ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÖZEL OPERATÖRLER İÇİN SPEKTRUM DENKLİĞİ

ELİF YILDIZ

DANIŞMAN: Prof. Dr. MANAF MANAFLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN
2012

TEZ ONAYI

Elif YILDIZ tarafından hazırlanan "Bazı Özel Operatörler İçin Spektrum Denkliği" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Adıyaman Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Eş Danışman : Yrd. Doç. Dr. Muhammed ALTUN

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
(Adıyaman Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)

Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN
(Gaziantep Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)

Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
(Adıyaman Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bazı Özel Operatörler İçin Spektrum Denkliği

Elif YILDIZ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Bu çalışmada bazı özel matris operatörlerinin, özdeğerleri ve terslenebilirliği incelenmiştir. Ayrıca, bu matrislere karşılık gelen spektrumların hangi durumlarda denk olduğu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Operatör, yakınsaklık, özdeğer, terslenebilirlik, süreklilik, spektrum.

ABSTRACT

Master Thesis

The Spectrum Equality For Some Special Operators

Elif YILDIZ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

In this study, some special matrix operators will be studied with respect to their eigenvalue and reversibility. In addition, the situations in which the spectra corresponding to these matrices are equivalent will be examined.

Key Words : Operator, convergence, eigenvalue, invertibility, continuity, spectrum.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda benden yardımını ve desteğini esirgemeyen, ileriye yönelik bakış açımı olumlu yönde değiştiren Sayın Hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya, Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Muhammed ALTUN'a, yüksek lisans derslerime giren ve bana yardımcı olan Sayın Hocalarım Doç. Dr. Ayhan ESİ'ye, Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a, Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK'e ve ödevlerimde yardımcı olan arkadaşım Arş. Grv. Ebubekir İNAN'a, tezimi yazmamda yardımcı olan Ali ÇALIŞKAN'a, canım aileme, maddi manevi desteğini esirgemeyen ve bana çok güvenen biricik eşim İbrahim YILDIZ'a ve de en önemlisi annelik saatinden çalıp sürekli onunla ilgilenmeyi ertelediğim ve tezimi yazarken yanımda geç saatlere kadar kalan biricik oğlum Yusuf YILDIZ'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
(X,d)	Metrik Uzay
A^t	A Kümesinin Tümleyeni
$SupA$	A Kümesinin En Küçük Üst Sınırı Supremumu
$A^{'}$	A nın Yığılma Noktalarının Kümesi
$\bar{A}$	A Kümesinin Kapanışı
B^{-1}	B Operatörünün Tersi
$\Vert \cdot \Vert$	Norm Fonksiyonu
$\sigma(X)$	X in Spektrumu
$X \cong Y$	X ve Y Uzayları İzometriktir
ℓ_∞	Sınırlı Dizilerin Uzayı
c	Yakınsak Dizilerin Uzayı
c_0	Sıfıra Yakınsayan Dizilerin Uzayı
bv	Sınırlı Salınımlı Dizilerin Uzayı
bv_p	p . Kuvvetten Sınırlı Salınımlı Dizilerin Uzayı
I	Özdeşlik Dönüşümü
$B(X,Y)$	X den Y Uzayına Sınırlı Dönüşümlerin Uzayı
$\rho(T)$	T Dönüşümlü Regüler Değerlerin Kümesi
$\sigma(T,X)$	X Uzayındaki T Dönüşümünün Spektrum Kümesi
$\sigma_c(T,X)$	X Uzayındaki T Dönüşümünün Süreklilik Spektrumu Kümesi
$\sigma_p(T,X)$	X Uzayındaki T Dönüşümünün Nokta

	Spektrumu Kümesi
$\sigma_r(T,X)$	X Uzayındaki T Dönüşümünün Rezidü Spektrumu Kümesi

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Fonksiyonel analizde bir operatörün spektrumu, matrisler için özdeğer kavramını gerçekleştirir. Herhangi bir Banach uzayı üzerinde tanımlı bir operatörün spektrumu, nokta spektrumu, sürekli spektrum ve rezidüel spektrum olmak üzere üç kısma ayrılır. Bir operatörün bu üç spektrumunun hesaplanması ince spektrum olarak adlandırılır.

Bir çok araştırmacı, spektrum ve bazı dizi uzayları üzerinde belirli sınırlı matrislerle tanımlanan lineer operatörlerin ince spektrumunu çalışmıştır. Spektrum ve ince spektrum ile ilgili literatürde var olan bazı çalışmaları verelim.

- Wenger (4), 1975'te c üzerindeki Cesaro operatörünün tam kuvvetinin ince spektrumunu incelemiştir.
- Rhoades (6), 1983'te c üzerindeki Cesaro operatörünün tam kuvvetinin ince spektrumunun sonucunu ağırlıklı ortalama metotlara genellemiştir.
- Reade (8), 1985'te c_0 dizi uzayı üzerinde Cesaro operatörünün spektrumunu çalışmıştır.
- Gonzales (7), 1985'te ℓ_p üzerinde Cesaro operatörünün ince spektrumunu çalışmıştır.
- Okutoyi (11), 1992'de bv dizi uzayı üzerinde Cesaro operatörünün spektrumunu hesaplamıştır.
- Coşkun (12), 1997'de c_0 üzerinde tanımla $p-$Cesaro operatörünün spektrumu ve ince spektrumunu çalışmıştır.
- Akhmedov ve Başar (14), 2004'te c_0, ℓ_∞ ve ℓ_p üzerinde Cesaro operatörünün ince spektrumunu belirlemişlerdir.
- Akhmedov ve Başar (18), 2006'da ℓ_p üzerinde Δ fark operatörünün ince spektrumunu belirlemişlerdir.
- Bilgiç, Furkan ve Kayaduman (17), 2006'da ℓ_p ve bv_p dizi uzaylarında genelleştirilmiş $B(r,s)$ fark operatörünün ince spektrumunu hesaplamışlardır.
- Karakaya ve Altun (22), 2010'da c_0 ve c dizi uzayları üzerinde çift bantlı üst üçgensel $U(r,s)$ matrisi için ince spektrumu belirlemişler.

- Karakaya, Manafov ve Şimşek (24), 2011'de ℓ_p ve bv_p, $(1 < p < \infty)$ dizi uzaylarında ikinci mertebeden fark operatörünün ince spektrumunu bulmuşlar.

BÖLÜM 2
TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlere hazırlık olması bakımından gerekli görülen tanımlara yer verildi.

Tanım 2.1 : X boş olmayan bir küme olsun. $d : \text{XxX} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

M$_1$) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y,$

M$_2$) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetri özelliği) ve

M$_3$) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir **metrik** ve d ile birlikte X e **metrik uzay** denir ve (X,d) veya X_d ile gösterilir.

Tanım 2.2 : L boş olmayan bir küme ve F , reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde **lineer uzay** (vektör uzayı) denir.

A) $(L,+)$ işlemine göre bir abel gruptur. Yani

G$_1$) Her $x,y\in L$ için $x+y\in L$ dir (kapalılık özelliği).

G$_2$) Her $x,y,z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir (birleşme özelliği).

G$_3$) Her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\exists\theta\in L$ vardır(özdeş eleman varlığı).

G$_4$) Her $x\in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $\exists -x\in L$ vardır (ters eleman varlığı).

G$_5$) Her $x,y\in L$ için $x+y=y+x$ dir (değişme özelliği).

B) Her $x,y\in L$ ve her $\alpha,\beta\in F$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

L$_1$) $\alpha x\in L$ dir.

L$_2$) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ dir.

L$_3$) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ dir.

L$_4$) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ dir.

L$_5$) $1_F\, x=x$ dir (1_F , F nin birim elemanı).

Tanım 2.3 : (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$ olacak şekilde bir $x\in X$ varsa (x_n) dizisine X de ***yakınsak*** denir.

Tanım 2.4 : X bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X e ***kompakt*** denir.

Tanım 2.5 : N, bir lineer uzay olsun. $\|.\|: N\to R$ fonksiyonun $x\in N$ deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

N₁) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$
N₂) $\|\alpha x\|=|\alpha|.\|x\| (\alpha\in F)$ ve
N₃) $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) ***norm*** denir. $(N,\|.\|)$ ile gösterilir.

N ve N' normlu uzay ve $T: N\to N'$ lineer operatör olsun her $x\in N$ için

$$\|T(x)\|' \le K\|x\| \tag{1}$$

olacak şekilde bir $K\ge 0$ reel sayısı varsa T ye ***sınırlı*** denir. Şimdi her $x\in N-\{0\}$ için $\|T(x)\|'\le K\|x\|$ nın sağladığı en küçük K yı araştıralım. Burada θ yı hariç tutabiliriz. Çünkü bu halde $\|T(\theta)\|=\|\theta'\|=0$ olup bu değer için en küçük K sıfırdır. $x\ne\theta$ ise $\|x\|\ne 0$ olacağından (1) nin her iki tarafını $\|x\|$ e bölerek elde ederiz. Buradan anlaşılır ki, K bu eşitsizliğin solundaki ifadenin supremumu kadar küçük olabilir. Bu en küçük K yı $K_0=\|T\|$ ile gösterelim. Yani

$$\|T\| = Sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|};\ x\in N,\ x\ne 0\right\}$$

olsun. Bu $\|T\|$ ye T nin normu denir. T sınırlı lineer operatör ise $\|T\|\le K$ dır.

Tanım 2.6 : N normlu lineer uzay olsun. N, norm metriğine göre tam ise N ye ***Banach uzayı*** denir.

Tanım 2.7 : $X=(X,d)$ bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon>0$ için $m,n>N_0$ olduğunda $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ olacak şekilde $N_0=N_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine ***Cauchy dizisi*** denir. X teki her (x_n) cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n\to x\in X$ ise (X,d) metrik uzayına ***tam metrik uzay*** veya ***tam*** denir.

Tanım 2.8 : Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

L ve L' aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: L \to L'$ operatörü

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ ve } (\alpha \in F)$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartını sağlıyorsa T ye ***lineer operatör*** denir.

