Q_n\ , & k \leq n \text{ ise}, \\ 0 & , \quad k > n\ ise, \end{cases}$$

ii) Nörlund Dönüşümü $(R,q_n)=(r_{n,k})$

$$r_{n,k}= \begin{cases} q_k/Q_n\ , & k \leq n \text{ ise}, \\ 0 & , \quad k > n\ ise, \end{cases}$$

ile tanımlanır (Powel, Shah 1972).

Eğer $\forall$ n için $q_n = 1$ ise $(C,1)$ dönüşümünü elde ederiz. Cesaro Matrisleri özel Nörlund ortalamasıdır. C(n,k)=$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)k!}$ dır.

$\{q_n\}_0^\infty = \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\}$ alalım. Terimleri,

$$a_{n,k} = \begin{cases} q_{n-k}/Q_n\ , & k \leq n \text{ ise}, \\ 0 & , \quad k > n\ ise, \end{cases}$$

olan $(N,q_n)=(a_{n,k})$ dönüşümünü inceleyelim.

$Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k = q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_k$

$Q_0 = q_0$

$Q_1 = q_0 + q_1$

$Q_2 = q_0 + q_1 + q_2$

$$\vdots$$

$Q_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n$

olmak üzere ayrıca terimleri,

$a_{0,0} = q_{0-0}/Q_0 = q_0/q_0 = 1$

$a_{1,1} = q_{1-1}/Q_1 = q_0/(q_0 + q_1)$

$a_{2,2} = q_{2-2}/Q_2 = q_0/(q_0 + q_1 + q_2)$

$a_{1,0} = q_{1-0}/Q_1 = q_1/(q_0 + q_1)$

$a_{2,0} = q_{2-0}/Q_2 = q_2/(q_0 + q_1 + q_2)$

$a_{2,1} = q_{2-1}/Q_2 = q_1/(q_0 + q_1 + q_2)$

$$\vdots$$

$a_{n,n} = q_0/Q_n = q_0/(q_0 + q_1 + \ldots + q_n)$

olan Nörlund matrisi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ q_1/Q_1 & q_0/Q_1 & 0 & \ldots \\ q_2/Q_2 & q_1/Q_2 & q_0/Q_2 & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.4. (q_n) negatif olmayan reel sayıların bir dizisi, $q_0 > 0$ olmak üzere $Q_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n$ ile verilmiş olsun. Bu takdirde herhangi bir (s_n) dizisi (t_n) dizisine,

$$T\colon S_1 \rightarrow S_2 \;\; s_n \rightarrow T_n = (\psi_n) = \left(\frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} q_{n-v}\, s_v\right)$$

şeklinde tarif edilen T dönüşümüne **Nörlund toplanabilirlik** denir.

Teorem 3.1 (N,qn) Nörlund dönüşümü regülerdir ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{q_n}=0$ dır.

İspat: $(N,\ q_n)$ dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart Silverman-Toeplitz teoreminin koşullarını sağlamasıdır. (ii) ve (iii) koşulları her n=0,1,2,... ve k=0,1,2,... için $|a_{n,k}|=a_{n,k}$ ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{q_{n-k}}{Q_n}=\frac{1}{Q}\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}=1$$

olduğundan sağlanır. Şimdi k'yı sabitleyelim. k=0 için $\lim_{n\to\infty} a_{n,0}=\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{Q_n}$ böylece eğer (N,q_n) regüler ise $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{Q_n}=0$ dır. Şimdi farz edelim ki $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{Q_n}=0$ olsun. n≥k ve k sabit olmak üzere,

$$0\leq a_{n,k}=\frac{q_{n-k}}{Q_n}\leq\frac{q_{n-k}}{Q_n-k}$$

$(\{Qj\}_0^{\infty}$ artan olduğundan) olur. Buradan,

$$0\leq\lim_{n\to\infty} a_{n,k}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n-k}}{Q_n-k}=0,$$

örneğin $\lim_{n\to\infty} a_{n,k}=0$ ve böylece Silverman Toeplitz teoreminin (i) koşulundan dolayı (N,q_n) regülerdir.

