

T.C.  
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEĞİŞKENLER ARASINDAKİ EŞ ZAMANLI DEĞİŞİMİN  
USLAMLANMASI: NİTEL BİR DEĞERLENDİRME

Yasemin DÖNER  
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

ADYAMAN  
2011

## **TEZ ONAYI**

Yrd. Doç. Dr. Önder KÖKLÜ danışmanlığında Yasemin DÖNER tarafından hazırlanan “Değişkenler Arasındaki Eş Zamanlı Değişimin Uslamlanması: Nitel Bir Değerlendirme” adlı tez çalışması 19/ 07/ 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile İlköğretim Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Önder KÖKLÜ

Üye: Doç. Dr. Ramazan GÜRBÜZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN

Yukarıdaki sonucu onaylarım

.....

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN

Enstitü Müdürü

# ÖNSÖZ

Toplumumuzda, günlük hayat problemlerini çözebilen, eleştirel düşünebilen, karar verebilen, iletişim becerileri yüksek ve yaratıcı bireylere ihtiyaç vardır. Bu becerilere sahip bireylerin yetiştirilmesinde en önemli görev eğitim kurumlarına düşmektedir. Dolayısıyla bu genel amaçların gerçekleşebilmesini etkileyen faktörlerden biri öğretmenlerdir. Bu çalışma başarılı bir matematik öğretmen adayının sürekli değişen fonksiyonel durumlarda iki değişkenin eş zamanlı değişimlerini nasıl düşündüğü nasıl yorumladığı ve nasıl çizdiği ile alakalıdır. Burada önemli olan öğrencinin sorulara verdiği cevabın doğru ya da yanlış olmasından ziyade onun düşünce becerilerini anlamaktır. Öğrencinin verdiği cevaplar adım adım tezde yer almıştır. Nitel açıdan bakıldığında öğrencilerin grafiksel yapıdaki becerileri ile literatüre katkıda bulunacaktır. Bu çalışmanın eğitimcilere, müfredat sorumlularına ve akademisyenlere faydalı olacağı inancındayım.

Bu araştırmanın planlanmasında ve yürütülmesinde bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım Yrd. Doç. Dr. Önder KÖKLÜ ve Yrd. Doç Dr. Tayfun SERVİ başta olmak üzere İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim dalındaki tüm öğretim üyelerine saygı ve şükranlarımı sunarım.

Bütün çalışmalarım hep yanımda olan, benden desteklerini hiç esirgemeyen ve aldığı kararların hep arkasında duran aileme, hayatlarını çocuklarının eğitimine adanmış değerli annem Lutfiye DÖNER'e ve sevgili babam Yaşar DÖNER'e minnet ve şükranlarımı sunuyorum.

Yasemin Döner  
Matematik Öğretmeni

## ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**DEĞİŞKENLER ARASINDAKİ EŞ ZAMANLI DEĞİŞİMİN**

**USLAMLANMASI: NİTEL BİR DEĞERLENDİRME**

**Yasemin DÖNER**

**Adıyaman Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**İlköğretim Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç Dr. Önder KÖKLÜ**

**ADİYAMAN 2011(X + 87 sayfa)**

Öğrencilerin “*değişim oranı*” kavramını anlamalarının limit, türev, integral gibi diğer kalkülüs kavramlarını anlamaları üzerindeki etkilerini araştıran birçok çalışma yapılmış olmasına rağmen, öğrencilerin sürekli değişim içeren fonksiyonel ilişkilerde değişkenlerin birbirine göre eşzamanlı değişimlerini nasıl uslamladıkları konusunda yeteri kadar bilgi yoktur. Bu çalışmanın amacı, başarılı bir matematik öğretmen adayının kovaryasyonel usamlama yeteneklerinin bir özel durum çalışması ile tanımlanması, açıklanması ve analiz edilmesidir. Bu araştırma çalışmasında bir nitel araştırma yöntemi olan özel durum çalışması, analiz teknikleri kullanılarak öğrencinin düşünme süreci ve bu süreç içerisindeki usamlaması hakkında detaylı ve derinlikli bir açıklama getirilmiştir. Veriler bir ay boyunca bir matematik öğretmen adayı ile yapılan yüz yüze görüşmelerden elde edilmiştir. Değişim fonksiyonların doğasında olduğundan bu çalışmada öğretmen adayına fonksiyonel olaylarla ilgili 15 soru sorulmuştur. Elde edilen verilerin analizinde, Carlson(2002) tarafından tanımlanmış ve yapılandırılmış zihinsel aktivitelerin bütün kategorileri kullanılmış ve bulgular ve yorum kısmında açıklanmıştır. Çalışmanın sonucu olarak, verilen bir fonksiyonel durumun statik olarak kavranması bir tanım kümesi boyunca sürekli değişen “*değişim oranı*”nın algılanmasında zorluklara neden olduğu bulgusuna ulaşılmıştır. Bu çalışma, eğitimcilere ve müfredat sorumlularına fonksiyon yapısının bazı bölümlerinin erken sınıflarda değişimi tanımlama özelliği ile öğretilmesi bir fikir olarak verilebilir. Bu tür bir öğretim öğrencilerde ezberleme yerine kavramsal

anlamayı geliştirecek ve böylece öğrencilerin fonksiyonların günlük hayatta kullanım alanlarını anlamalarına ve gerçek olaylarla ilişkilendirmelerine daha fazla katkı sağlayacaktır.

*Anahtar Kelimeler:* Kovaryasyonel uslamlama, değişim, eşzamanlı değişim, dinamik olay.

## **ABSTRACT**

**Master Thesis**

### **REASONING ON SIMULTANEOUS CHANGES OF VARIABLES: A QUALITATIVE STUDY**

**Yasemin DÖNER**

**University of Adıyaman**

**Institute of Science**

**Department of Primary School Teaching**

**Advisor: Assist. Prof. Önder KÖKLÜ**

**ADİYAMAN 2011(X + 87 pages)**

Despite variety of research studies that emphasized the effects of students' understanding of rate of change on students' understanding in calculus concepts such as limit, derivative, integrals, there is little information about how college students' reason about continuously changing functional relationships. Aim of this study is to explore, describe and analyze the high performing prospective mathematics teachers' covariational reasoning abilities. Case study design and techniques were used in this study to provide a thick description about thinking and reasoning processes in order to understand covariational reasoning comprehensively. Data were obtained from a detailed examination of a prospective mathematics teacher's thinking and reasoning processes through the task based in-depth clinical interviews. 15 open ended questions were asked to student in this study. Data obtained from student's verbal expressions and graphical representations were analyzed in light of the theoretical lens developed by Carlson (2002). Analysis of data disclosed that conceiving of a functional situation statically leads to difficulties in coordinating the continuously changing rate of change over entire domain. This

study suggests educators and curriculum developers to introduce functions by focusing on features of defining change in earlier grades. Thus students may develop conceptual understanding rather than memorizing rules and formulas and they may also relate functions with real world situations.

*Keywords:* Covariational reasoning, change, simultaneous changes, dynamic events.

# İçindekiler

TEZ ONAYI .....	ii
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	vi
<b>BÖLÜM I.....</b>	<b>1</b>
<b>1.GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1 EŞZAMANLI DEĞİŞİMİN USLAMLANMASI VE GRAFİKSEL YAPI.....	2
1.2 TEORİK ÇERÇEVE .....	3
1.3 PROBLEM DURUMU .....	5
1.5 ÇALIŞMANIN ÖNEMİ.....	6
<b>BÖLÜM II .....</b>	<b>8</b>
<b>2. LİTARETÜR VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....</b>	<b>8</b>
2.1. DEĞİŞİM ORANI.....	9
2.2. DEĞİŞİM ORANININ ÜÇ YÖNÜ .....	11
2.3. ORANIN HAYALİ VE EŞZAMANLI DEĞİŞİMİN HAYALİ .....	12
2.4. FONKSİYON VE FONKSİYONUN TÜREVİ ARASINDAKİ İLİŞKİ .....	15
2.5. STATİK SÜRECE KARŞI DİNAMİK FONKSİYON YAPISI .....	16
2.5.1. <i>Fonksiyonun Doğasındaki Değişim</i> .....	17
2.5.2. <i>Fonksiyonun Eyleme Karşı Süreç Durumu</i> .....	17
2.5.3. <i>Değişkenler Arasındaki Eş Zamanlı Değişim Yaklaşımı</i> .....	19
2.5.4. <i>Fonksiyonlarda Point-wise(noktasal bakış)' a Karşı Across-time ( süreci düşünme )Yaklaşımı</i> .....	20
2.6. DEĞİŞİMİN USLAMLANMASI.....	22
2.6.1. <i>3 Tip Uslamlama</i> .....	22
2.6.2. <i>Değişkenler Arasında Eş Zamanlı Değişimin Uslamlanması</i> .....	22
<b>BÖLÜM III.....</b>	<b>26</b>
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM .....</b>	<b>26</b>
3.1 YÖNTEM.....	26
3.2 ARAŞTIRMA PROSEDÜRLERİ .....	28
3.3. VERİ TOPLAMA .....	29
3.3.1. <i>Klinik Görüşmeler</i> .....	29
3.3.2. <i>Görüşme İçeriği</i> .....	29
3.4. VERİ ANALİZİ.....	30
<b>BÖLÜM IV .....</b>	<b>32</b>
<b>4. VERİ ANALİZİ, BULGULAR VE YORUM .....</b>	<b>32</b>
4.1. SELİNİN DURUMU.....	32
4.1.1. <i>Giriş</i> .....	32
4.1.2. <i>Özel Durum Çalışmasının Analizi</i> .....	37
4.2.BULGULAR VE YORUM .....	75
<b>BÖLÜM V.....</b>	<b>79</b>
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>79</b>
5.1. SONUÇ .....	79
5.2. ÖNERİLER.....	79
<b>GÖRÜŞME SORULARI .....</b>	<b>81</b>
<b>6. KAYNAKÇA .....</b>	<b>84</b>