Tanım 2.9 : $(N, \|\ .\ \|)$ ve $(N', \|\ .\ \|')$ aynı skaler cismi üzerinde normlu iki uzay olsun. $T: N \to N'$ bir dönüşüm olsun ve $x_0 \in N$ ise $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|x - x_0\| < \delta$ için $\|T(x) - T(x_0)\|' < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı varsa T, x_0 noktasında süreklidir.

Tanım 2.10 : S, (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\overline{S} = X$ ise yani S nin kapanışı X e eşit ise, S ye X de **yoğundur** denir.

Tanım 2.11 : A, X metrik uzayının bir alt kümesi $x_0 \in X$, x_0 A nın yığılma noktası olsun. A nın yığılma noktalarının A' kümesi ile A nın noktalarından ibaret olan kümeye A nın **kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir $(\overline{A} = A \cup A')$. Ayrıca, A nın kapalı olması için $\overline{A} = A$ olmalıdır.

Tanım 2.12 : A, X metrik uzayının bir alt kümesi ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 ın her bir $D'(x_0; \varepsilon)$ açık yuvarı A ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa bu x_0 noktasına A nın **yığılma noktası** denir. A nın ***yığılma noktaları kümesi*** A' ile gösterilir.

BÖLÜM 3

LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

A operatörü $D(A)\rightarrow R(A)$ $D(A)\subset X$ X lineer vektör uzayı $\lambda\in\mathbb{C}$ skaler; $A_\lambda = A-\lambda I$ operatörler demetini inceleyelim.

Lineer operatörlerinin spektral teorisi λ sayılarının A_λ operatörünün sınırlı bir tersinin bulunmasına olanak sağlayan çözücü kümenin belirlenmesi, bu küme ve bu kümenin tümleyeni olan spektrumun bulunmasını sağlar. $R_\lambda = R(A_\lambda)$ değer bölgesini X normlu uzayında yoğun kılan ve A_λ operatörünün sürekli bir tersini var olmasına yol açan λ kompleks sayılarının oluşturduğu $\rho(A)\subseteq\mathbb{C}$ kümesine A operatörünün çözücü kümesi adı verilir. Bu kümenin $\mathbb{C}$ ye göre tümleyeni olan $\sigma(A)=\left[\rho(A)\right]'\subseteq\mathbb{C}$ kümesine de A operatörünün spektrumu adı verilir.

$\lambda\in\sigma(A)$ ise A_λ^{-1} yoktur veya sürekli değildir veya $\overline{R}_\lambda \neq X$ A_λ^{-1} varsa $D(A_\lambda^{-1}) = R_\lambda$ olacağına dikkat edilmelidir.

a) $\sigma_p(A)=\left\{\lambda\in\mathbb{C} : A_\lambda^{-1} \text{ yok}\right\}$ kümesi nokta spektrumu adını alır. Bu kümenin üyeleri özdeğerler adını alır.

b) $\sigma_c(A)=\left\{\lambda\in\mathbb{C} : A_\lambda^{-1} \text{ var ve süreksiz, } \overline{R}_\lambda = X\right\}$ kümesi sürekli spektrum adını alır.

c) $\sigma_r(A)=\left\{\lambda\in\mathbb{C} : A_\lambda^{-1} \text{ var, } \overline{R}_\lambda \neq X\right\}$ kümesi artık spektrum adını alır.

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$$

$X\neq\emptyset$ karmaşık normlu uzay olsun. $A:D(A)\rightarrow X$ ise $D(A)\subset X$ tanım aralığında lineer bir operatör olsun. λ nın A da regüler bir değeri, şu şartları taşıyan karmaşık bir sayıdır.

$(\mathbf{R_1})$ A_λ^{-1} mevcuttur,

$(\mathbf{R_2})$ A_λ^{-1} sınırlıdır,

$(\mathbf{R_3})$ A_λ^{-1} X de yoğun olan bir kümede tanımlıdır.

A da çözücü $\rho(A)$ kümesi, λ nın A da tüm regüler değerlerinin kümesidir.

$(\mathbf{I})$ $R(A)=X$

$(\mathbf{II})$ $\overline{R(A)}=X$ ama $R(A)\neq X$

$(\mathbf{III})$ $\overline{R(A)}\neq X$

ve A^{-1} içinde üç olasılık vardır.

$(\mathbf{1})$ A^{-1} mevcuttur ve süreklidir.

$(\mathbf{2})$ A^{-1} mevcuttur ama sürekli değildir.

$(\mathbf{3})$ A^{-1} mevcut değildir.

Eğer tüm bu olasılıklar tüm olası yollarla birleştirilirse dokuz farklı durum ortaya çıkar. Bu durumlar I_1 , I_2 , I_3 , II_1 , II_2 , II_3 , III_1 , III_2 , III_3 olarak etiketlendirilir (Goldberg 1966).

Teorem 3.1: Bir X normlu vektör uzayı üzerindeki A lineer operatörünün $\rho(A)$ çözücü kümesi kompleks düzlemde açık bir kümedir. Dolayısıyla $\sigma(A)$ spektrumu kapalı bir küme olur (Goldberg 1966).

Teorem 3.2: Bir X normlu vektör uzayı üzerinde A sürekli bir operatör ve A' eşlenik operatörü olsun. $\sigma(A')\subseteq\sigma(A)$ bağıntısı geçerlidir. X bir Banach uzayı ise $\sigma(A')=\sigma(A)$ olur (Brown 1970).

Teorem 3.3: X bir normlu vektör uzayı ve $A\in B(X)$ bir kompakt operatör olsun. $\sigma(A)$ spektrumunun sıfırdan farklı tüm noktaları A nın özdeğeridir. X sonsuz boyutlu ise $0\in\sigma(A)$ olur (Kreyszig 1978).

Teorem 3.4: X bir normlu vektör uzayı ve $A: X\to X$ bir kompakt operatör olsun. A nın spektrumu kompleks düzlemde kompakt bir alt küme sıfırdan farklı her noktası sayılabilir bir kümedir (Goldberg 1966).

Teorem 3.5: X ve Y normlu uzaylar $D(T)\subset X$ olmak üzere $T: D(T)\to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter şart T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig 1978).

İspat: $T=0$ için ifade aşikardır $T\neq 0$ alalım. Bu durumda $\|T\|\neq 0$ dır. T nin sınırlı olduğunu varsayıp herhangi bir $x_0\in D(T)$ noktasını göz önüne alalım. Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilmiş olsun. Buna göre T lineer olduğundan $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\|T\|}$ olmak üzere $\|x-x_0\|<\delta$ olacak şekilde her $x\in D(T)$ için

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|\leq\|T\|\|x-x_0\|<\|T\|\delta=\varepsilon$$

yazabiliriz. $x_0\in D(T)$ nin keyfi olması nedeniyle bu sonuç T nin sürekli olduğunu gösterir. Tersine olarak T nin keyfi bir $x_0\in D(T)$ noktasında sürekli olduğunu varsayalım. Buna göre herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde;

$$\|x-x_0\|<\delta$$

koşulunu gerçekleştiren her $x\in D(T)$ için

$$\|Tx-Tx_0\|\leq\varepsilon \tag{2}$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Şimdi $D(T)$ de herhangi bir $y\neq 0$ alalım.

$$x=x_0+\frac{\delta}{\|y\|}y$$

yazalım. Bu durumda

$$x-x_0=\frac{\delta}{\|y\|}y$$

olur.

O halde $\|x-x_0\|=\delta$ olup, dolayısıyla (2) yi kullanabiliriz. T nin lineer olması nedeniyle

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|=\left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\|=\frac{\delta}{\|y\|}\|T_y\|$$

yazabiliriz. (2) ifadesi

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|\leq\varepsilon$$

sonucunu gerektirir.

Buradan $\|Ty\|\leq\dfrac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$ bulunur. Bu ise $c=\dfrac{\varepsilon}{\delta}$ olmak üzere $\|Ty\|\leq c\|y\|$ şeklinde yazabiliriz. Bu da T nin sınırlı olduğunu gösterir.

Lemma 3.1: $A=(a_{nk})$, matrisi $A:c\to c$ tanımlı sınırlı bir lineer $B\in B(c)$ operatörünü temsil eder ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa:

(1) A nın satırları ℓ_1 dedir ve ℓ_1 normları sınırlıdır,

(2) A nın sütunları c dedir,

(3) A nın satır toplamlarının dizisi c dedir. B nin operatör normlu A nın satırlarının ℓ_1 normlarının supremumudur (Kreyszig 1978).

Lemma 3.2: T nin değer kümesi yoğundur ancak ve ancak T^* birebirdir (Goldberg 1966).

Lemma 3.3: T sınırlı terse sahiptir ancak ve ancak T^*örtendir. Eğer $T:c_0\to c_0$ A matrisi ile temsil edilen sınırlı lineer operatör ise adjoint operatör T^* ın A matrisinin transpozesi A^t ile tanımlandığı bilinir. c_0 nın dual uzayı c_0^* (duali) ℓ_1 Banach uzayına izometrik olarak izomorfiktir (Goldberg 1966).

Teorem 3.6: Herhangi bir $\lambda\in c$ için $U_\lambda:c_0\to c_0$ yoğun bir değer kümesine sahiptir (Kreyszig 1978).

BÖLÜM 4

$B(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN c_0 VE c DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde $B(r,s)$ dönüşümünün spektrumu, fine spektrumu, rezidü spektrumu, süreklilik spektrumu ve nokta spektrumu kavramları c_0 ve c dizi uzaylarında incelendi. Son olarakta Mercerian Teoremi verildi. Ayrıca bu tezde kullanılan $B(r,s)$ dönüşümü $r,s \in \mathbb{R}$ ve $s \neq 0$ olmak üzere

$$B(r,s) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4.1. c_0 ve c Dizi Uzaylarında Spektrum

Lemma 4.1.1. $B(r,s): c \to c$ ifadesi sınırlı bir dönüşüm olup bu dönüşümün normu

$$\|B(r,s)\|_{(c:c)} = |r| + |s|$$

dir (Altay and Başar 2005).

Lemma 4.1.2. $B(r,s): c_0 \to c_0$ ifadesi sınırlı bir dönüşüm olup bu dönüşümün normu

$$\|B(r,s)\|_{(c:c)} = \|B(r,s)\|_{(c_0:c_0)} = |r| + |s|$$

şeklindedir (Altay and Başar 2005).