Tanım 3.5. Hölder Dönüşümü: Birinci Hölder Matrisi $(H,1)=(h_n,1_k)$

$$h_{n,k}^{1}=\begin{cases}\frac{1}{n+1}, & n\geq k \text{ için},\\ 0, & n<k \text{ için},\end{cases}$$

şeklinde ve m-inci Hölder Matrisi $(H,m)=(h_{n,k}^{m})$ m>0 bir tam sayı olmak üzere,

$$\left(h^m_{n,k}\right) = (h^1_{n,k}) \text{ (iki matrisin çapımı)}$$

ile tanımlanır [4]. $H_m=C^m$ dir yani Hölder Matrisi ile birinci mertebeden Cesaro dönüşümü aynıdır (Powel, Shah 1972).

Teorem 3.2. m bir pozitif tam sayı olmak üzere, m-inci Hölder ortalaması (H,m) regülerdir (Powel, Shah 1972).

İspat: Bu teoremin ispatı Silverman-Toeplitz teoreminden dolayı açıktır.

Tanım 3.6. Toeplitz Matrisi: **A**=(a_{ij}) n-kare matris olsun. Her i,j için $a_{i,j}=a_{i-j}$ olacak şekilde (a_k) iki yönlü dizisi varsa, A'ya bir **Toeplitz Matrisi** denir. Yani, A=[$a_{1-n},\ldots,a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$] dir. Toeplitz matrisinde negatif eğimli köşegenleri boyunca sabit değerler bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & \ldots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \ldots & \vdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

ile gösterilir. Matris işlemlerinde $\sum_{j=1}^{n} a_{i-j}x_j = y_i$ formunda gösterilir. Hankel ve Hilbert matrisleri olarak bilinen özel durumları mevcuttur.

Örnek 3.3. Toeplitz matrisinin regülerliğini inceleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & \ldots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \ldots & \vdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$(a_k)=(\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ şeklindeki iki yönlü (a_k) dizisini alalım. Silverman-Toeplitz koşullarını sağlayıp sağlamadığına bakalım.

i) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0,$

ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = 1,$

iii) $\sup_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| = \sup_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$

olduğundan Silverman-Toeplitz koşullarını sağlar ve dolayısıyla Toeplitz matrisi regülerdir.

Tanım 3.7. Bir alt üçgensel matriste $0 \le k \le n$ için $a_{nk} = a_n b_k$ ise bu matrise **Factorable matrisi** denir. Rhaly matrisi ile weighted mean (ağırlıklı ortalama) matrisleri, factorable olarak bilinen matrisler ailesinin özel durumlarıdır.

Örnek 3.4. Factorable matrisinin regülerliğini inceleyelim.

i) $\forall$ k için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ olmalı.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_k = b_k \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad (b_k \neq 0)$$

dır.

ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$ olmalı.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

dir.

iii) $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ olmalı.

$$\sup_n |a_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right) < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \sup_n |a_n| < \infty$$

olur. Yani Factorable matrisi regülerdir.

BÖLÜM 4

TERSLENEBİLİRLİK

Tanım 4. 1. Matris Tersi (İnversi):

Sonlu matrislerde: A ve B gibi nxn tipindeki iki kare matris için $A.B = I$ bağıntısı sağlanıyorsa, A matrisine B matrisinin **sol tersi,** B matrisine A matrisinin **sağ tersi** denir.

Eğer A hem sağ, hem de sol terslenebilirse **terslenebilir**dir, denir (Soysüren 2000).

Sonsuz matrislerde: $A = (a_{n,k})$ keyfi bir matris olsun. A matrisinin sol tersi olan $B = (b_{n,k})$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} a_{k,j} = \begin{cases} 1, & n = j \text{ ise} \\ 0, & n \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve A matrisine sol terslenebilirdir denir. A matrisinin sağ tersi olan $B = (b_{n,k})$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, b_{k,j} = \begin{cases} 0, & n = j \\ 1, & n \neq j \end{cases}$$

ile tanımlanır ve A matrisine sağ **terslenebilir**dir denir (Powel, Shah 1972).

Bir A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir. Buna göre, $I = [\delta_{n,k}]$ birim matris olmak üzere,

$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$ olmak üzere $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$ dır.

Sonuç 4.1. Sonsuz matris tersinin bulunmasıyla, nxn tipindeki bir sonlu matrisin tersinin bulunması arasındaki fark şudur. Bir A sonsuz matrisi sol (sağ) terslenebilir, ancak sağ (sol) terslenemez. Aynı zamanda A matrisinin birden fazla sol (sağ) tersi bulunabilir. Sonsuz matrislerde terslenebilme, çarpmanın birleşme özelliğinin var olmasına bağlıdır (Powel, Shah 1972).