## Şekiller Listesi

Şekil 2.1. Geometri Sketchpad simülasyonu ile bir arabanın hareketi .....	13
Şekil 2.2. Geometri Sketchpad simülasyonu ile bir arabanın hareketi .....	14
Şekil 2.3. Carlson'ın örnek sorusu .....	23
Şekil 4.1. Selin'in verdiği sembolik fonksiyon örnekleri .....	33
Şekil 4.2. Selin'e gösterilen ilk grafik.....	34
Şekil 4.3. Selin'in Venn şeması gösterimi .....	34
Şekil 4.4. Selin'e gösterilen ikinci grafik.....	35
Şekil 4.5. Selin'e gösterilen üçüncü grafik .....	36
Şekil 4.6. Selin'e gösterilen 4. grafik.....	36
Şekil 4.7. Soru 1 .....	38
Şekil 4.8. Selin'in 1. soru için çizdiği ilk grafik .....	38
Şekil 4.9. Selin'in 1. soru için çizdiği 2. grafik .....	39
Şekil 4.10. Selin'in 1. soru için çizdiği 3. grafik .....	40
Şekil 4.11. Soru 2 .....	42
Şekil 4.12. Selin'in 2. soru için çizdiği grafik .....	43
Şekil 4.13. Soru 3 .....	43
Şekil 4.14. Selin'in 3. soru için çizdiği grafik .....	44
Şekil 4.15. Soru 4 .....	46
Şekil 4.16. Selin'in 4. soru için çizdiği grafik .....	47
Şekil 4.17. Soru 5 .....	48
Şekil 4.18. Selin'in 5. soru için çizdiği ilk grafik .....	49
Şekil 4.19. Selin'in 5. soru için çizdiği 2. grafik .....	49
Şekil 4.20. Selin'in 5. soru için çizdiği 3. grafik .....	50
Şekil 4.21. Selin'in “ $y$ $x$ 'in bir fonksiyonu ya da $t$ $k$ 'nın bir fonksiyonu” ifadelerinin sembolik gösterimi .....	51
Şekil 4.22. Soru 6 .....	52
Şekil 4.23. Selin'in 6. soru için çizdiği 1. grafik .....	53
Şekil 4.24. Selin'in 6. soru için çizdiği 2. grafik .....	54
Şekil 4.25. Selin'in 6. soru için çizdiği 3. grafik .....	55
Şekil 4.26. Soru 7 .....	56
Şekil 4.27. Selin'in 7. soru için çizdiği 1. grafik .....	56

Şekil 4.28. Soru 8 .....	57
Şekil 4.29. Selin'in 8. soru için çizdiği grafik .....	58
Şekil 4.30. Soru 9 .....	58
Şekil 4.31. Selin'in 9. sorunun (a) bölümü için çizdiği grafik.....	59
Şekil 4.32. Selin'in 9. sorunun (b) bölümü için çizdiği grafik.....	59
Şekil 4.33. Selin'in 9. sorunun (a) bölümü için çizdiği 2. grafik.....	61
Şekil 4.34. Soru 10 .....	62
Şekil 4.35. Selin'in 10. soru için çizdiği grafik.....	63
Şekil 4.36. Soru 11 .....	64
Şekil 4.37. Selin'in merdivenin düşüşü olayında zihinsel olarak görüntülediği şekil. .....	64
Şekil 4.38. Selin'in 11. soru için çizdiği 1. grafik.....	65
Şekil 4.39. Selin'in 11. soru için çizdiği 2. grafik.....	65
Şekil 4.40. Soru 12 .....	66
Şekil 4.41. Selin'in 12. soru için çizdiği grafik.....	67
Şekil 4.42. Soru 13 .....	67
Şekil 4.43. Selin'in 13. soru için çizdiği grafik.....	68
Şekil 4.44. 13. soru ile ilgili olarak Selin'e araştırmacı tarafından gösterilen grafik	69
Şekil 4.45. Soru 14 .....	70
Şekil 4.46. Selin'in 14. soru için çizdiği 1. grafik.....	71
Şekil 4.47. Selin'in 14. soru için çizdiği 2. grafik.....	71
Şekil 4.48. Selin'in 14. soru için çizdiği 3. grafik.....	73
Şekil 4.49. Soru 15 .....	73
Şekil 4.50. Selin'in 15. soru için çizdiği 1. grafik.....	74
Şekil 4.51. Selin'in 15. soru için çizdiği 2. grafik.....	74

# BÖLÜM I

## 1.GİRİŞ

Değişim fikri, hem nasıl değiştiği hem de ne oranda değiştiği ile alakalı olarak matematiğin temel çalışma alanlarından biridir. Değişim matematikte, fende (fizik, kimya, biyoloji), mühendislikte ve diğer birçok mesleklerde gerekli bir yapıdır (Carlson, Larson ve Jakobs, 2001; Saldanha ve Thompson, 1998; Noble, Nomirovsky, Wright ve Tierney, 2001). Değişim iki sayısal değişkenin birbiriyle eş zamanlı koordinasyonu olarak açıklanmış (Carlson, Jacobs, Larsen ve Hsu, 2002) , iki sayısal değerın eş zamanlı hayali olarak tanımlanmıştır (Saldanha ve Thompson, 1998).

Matematikte limit, türev, integral gibi konuları öğrenebilmek için öncelikle ana yapıyı yani değişim oranı kavramının anlaşılması gerekir. Fonksiyonların doğasında değişim olduğundan dinamik fonksiyonel durumları kullanarak eş zamanlı değişimin yorumlanması sağlanmıştır (Carlson ve Oehrtman, 2005; Kaput, 1992; Thompson ,1994a). Böylece sürekli değişen dinamik olayların analizinin yapılması ile değişim oranı yapısı daha anlaşılır hale gelmiştir (Carlson, 2001; Monk, 1992). Örneğin öğrenciler zamana göre hızın nasıl değiştiğini, suyun yüksekliği ile hacmi arasında ilişkinin nasıl olduğunu keşfetmeye başladığı anda bir değişkenin diğer değişkenler içerisinde nasıl değiştiğini hayal etmeye ihtiyaç duymuşlardır. Bu hayal sırasında öğrenciler zorlanmışlardır çünkü her girdi değeri için özel yapılar yerine, eş zamanlı şekilde birkaç girdi ve çıktı değeri hayal ederek tüm süreci bütün halde görmek gerekir. Bu durum ne kadar hızlı düşünülürse o kadar çabuk hayal edilir. Tüm süreci hayal etme becerisi öğrencilerin fonksiyon bilgisine bağlıdır (Carlson ve Oehrtman, 2005; Thompson, 1994b; Monk ve Nemirovsky, 1994).

Çalışmalar ( Carlson ve Oehrtman,2005 ; Monk,1992 ; Monk ve Nemirovsky, 1994 ; Thompson, 1994b) öğrencilerin güçlü alt yapıya sahip olmalarının önemini belirtmiştir. Monk (1992), araştırmalarının sonucunda öğrencileri sahip olduğu fonksiyon bilgilerine göre pointwise (noktasal bakış) ve acrosstime (süreci düşünme) olmak üzere iki gruba ayırmıştır. Grafiği verilen dinamik fonksiyonel durumu hayal edemeyen ve çizim yapmakta zorlanan öğrencileri pointwise, durumu hayal edip

yorum yapan ve eksenleri x ve y diye isimlendirerek grafiği tamamlayan öğrencileri acrosstime grubuna koymuştur. Üniversite öğrencilerinin sahip oldukları fonksiyon yapısını anlamak için pek çok araştırmacı (Breidenbach ,Dubisky,Hawks ve Nichols,1992; Dubisky ve Harel,1992; Monk,1992;Thompson,1994b) tarafından bu durum araştırılmıştır.Üniversite öğrencileri üzerinde yapılan araştırmaya göre öğrenciler fonksiyon yapısını ya hiç bilmiyorlar ya da çok az biliyorlar. Öğrencilerin çoğu başarılı olmalarına rağmen, fonksiyon bilgi ve becerileri oldukça zayıftır. Bundan dolayı öğrenciler iki değişkenli eş zamanlı fonksiyon değişimlerini koordine etmekte ve hayal etmekte zorlanıyorlar (Breidenback, 1992; Carlson, 1998; Karput, 1992; Monk, 1992).

Öğrenciler özellikle fonksiyonların doğasındaki değişimleri ve değişkenlerin değişim yapısı arasındaki ilişkiyi anlamakta zorlanmışlardır (Karput ,1994; Orthon, 1983; Thompson, 1994b; Confrey ve Smith, 1995). Müfredatta öğretilen fonksiyon bilgileri, formüle bağlıdır çünkü öğrenci çıktı değerini tanımlayabilmek için ancak girdi değerini formül ve kurallara bağlı olarak kullanıyordu. Grafiği ancak fonksiyonun kuralını kullanarak sayısal değerler vererek çizebiliyordu. Süreci bütün görmek, girdi ve çıktı değerler arasındaki uyumu sağlamak için eş zamanlı değişim yaklaşımı gerekiyordu. Bundan dolayı araştırmacılar (Confrey ve Smith, 1994) değişim oranı yapısının daha düzgün bir şekilde öğrencilerde oturması için, erken yaşlarda ayrıntılı olarak eş zamanlı değişim yaklaşımını kullanılarak fonksiyon kavramının öğretilmesi gerektiğini vurgulamışlar.