Teorem 4.1.3. $\sigma(B(r,s), c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ (Altay and Başar 2005).

İspat: Bu teoremin ispatında ilk önce $|\alpha - r| > |s|$ için $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ dönüşümünün mevcut ve $(c_0 : c_0)$ sınıfına ait olduğu ve sonrada $B(r,s)$ dönüşümünün $|\alpha - r| \leq |s|$ için $(c_0 : c_0)$ sınıfına ait olmadığını göstermek yeterlidir.

O halde $\alpha \notin \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olsun. $\left(B(r,s)-\alpha I\right)$ üçgensel matris olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ mevcut ve bu ters dönüşüm $\left(B(r,s)-\alpha I\right)x=y$ denkleminin çözümünden elde edilir. Bu ters dönüşümün $k \le n$ için n. satır k. sütunda genel terimi

$$\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} \tag{4.1}$$

şeklinde olur. Aksi takdirde yani $k > n$ için ters dönüşümün genel terimi sıfır olur. Buradan

$$\begin{aligned}\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(c_0:c_0)} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}\right| \\ &= \left|\frac{1}{r-\alpha}\right| \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{k} < \infty\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1} \in (c_0 : c_0)$ olduğunu gösterir.

Şimdi $\alpha \in \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olsun. Bu durumda $\alpha \ne r$ ve $\alpha = r$ durumları ortaya çıkar.

1) $\alpha \in \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ ve $\alpha \ne r$ olsun. Burada $B(r,s)-\alpha I$ üçgensel matris olduğu için $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur. (4.2) den

$$\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(c_0:c_0)} = \infty \tag{4.3}$$

olduğu görülür. O halde $\alpha \in \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olması durumunda $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ ters dönüşümünün $B(c_0)$ de olmadığı görülür.

2) $\alpha \in \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ ve $\alpha = r$ olsun. Bu durumda $\left(B(r,s)-\alpha I\right) = B(0,s)$ matrisi

$$B(0,s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

şeklindeki gibi bir gösterime sahip olur. $\overline{R\left(B(0,s)\right)} \ne c_0$ olduğundan $B(0,s)$ ifadesinin tersi mevcut olmaz ve dolayısıyla da ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $\sigma_p\left(B(r,s),c_0\right) = \varnothing$ (Altay and Başar 2005).

İspat: c_0 uzayında $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots)$ dizisi için $B(r,s)x = \alpha x$ olsun. Bu lineer denklemden

$$\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0, \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1, \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2, \\ &\vdots \\ sx_k + rx_{k+1} &= \alpha x_{k+1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.5}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden $x = (x_n)$ dizisinin x_{n_0} ilk teriminin sıfırdan farklı olması durumunda $\alpha = r$ olur ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n_0+k} = 0 \tag{4.6}$$

olacağından bu $x_{n_0} \neq 0$ kabulu ile çelişir. O halde $x \neq \theta$ için $B(r,s)x = \alpha x$ lineer denklemini sağlayan α değeri mevcut olmadığından $\sigma_p\left(B(r,s), c_0\right) = \varnothing$ olur.

$T : c_0 \to c_0$ dönüşümü A matrisiyle sınırlı bir lineer dönüşüm teşkil ediyorsa, T^* da A matrisinin A^t transpozesi yardımıyla tanımlanan adjoint dönüşümü teşkil eder ve $T^* : c_0^* \to c_0^*$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca c_0 ın c_0^* dual uzayı $\|x\| = \sum_{k=0}^{x} |x_k|$ ile ℓ_1 Banach uzayına izometrik olarak izomorf olur.

Teorem 4.1.5. $\sigma_p\left(B(r,s)^*, c_0^*\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ (Altay and Başar 2005).

İspat: $c_0^* \cong \ell_1$ uzayında $x \neq \theta$ için $B(r,s)^* x = \alpha x$ denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} rx_0 + sx_1 &= \alpha x_0, \\ rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1, \\ rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2, \\ &\vdots \\ rx_k + sx_{k+1} &= \alpha x_k, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.7}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden x dizisinin genel terimi

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0 \tag{4.8}$$

şeklinde olur. O halde $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - r| < |s|$ olmasıdır. Bu da istenen olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6. $\sigma_r\left(B(r,s), c_0\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ (Altay and Başar 2005).

İspat: $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün bir tersinin mevcut ve $|\alpha - r| < |s|$ için $\overline{R\left(B(r,s) - \alpha I\right)} \neq c_0$ olduğu gösterildiği takdirde istenilenler elde edilir.

$\alpha \neq r$ için $B(r,s) - \alpha I$ üçgensel olduğundan tersi mevcuttur. $\alpha = r$ olması durumunda $B(r,s) - \alpha I$ bire-bir olduğundan $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün bir tersi vardır. Ancak $B(r,s)^* - \alpha I$ dönüşümü Teorem 4.1.5 ten dolayı bire-bir değildir. Böylece $\overline{R\left(B(r,s) - \alpha I\right)} \neq c_0$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.7. $\sigma_c\left(B(r,s), c_0\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$ (Altay and Başar 2005).

Teorem 4.1.8. $\sigma\left(B(r,s), c\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ (Altay and Başar 2005).

Teorem 4.1.9. $\sigma_p\left(B(r,s), c\right) = \varnothing$ (Altay and Başar 2005).

Eğer $T : c \to c$ dönüşümü A matrisiyle sınırlı bir matris dönüşümü temsil ediyorsa, $T^* : c^* \to c^*$ dönüşümü $\mathbb{C} \oplus \ell_1$ üzerinde

$$\begin{bmatrix} \chi & 0 \\ b & A^t \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

şeklinde bir matris temsiline sahip olur. Bu matris gösterimindeki χ ve b elemanları

$$\chi = \lim_n \sum_{k=0}^{\chi} \alpha_{nk} - \sum_{k=0}^{\chi} \lim_n \alpha_{nk} \quad \text{ve} \quad \mathrm{b} = \lim_n \alpha_{nk}$$

şeklindedir. O halde $B(r,s) : c \to c$ için $B(r,s)^* \in B(\ell_1)$ matrisi

$$B(r,s)^* = \begin{bmatrix} r+s & 0 \\ 0 & B(r,s)^t \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

olur.

Teorem 4.1.10. $\sigma_p\left(B(r,s)^*, c^*\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\} \cup \{r+s\}$ (Altay and Başar 2005).

İspat: ℓ_1 de $x \neq 0$ için $B(r,s)^* x = \alpha x$ olsun. O halde lineer denklemden

$$\begin{aligned}
(\text{r+s})\,x_0 &= \alpha x_0, \\
r x_1 + s x_2 &= \alpha x_1, \\
r x_2 + s x_3 &= \alpha x_2, \\
&\vdots \\
r x_k + s x_{k+1} &= \alpha x_k, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.11}$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin çözümünden

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^{n-1} x_1 \qquad (n \geq 2). \tag{4.12}$$

olur.

Eğer $x_0 \neq 0$ ise $\alpha = r + s$ olur. Böylece $\alpha = r + s$ ifadesi $x = (x_0, 0, 0, \ldots)$ özvektörünün bir özdeğeri olduğu görülür. Eğer $\alpha \neq r + s$ ise $x_0 = 0$ olur ve (4.12) de $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - r| < |s|$ olmasıdır. Bu da istenendir.

Teorem 4.1.11. $\sigma_r\left(B(r,s), c\right) = \sigma_p\left(B(r,s)^*, c^*\right)$ (Altay and Başar 2005).

İspat: Teorem 4.1.6 nın ispatındaki benzer ifadelerden elde edilir.

Teorem 4.1.12. $\sigma_c\left(B(r,s), c\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\} \setminus \{r + s\}$ (Altay and Başar 2005).

4.2. c_0 ve c Dizi Uzaylarında Fine Spektrum

Bu kısımda ise bu uzaylar üzerindeki fine spektrum kavramları ve bunlarla ilgili teoremler verildi.

Teorem 4.2.1. $|\alpha - r| < |s|$ eşitsizliğinde eğer $\alpha = r$ alınırsa $\left(B(r,s) - \alpha I\right) \in \mathrm{III}_1 \sigma\left(B(r,s), c_0\right)$ (Altay and Başar 2005).

İspat: $\alpha = r$ için $B(r,s) - \alpha I = B(0,s)$ olduğundan Teorem 4.1.7 den $B(0,s) \in \mathrm{III}_1$ veya $B(0,s) \in \mathrm{III}_2$ olur. Şimdi $B(0,s)$ dönüşümünün sınırlı bir terse sahip olduğunu göstermek için $B(0,s)$ nin alttan sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $x \in c_0$ için

$$\|B(0,s)x\| \geq \frac{|s|}{2}\|x\|, \tag{4.13}$$

olduğu kolayca görülür. $B(0,s)$ alttan sınırlı olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_1$ dir.

Teorem 4.2.2. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde eğer $\alpha\neq r$ ve $\alpha\in\sigma_r\left(B(r,s)c_0\right)$ alınırsa $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_2\sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olur (Altay and Başar 2005).

İspat: Teorem 4.1.6 dan $B(r,s)-\alpha I\in \mathrm{III}_1$ veya $\in \mathrm{III}_2$ dir. Böylece (4.2) den $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi süreksiz ve $B(r,s)-\alpha I$ sınırsız bir terse sahip olur. Bu da istenendir.

Teorem 4.2.3. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\in\sigma_c\left(B(r,s),c_0\right)$ alınması durumunda $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{II}_2\sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olur (Altay and Başar 2005).

İspat: (4.2) dikkate alındığında $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi süreksiz ve sınırsız olur. Teorem 4.1.5 ten $B(r,s)^*-\alpha I$ bire-bir ve $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü yoğun bir değer kümesine sahip olur. $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün örten olmadığını göstermek için $\left(B(r,s)-\alpha I\right)x=y$ denkleminde $y\in c_0$ olmak üzere $x_n\notin c_0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece $y=(1,0,0,0,\ldots)\in c_0$ için $x_n=\left(\frac{s}{\alpha-r}\right)^n.\frac{1}{\alpha-r}$ olur. $x_n\notin c_0$ olduğundan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü örten değildir.