Tanım 4.2. $A=(a_{n,k})$ ve $B=(b_{n,k})$ iki keyfi matris olsun. $C=(c_{n,k})=AB$ çarpımı, ∀ n,k=0,1,2,... için,

$$c_{n,k}=\sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} b_{j,k}$$

ile tanımlıdır. Aksi halde AB çarpımı mevcut değildir (Powel, Shah 1972).

Tanım 4.3. A, B ve C keyfi matrisler olmak üzere, (AB)C=A(BC) ise (AB)C çarpımının birleşme özelliği vardır (Powel, Shah 1972).

Teorem 4.1. i) A ve B alt üçgensel matrisler ve C keyfi matris olmak üzere, (AB)C=A(BC) dir.

ii) A ve B alt üçgensel matrisler ve C sütun matrisi olmak üzere, (AB)C=A(BC) dir (Powel, Shah 1972).

İspat: (i) ve (ii) A, B alt üçgensel matris olduklarından çarpımları,

$$c_{n,k}=\begin{cases} c_n, & k=0 \text{ ise} \\ 0, & k\neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Yani yine alt üçgensel matristir. Alt üçgensel matrisi herhangi bir matrisle ve (ii)'de belirtilen sütun matrisi ile çarpma sonucu yine alt üçgensel matris olacağından (AB)C=A(BC)'dir.

Teorem 4.2. Bir $A=(a_{n,k})$ alt üçgensel matrisi terslenebilirdir ancak ve ancak ∀ n=0,1,2,... için $a_{n,n} \neq 0$'dır. Ayrıca A terslenebilirse, sol tersine eşit olan bir tek sağ tersi mevcuttur (Powel, Shah 1972).

İspat: Öncelikle A nın terslenebilir olduğunu gösterelim.

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n,j} b_{j,k} = \begin{cases} 1, & n = k \; ise \\ 0, & n \neq k \; \text{ise} \end{cases} \tag{4. 1}$$

sistemini çözerek, herhangi bir sağ tersi $B=(b_{n,k})$ alt üçgensel ve her sabit n için $a_{n,n}b_{n,n} = 1$, mesela $a_{n,n} \neq 0$ olduğunu görelim. Şimdi $a_{n,n} \neq 0$ olduğundan k>n için $c_{n,k} = 0$ ve $C=(c_{n,k})$ alt üçgensel matrisini aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz.

$$\sum_{j=k}^{n} c_{n,j} a_{j,k} = \begin{cases} 1, & n = k \; \text{ise} \\ x, & k < n \; \text{ise.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Eğer B ve B' herhangi sağ ters iseler tanım 4.3'ten B=(CA)B=C(AB)=C ve $B' = (CA)B' = C(AB') = C$ buradan B= B' ve B bir sol terstir.

Şimdi her sabit n için $a_{n,n} \neq 0$ olsun.

$$|\sigma_n| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1} |a_{n,k}|\,|z_k| + \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_{n,k}|\,|z_k| \tag{4.3}$$

deki eşitlikleri çözerek sağ tersi bulunur ve k>n için $c_{n,k} = 0$ kabul ederek ve

$$\sum_{j=k}^{n} c_{n,j} a_{j,k} = \begin{cases} 1, & n = k \; ise \\ x, & k < n \; ise \end{cases}$$

eşitliğini çözerek bir sol ters elde edilir. Sonuçta A terslenebilirdir.□

Not edelim ki teorem 4.1. köşegen elemanları sıfır olmayan bir alt üçgensel matrisin bir tek sol tersi olduğu anlamına gelmez. Örneğin $A = a_{n,k}$ şöyle tanımlansın.

$$a_{n,k} = \begin{cases} 1, & k = n-1 \text{ veya} \\ & k = n \ (n \geq 1\ ) \text{ için} \\ 1, & k = n = 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Tek sağ tersi $B{=}b_{n,k}$

$$b_{n,k} = \begin{cases} 0, & k > n \ ise \\ (-1)^{n+k} & k \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Buradan B aynı zamanda bir sol tersidir. Aynı şekilde, $C{=}(c_{n,k})$

$$c_{n,k} = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n+k+1\ )}, & k \geq n+1 \text{ ise} \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n+k)}, & k \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

bir sol tersidir. O halde şu teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.3. Terslenebilir bir alt üçgensel matrisin yalnız bir alt üçgensel sol tersi vardır (Powel, Shah 1972).