2000 yılında NCTM, okuldaki matematik eğitimi için standartları ve prensipleri yayımladı. Bu prensipler içerisinde geometri müfredatında bulunan fonksiyon yapısının kapsamının önemi vurgulanmıştır. Bu sayede öğrenciler, ‘enflasyon oranının azalışı’ hakkında yorum yapabilecek gerçek dünya yapısında çeşitli değişimleri analiz edebilecektir (NCTM, 2000 s.305).

### ***1.1 Eşzamanlı Değişimin Uslamlanması ve Grafiksel Yapı***

Fonksiyon sayısal değerler arasındaki ilişkiyi temsil eder. Bu değişkenler arasındaki ilişki farklı sistemleri yani grafikleri, değerler tablosunu belirtir. Çünkü bu çalışmada, öğrenci becerilerinin nedenleri, değişkenlerin değişim koordinasyonu, grafiklerin temsil edilmesi, dinamiksel olaylardaki değişkenlerin eş zamanlı değişimlerinin yorumlanması ve temsil edilmesinde önemli bir rol oynar.

Fonksiyonları en fazla temsil etmede grafikler kullanılır. Grafikler artış, azalış, maksimum, minimum ve kesim noktalarıyla pek çok yararlı bilgiler verirler (Selden,1992, s.3)

Fonksiyonel ilişkinin grafiksel yapısının öğretilmesi oldukça zor bir süreçtir. Dinamiksel fonksiyon grafikleri öğrenciler tarafından girdi ve çıktı değişimleri olarak yorumlanır. Dinamik olayların grafikte gösterilmesi bize değişkenlerin ilişkisini daha iyi anlatır. Böylece bu gösterilen durum yorumlanabilecektir (Leinhard, Zavlavsky and Stein, 1990; O'Callahan,1998).

Grafiğin yorumlanması grafik yapısının diğer önemli bir yönüdür Öğrenci x ve y değişimlerinin birbirlerini nasıl etkilediklerini düşünürken, çizeceği şekli oluşturmak için kafasında pek çok sorulara cevap arar (eğri artıyor mu, azalıyor mu, grafik üzerinde alınan bir noktada değişimin anlamı ne?). Öğrenciler bu cevaplara göre karar vermeye çalışırlar (Carlson, 2002; Leinhard, Zavlavsky ve Stein ,1990).

Araştırma çalışmaları (Monk ,1992; Monk ve Nemirovsky, 1994; Thompson 1994b), üniversite öğrencilerinin dinamiksel fonksiyonel durumları yorumlamakta zorlandıklarını, lise öğrencilerinin ise çoğu diğer değişkenler ile bir değişken arasındaki ilişkiyi modellemede zorlandıklarını göstermiştir (Carlson et al,2002; Hauger,1998; Monk,1992; Thompson,1994a).

Araştırma kayıtları çoğu kez şu şekilde sonuçlanmıştır.

- a) Öğrenciler dinamik fonksiyonları grafiksel yapıda göstermekte ya da verilen dinamik durumların grafiğini çizmekte zorlanıyorlar.
- b) Grafiksel yapıda verilen dinamik fonksiyonları yorumlamakta zorlanıyorlar. Değişkenin yönü, değişim miktarı, maksimum ve minimum noktaları ve kıvrım noktalarını açıklamakta zorluklar yaşıyorlar.

## **1.2 Teorik Çerçeve**

Bu çalışmada teorik çerçeve olarak Marilyn P.Carlson'un çalışması kullanılacaktır. Carlson(1998), dinamik fonksiyonel olayların temsil edilmesi ve yorumlanmasıyla ilgili yaptığı araştırmalarda, zihinsel aktiviteler ve ilgili davranışları sınıflandırmış ve tanımlamıştır. Dinamiksel fonksiyonel olayların eş

zamanlı değişimin usamlanmasını açıklamada ve analiz etmede bu beş zihinsel aktivite yardımcı olacaktır (Carlson, 2002).

Aşağıdaki tabloda beş zihinsel beceriler verilmiştir.

**Tablo1.1.** Zihinsel aktiviteler ve ilgili davranışlar

Zihinsel Aktivite	Zihinsel Aktivitenin Tanımı	Davranışlar
Zihinsel Aktivite 1	Bir değişkenin diğer değişkene göre değişiminin fark edilmesi.	İki değişkeni kullanarak eksenleri isimlendirir. (örneğin x değişimi ile y değişimi)
Zihinsel Aktivite 2	Değişim yönünün belirlenmesi.	Artan veya azalan düz doğrular oluşturur. Sözel ifadelerinde bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre arttığı veya azaldığını ifade eder.
Zihinsel Aktivite 3	Değişim miktarının belirlenmesi	Noktalı çizimler veya kıvrımlı çizgiler kullanır. Sözel ifadelerinde Ne oranda değiştiğini belirtir. Örneğin; Artışın artarak mı arttığını azalarak mı arttığını belirler.
Zihinsel Aktivite 4	Fonksiyonda ki değişim oranının koordine edilmesi.	Kıvrımlı çizgiler oluşturur. Sözel ifadelerinde girdi değerindeki değişimin çıktı değerindeki değişime oranından bahseder. Öğrenci eğimden bahseder.
Zihinsel Aktivite 5	Fonksiyonda ki ani değişimin koordine edilmesi.	Grafığı pürüzsüz bir şekilde çizer.

		Sözel ifadelerinde değişim oranını belirlerken dönüm noktaları, anlık değişimleri ve fonksiyonun tüm etki alanının kontrolüne sahiptir.
--	--	---

Yaptığım görüşmede öğrencimin verdiği cevapları bu beş zihinsel aktiviteyi kullanarak analiz ettim.

### **1.3 Problem Durumu**

Değişim oranı yapısı, araştırma çalışmaları tarafından önemli temel oluşturan bir durumdur (Carlson, Larsen, ve Jacobs,2001; Saldanha ve Thompson, 1998; Noble,Nemirowsky, Wright, ve Tierney, 2001;Orton,1983; Hauger 1997; White ve Mitchelmore,1996). Öğrenciler fonksiyonları çok iyi öğrenemedikleri zaman limit ve türev konularını anlamakta zorlanmışlardır.

Araştırma sonuçlarına göre öğrenciler fonksiyon yapısını ya biraz biliyorlar, ya da hiç bilmiyorlar (Breidenback et al, 1992; Carlson, 1998). Bundan dolayı öğrenciler sürekli değişen dinamik fonksiyonların iki değişkenli eş zamanlı değişimlerini anlamakta zorlanmışlardır (Kaput, 1992; Monk, 1992; Carlson , 1998). Yüksek performans gösteren öğrenciler dahi bir değişkenin diğer değişkenler içerisinde eş zamanlı değişimini hayal etmekte zorlanmışlardır (Carlson ; 1998).

Araştırmalarda üniversite öğrencileri dinamiksel fonksiyonel durumların grafiğini çizmede ve yorumlama zorluklar yaşamaktadırlar (Carlson et al, 2002; Monk, 1992). Rutin sorularda performansları iyi olmasına rağmen, rutin olmayan problemler sorulduğu zaman performansları oldukça zayıftır. Bu gösteriyor ki yüksek performans gösteren üniversite öğrencileri, rutin olmayan dinamik olayları modellemede ve dinamik olaylarının modellerini yorumlamada zorlanmışlardır.

Yapılan çalışmalar sonucu (Thompson, 1994a; Orthon, 1983;White ve Mitchelmore, 1996), öğrencilerde değişim oranı yapısının anlaşılması limit, türev,

integral gibi konuları anlamayı kolaylaştırmıştır. Böylece sürekli değişen fonksiyonel ilişki hakkında öğrenci davranışları üzerine küçük de olsa bilgi verir.

Bu araştırmanın temel problemi; sürekli değişen fonksiyonel durumların iki değişkenli eş zamanlı değişimlerini, üniversite öğrencilerinin nasıl koordine ettiği, nasıl düşündüğü, nasıl yorumladığı ve nasıl çizdiği ile ilgilidir. Bu araştırmanın alt problemleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

- a) Matematik öğretmen adayları, fonksiyonları nasıl yorumluyor?
- b) Matematik öğretmen adayları, iki değişkenli fonksiyonel durumların eş zamanlı değişimini nasıl yorumluyor?
- c) Matematik öğretmen adayları, iki değişkenli fonksiyonel durumları grafiksel yapıda nasıl gösteriyor?

### **1.4 Çalışmanın Amacı**

Bu çalışmanın amacı; başarılı bir matematik öğretmen adayının kovaryasyonel uslamlama yeteneklerinin bir özel durum çalışması ile tanımlanması, açıklanması ve analiz edilmesidir. Özellikle bu çalışma üniversite öğrencilerinin bir fonksiyon durumunu nasıl anladıkları, nasıl yorumladıkları ve bu yorumları grafiği çizerek nasıl kullandıkları hakkında bilgi verecektir. Böylece öğrencilerin fonksiyonel olayların grafik eğrilerini nasıl yorumladıklarını ve bu becerileri nasıl kullandıklarını ve nerede hata yaptıklarını anlayabileceğiz. Önemli olan öğrencilerin, dinamik fonksiyonel olayların sürekli değişimini hayal etmesi ve iki değişkenin eş zamanlı değişimini koordineli bir şekilde bulmasıdır. Bu çalışma üniversite 3. sınıfta okuyan öğrencilerin kovaryasyonel uslamlamaları hakkında bilgi verecektir.