Ayrıca $B(r,s)$ dönüşümünün c uzayı üzerindeki fine spektrumu c_0 uzayındaki fine spektruma benzer olduğundan aşağıdaki teoremler ispatsız olarak verildi.

Teorem 4.2.4. $|\alpha-r|>|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\notin\sigma\left(B(r,s),c\right)$ ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{I}_1$ olur (Altay and Başar 2005).

Teorem 4.2.5. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha=r$ olması durumunda $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_1\sigma\left(B(r,s),c\right)$ olur (Altay and Başar 2005).

Teorem 4.2.6. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\in\sigma_c\left(B(r,s),c\right)$ alınırsa $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{II}_2\sigma\left(B(r,s),c\right)$ olur (Altay and Başar 2005).

Teorem 4.2.7. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\in\sigma_r\left(B(r,s),c\right)\backslash\{\mathrm{r}\}$ kabul edilirse $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_2\sigma\left(B(r,s),c\right)$ olur (Altay and Başar 2005).

Mercerian teoremi olarakta bilinen aşağıdaki teorem $B(r,s)$ dönüşümü ile spektrum arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Teorem 4.2.8. $|\alpha(1-r)+r|>|s(1-\alpha)|$ eşitsizliğini sağlayan α kompleks değeri için $A=\alpha I+(1-\alpha)B(r,s)$ matrisinin yakınsaklık alanı c uzayı olur (Altay and Başar 2005).

İspat: Eğer $\alpha=1$ ise $A=\mathrm{I}$ olacağından ispat için bir şey gerekmez. O halde $\alpha\neq 1$ olması durumunda Teorem 4.1.8 den ve α nın seçiminden dolayı $B(r,s)-[\alpha/(\alpha-1)]I$ dönüşümü $B(c)$ de bir terse sahip olur. Böylece A matrisinin tersi

$$A^{-1}=\frac{1}{1-\alpha}\left(B(r,s)-\frac{\alpha}{\alpha-1}\mathrm{I}\right)^{-1}\in B(c) \qquad (4.14)$$

dir.

Buradan A matrisi üçgensel ve $B(c)$ de olduğundan A^{-1} konservatif matris yani $c_A=c$ olmasıdır.

BÖLÜM 5
ÖRNEKLER

Şimdi bu konularla ilgili örnekleri verelim.

Örnek 5.1:

$$\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

$c_0 \to c_0$ bir operatördür. I operatörünün spektrumunu bulalım.

Çözüm:

$\sigma(\mathrm{I},c_0)=\sigma_p(\mathrm{I},c_0)\cup\sigma_r(\mathrm{I},c_0)\cup\sigma_c(\mathrm{I},c_0)$ olduğunu biliyoruz. Önce nokta spektrumu olan $\sigma_p(\mathrm{I},c_0)$ ı, yani özdeğer kümesini bulalım. λ bir özdeğer olsun. Bu durumda $\mathrm{I}x=\lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots\end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
&x_1=\lambda x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1-\lambda x_1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1(1-\lambda)=0\\
&x_2=\lambda x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2-\lambda x_2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2(1-\lambda)=0\\
&x_3=\lambda x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3-\lambda x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_3(1-\lambda)=0\\
&\vdots\\
&x_n=\lambda x_n \quad \Rightarrow \quad x_n-\lambda x_n=0 \quad \Rightarrow \quad x_n(1-\lambda)=0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu durumda

$\lambda \neq 1$ için $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = \cdots = 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda \neq 1$ için x_k ların hepsi sıfır olduğundan dolayı özdeğeri yoktur.

Fakat $\lambda = 1$ için her $x = (x_n) \in c_0$ için $(1,0,0,0,\cdots)$ özvektördür. Dolayısıyla $\lambda = 1$ için öz değerdir. Bundan dolayı $\sigma_p(\mathrm{I}, c_0) = \{1\}$ olur.

Sonuç olarak, $\lambda = 1$ iken I_λ^{-1} yoktur. $\lambda \neq 1$ iken I_λ^{-1} her zaman vardır. Buna bağlı olarak sürekli spektrum olan $\sigma_c(A, c_0)$ ı bulalım.

Öncelikli olarak I_λ operatörünün tersi olan I_λ^{-1} i bulalım.

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \qquad y = (y_1, y_2, \ldots)$$

$$\mathrm{I}_\lambda x = y \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{I}_\lambda^{-1} y \text{ olur.}$$

$\mathrm{I}_\lambda = \mathrm{I} - \lambda \mathrm{I}$ olduğu için

$$\mathrm{I}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}.$$

$\lambda = 1$ özdeğer olduğu için tersi mevcut değildir.

$\lambda \neq 1$ için

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)x_1 = y_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{y_1}{1-\lambda}$$

$$(1-\lambda)x_2 = y_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{y_2}{1-\lambda}$$

$$(1-\lambda)x_3 = y_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{y_3}{1-\lambda}$$

$$\vdots$$

$$(1-\lambda)x_n = y_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{y_n}{1-\lambda}$$

$$\vdots$$

dir. Dolayısıyla

$$\mathrm{I}_{\lambda}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

olur.

$\mathrm{I}_{\lambda}^{-1}=\left(a_{nk}^{-1}\right)$ olduğu için

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{I}_{\lambda}^{-1}\right\| &= \sup\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{nk}^{-1}\right|\right) \\ &= \max\left\{\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|,\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|,\ldots\right\} \\ &= \frac{1}{|1-\lambda|} \end{aligned}$$

dir.

$\lambda \neq 1$ iken tersi var ve her noktada sürekli olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla süreksiz nokta olmadığından $\sigma_c\left(\mathrm{I},c_0\right)=\varnothing$ dir.

Son olarak da $\sigma_r\left(\mathrm{I},c_0\right)$ yi bulalım.

$\lambda=1$ için $\sigma_r\left(\mathrm{I},c_0\right)$ de mevcut değildir. O zaman $\lambda \neq 1$ kabul edebiliriz. $\mathrm{I}_{\lambda}x=y$ den dolayı

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)x_1=y_1 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{y_1}{1-\lambda} \\ &(1-\lambda)x_2=y_2 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{y_2}{1-\lambda} \\ &\vdots \\ &(1-\lambda)x_n=y_n \quad \Rightarrow \quad x_n=\frac{y_n}{1-\lambda} \\ &\vdots \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla Lemma 3.2 den $\lambda \neq 1$ için I_λ nın tersi olduğundan dolayı I_λ bire-bir ve örtendir. I_λ örten olduğundan $\lambda \neq 1$ için değer kümesi yoğundur. O zaman $\sigma_r\left(\mathrm{I},c_0\right)=\varnothing$ olur. Bu durumda;

$$\sigma\left(\mathrm{I},c_0\right)=\sigma_p\left(\mathrm{I},c_0\right)\cup\sigma_r\left(\mathrm{I},c_0\right)\cup\sigma_c\left(\mathrm{I},c_0\right)=\{1\}\cup\varnothing\cup\varnothing=\{1\}$$

dir.

Örnek 5.2:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ...... & 0 & ...... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ...... & 0 & ...... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ...... & 0 & ...... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .... & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$c_0 \to c_0$ bir operatör olsun. A operatörünün spektrumunu bulalım.

Çözüm:

$\sigma\left(A,c_0\right)=\sigma_p\left(A,c_0\right)\cup\sigma_r\left(A,c_0\right)\cup\sigma_c\left(A,c_0\right)$ olduğu için öncelikli olarak nokta spektrumu olan $\sigma_p\left(A,c_0\right)$ı bulalım.

$Ax=\lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ...... & 0 & ...... \\ 1 & 0 & 0 & ...... & 0 & ...... \\ 0 & 1 & 0 & ...... & 0 & ...... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ...... & 0 \; ...... \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0.x_1 &= \lambda x_1 \\ x_1 &= \lambda x_2 \\ x_2 &= \lambda x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda x_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

dir.

$\lambda = 0$ ise $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = ... = 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda = 0$ iken $\forall x_n = 0$ olduğu için özdeğeri yoktur.

$\lambda \neq 0$ ise $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ...

Yani $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n .... = 0$ dir.

Her durumda $x_1 = x_2 = ... = x_n .... = 0$ olduğundan dolayı $\lambda \neq 0$ içinde $\forall x_n = 0$ olduğu için özdeğeri yoktur. Dolayısıyla $\sigma_p(A, c_0) = \varnothing$ olur. Bu durumda A_λ^{-1} her zaman vardır.

Şimdide sürekli spektrum olan $\sigma_c\left(A, c_0\right)$ ı bulalım.

Öncelikli olarak A_λ operatörünün tersini bulalım.

$$x = \left(x_1, x_2, \ldots\right) \qquad y = \left(y_1, y_2, \ldots\right)$$

$$A_\lambda x = y \quad \Rightarrow \quad x = A_\lambda^{-1} y$$

$A_\lambda = A - \lambda \mathrm{I}$ olduğu için

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

dir.

A_λ^{-1} i bulmak için $A_\lambda x = y$ olması $A_\lambda^{-1} y = x$ olmasını gerektirdiği için;

$$
\begin{aligned}
-\lambda x_1 = y_1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{y_1}{\lambda} \\
x_1 - \lambda x_2 = y_2 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{y_2}{\lambda} - \frac{y_1}{\lambda^2} \\
x_2 - \lambda x_3 = y_3 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = -\frac{y_3}{\lambda} - \frac{y_2}{\lambda^2} - \frac{y_1}{\lambda^3} \\
&\vdots \\
x_{n-1} - \lambda x_n = y_n \quad &\Rightarrow \quad x_n = -\frac{y_n}{\lambda} - \frac{y_{n-1}}{\lambda^2} - \cdots - \frac{y_1}{\lambda^n} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir.

$$
A_\lambda^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & \\
-\frac{1}{\lambda^2} & \frac{-1}{\lambda} & 0 & 0 & \dots & \\
-\frac{1}{\lambda^3} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{-1}{\lambda} & 0 & 0 & \dots \\
-\frac{1}{\lambda^4} & -\frac{1}{\lambda^3} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{-1}{\lambda} & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
$$

şeklindedir.