İspat: A terslenebilir bir alt üçgensel matris olsun. Teorem 4.2. den alt üçgensel olan ve aynı zamanda da sol terse eşit olan yalnız bir sağ tersi B vardır. Öyleyse teorem 4.1. den

$$C{=}C(AB){=}(CA)B{=}B$$

elde edilir.

Örnek 4.1. Sağ tersi olmayıp alt üçgensel olmayan, fakat sonsuz sayıda sol tersi var olan matrise örnek olarak, terimleri,

$$a_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k = 0 \text{ ise} \\ 1, & k = n+1 \text{ veya } k = n - \text{ve } n \geq 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanan bir A= $(a_{n,k})$ matrisini verebiliriz.

Örnek 4.2. Cesaro matrisinin tersini bulalım.

$I = [\delta_{n,k}]$, $\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$, $\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,j} b_{j,k} = \delta_{n,k}$, A.B=I olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & 0 \ldots & 0 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots 0 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = [\delta_{n,k}]$$

$a_{1,0} + \frac{1}{2} a_{1,1} = 0$ ve $\frac{1}{2} a_{1,1} = 1 \Rightarrow a_{1,1} = 2$

$\frac{1}{3} a_{2,2} = 1 \Rightarrow a_{2,2} = 3$

$\frac{1}{2} a_{2,1} + \frac{1}{3} a_{2,2} = 0 \Rightarrow a_{2,1} = -2$

$a_{2,0} + \frac{1}{2} a_{2,1} + \frac{1}{3} a_{2,2} = 0 \Rightarrow a_{2,0} = 0$

…………………………………

Böylece devam edilerek, terimleri,

$$b_{n,k}=\begin{cases}0, & k>n\ ise,\\ 0, & n-1>k\ ise\\ n, & k=n\ \text{ise}\\ -(n-1), & k=n-1\end{cases}$$

şeklinde olan,

$$B=\left[b_{n,k}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -2 & 3 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -(n-1) & n & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Tanım 4.4. Toeplitz Matrisinin Tersi: $n<0$ için $a_n=0$ ve $a_0\neq 0$ olsun. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ile oluşturulan

$$T_N=(a_{r-s})_{r,s=1}^{N}\ ,\ \ N=1,2,\dots$$

alt üçgensel matrisinin tersi, $n<0$ ise $b_0=\frac{1}{a_0}, b_n=0$ olmak üzere $f(z)$' nin düzgün tersi $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ile oluşturulan

$$T_N^{-1}=(b_{r-s})_{r,s=1}^{N}\ ,\ \ N=1,2,\dots$$

matrisidir. $n\geq 1$ için,

$$T_{n+1}\begin{bmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \dots & & a_0 \end{vmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 4.5. Operatör Tersi: T, X uzayından Y uzayına tanımlı bir operatör olsun. T^{-1}, R(X)'ten X'e bir operatördür öyle ki; ∀ x ∈ X için

$$T^{-1}(Tx)=x$$

ve eğer y=T(x) ise

$$T^{-1}(y)=x$$

tir.

Sonuç 4.2. Matris tersi ile operatör tersi arasındaki farkı şu şekilde özetleyebiliriz: Her operatör tersi bir matris tersidir. Matris alt üçgensel ise kesinlikle matris tersi ile operatör tersi eşittir. Ayrıca, her sol ters bir operatör tersi değildir.