### **1.5 Çalışmanın Önemi**

Değişim oranı hakkında geniş bir araştırma yapılmasına rağmen, öğrencilerin dinamik fonksiyonel olayların sürekli değişimi hakkında ne gibi yorumlar yaptığı ve nasıl anladığına dair belirgin araştırmalar yoktur (Hauger,1998). Yani öğrencilerin eş zamanlı değişimin uslamlanması hakkında çok az bilgi biliyoruz.



Literatürde; grafik öğretiminde erken sınıflarda, nicel bakıştan ziyade nitel yöntemin kullanılması daha avantajlıdır (Leinhardt, Zaslavsky ve Stein, 1990). Yani öğrencilere ya sembolik durum verilerek grafik yapıları sorulur ya da bir durum verilerek sayısal değerlerle grafiği çizmeleri istenir. Bu yaklaşım öğrencilerin becerilerini ve akıllarında tam olarak neyin olduğunu anlamak için yeterli değildir. Bu çalışma nitel açıdan bakarak öğrencilerin grafiksel yapıdaki eş zamanlı değişimin uslanmasını çeşitli sorularla belirleyip, literatüre katkıda bulunacaktır.

Dahası; öğrencilerin eş zamanlı değişimin uslanması gelişimi için değişim ve sürekli değişim kavramları hakkında alternatif yollarla öğretim yapılmalıdır. Yürütülen bu çalışma ile eş zamanlı değişim yaklaşımının eğitim-öğretim sürecine dahil edilmesinin ve bu süreçteki yansımaların tanımlanmasının oldukça önemli olduğu düşünülmektedir. Ayrıca bu çalışmayla hem akademisyenlere hem öğretmenlere hem de program geliştirme uzmanlarına matematiği günlük hayatla ilişkilendirme ve düşüncenin temeline inme hususlarında yararlı bilgiler sağlayacağına inanılmaktadır.

Daha ilerisi için, eğitimciler ve müfredat sorumlulara fonksiyon yapısının bazı bölümlerinin erken sınıflarda öğrencilere öğretilmesi için eş zamanlı değişim kabiliyetlerinin kullanılması bir fikir olarak verilebilir.

### **Araştırmanın Sınırlılıkları**

Araştırma 2010 yılında araştırmaya katılan bir üniversite öğrencisinin görüşleri, sorulara verdiği yazısal cevapları, ses kayıt cihazı ve araştırmacının yorumları ile sınırlıdır.

Bu araştırma, ilköğretim matematik öğretmenliği başarılı bir 3. sınıf öğrencisi ile yapılan özel durum çalışmasıdır. Bu nedenle sonuçların genellenmesi amaçlanmamaktadır. Araştırma, araştırmacının öğrenciyle bir ay boyunca derinlemesine yapılan yüz yüze 5 görüşme ile sınırlıdır.

## BÖLÜM II

### 2. LİTARETÜR VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Değişim oranının anlaşılması üzerine literatürde, pek çok çalışma (Carlson, Larsen&Jacobs, 2001; Saldhana&Thompson, 1998; Noble, Nemirovsky, Wright&Tierney, 2001; Hauger,1995; Hauger 1997; Orthon, 1983 ve Thompson, 1994a), yapılmasına rağmen öğrenci davranışlarının nedenleri hakkında yapılan araştırmalar oldukça sınırlıdır. Bu bölümde öğrencilerle ilgili geçmişte yapılan araştırmalarda değişimin anlaşılması ve düşünülmesini farklı açılardan ele alacağız.

Yapılan ilk araştırma çalışması öğrencilerin değişim oranını anlaması üzerinedir. Orthon(1983) ve Thompson(1994a) yaptıkları çalışma sonucunda öğrencilerin matematik yapısını anlaması için değişim oranını iyi bilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Hauger, araştırmalarında öğrencilerinin değişim oranını anlamasını üç yönden ele almıştır.

İkinci araştırma, oranın ve eş zamanlı değişim hayalinin gelişimini sağlamak üzerindedir. Bu bölümde Thompson'un çalışmaları, öğrencilerin eş zamanlı değişim ve oranın hayalini nasıl geliştirdiğini ana kaynaklarla açıklıyor.

Üçüncü çalışma öğrenciler hakkında geçmişte yapılan fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkinin anlaşılması ile ilgilidir. Bu araştırma okuyucuya, öğrencilerin fonksiyonlar ve fonksiyonların türevi arasındaki ilişkiyi kurarken değişimleri nasıl kullanacağı hakkında yararlı bilgiler verir.

Dördüncüsü; fonksiyonların dinamik yapıları hakkındadır. Sierpinska tarafından fonksiyonların değişim dünyası incelenmiştir. Carlson ve Oehrtman, fonksiyon eyleminin gözlenebilmesi için statik fonksiyondan dinamik fonksiyonun daha gerekli olduğunu vurgulamışlardır. Dubisky ve Harel çalışmalarında fonksiyonlarda süreci ve eylemi gözlemleyebilmek için detaylı bilgi vermişlerdir. Monk çalışmalarında öğrencileri sahip oldukları fonksiyon bilgisine göre, point-wise (noktasal bakış) ve across-time (süreci düşünmek) olarak 2 kısma ayırmıştır. Monk, araştırmalarını öğrencilerin oranı anlayabilmeleri ve fonksiyon yapısını kurabilmeleri üzerine yapmıştır. Confrey ve Smith çalışmalarında fonksiyon kavramını uygulama

ve değişkenler arasındaki eş zamanlı değişim yaklaşımını göz önüne alarak öğrencileri problemlerdeki değişim oranını çözebilmelerine göre sınıflandırmıştır.

Son olarak Hauger, değişim oranının üç tip usamlanması üzerinde durmuştur. Carlson ve arkadaşları eş zamanlı değişim usamlanması üzerine birkaç araştırma yapmışlardır. Temel olarak dinamik olaylar içerisindeki iki değişkenli değişimleri öğrencilerin nasıl koordine ettiklerini araştırılmıştır.

Şimdi bunları başlıklar altında ayrıntılı olarak görelim.

## **2.1. Değişim Oranı**

Değişim oranı yapısı hakkında pek çok araştırma çalışması (Carlson, Larsen&Jacobs,2001;Saldhana&Thompson,1998;Noble,Nemirovsky,Wright&Tierney, 2001; Hauger,1995; Hauger 1997) bilgi verir. Değişim oranı, matematiğin ana yapılarından biridir. Örneğin limit, türev ve integral tanımında bu yapı kullanılır. Noh'a göre (2004) ,değişim oranı yapısının anlaşılması matematik ve fizik çalışmaları için özellikle gerekli bir durumdur.

Orthon (1983), matematik çalışmalarında değişim oranı yapısının anlaşılmasının önemini vurgulamıştır. Orthon öğrencilerin integrali anlaması üzerine araştırmalar yapmıştır. Bir araştırmasında öğrencilerin matematik yapısını anlamakta zorlandığı gibi integral yapısını da anlamakta zorlandığını, bundan dolayı öncelikle değişim oranı yapısının öğrencilere öğretilmesi gerektiğini açıklamıştır. Orthon'a göre öğrencilerde değişim oranı kavramı çok zayıf olduğu için grafikteki eğrilere bakarak yorumlama güçleri, oran kavramı ve mantıklı düşünebilme yetenekleri oldukça eksiktir. Bundan dolayı Orthon öğrencilere matematiğin yapısı öğretilmeden uzun bir süre önce erken yaşlarda bu değişim oranı yapısı öğretilmelidir diye önermiştir.

Thompson'a göre (1994a), değişim oranı yapısı matematiğin ana teoremlerinden biridir. Thompson'un aynı çalışması Swokowski'nin(1991) açıklamalarında da matematiğin ana teoremi şeklinde geçiyor. Şöyleki ;

$f$  fonksiyonu sürekli ve  $[a,b]$  kapalı aralıkta sınırlı

Bölüm I,  $G$  fonksiyonun türevi şu şekilde tanımlanır.

$$G(x) = \int f(t).dt$$

Her  $x$   $[a,b]$  aralığındadır. Bundan dolayı  $f$ 'nin  $[a,b]$  antitürevi  $G$  'dir.

Bölüm II Eğer  $f$ ,  $[a,b]$  aralığında herhangi antitürevi  $F$  ise;

$$\int f(x).d(x) = F(b) - F(a)$$

Bundan dolayı Thompson (1994a) , 'Matematiğin temel teoreminin anlaşılması için değişim oranı yapısı önemlidir.' demiştir. Bundan dolayı Thompson bu çalışmada birkaç örnek vermiştir. İlk örnek; farzedelim ki sen bir araba kullanıyorsun  $x$  mil ve 0,0001 saniyede hızın 93 km/saat nasıl araba kullandığına aldırmadan 0,0001 saniyede senin bütün aldığın yoldaki ortalama hız değişimi 93 km/saat dir. Eğer her bir geçen zaman periyodunu hayal edebiliyorsan ortalama hızda arabayı kullanırsın. Eğer ortalama hızlarının her biri bilinirse her bir geçen zaman anında, alınan yollarla tekrar bağlantı kurabilirsin. Bundan dolayı zamanın her bir periyodundaki hız için analitik bir açıklama yaparsak, yol fonksiyonunu tanımlamamız lazım. Bu metot sadece hız ve yol için değil aynı zamanda herhangi bir miktar yapısını hesaplamada kullanılır (s10).

Aynı çalışmayı, Thompson üniversite ve lise öğrencileri üzerinde araştırdı. Thompson değişik fonksiyonlarda ortalama hızı yorumlarken öğrencilerin zorlandığını belirtti. İlk, Thompson öğrencilerini  $X(t) = v(t+0.1) - v(t) / 0.1$  fonksiyonunu verdi.  $v(t)$ , bir sıcak kaynağın tekrar taşmasından sonra  $t$  saatte soğuyan bir objenin metre küpü hacimidir.