$\lambda \neq 0$ iken

$$
\| A^{-1} \| = Sup \sum \left| a_{n_k}^{-1} \right| = \sum \frac{1}{|\lambda|^k} \qquad \begin{matrix} |\lambda| > 1 \\ |\lambda| \leq 1 \end{matrix}
$$

$$
\sigma_c (A, c_0) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \ |\lambda| = 1 \}
$$

dir.

Son olarak da rezidüel spektrum olan $\sigma_r(A, c_0)$ ı bulalım.

$$
\sigma_r (A, c_0) = \sigma_p \left(A^*, c_0^* \right) \setminus \sigma_p (A, c_0)
$$

dır.

$A^* \cong A^t$ ve $c_0^* \cong \ell_1$ olduğu için lemma 3.4 den dolayı $\sigma_p \left(A^t, \ell_1 \right)$ i bulalım. Yani A^t nin ℓ_1 de özdeğerlerini bulalım. λ özdeğer olsun o zaman $A^t x = \lambda x$ ve

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & x_2 = \lambda x_1 \\ & x_3 = \lambda x_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \lambda^2 x_1 \\ & x_4 = \lambda x_3 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \lambda^3 x_1 \\ & \vdots \\ & x_n = \lambda x_{n-1} \ \Rightarrow \ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\left(x_1, x_2, x_3, \dots\right) = \left(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \lambda^3 x_1, \lambda^4 x_1, \dots\right) \in c_0$$

dir.

Bu dizi geometrik dizi, $\left(x_n\right) \in \ell_1$ olması $\left(\left(\lambda\right)^k\right) \in \ell_1$ olması demektir. Bunun için geometrik serinin yakınsama şartından dolayı $|\lambda| < 1$ olması gerektirir. Yani $\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\right\}$.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \sigma_r\left(A, c_0\right) &= \sigma_p\left(A^*, c_0^*\right) \setminus \sigma_p\left(A, c_0\right) \\ &= \sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) \setminus \sigma_p\left(A, c_0\right) \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\right\} \setminus \varnothing \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\right\} \end{aligned}$$

olur.

Böylece spektrum

$$\sigma(A,c_0)=\sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)$$
$$=\varnothing\cup\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ \lambda=1\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ |\lambda|<1\}$$
$$\sigma(A,c_0)=\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ |\lambda|\le 1\}$$

dir.

Örnek 5.3:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$a_k\to 0$ olsun. A operatörünün $\sigma(A,c_0)$ spektrumunu bulalım.

Çözüm:

$\sigma(A,c_0)=\sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)$ olduğu için öncelikli olarak sürekli spektrum olan $\sigma_p(A,c_0)$ ı bulalım.

$Ax=\lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1x_1 &= \lambda x_1 \\ a_2x_2 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ a_kx_k &= \lambda x_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

dir.

$\lambda=0$ ise $x_k\neq 0$ olur. $a_k\in\sigma_p(A,c_0)$ dır.

$\lambda\neq 0$ ise $x_k\neq 0$ olur. $a_k\in\sigma_p(A,c_0)$ olur. Dolayısıyla nokta spektrumu $\sigma_p(A,c_0)=\{a_k : k=1,2,3,\cdots\}$ olur.

Şimdide rezidüel spektrum olan $\sigma_r\left(A,c_0\right)$ ı bulalım.

$\sigma_r\left(A,c_0\right)=\sigma_p\left(A^t,\ell_1\right)\backslash\sigma_p\left(A,c_0\right)$ olduğu için A^t nin ℓ_1 de özdeğerlerini bulalım yani A^t nin ℓ_1 de nokta spektrumunu bulalım.

$$A^t=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

dir.

$A^t x=\lambda x$ denklem sisteminden

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &a_1x_1=\lambda x_1 \\ &a_2x_2=\lambda x_2 \\ &\vdots \\ &a_kx_k=\lambda x_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemde

$\lambda=0$ ise $x_k\neq 0$ ve $a_k\in\sigma_p\left(A^t,\ell_1\right)$ dir.

$\lambda\neq 0$ ise $x_k\neq 0$ olur. $a_k\in\sigma_p\left(A^t,\ell_1\right)$ olur. Dolayısıyla nokta spektrumu $\sigma_p\left(A,c_0\right)=\left\{a_k : k=1,2,3,\cdots\right\}$ olur.

$$\sigma_r\left(A,c_0\right)=\sigma_p\left(A^t,\ell_1\right)\backslash\sigma_p\left(A,c_0\right)$$

olduğu için

$$\sigma_r\left(A,c_0\right)=\left\{a_k : k=1,2,3,\cdots\right\}\backslash\left\{a_k : k=1,2,3,\cdots\right\}$$

$$\sigma_r\left(A,c_0\right)=\varnothing$$

dir.

Son olarak da sürekli spektrum olan $\sigma_c\left(A,c_0\right)$ ı bulalım.

$A_\lambda = A - \lambda \mathrm{I}$ olduğu için

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} a_1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3-\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

dir.

$x = (x_1, x_2, \cdots) \qquad y = (y_1, y_2, \cdots)$

$A_\lambda x = y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}_\lambda^{-1} y = x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} a_1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3-\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$(a_1-\lambda)x_1 = y_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{y_1}{a_1-\lambda}$$

$$(a_2-\lambda)x_2 = y_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{y_2}{a_2-\lambda}$$

$$(a_3-\lambda)x_3 = y_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{y_3}{a_3-\lambda}$$

$$\vdots$$

$$(a_k-\lambda)x_k = y_k \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{y_k}{a_k-\lambda}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$A_\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{a_2-\lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3-\lambda} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\left\|A_\lambda^{-1}\right\| = \sup\left(\sum\left|a_{n_k}^{-1}\right|\right) = \sup\left(\left|\frac{1}{a_1-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{a_2-\lambda}\right|, \cdots \left|\frac{1}{a_n-\lambda}\right|, \cdots\right)$$

1. Durum: $\lambda = 0$ olursa $\left\|A_\lambda^{-1}\right\| = \infty$ olur. Bu durumda $\lambda = 0$ için tersi var ve sürekli olmadığından $0 \in \sigma_c\left(A, c_0\right)$ dır.

2. Durum: $\lambda \neq 0$ için,

$$S = \left\{a_k : k = 1, 2, \cdots\right\} = \sigma_p\left(A, c_0\right)$$

$\lambda \notin S$ olsun.

$$d = d\left(\lambda, S\right) = \inf\left\{\left|\lambda - x\right| : x \in S\right\} \quad \left(d > 0\right)$$

$\lambda \neq 0$ olduğu için $d > 0$ olur. Dolayısıyla $\frac{1}{d} < \infty$.

$$\frac{1}{d} = \sup\left(\left|\frac{1}{a_1-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{a_2-\lambda}\right|, \cdots, \left|\frac{1}{a_k-\lambda}\right|, \cdots\right) < \infty$$

$\frac{1}{d}$ sonlu olduğu için $\lambda \notin S$ için A_λ^{-1} süreklidir. Dolayısıyla $\lambda \notin 0$ için $\lambda \in \sigma_c\left(A, c_0\right)$ dır. Sonuç olarak $\sigma_c\left(A, c_0\right) = \left\{0\right\}$ olur.

$$\sigma\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A, c_0\right) \cup \sigma_r\left(A, c_0\right) \cup \sigma_c\left(A, c_0\right)$$

olduğu için

$$\sigma\left(A, c_0\right) = \left\{a_k : k = 1, 2, \cdots\right\} \cup \varnothing \cup \left\{0\right\}$$
$$\sigma\left(A, c_0\right) = \left\{a_k : k = 1, 2, \cdots\right\} \cup \left\{0\right\}$$

dir.

Örnek 5.4:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

$c_0 \to c_0$ bir operatör olsun. A operatörünün spektrumunu bulalım.

Çözüm:

$\sigma(A,c_0)=\sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)$ olduğu için öncelikli olarak nokta spektrumu olan $\sigma_p(A,c_0)$ ı bulalım.

$Ax=\lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}x_1=\lambda x_1 & \Rightarrow & \frac{1}{2}x_1=\lambda x_1 \\ \frac{1}{4}x_2=\lambda x_2 & \Rightarrow & \frac{1}{2^2}x_2=\lambda x_2 \\ \frac{1}{8}x_3=\lambda x_3 & \Rightarrow & \frac{1}{2^3}x_3=\lambda x_3 \\ \vdots & & \\ \frac{1}{2^n}x_n=\lambda x_n & \Rightarrow & \frac{1}{2^n}x_n=\lambda x_n \\ \vdots & & \end{array}$$

dir.

$\lambda = 0$ ise $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \cdots = 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda = 0$ için özdeğeri yoktur.

$\lambda \neq 0$ ise $x_1 \neq 0$ için $\frac{1}{2}x_1 = \lambda x_1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ olur. Bu durumda $x_k = 0\left(k \neq 1\right)$ olduğundan dolayı $x = \left(1, 0, 0, \cdots\right) \in c_0$ olur.

$x_2 \neq 0$ için $\frac{1}{4}x_2 = \lambda x_2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ olur. Bu durumda $x_k = 0\left(k \neq 2\right)$ dır. $x = \left(0, 1, 0, \cdots\right) \in c_0$ olur.

$\vdots$

Bundan dolayı $x_k \neq 0$ için $\lambda = \frac{1}{2^k}$ olur. $x = \left(0, 0, \cdots 0, 1, 0, \cdots\right) \in c_0$ özvektörü ile $\lambda = \frac{1}{2^k}$ özdeğerdir.

$\lambda \neq \frac{1}{2^k}$ olsun $\left(\lambda \in \mathbb{C}\right)$. Bu durumda $x_k = 0$ olur. O zaman $\lambda \neq \frac{1}{2^k}$ durumunda λ öz değer olamaz. Dolayısıyla nokta spektrumu

$$\sigma_p\left(A, c_0\right) = \left\{\frac{1}{2^k} : k = 1, 2, \cdots\right\}$$

dir.

Şimdide rezidüel spektrum olan $\sigma_r\left(A, c_0\right)$ ı bulalım.