Örneğin; $\mu \in \{c_0, c_1, \ell_1, \ell_\infty\}$ ve üç diyagonal simetrik sonsuz matris, $q, r \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$S = S(q,r) = \begin{bmatrix} q & r & 0 & 0 & 0 & \dots \\ r & q & r & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r & q & r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & r & q & r & \dots \\ 0 & 0 & 0 & r & q & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

alalım. Bu matris üçgensel değildir ve tersi tek değildir. μ üzerinde S^{-1} resolvent operatörü vardır, süreklidir ve S^{-1}'in tanım kümesi tüm μ uzayıdır. Buradan α_1, $P(x)=rx^2+qx+r$ polinomunun kökü ve $|\alpha_1|<1$ olmak üzere, S^{-1}'in bir $(s_{n,k})$ matris biçimi vardır ki,

$$s_{nk}=\frac{1}{r(\alpha_1^2-1)}\cdot\begin{cases}\alpha_1^{n-k+1}-\alpha_1^{n+k+3} & n\geq k \text{ ise}\\ \alpha_1^{-n+k+1}-\alpha_1^{n+k+3} & n<k \text{ ise}\end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca $T=(s_{nk})$,

$$t_{nk}=\begin{cases}\alpha_1^{n-k+1}-\alpha_1^{n+k+3} & n\geq k \text{ ise}\\ \alpha_1^{-n+k+1}-\alpha_1^{n+k+3} & n<k \text{ ise}\end{cases}$$

ile tanımlıdır ve S matrisinin diğer bir tersidir. Ayrıca $\lambda S^{-1}+(1-\lambda)T$ ifadesi de $\lambda\in\mathbb{C}$ için S'nin bir sol tersidir. Demek ki sonsuz sayıda sol tersi mevcuttur (Altun 2011)

KAYNAKLAR

[1] Altun, M., *Fine Spectra of Tridiagonal Symmetric Matrices*, Inter. Jour. Of Math. And Math. Sci., Vol. (2011) 2011, Article ID 161209, 10p., doi: 10.1155/2011/161209.

[2] Bayraktar, M., *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2006.

[3] Boos, J., *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, 2000.

[4] Bronson, R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrix Operations*, Mcgraw-Hill Publising Company Limited London, 1999.

[5] Goldberg S., *Unbounded Linear Operators*, Dover Publications, Inc. New York, 1985.

[6] Gonzalez, M., *The fine spectrum of the Cesaro operator in* ℓ_p $(1< p < \infty)$, Arch. Math. 44 (1985) 355-358.

[7] Hardy G.H., *Divergent Series*, Oxford at the Clarendon Press, 1949.

[8] Hardy G.H, Riesz M, *The General Theory Of Dirichlet's Series*. Cambridge: At the University Press, 1952.

[9] Knopp K., *Theory And Application Of Infinite Series,* Blackie&So Limited London, 1928.

[10] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1978.

[11] Maddox, I.J., *Elements of Functional Analysis*, Camb. Univ. Press, 1970.

[12] Maddox, I. J. *Infinite Matrices of Operators* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.

[13] Petersen G.M., *Regular Matrix Transformatıon*, Mcgraw-Hill Publising Company Limited London, 1966.

[14] Peyerimhoff A. *Lectures On Summabılıty*, Springer-Verla Berlin, 1969.

[15] Powell R. E., Shah S. M., *Summability Theory and Its Applications*, Van Nostrand-Reinhold, 1972.

[16] Rhoades, B. E. *The Fine Spectra For Weighted Mean Operators*. Pacific J. Math. 104 (1) (1983), 219-230.

[17] Rhoades, B. E., Yildirim M., *Spectra and Fine Spectra For Factorable Matrices*, İntegral Equations Operator Theory 5 (2005), 127-144.

[18] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGrawhill Book Company, 1976.

[19] Soysüren H., Zor A., *Lineer Cebir*, Beta Basım A.Ş. İstanbul, 2000.

[20] Toeplitz O., *Über die Lineare Mittelbildungen,* Prace mat.-fiz., 22, (1911) 113-118.

[21] Wilansky A., *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 85, North-Holland, Amsterdam, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Zeliha MAĞDEN

Doğum Yeri: Adıyaman

Doğum Tarihi: 24.04.1982

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum/Yıl)

Lise: Adıyaman Atatürk (Yabancı Dil Ağırlıklı) Lisesi (1999).

Lisans: İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi (2004).

Yüksek Lisans: İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans Programı (2006).

Yüksek Lisans: Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Tezli Yüksek Lisans Programı (2012).

Çalıştığı Kurumlar/Yıl:

Adıyaman Tümay-Final-Hügem Dershaneleri (2004-2007).

Ordu/Ulubey İlçe Nüfus Müdürlüğü (2007-2010).

Ordu Kabadüz Lisesi (2010-Halen).