Thompson öğrencilere  $X(t)$  nedir diye sordu. 19 öğrenciden 4 tanesi hacim değişiminin ortalamasıdır diye belirtmişler. Öğrencilerin çoğu  $X(t)$ 'nin birimi hakkında bir yorum getiremediler. 19 öğrenciden sadece 7'si birim saat başına düşen metreküp demiştir. Thompson'un da dediği gibi öğrenciler fonksiyonları yorumlarken zorluklar yaşıyorlar. Benzer bir şekilde Thompson öğrencilerin yorumlama güçlerini ölçebilmek için başka bir fonksiyon soruyor.

$$r(x) = d(x+0.1) + dx / 0.1 ,$$

$d(x) = 16x^2$  kabul ettiğimizde serbest bırakılan bir nesnenin  $t$  saniye sonra düşmesidir.

Thompson  $r(x)$ 'i yorumlamalarını istemiştir. Öğrencilerin çoğu  $r(x)$ 'i bir saniyenin onunda düşen objenin hız miktarı olarak yorumlamışlar. Thompson'a göre öğrenciler

bu fonksiyonları hayal etmekte zorlandılar ve öğrenciler değişim oranı, değişim oranının ortalaması kavramları hakkında oldukça zayıf bilgileri olduğu belirli bir şekilde tespit edildi.

## **2.2. Değişim Oranının Üç Yönü**

Garnet Hauger, öğrencilerin değişim oranı yapısını anlayabilmeleri üzerine birkaç araştırma çalışması (1994,1995 ve 1999) yapmıştır. Bu çalışmalarında Hauger değişim oranı yapısının anlaşılması için öğrencileri 3 kategoride sınav yapmıştır. a) öğrencilerin grafiğin tüm şeklini yorumlaması. b) öğrencilerin ortalama hızı anlaması c) öğrencilerin ani hızı anlaması.

Hauger(1994), öğrencilerin grafiği yorumlama bilgilerini anlayabilmek için öğrencilere değişen zamana göre maya hücrelerinin sayısı ile ilgili bir grafik sundu. Öğrencilerden bu grafiği yorumlamalarını istedi. Öğrencilerin bazıları grafiği 3 parçaya böldü. Diğer öğrenciler, çekim noktasında grafiği 2 parçaya böldü. Grafiği 3 parçaya bölenler çekim noktası ve büküklüğü göremediler. Grafiği 2 parçaya bölenler çekim noktası ve büküklüğe karmaşık cevap verdiler. Hauger'a göre bazı öğrenciler eğri kavramını bildikleri için çekim noktası, iç bükük ve dış bükük kavramlarını doğru kullandılar.

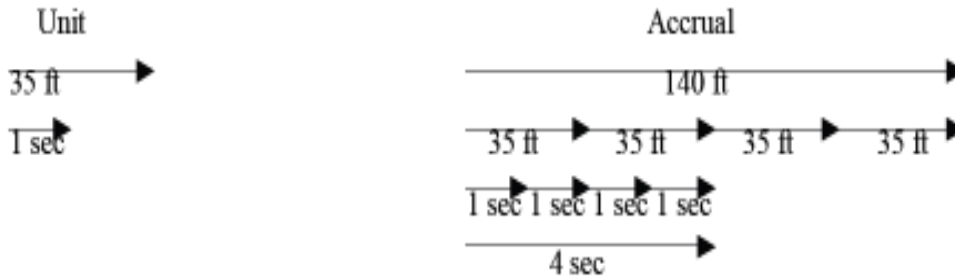
Öğrencilerin değişimin ortalama hızı hakkındaki bilgilerini anlayabilmek için; Hauger( 1995), öğrencilere hangi maya hücrelerinin sayısı hızlıca değişiyor, hangi maya hücrelerinin sayısı yavaşça değişiyor diye sordu. Öğrencilerinin yanıtlarını izledikten sonra yavaş ve hızlı büyüme ile ilgili öğrencilerin farklı açıklamalarını gördü. Bazı öğrenciler grafiği eşit zaman periyotlarına bölerek bu periyotlardaki değişimi birbiri ile karşılaştırarak cevaplandırdılar. Bazı öğrenciler ise yavaş ve hızlı değişimi açıklayabilmek için eğimi kullandılar. Örneğin; eğer grafik dik eğimli ise popülasyon hızlı, grafik sığ eğimli ise popülasyon yavaştır.

Öğrencilerin değişimin ani hızı hakkındaki bilgilerini anlayabilmek için; Hauger (1999) öğrencilere belli bir zamanda maya nüfusunun değişim hızını sormuş. Çoğu öğrenci belirlenen noktadaki değişim hızını bulabilmek için ortalama değişimi kullanmış. Öğrencilerin çoğu doğru cevabı veremediler. Bazı öğrenciler o noktadaki eğriyi kullanıp, tanjant çizgilerini çizerek büyüme hızı hakkında yorumda bulunmuşlar.

Hauger (1999), ortalama değişim hızını kullanarak öğrencilerin anlayışındaki ani hız değişiminin gelişmesi ile ilgilenmiştir. Bu çalışmada Hauger, öğrencilere değerler tablosu vererek, grafik üzerinde uygulamalarını istemiş ve özel bir noktada değişim hızının türevini sormuştur. Öğrenciler tablodaki değerleri kullanarak grafikleri çizdiler grafiklerinde ortalama değişimleri kullanarak doğru hesaplamalar yaptılar. Bununla birlikte grafikteki ani hız değişimini bulabilmek için tanjant çizgilerini çizen öğrenciler sonrasında ne yaptıklarını karıştırdılar ve durumu yorumlayamadılar.

### 2.3. Oranın Hayali Ve Eşzamanlı Değişimin Hayali

Thompson(1994a), oranın hayali ve eş zamanlı değişimin hayalini sayısal değerler kullanarak hayal edilebilmesi için sabit hızlı hareketle ilgili bir durum vermiştir. Burada, seyahat edilecek bütün bir yol var. Mesafe değişimini ve zaman değişimini düşünerek bu seyahatin verilerle somutlaştırılmasını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.



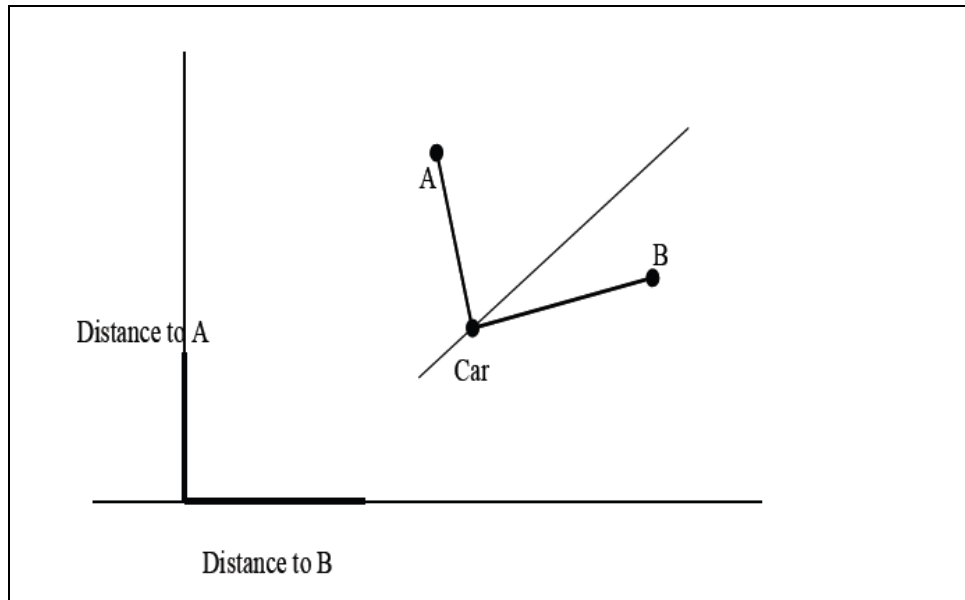
Thompson (1994a), oran hayalinin gelişiminin şu aşamalarla olduğunu açıklamıştır;

- Miktarlardaki değişimin hayali (örnek; konumun yer değiştirme, hacimdeki azalış),
- İki miktarın hayal edilmesi ( örnek; pozisyonun konumu, konumun yer değiştirme),
- İki miktarın eş zamanlı değişiminin hayali.

Thompson'a göre, iki miktarın eş zamanlı değişimin hayali oran hayalinin gelişmesindeki en son basamaktır. Dahası Saldanha ve Thompson (1998), oran hayalinin gelişimi üzerine şu aşamaları tanımlamışlardır;

- İki miktarın değişiminin koordinasyonu - birini düşün sonra ikinci değeri düşün, sonra tekrar ilkini bu şekilde devam ederek iki değerin birbiri ile etkileşimini çözebiliriz.
- İki miktarın eş zamanlı değişimin hayalini, insan düşünce yapısında birleştirmelidir.