$\sigma_r\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A^*, c_0^*\right) \setminus \sigma_p\left(A, c_0\right)$ olduğu için

$A^* \cong A^t$ ve $c_0^* \cong \ell_1$ olduğundan dolayı (Lemma 3.2) $\sigma_r\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) \setminus \sigma_p\left(A, c_0\right)$ dır. Dolayısıyla $\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right)$ ı bulalım. Yani A^t nin ℓ_1 de özdeğerini bulmalıyız. λ özdeğer olsun. O zaman $A^t x = \lambda x$ ve

$$A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

olduğu için

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} x_1 = \lambda x_1 \\ &\frac{1}{4} x_2 = \lambda x_2 \\ &\vdots \\ &\frac{1}{2^n} x_n = \lambda x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

$\lambda = 0$ için, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = \cdots = 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda = 0$ için özdeğer yoktur.

$\lambda \neq 0$ için, $x = (0,0,\cdots 0,1,0,\cdots) \in \ell_1$ oluyor. Dolayısıyla $\lambda \neq 0$ için özdeğer

$$\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) = \left\{ \frac{1}{2^k} : k = 1,2,\cdots \right\}$$

dir.

$$\sigma_r(A, c_0) = \sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) \setminus \sigma_p(A, c_0)$$

olduğu için

$$\begin{aligned} &\sigma_r(A, c_0) = \left\{ \frac{1}{2^k} : k = 1,2,\cdots \right\} \setminus \left\{ \frac{1}{2^k} : k = 1,2,\cdots \right\} \\ &\sigma_r(A, c_0) = \varnothing \end{aligned}$$

dır.

Son olarak da sürekli spektrum olan $\sigma_c(A, c_0)$ ı bulalım.

$A_\lambda = A - \lambda \mathrm{I}$ olduğu için

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}-\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

dir.

$x = (x_1, x_2, \cdots)$ $\qquad$ $y = (y_1, y_2, \cdots)$

$A_\lambda x = y \quad \Rightarrow \quad A_\lambda^{-1} y = x$ olmasını gerektirdiği için

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}-\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x_1 = y_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{y_1}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}$$

$$\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)x_2 = y_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{y_2}{\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{2^n}-\lambda\right)x_n = y_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{y_n}{\left(\frac{1}{2^n}-\lambda\right)}$$

$$\vdots$$

denklem sistemi elde edilir.

$$A_\lambda^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \dfrac{1}{\frac{1}{4}-\lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\frac{1}{8}-\lambda} & 0 & \cdots \\ \vdots & & 0 & 0 & \dfrac{1}{\frac{1}{2^n}-\lambda}\cdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\left\|A_\lambda^{-1}\right\|=\sup\left(\sum\left|a_{n_k}^{-1}\right|\right)=\sup\left(\left|\frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda}\right|,\left|\frac{1}{\frac{1}{4}-\lambda}\right|,\left|\frac{1}{\frac{1}{8}-\lambda}\right|,\cdots,\left|\frac{1}{\frac{1}{2^n}-\lambda}\right|,\cdots\right)$$ olduğu için

1. Durum: $\lambda=0$ için $\left\|A_\lambda^{-1}\right\|=\infty$ $0\in\sigma_c(A,c_0)$ dır. $\lambda=0$ için tersi var ve sürekli olmadığından $0\in\sigma_c(A,c_0)$ dır.

2. Durum: $\lambda\neq 0$ için,

$$S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots\right\}=\sigma_p(A,c_0)$$

$$d=d(\lambda,S)=\inf\left\{|\lambda-x|:x\in S\right\}\qquad (d>0)$$

$$\left\|A_\lambda^{-1}\right\|=\frac{1}{d}=\sup\left(\left|\frac{1}{a_1-\lambda}\right|,\left|\frac{1}{a_2-\lambda}\right|,\cdots\left|\frac{1}{a_k-\lambda}\right|,\cdots\right)<\infty$$

$\dfrac{1}{d}$ sonlu olduğu için $\lambda\notin S$ için A_λ^{-1} süreklidir. Dolayısıyla $\lambda\neq 0$ için $\lambda\in\sigma_c(A,c_0)$ dır. Sonuç olarak $\sigma_c(A,c_0)=\{0\}$ olur. Elde edilen değerleri $\sigma(A,c_0)=\sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)$ da yerine yazılırsa

$$\sigma(A,c_0)=\left\{\frac{1}{2^k}:k=1,2,\cdots\right\}\cup\varnothing\cup\{0\}$$

$$\sigma(A,c_0)=\left\{\frac{1}{2^k}:k=1,2,\cdots\right\}\cup\{0\}$$

dır.

Örnek 5.5 :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$c_0 \to c_0$ bir operatör olsun. A operatörünün spektrumunu bulalım (en az iki tanesi sıfırdan farklı) $(a_k \to 0)$.

Çözüm :

$\sigma(A,c_0)=\sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)$ olduğu için öncelikli olarak nokta spektrumu olan $\sigma_p(A,c_0)$ ı bulalım. Yani özdeğer kümesini bulalım. λ bir özdeğer olsun. Bu durumda $Ax=\lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &x_1+a_1x_2+a_2x_3+\cdots+a_nx_{n+1}+\cdots=\lambda x_1 \\ &x_2=\lambda x_2 \\ &x_3=\lambda x_3 \\ &\quad\vdots \\ &x_n=\lambda x_n \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

dir.

$$x_1+a_1x_2+a_2x_3+\cdots+a_nx_{n+1}+\cdots=\lambda x_1$$

$\lambda=1$ için

$$\begin{aligned} &a_1x_2+a_2x_3+a_3x_4+\cdots+a_nx_{n+1}+\cdots=0 \\ &a_kx_{k+1}+a_ex_{e+1}=0 \\ &\quad x_{k+1}=a_e \\ &\quad x_{e+1}=-a_k \end{aligned}$$

$(0,0,0,\cdots 0,a_e,0,\cdots 0,-a_k,0,\cdots)$ olur. O zaman $\lambda=1$ özdeğerdir.

$\lambda\neq 1$ olsun. Bu durumda $x_k=0$ $k>1$ için, bu bilgi birinci denklemde kullanırsa $x_1=0$ olmasını gerektirir. O zaman $\lambda\neq 1$ için özvektör yoktur. Yani $\lambda\neq 1$ ise λ özdeğer olamaz. Dolayısıyla

$$\sigma_p(A,c_0)=\{1\}$$

dir.

Şimdide sürekli spektrum olan $\sigma_c(A,c_0)$ ı bulalım.

$A_\lambda = A-\lambda \mathrm{I}$ olduğu için

$$A_\lambda=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots\\ \vdots & & & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

dır.

$$x=(x_1,x_2,\cdots) \qquad y=(y_1,y_2,\cdots) \qquad A_\lambda x=y \quad\Rightarrow\quad x=A_\lambda^{-1}y$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots\\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)x_1+a_1x_2+a_2x_3+\cdots+a_nx_{n+1}+\cdots=y_1$$

$$(1-\lambda)x_2=y_2\Rightarrow x_2=\frac{y_2}{1-\lambda}$$

$$(1-\lambda)x_3=y_3\Rightarrow x_3=\frac{y_3}{1-\lambda}$$

$$\vdots$$

denklem sistemi elde edilir.

$$x_1=\frac{y_1}{1-\lambda}-a_1\frac{y_2}{(1-\lambda)^2}-a_2\frac{y_3}{(1-\lambda)^2}-\cdots-a_n\frac{y_{n+1}}{(1-\lambda)^2}-\cdots$$

olduğu için

$$A_\lambda^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{1-\lambda} & \frac{-a_1}{(1-\lambda)^2} & \frac{-a_2}{(1-\lambda)^2} & \frac{-a_3}{(1-\lambda)^2} & \cdots\\ 0 & \frac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\left\|A_\lambda^{-1}\right\| = \sup\left(\sum\left|a_{nk}^{-1}\right|\right)$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{1}{1-\lambda}\right| + \left|\frac{-a_1}{(1-\lambda)^2}\right| + \left|\frac{-a_2}{(1-\lambda)^2}\right| + \cdots + \left|\frac{-a_n}{(1-\lambda)^2}\right| + \cdots, \left|\frac{1}{1-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{1-\lambda}\right|, \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{|1-\lambda|} + \left|\frac{-a_1}{(1-\lambda)^2}\right| + \left|\frac{-a_2}{(1-\lambda)^2}\right| + \cdots$$

$$= \frac{1}{|1-\lambda|} + \frac{1}{|1-\lambda|^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda \neq 1 \end{matrix}$$

$\lambda = 1$ durumda özdeğer olduğu için bakmaya gerek yoktur.

$\lambda \neq 1$ için $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$ olduğu için $\left\|A_\lambda^{-1}\right\| = \frac{1}{|1-\lambda|} + \frac{1}{|1-\lambda|^2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$ olur. O zaman $\lambda \neq 1$ için $\lambda \notin \sigma_c(A, c_0)$ olur. Bundan dolayı $\sigma_c(A, c_0) = \varnothing$ dır.

Son olarak da rezüdüel spektrum olan $\sigma_r(A, c_0)$ ı bulalım.

$\sigma_r(A, c_0) = \sigma_p(A^t, \ell_1) \backslash \sigma_p(A, c_0)$ olduğu için

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

olduğu için A^t nin nokta spektrumunu bulalım.

$A^t x = \lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1 \\ a_1 x_1 + x_2 &= \lambda x_2 \\ a_2 x_1 + x_3 &= \lambda x_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

$\lambda = 1$ için $x_2 \neq 0$, $(0,1,0,\cdots)$ özdeğer. Dolayısıyla $\lambda = 1$ için nokta spektrumu

$$\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) = \{1\}$$

ve

$$\sigma_r\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) \backslash \sigma_p\left(A, c_0\right) = \{1\} \backslash \{1\} = \varnothing$$

dir.

Böylece

$$\sigma\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A, c_0\right) \cup \sigma_c\left(A, c_0\right) \cup \sigma_r\left(A, c_0\right) = \{1\} \cup \varnothing \cup \varnothing = \{1\}$$

dir.

Örnek 5.6 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$c_0 \to c_0$ bir operatör olsun. A operatörünün spektrumunu bulalım.

Çözüm :

$\sigma\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A, c_0\right) \cup \sigma_r\left(A, c_0\right) \cup \sigma_c\left(A, c_0\right)$ olduğu için öncelikli olarak nokta spektrumu olan $\sigma_p\left(A, c_0\right)$ ı bulalım. Yani özdeğer kümesini bulalım. λ bir özdeğer olsun. Bu durumda $Ax = \lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2} x_1 &= \lambda x_2 \\ \frac{1}{4} x_1 &= \lambda x_3 \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^{n-1}} x_1 &= \lambda x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

$\lambda = 0$ için

$x_1 = 0$ olur. $x_2 = 1$ alalım. $(0,1,0,\cdots)$ özvektördür. $\lambda = 1$ içinde $x_k \neq 0$ olabilir. Dolayısıyla $\sigma_p(A,c_0) = \{0,1\}$ dir.

Şimdide sürekli spektrum olan $\sigma_c(A,c_0)$ ı bulalım.

$A_\lambda = A - \lambda \mathrm{I}$ olduğu için

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & -\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}.$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \ , \ y = (y_1, y_2, \cdots) \quad A_\lambda x = y \quad \Rightarrow \quad x = A_\lambda^{-1} y$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & -\lambda & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dır.

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{1-\lambda} \\ &\frac{1}{2}x_1 - \lambda x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\frac{1}{2}x_1 - y_2}{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{(1-\lambda)\lambda} - \frac{y_2}{\lambda} \\ &\frac{1}{4}x_1 - \lambda x_3 = y_3 \Rightarrow x_3 = \frac{\frac{1}{4}x_1 - y_3}{\lambda} = \frac{1}{2^2}\frac{y_1}{(1-\lambda)\lambda} - \frac{y_3}{\lambda} \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

$$A_\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} & \frac{-1}{\lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2^2\lambda(1-\lambda)} & 0 & \frac{-1}{\lambda} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

dır.

$$\left\|A_\lambda^{-1}\right\| = \sup\sum_k \left|a_{nk}^{-1}\right| = \sup\left\{\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{2^1.\lambda(1-\lambda)}\right| + \left|\frac{-1}{\lambda}\right|, \left|\frac{1}{2^2.\lambda(1-\lambda)}\right| + \left|\frac{-1}{\lambda}\right|, \cdots\right\} = \left|\frac{1}{2\lambda(1-\lambda)}\right| + \frac{1}{|\lambda|}$$

$\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$ in dışında özdeğer olmadığı için $\sigma_c(A, c_0) = \varnothing$ dir.

Son olarak da rezüdüel spektrum olan $\sigma_r(A, c_0)$ ı bulalım.

$\sigma_r(A, c_0) = \sigma_p(A^t, \ell_1) \backslash \sigma_p(A, c_0)$ olduğundan dolayı A^t nin nokta spektrumunu bulalım. Yani $\sigma_p(A^t, \ell_1)$ i bulalım.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}.$$

$A^t x = \lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} 1.x_1 + \frac{1}{2}.x_2 + \frac{1}{4}.x_3 + \frac{1}{8}x_4 + \cdots + \frac{1}{2^n}.x_{n+1} + \cdots = \lambda x_1 \\ 0 = \lambda x_2 \\ 0 = \lambda x_3 \\ \vdots \end{gathered}$$

denklem sistemi elde edilir.

$\lambda = 0$ için $x_1 = 1$ ve $x_2 = -1$ olabilir.
$\lambda = 1$ için $x_1 = 1$ ve $x_k = 0$ olabilir.
$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ için özdeğer yoktur.
Dolayısıyla $\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) = \{0,1\}$ dir. Bu durumda

$$\sigma_r\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) \backslash \sigma_p\left(A, c_0\right) = \{0,1\} \backslash \{0,1\} = \varnothing$$

dır.

Yani spektrum

$$\begin{aligned} \sigma\left(A, c_0\right) &= \sigma_p\left(A, c_0\right) \cup \sigma_c\left(A, c_0\right) \cup \sigma_r\left(A, c_0\right) \\ &= \{0,1\} \cup \varnothing \cup \varnothing \\ &= \{0,1\} \end{aligned}$$

dir.

Örnek 5.7 :

$$A=\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & & & \downarrow & & & \downarrow & &
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & x_n & & & x_k & &
\end{array}
\end{array}$$

$c_0 \rightarrow c_0$ a bir operatör olsun. A operatörünün spektrumunu bulalım. $(k > n > 1)$ $(k, n \neq 1)$

Çözüm:

$\sigma(A,c_0)=\sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)$ olduğu için öncelikli olarak nokta spektrumu olan $\sigma_p(A,c_0)$ ı bulalım. Bunun için λ özdeğer olsun.

$Ax=\lambda x$ olduğu için

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \downarrow & & & \downarrow & & \\
 & & & & x_n & & & x_k & &
\end{array}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&x_1=\lambda x_1\\
&x_2=\lambda x_2\\
&\vdots\\
&x_{n-1}=\lambda x_{n-1}\\
&x_n+x_k=\lambda x_n\\
&x_{n+1}=\lambda x_{n+1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

dir.

$\lambda = 1$ için $x_1 \neq 0$ olabilir. $(1,0,0,\cdots)$ özvektördür. Dolayısıyla $\lambda = 1$ öz değerdir. $\lambda \neq 1$ için $x_1 = 0$, $x_2 = 0,\cdots$ olduğu için özdeğer yoktur. Nokta spektrumu olan $\sigma_p(A,c_0) = \{1\}$ dir.

Şimdide sürekli spektrum olan $\sigma_c(A,c_0)$ ı bulalım.

$A_\lambda = A - \lambda \mathrm{I}$ olduğu için

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ & & & & x_n & & & x_k & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \cdots & \cdots & & & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1-\lambda & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \downarrow & \vdots & & \downarrow & \vdots & \\ & & & x_n & & & x_k & & \end{bmatrix}$$

dir.

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \quad y = (y_1, y_2, \ldots) \quad A_\lambda x = y \Rightarrow x = A_\lambda^{-1} y \text{ olduğundan dolayı}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1-\lambda & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{1-\lambda}$$
$$(1-\lambda)x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y_2}{1-\lambda}$$
$$\vdots$$
$$(1-\lambda)x_n + x_k = y_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n - x_k}{1-\lambda} \qquad x_n = \frac{y_n}{1-\lambda} - \frac{y_k}{(1-\lambda)^2}$$
$$(1-\lambda)x_{n+1} = y_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{1-\lambda}$$
$$\vdots$$
denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla

$$A_\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda} & 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{1-\lambda} & 0 & \cdots & \frac{-1}{(1-\lambda)^2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

dir.

$$\left\|A_\lambda^{-1}\right\| = \sup \sum_k \left|a_{nk}^{-1}\right| = \sup\left\{\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|, \cdots, \left|\frac{1}{1-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{1-\lambda}\right| + \left|\frac{-1}{(1-\lambda)^2}\right|, \left|\frac{1}{1-\lambda}\right|, \cdots\right\} = \frac{1}{|1-\lambda|} + \frac{1}{|1-\lambda|^2}$$

$\lambda = 1$ özdeğer olduğu için incelemeye gerek yoktur. $\lambda \neq 1$ iken tersi var ve her noktada sürekli olduğundan dolayı süreksiz nokta olmadığından dolayı $\sigma_c(A, c_0) = \varnothing$ dir.

Son olarak da rezüdüel spektrum olan $\sigma_r(A, c_0)$ ı bulalım.

$\sigma_r(A, c_0) = \sigma_p(A^t, \ell_1) \backslash \sigma_p(A, c_0)$ olduğu için, A^t nin özdeğerlerini bulalım.

$$
A^t = \begin{array}{l}
\left[\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & & 0 & & \cdots & \cdots & & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \cdots & & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & \cdots & \vdots & \vdots &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \to n \\ \\ \\ \to k \\ \\ \\
\end{array}
$$

$A^t x = \lambda x$ olduğu için

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & \vdots & & \vdots & & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}
= \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& x_1 = \lambda x_1 \\
& x_2 = \lambda x_2 \\
& \vdots \\
& x_{n+1} = \lambda x_{n-1} \\
& x_n = \lambda x_n \\
& \quad \vdots \\
& x_n + x_k = \lambda x_k \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir.

$\lambda = 1$ için $x_1 \neq 0$ olabilir. $(1,0,0,\cdots)$ özvektör olduğu için $\lambda = 1$ özdeğerdir. $\lambda \neq 1$ için $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \cdots = x_k = \cdots = 0$ olduğu için özdeğer yoktur. Dolayısıyla $\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) = \{1\}$ olduğu için

$$
\sigma_r\left(A, c_0\right) = \sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) \backslash \sigma_p\left(A, c_0\right) = \{1\} \backslash \{1\} = \varnothing
$$

dir.

Bundan dolayı

$$\begin{aligned}\sigma(A,c_0) &= \sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)\\ &=\{1\}\cup\varnothing\cup\varnothing\\ &=\{1\}\end{aligned}$$

dir.

Örnek 5.8 :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\dots\\ -1&1&0&0&0&\cdots\\ 0&-1&1&0&0&\cdots\\ 0&0&-1&1&0&\cdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots\end{bmatrix}$$

$c_0\to c_0$ bir operatördür. A operatörünün spektrumunu bulalım.

Çözüm :

$\sigma(A,c_0)=\sigma_p(A,c_0)\cup\sigma_r(A,c_0)\cup\sigma_c(A,c_0)$ olduğu için öncelikli olarak nokta spektrumu olan $\sigma_p(A,c_0)$ ı bulalım. Yani özdeğer kümesini bulalım. λ bir özdeğer olsun.

$Ax=\lambda x$ olduğu için

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\dots\\ -1&1&0&0&0&\cdots\\ 0&-1&1&0&0&\cdots\\ 0&0&-1&1&0&\cdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\ \vdots\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\ \vdots\end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}&x_1=\lambda x_1\\ &-x_1+x_2=\lambda x_2\\ &-x_2+x_3=\lambda x_3\\ &\quad\vdots\\ &-x_{n-1}+x_n=\lambda x_n\\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

x_k dizide ilk sıfırdan farklı terim olsun. Bu durumda k. eşitlikten $x_k-x_{k-1}=\lambda x_k$ olur.

$x_{k-1}=0$ olduğundan dolayı $x_k=\lambda x_k \Rightarrow x_k \neq 0$ ise $\lambda=1$ olur.