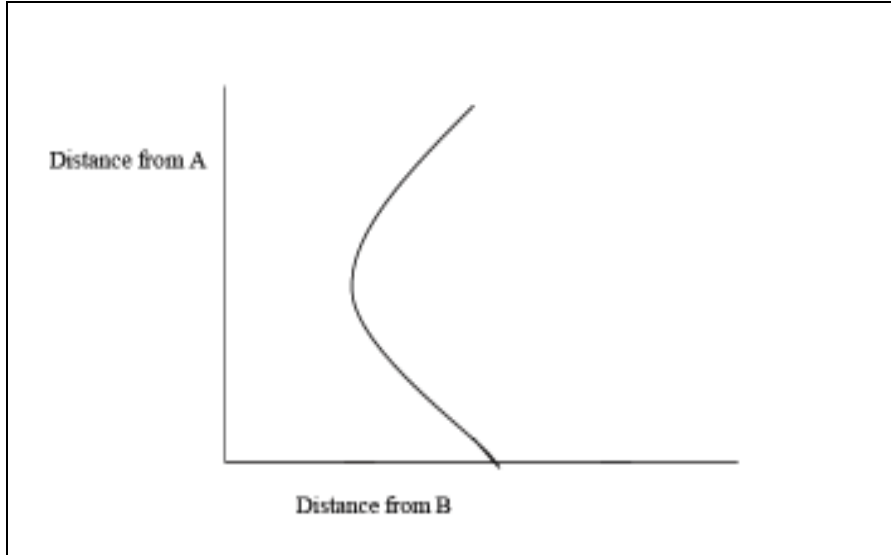
Saldanha ve Thompson (1998), eş zamanlı değişimin hayalini 8. sınıf öğrencilerine yaptıkları teknik bir deneyle araştırmışlardır. Bu çalışmada araştırmacılar Geometri Sketchpad programından yararlanılarak simülasyon(benzetim) yöntemi ile bir arabanın hareketini gözlemlemiştir. Bilgisayarın faresini kullanarak arabayı hareket ettiren öğrenciler, arabanın A ve B şehirlerine uzaklıklarını gözlemlemiştir. Şekilde 2.1 de bu durumu göreceğiz.



**Şekil 2.1.** Geometri Sketchpad simülasyonu ile bir arabanın hareketi

Burada öğrenci bilgisayarın faresini düz çizgi üzerinde ilerlettiğinde, dikey-yatay eksende A şehrine ve B şehrine olan uzaklığını otomatik olarak görebiliyor. Böylece ne zaman A şehrine yaklaştığını, ne zaman B şehrine yaklaştığını yorumlayabiliyor. İlk olarak arabanın A'dan olan uzaklığı nasıl değişiyor diye soruldu. Sonra arabanın B'den olan uzaklığındaki değişimin nasıl olduğu soruldu, son olarak AC ve BC yollarının tanımlanması istendi. Öğrenci, ‘‘Eğer araba şehirlere yaklaşırsa hem AC hem de BC küçülür ve bir noktada AC azalmasına rağmen BC değişmiyor. Buradan B'ye çok yakın bir noktada olduğumuzu anlarız.’’ diye yorumladı.

Bu çalışmanın ikincisi Saldanha ve Thompson (1998) tarafından farklı bir grafikte yine 8. sınıf öğrencilerine yapıldı. Şekilde grafiği görebilirsiniz.



**Şekil 2.2.** Geometri Sketchpad simülasyonu ile bir arabanın hareketi

Öğrencilerden, araba hareket ederken A'ya en yakın ve en uzak noktayı, B'ye en yakın noktayı bulmalarını istediler. Sekizinci sınıf öğrencileri grafiğe bakarak ve durumları deneyerek A'ya en yakın ve en uzak noktayı bulabildiler. B'ye en yakın noktanın ise bu noktalar içinde tam ortada bulunması gerektiğini söylediler. Bu sonuçların analizinden faydalanarak araştırmacılar iki niceliğin hayalinin benzetim ve bireysel uğraş yardımıyla öğrenildiğini belirttiler.



## **2.4. Fonksiyon Ve Fonksiyonun Türevi Arasındaki İlişki**

Araştırmacılar (Nemirowski & Rubin, 1991, 1992; Rubin & Nemirowski, 1991; Monk & Nemirowski, 1992; Nemirowski, 1994), teknik eğitim araştırma merkezinde, lise öğrencilerinde değişim oranı bilgisi ile ilgili birkaç çalışma yapmışlardır. Bu çalışmalarda öğrencilerin fonksiyon ve fonksiyonun türevi arasındaki ilişki yapısı grafiksel olarak araştırılmıştır.

İlk olarak simülasyon(benzetim) yöntemi kullanılarak öğrencilerin bir cihaz yardımı ile bir yol üzerinde bulunan aracı hareket ettirmeleri gözlemlenmiştir. Yolun başındaki noktada bulunan arabanın pozisyon değeri sıfırdır. Eğer araba bulunduğu noktadan harekete geçerse bitiş noktasına kadar pozisyon değeri artacaktır. Araba başladığı noktaya geldiğinde ise pozisyon değeri azalıyor. Diğer taraftan başlangıç noktasından hareket eden arabanın hızı sürekli artıyor. Araba başladığı noktaya tekrar geldiğinde hızı yine azalıyor.

Diğer araştırmada, öğrencilere hız grafiği verilip yol grafiği sorulmuştur. Öğrenciler fonksiyon ve fonksiyonun türevi arasındaki ilişkiyi grafiksel yapıdan tanımlamada zorlandılar. Örneğin; öğrenciler grafiğine bakarak yol grafiğinin de buna benzeyeceğini söylediler. Öğrenciler eğer grafiğin hızı artarsa, yol zaman grafiğinin pozisyonun da artacağını açıkladılar.

Araştırmacılar (Nemirowski & Rubin, 1991, 1992; Rubin & Nemirowski, 1991; Monk & Nemirowski, 1992; Nemirowski, 1994), çalışmalarını üç ana noktaya dayandırmışlardır.

- 1) Hayatın her bölümünden her normal insan, fonksiyon ve türev arasındaki ilişki hakkında bazı içgüdüsel bilgiye sahiptir. Bizler, değişmeyi içeren durumları anlamamızı sağlayan karışık bilgileri yapılandırırız.
- 2) Türev ve fonksiyon arasındaki ilişki, zaman ve sayının önemli ana yapısını içeren yeni ve çözümlenmemiş konular ile her zaman daha fazla ayrıntıya açık kalan konulardan birisidir.
- 3) Fonksiyon-türev ilişkisini içeren problemleri çözmeye öğrenci performansı, bağlamsal parametrelerden çok güçlü bir şekilde etkilenir.

Nemirowski ve Rubin'e göre (1992), öğrenciler hız-zaman ve konum-zaman grafiğinin aynı olduğunu sanıyorlar. Fonksiyonların ve onların türevlerini

ilişkilendirmede öğrencilerin çektikleri güçlükleri düşünerek Nemirowski ve Rubin fonksiyonlara bağdaşımçı yaklaşımdan ziyade varyasyonlu yaklaşımı kullanmanın gerektiği üzerinde durmuşlardır. Yazarlara göre bağdaşımçı yaklaşım, fonksiyonun grafiği ve onun türevinin grafiğinin birbirine benzediğini farz eder. Diğer bir yandan varyasyon yaklaşım, belirli bir zaman dilimindeki bir değişkenden aynı zaman dilimindeki diğer bir değişkenle olan değişimi içerir.

Confrey ve Smith (1995) yaptıkları araştırmalarda öğrencilerde değişim oranı kavramının oturmadığını anlamışlardır. Breziudenhout (1998), üniversite öğrencilerinde değişim oranı yapısını anlamak için araştırmalar yapmıştır. Öğrencilerin geneli aritmetik ortalama ile ortalama hızı karıştırmışlardır. Aynı zamanda öğrenciler yapılan çalışmada ortalama hız değişimi ve değişimin hızı arasındaki farklılığı anlamakta zorlanmışlardır.

Değişim oranı kavramı öğrencilere ortaokulda ve lisede verildiği için deneyimleri sınırlandırılmıştır. Bundan dolayı öğrencilere matematik dersi öğretilmeden önce değişim oranı kavramı ile ilgili deneyimler yaşatılmalıdır. Buna ek olarak, oran nedir sorusuna öğrenciler, “yol= hız \*zaman” olarak cevabı sembolik bir şekilde belirtmişlerdir. Bundan bile öğrencilerin sabit bilgiye sahip olduğunun görüldüğünü belirtmiştir. (Hauger,1998).

### **2.5. Statik Sürece Karşı Dinamik Fonksiyon Yapısı**

Fonksiyon değişken nicelikler arasındaki ilişkileri ifade eder ve Tall'in de bahsettiği gibi (1997), “fonksiyonun bir amacı değişen şeylerin nasıl temsil edildiğini ifade etmektir”. Araştırmalar, öğrencilerin fonksiyonları algılamada dinamik olarak düşünebilmek için değişkenleri hayal etmenin önemli rol oynadığını ortaya çıkarmıştır. Pek çok araştırma çalışmaları tarafından sürekli olarak belirlenen şudur ki; güçlü kavramsal becerilere sahip olan öğrenciler sembol üretir ve zayıf kavramsal becerilere sahip olan öğrenciler bir fonksiyonel ilişkideki iki miktarın eş zamanlı değişimi hayal etmekte yetersizdir ( Carlson & Oehrtman, 2005; Monk & Nemirowski, 1994) .

Araştırma çalışmalarında (Carlson&Oehrtman,2005; Monk,1992; Confrey&Smith, 1995; Thompson, 1994b), fonksiyonların dinamik yapısı için iki eş zamanlı değişkenlerin değişiminin gerekli olduğu belirtilmiştir. Monk (1992), “örneğin öğrencide fonksiyonların ‘Pointwise(noktasal bakış)’ durumunun

gözenmesi bir statik durumdur. Öğrenci bir fonksiyonun değerinin değişimini tanımlamada zorlanır çünkü her girdi değeri için tek tek hesap yaparak her çıktı değerini bulur. Diğer yandan bazı öğrenciler ‘Across-time(süreci düşünme)’ durumuna sahiptirler. Öğrenci bir fonksiyonel durumu, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin eş zamanlı değişimini hayal ederek düşünür ve durumun grafiğini çizer. Bu dinamik bir yapıdır.” diye açıklamıştır. Bu yapıyı başlıklar altında ayrıntılı bir şekilde tanıyalım.