$\lambda=1$ için $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_k=\cdots=0$ olur ve $x_k\neq 0$ ile çelişir. Dolayısıyla $\sigma_p\left(A,c_0\right)=\varnothing$ dır.

Nokta spektrumu boş küme olduğu için A_λ^{-1} her zaman vardır.

Öncelikli olarak A_λ operatörünün tersini bulalım.

$$x=\left(x_1,x_2,\ldots\right) \qquad \mathrm{y}=\left(y_1,y_2,\ldots\right)$$
$$A_\lambda x=y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}=A_\lambda^{-1}y$$

$A_\lambda=A-\lambda\mathrm{I}$ olduğu için

$$A_\lambda=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir.

$\lambda=1$ için

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir.

A_1^{-1} i bulmak için $A_1x=y$ olması $A_1^{-1}y=x$ olmasını gerektirdiği için,

$$\begin{array}{ll} 0=y_1 & \\ -x_1=y_2 & x_1=-y_2 \\ -x_2=y_3 & x_2=-y_3 \\ -x_3=y_4 & x_3=-y_4 \\ \vdots & \end{array}$$

denklem sistemi elde edilir.

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir.

$\lambda \neq 1$ için

A_λ^{-1} i bulmak için $A_\lambda x = y$ olması $A_\lambda^{-1} y = x$ olmasını gerektirdiği için,

$$\begin{array}{ll}
(1-\lambda)x_1 = y_1 & x_1 = \dfrac{1}{1-\lambda} y_1 \\
-x_1 + (1-\lambda)x_2 = y_2 & x_2 = \dfrac{1}{1-\lambda}\left[y_2 + x_1\right] = \dfrac{1}{1-\lambda} y_2 + \left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)^2 y_1 \\
-x_2 + (1-\lambda)x_3 = y_3 & x_3 = \dfrac{1}{1-\lambda}\left[x_3 + x_2\right] = \dfrac{1}{1-\lambda} y_3 + \left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)^2 y_2 + \left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)^3 y_1 \\
\vdots & \vdots \\
-x_{n-1} + (1-\lambda)x_n = y_n & x_n = \dfrac{1}{1-\lambda} y_n + \left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)^2 y_{n-1} + \cdots + \left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)^n y_1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla A_λ nın tersi olan A_λ^{-1}

$$A_\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{1}{(1-\lambda)^2} & \dfrac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{1}{(1-\lambda)^3} & \dfrac{1}{(1-\lambda)^2} & \dfrac{1}{(1-\lambda)} & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi de rezidüel spektrum olan $\sigma_r(A, c_0)$ ı bulalım.

$\sigma_r(A, c_0) = \sigma_p(A^*, c_0^*) \backslash \sigma_p(A, c_0)$ olduğu için

$A^* \cong A^t$ ve $c_0^* \cong \ell_1$ olduğu için lemma 3.2 den dolayı $\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right)$ i bulalım. Yani A^t nin ℓ_1 de özdeğerlerini bulalım. λ özdeğer olsun. Dolayısıyla $A^t x = \lambda x$ olur ve

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dır.

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 = \lambda x_1 \quad \Rightarrow x_2 = (1-\lambda)\, x_1 \\ &x_2 - x_3 = \lambda x_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = (1-\lambda)^2\, x_1 \\ &x_3 - x_4 = \lambda x_3 \quad \Rightarrow \quad x_4 = (1-\lambda)^3\, x_1 \\ &\vdots \\ &x_{k-1} - x_k = \lambda x_{k-1} \quad \Rightarrow \quad x_k = (1-\lambda)^{k-1}\, x_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

$x_k = (1-\lambda)^{k-1} x_1$ dizisi geometrik dizi, $(x_k) \in \ell_1$ olması $\left((1-\lambda)^k\right) \in \ell_1$ olması demektir. Bunun için, geometrik serinin yakınsama şartından dolayı $|1-\lambda| < 1$ olması gerekir. Dolayısıyla

$$\sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |1-\lambda| < 1\right\}$$

dir.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \sigma_r(A, c_0) &= \sigma_p\left(A^*, c_0^*\right) \setminus \sigma_p(A, c_0) \\ &= \sigma_p\left(A^t, \ell_1\right) \setminus \sigma_p(A, c_0) \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |1-\lambda| < 1\right\} \setminus \varnothing \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |1-\lambda| < 1\right\} \end{aligned}$$

dir.

Son olarak da sürekli spektrum olan $\sigma_c\left(A,c_0\right)$ ı bulalım.

Öncelikli olarak $\lambda=1\in\sigma_r\left(A,c_0\right)$ olduğu için, bu kısımda $\lambda\neq 1$ kabul edebilim.

$\lambda\neq 1$ için

$$A_\lambda^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\lambda)^2} & \frac{1}{1-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\lambda)^3} & \frac{1}{(1-\lambda)^2} & \frac{1}{(1-\lambda)} & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

olduğu için

$$\left\|A_\lambda^{-1}\right\|=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|^k<\infty\Leftrightarrow\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|<1$$

olduğundan dolayı

$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\quad 1<\left|1-\lambda\right|\right\}$ A_λ^{-1} in sürekli olduğu λ lar kümesidir.

$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\quad 1\geq\left|1-\lambda\right|\right\}$ A_λ^{-1} in sürekli olmadığı λ lar kümesidir.

Burada lineer operatörler için sürekliliğin sınırlılığa denk olduğunu kullanılır. Sürekli spektrumu bulmak için, A_λ nın sürekli olmadığı λ lar kümesinden A_λ değer kümesinin yoğun olmadığı ve tersinin olmadığı kümeyi çıkartmak gerekir. Yani

$$\begin{aligned}\sigma_c\left(A,c_o\right)&=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \left|1-\lambda\right|\leq 1\right\}\setminus\left(\sigma_{\mathrm{r}}\left(A,c_o\right)\cup\sigma_p\left(A,c_o\right)\right)\\ &=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \left|1-\lambda\right|\leq 1\right\}\setminus\left(\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \left|1-\lambda\right|<1\right\}\cup\varnothing\right\}\\ &=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \left|1-\lambda\right|=1\right\}\end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla spektrum

$$\sigma\left(A,c_o\right)=\sigma_p\left(A,c_o\right)\cup\sigma_r\left(A,c_o\right)\cup\sigma_c\left(A,c_o\right)$$

olduğu için

$$\begin{aligned}\sigma\left(A,c_o\right)&=\varnothing\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}\quad\left|1-\lambda\right|<1\right\}\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}\quad\left|1-\lambda\right|=1\right\}\\ &=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \left|1-\lambda\right|\leq 1\right\}\end{aligned}$$

dir.

KAYNAKLAR

[1] Goldberg, S. Unbounded lineer operators, Mc Oraw-Hill Book Comp (1966).

[2] Maddox, I. J. Elements of functional analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1970).

[3] Brown, A. L. and Page, E. Elements of functional analysis. Van Nostrand Rein hold Comp (1970).

[4] Wenger, R. B. The fine spectra of Hölder summability operators. Indian J. Pure Appl. Math. 6 (1975), 695-712.

[5] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc, New York, 1978.

[6] Rhoades, B. E. The fine spectra for weighted mean operators. Pacific J. Math. 104 (1) (1983), 219-230.

[7] Gonzales, M. The fine spectrum of the Cesaro operator in $\ell_p (1 < p < \infty)$, Arch. Math. 44 (1985), 355-358.

[8] Reade, J. B. On the spectrum of the Cesaro operator, Bull. Lond. Maht. Soc. 17 (1985), 263-267.

[9] Choudhary, B. S. Nanda, Functional Analysis whit Applications, John Wiley & Sons Inc, New York, Chishester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.

[10] Graham, R. L., Knuth, D. E. O. Patashnik, Concrete mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[11] Okutoyi, J. T. On the spectrum of C_1 as an operator on bv, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 41 (1992), 197-207.

[12] Coşkun, C. The spectra and fine spectra for $p-$Cesaro operators, Turkish J. Math 21 (1997), 2007-212.

[13] Başar, F. and Altay, B. On the space of sequence of $p-$bounded variation and related matrix mappings, Ukrainian Math. J. 55 (1) (2003), 135-147.

[14] Akhmedov, A. M., Başar, F. On spectrum of the Cesaro operators, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 19 (2004), 3-8.

[15] Akhmedov, A. M., Başar, F. On the fine spectrum of the Cesaro operator in c_0, Math. J. Ibaraki Univ. 36 (2004), 25-32.

[16] Altay, B., Başar, F. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c, Int. J. Math. Math. Sci. 18 (2005), 3005-3013.

[17] Furkan, H., Bilgiç, H. and Kayaduman, K. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_1 and bv, Hokkaido Math. J. 35 (2006), 897-908.

[18] Akhmedov, A. M., Başar, F. The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space $bv_p, (1 \leq p < \infty)$, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 23 (2007), 1757-1768.

[19] Bilgiç, H., Furkan, H. On the spectrum of the operator $B(r,s,t)$ over the sequence spaces ℓ_1 and bv, Math. Comput. Modelling 45 (2007), 883-891.

[20] Bilgiç, H., Furkan, H. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_p and bv_p, Nonlinear Anal. 68 (2008), 499-506.

[21] Altun, M., Karakaya, V. Fine spectra of lacunary matrices, J. Commun. Math. Anal 7 (1) (2009), 1-10.

[22] Karakaya, V., Altun, M. Fine spectra of upper triangular double-band matrices, J. Comput. Appl. Math. 234 (2010), 1387-1394.

[23] Imamınezhed, M., Miri, M. R. The dual space of the sequence space $bv_p, (1 \leq p < \infty)$, Acta Math. Univ. Comenian (N.S.) 79 (1) (2010), 143-149.

[24] Karakaya, V., Manafov, M., Şimşek, N. On the fine spectrum of the second order difference operator over the sequence spaces ℓ_p and bv_p, $(1 < p < \infty)$. Mathematical and Computer Modelling, vol. 55, no. 3-4 (2012), 426-431.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif YILDIZ

Doğum Yeri: KOZAN

Doğum Tarihi: 25.03.1984

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Adana Erkek Lisesi (2001)

Lisans : İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (2006)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl
Özel Doruk Okulları (2006-…)