### **2.5.1. Fonksiyonun Doğasındaki Değişim**

Sierpinska(1992) fonksiyonun doğasında bulunan değişimi ilişkiler dünyası veya süreçler dünyası olarak vurgulamıştır. Aynı zamanda x ve y değişkenlerini de değişim doğası ya da değişen objeler olarak tanımlamıştır. ‘x ve y’ değişkenleri arasındaki ilişki doğru tanımlandıktan sonra yapılması gereken ilk fonksiyon yapısı, değişkenler ve onlar arasındaki ilişkidir. Fonksiyon kavramının anlaşılması için iki önemli durum tanımlanmıştır.

- Değişkenlerin isimleri günlük hayatta kullanılan pratik problem çözümünü açıklayıcı nitelikte olmalıdır.
- Değişkenler arasındaki ilişki ve değişimler belirtilmelidir.

Sierpinska(1992), öğrencilerin fonksiyonlar hakkında bilgisini kullanması için, günlük yaşamda kullanılan problemleri çözmelerinde öğrencilere fırsat verilmesi gerektiğini söyler. Fen dersinde ya da gerçek yaşamda model kullanmanın önemini vurgular. Sierpinska’ya göre öğrencilerin sosyal ve ekonomik yaşantılarını açıklayıcı, gerçek ilişkiyi modellerle gösteren yapıdır. Ancak öğrenciler değişkenin ne olduğunu değişen kavramın ne olduğunu anlamada zorlanıyorlar.

### **2.5.2. Fonksiyonun Eyleme Karşı Süreç Durumu**

Fonksiyonun güçlü bir süreç yapısının olması çok önemlidir. Dinamik fonksiyonlar sürecinde birçok girdi ve çıktı değerlerini arka arkaya hayal etmek gerekir. Bu beceri eylem profilinde mümkün değildir. Her bir girdiyi hesaplayarak her bir çıktıyı bulur. Bundan dolayı öğrenciler fonksiyon hakkında pek bilgi sahibi olmazlar. Girdi ve çıktı değerlerini belirtmede dinamik fonksiyonları kullanmak gereklidir. Bir öğrenci süreç profili ile süreci bütün olarak

düşünerek pek çok değer bulabilir. Eş zamanlı değişim durumları bunun için önemlidir (Carlson ve Oehrtman ,2005,s 8).

Fonksiyonların calculus yapısı için süreç yönünün çok önemli bir kavram olduğu sonucuna varılıyor. Asiala, Cottili, Dubinsky ve Schwingenderf (2001) yaptıkları çalışmada fonksiyon sürecini öğrenen öğrencilerin derslerinde önemli getiriler olacağını belirtmişlerdir.

Dubinsky ve Harel'e göre (1992), fonksiyonların eylemsel yönü matematiksel açıklamalar ve sayıların çıktı değeri gibi becerilere davet eder. Fonksiyonların bu yönü statiktir. Tüm süreç boyunca bu durum hayale izin vermez. Diğer yönden fonksiyonların süreç yönü dinamiktir ve niceliklerin dinamik dönüşümünü sağlar. Bütün süreç boyunca öğrenci eş zamanlı olarak pek çok girdileri ve çıktıları hayal eder.

Thompson (1994b), “Fonksiyonun süreç yönünü değerlendirmek, hayali inşasıdır” diye tanımlar. O fonksiyonun süreç yönünde öğrencilerin her girdi değerinde her çıktıyı düşünmeksizin tüm süreci düşündüğünü vurgulamıştır. Buna ek olarak Thompson, “Fonksiyonun süreç yönü, hayal için sağlıklı bir kapı açar. Öğrenciler hayal etmeye başlarlar ve sonra düşündüklerini açıklarlar” demiştir.

Breidenbach et al (1992), Dubisky (1991) ve Dubisky&Harel (1992) fonksiyonların süreç yapısının, öğrencilerin gelişimi üzerine etkilerini çalışmalarında vurgulamışlardır.

Carlson ve Oehrtmen (2005) fonksiyonların eylem ve süreç yönünü şu şekilde açıklarlar.

- Eylem yönünde bir fonksiyon özel bir kural, özel bir formülle çözülür. Süreç yönünde bir fonksiyon girdi değerler kümesi ile çıktı değerler kümesinin toplamı olarak tanımlanır.
- Eylem yönünde her bir aktivite için her bir sonuç vardır. Süreç yönünde her bir aktivite sonucu olmaksızın da süreci bütün olarak hayal edebiliriz.
- Eylem yönünde cevap formüle bağlıdır. Süreç yönünde ise cevap formülden bağımsızdır.

- Eylem yönünde bir zamandaki tek bir değeri hayal edebilirsiniz. (girdi veya çıktı gibi). Süreç yönünde, bütün girdi ve çıktı değerleri tek bir anda hayal edilebilir.
- Eylem yönünde,  $x$ 'i açıklamak için bir formül kullanırız. Süreç yönünde girdi ve çıktı değerlerinin durumunu birleştirerek fonksiyonu tanımlarız.
- Eylem yönünde fonksiyonlar statik olarak düşünülür. Süreç yönünde fonksiyonlar dinamik olarak düşünülür.
- Eylem yönünde bir fonksiyonun grafiği geometrik bir şekildir. Süreç yönünde bir fonksiyonun grafiği girdi değerler kümesi ile çıktı değerler kümesinden oluşan özel bir topluluk olarak tanımlanır.

### **2.5.3. Değişkenler Arasındaki Eş Zamanlı Değişim Yaklaşımı**

Confrey ve Smith (1994) fonksiyona eş zamanlı değişim yaklaşımını, değişim durumu yapısı için gerekli olduğunu vurgulamışlardır. Çalışmalarında öğrencilerin değişim oranı yapısını anlamaları üzerine odaklanmışlardır. Girdi ve çıktı değerleri arasındaki değişimler için eş zamanlı değişim yaklaşımı gereklidir. Confrey ve Smith formüle bağlı olarak kullanılan müfredatı eleştirmişlerdir. Çünkü verilen girdi değerlerden, çıktı değerlerin nasıl tanımlanacağı formüller ve kurallar üzerine kuruludur. Bundan dolayı yazarlar öğrencilere değişim oranı yapısını anlatmada eş zamanlı değişim yaklaşımını önermişlerdir.

Confrey ve Smith (1994,1995), lise öğrencilerinin liner ve üssel fonksiyonların değişim oranı hakkındaki fikirlerini öğrenmek için, öğrencilere üssel fonksiyonlarla ilgili büyüme durumu değerlerini açıkça gösteren bir tablo verdi. Tabloda, hücre popülasyonunun büyüme sayısı 0'dan 9'a kadar her saat için gösterilmiştir. Hücre popülasyonun büyüme durumu dokuz saatin üzerindedir. Öğrencilerden, 10. saatte kaç hücre olabileceğini tahmin etmelerini istemişlerdir. Öğrenciler değişim oranı dair düşüncelerini şekillendirmede karışık cevaplar

vermişlerdir. Bu tahmin sorusunda bazı öğrenciler  $y$  değerleri üzerinde uğraşmışlardır. Her saat için art arda gelen bu  $y$  değerlerini birbirlerinden çıkarmışlardır ( $Y_1, Y_2-Y_1, Y_3-Y_2, \dots$ ). Confrey ve Smith verilen bu cevabı tek değişim oranı olarak adlandırmışlardır. Bu sonucu araştıran öğrenciler  $y$  değerlerinin farkların aynı olduğunu görmüşlerdir. Buradan hareketle onuncu saatte hücre sayısını tahmin edebilmişlerdir. Üssel fonksiyon için öğrenciler diğerinden farklı olarak art arda gelen  $y$  değerlerini birbirlerine oranlamışlardır ( $Y_2/Y_1, Y_3/Y_2, Y_4/Y_3\dots$ ). Burada da öğrenciler  $y$  değerinin oranlarının sonucunun aynı olduğunu keşfettiler. Confrey ve Smith bu durumu da çoklu değişim oranı olarak adlandırdılar.

Yazarlara göre bu çalışmalar öğrencilerin fonksiyonel düşüncesinin kanıtı olarak gösterilebilir. Confrey ve Smith'e göre çoğu öğrencilerde olan durum, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiden çok, bağımsız değişkenin değişimini anlayabilmek için, bağımlı değişkenin değişim koşulları üzerine odaklanmalarıdır.

Thompson (1994b), fonksiyon öğrenmede eş zamanlı değişim yaklaşımının önemini vurgulamıştır. Fonksiyon konseptinde bu yapının K-14 matematik müfredatında sunulması gerektiğini belirtmiştir. Fonksiyon yapısının tarihsel gelişimi bir öğretme modeli üzerinde hazırlanarak bu şekilde öğrencilerde güçlü bir alt yapının oluşacağını belirtmiştir.

#### **2.5.4. Fonksiyonlarda Point-wise(noktasal bakış)' a Karşı Across-time ( süreci düşünme )Yaklaşımı**

Monk (1992a, 1992b) Öğrencilerin fonksiyon yapısındaki oranın anlaşılması üzerine iki araştırma yapmıştır. Monk, fiziksel modeller kullanarak sorduğu problemlere öğrencilerin verdikleri cevaplarına göre öğrencileri point-wise ve across-time olmak üzere iki kategoriye ayırmıştır.

İlk çalışmasında, bir kişinin sokak lambasına olan mesafesine göre gölge boyundaki değişimi incelemiştir. Bu çalışmada sokak lambasından 16 adım uzaklıktaki bir kişi, lambaya 6 adım yaklaşırsa gölge boyunda nasıl bir değişiklik olduğu öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerden biri, gölge boyu lambadan da daha ötede olacak demiştir. Öğrencilerin bazıları büyük hızda değişimde, büyük mesafe olacağını söylemişlerdir. Diğer öğrenciler ise gölge boyunun yürüdükçe artacağını söylemişlerdir.

İkinci araştırmada Monk, duvara karşı dik durumda olan merdivenle ilgili üç aşamalı bir problem kurmuş.

Sorunun ilk aşamasında ‘duvara karşı neredeyse dik durumda duran bir merdiven yatay hat boyunca sabit miktarlarda çekiliyor ve dikeydeki düşüşlerde kayıt ediliyor. Bu sonuçlar karşılaştırıldığında sonuçlar aynı mıdır, büyük müdür, küçük müdür?’ diye öğrencilerin karar vermesini istemiştir. Öğrenciler soruyu anlamakta zorlandıklarını belirttiklerinde Monk, buradaki merdivendeki düşüşleri  $x$  ve  $y$  değerlerini düşünerek yapacaksınız demiştir. Bunun üzerine öğrencilerin çoğu sayısal değerler vererek problemi çözmeye çalışmışlardır. Öğrencilerin bu yaklaşımları Monk’a göre fonksiyonlardaki point wise görüşüne sahip olduklarını gösterir.

Sorunun ikinci aşamasında, ‘Yine aynı düzenek vardır bu kez merdivenin alt kısmına bir motor bağlanmıştır. Motor hareket ettiği zaman merdiven yatay hat boyunca hareket ediyor ve merdiven dikey yönde düşüşler yaşıyor. Bu düşüşler karşılaştırıldığında aynı mıdır, büyük müdür, küçük müdür?’ diye sorularak öğrencilerin karar vermesi istenmiştir.

Sorunun üçüncü aşamasında, merdivenin dikeydeki ve yataydaki değişimi arasındaki ilişkiyi belirleyebilmek için dikeydeki değişim ve yataydaki değişimin grafiklerinin çizilmesini istemiştir.

Öğrencilerden çoğu sorunun ilk iki kısmını çözmeye çalışmışlar. Soruda tek bir merdiven ve bu merdivenin hareketi olmasına rağmen öğrenciler soruyu tam olarak anlayamadılar ve hayal etmekte zorlandılar. Bazı öğrenciler iki uzunluğu aynı grafikte göstermişler.

Üçüncü bölümde bazı öğrenciler modelde sadece bir nesne (merdiven) olduğundan dolayı, alt kısmı sabit bir hızda hareket ederse üst kısmının da aynı hızda düşmesi gerektiğini ifade ettiler. Çünkü onlar sistemin sabit olduğuna inandılar. Bazı öğrenciler merdivenin (altı ile üstünün) iki uzunluğunun toplamı her zaman aynı olduğunu böylece eğer birisi belirli oranda hızları azalır, diğerinin hızının da aynı oranda artacağını belirttiler. Monk, öğrencilerin bu davranışlarını, kullandıkları yorumlarını, genel prensiplerden ve bilinen kurallardan yola çıkarak genelleme yapmalarına bağlamıştır.

## 2.6. Değişimin Uslamlanması

### 2.6.1. 3 Tip Uslamlama

Hauger 1998’de öğrencilerin farklı sorularda kullandığı üç tip uslamlamayı vurgulamıştır. Birinci tip uslamlama, değişimin nitel türüdür. Öğrenci durumu grafikleştirir ve değişim hakkında artan, azalan ve çekim noktalarını düşünerek yorumlar. İkinci tip uslamlama, değişim hakkında karar verebilmek için sayısal değerlerin kullanılmasıdır. Örneğin Monk’un çalışmasında duvara karşı dik duran merdivenin yatay yönde birim birim hareketi ile merdivenin son durumunu öğrenciler sayısal değerler vererek hesaplamaya çalışmışlardır. Üçüncü tip uslamlama, Hauger’e göre cebirsel sebepler yani öğrenciler değişimi formül ya da denklemler kullanarak yargılara ulaşıyorlar.

### 2.6.2. Değişkenler Arasında Eş Zamanlı Değişimin Uslamlanması

Carlson, Jacobs, Lersen ve Hsu’e göre (2002), “bilişsel beceriler iki değişkenli niceliklerin birbiri ile olan ilişkisini gösterir” (sayfa 354). Saldanha ve Thompson’a göre (1998) “Değişkenler arasında eş zamanlı değişim durumu, bu iki niceliğin hayal edilmesidir” (sayfa 298).

Carlson (1998), farklı perspektiflerden üniversite öğrencilerinin fonksiyon yapılarını anlamaları için araştırma yapmıştır. Bu çalışmada Carlson (1998), öğrenci becerilerini aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

- Gerçek fonksiyonel ilişkiler fonksiyon durumlarında kullanılır;
- Fonksiyonlar farklı tiplerde gösterilebilir. Örneğin formül, tablo, grafik gibi;
- Yerel ve evrensel fonksiyon oranlarını tanımlar ve yorumlar;
- Fonksiyon yapılarında formülleri ve diğer fonksiyonları kullanır;
- Fonksiyonları, fonksiyon olmayanları ve fonksiyon tiplerini tanımlar;
- Hem süreç hem de nesneyi bir fonksiyon yapısı olarak düşünür;
- Fonksiyonları anlar ve yorumlar;



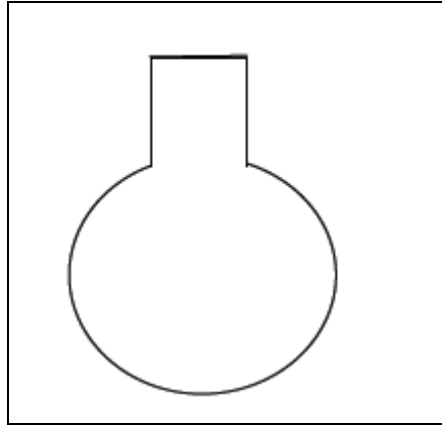
- Fonksiyon ve denklem arasındaki ilişkiyi anlar.

Aynı zaman da Carlson buna ek olarak eş zamanlı değişimin uslanma anlayışı üzerinde durdu. Öğrencilerin bu becerilerini anlamak şu maddeler üzerinde uğraştı:

- Fonksiyon durumunda tanımlanan bir değişken diğerini nasıl etkiliyor.
- Statik ve dinamik fonksiyonlar nasıl yorumlanıyor ( değişim oranının ve grafiğin yorumlanması)

Carlson( 1998), yaptığı araştırmalarında üniversite öğrencilerinin değişkenler arasındaki eş zamanlı değişimin uslanmasını tanımlamıştır. Carlson 15 öğrenci ile 18 yazılı sınavla görüşme yapmıştır. Çalışkan cebir üniversite öğrencileri fonksiyon durumlarını sıralamada ve yorumlamada zorluklar yaşamışlardır. Üniversite ikinci sınıf matematik öğrencileri cebir öğrencilerinden daha iyi olmalarına rağmen fonksiyonel durumları yorumlamakta zorlanmışlardır.

Carlson, öğrencilerin bu sonuçlarını özetlemek ve göstermek için bir örnek olarak öğrencilere su ile dolan şişe durumunu sunmuş. Burada boş şişe su ile dolmaktadır. Öğrencilerden şişeye dolan su miktarı ile yükseklik arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği çizmelerini istemiş:



**Şekil 2.3.** Carlson'ın örnek sorusu

Sonuçlara bakıldığında, öğrenciler önce hayal etmekte zorlandılar sonra Carlson öğrencilerden koordinat eksenini, değişkenleri düşünmelerini istedi. Öğrencilerin yarısından fazlası ilişkiyi göstermek için düz bir çizgi çizdiler. Carlson

sonra bu öğrencilere değişkenlerin birbirleri ile nasıl bir etkileşim içinde olduklarını hayal etmeleri gerektiğini açıkladı. Değişkenlerin değişiminin hayal edilmesinde öğrenciler başarılı olamadılar. Ancak öğrencilerin %25'i grafiklerinde iç bükeyliği kullandılar. Öğrencilerden hayalini tam olarak kuranlar da vardı. Sözel ifadelerinden anlaşılıyordu fakat onlar grafiğin iç bükey, dış bükey ve kıvrım noktalarını gösteremediler. Bundan dolayı grafiği düz bir çizgi ile gösterdiler. İkinci sınıf matematik öğrencilerinin %15'i bu grafiği doğru çizdi.

Bu durum için doğru grafiğin ne olacağı lisansüstü öğrencilerine soruldu. Öğrencilerin çoğu grafiği doğru çizdiler. Öğrencilere, nasıl çizdikleri soruldu. Öğrenciler, “şişenin dibi ile üst kısmı birbirinden farklıdır, dip kısmındaki değişim düz bir çizgi ile gösterilemez. Çünkü bu bölüm çukurdur fakat üst kısım düz bir çizgi ile gösterilebilir” şeklinde açıklama yapmışlardır. Öğrenciler aynı zamanda her zaman aralığında akan su miktarının aynı olduğunu ve bu grafiği yükseklikteki değişimi hayal ederek çizdiklerini söylemişlerdir. Carlson bu durumu öğrencilerin dinamik fonksiyonlarda yorumlama gücünün geliştiğini söyleyerek açıklamıştır.

Carlson'a göre bu çalışmanın amacı; öğrencilerin zihinsel aktivitelerini ve ilgili uslamlamayı açığa çıkarmaktır. Böylece öğrenciler beyinlerindeki düşüncelerini grafiğe dönüştürebilirler. Öğrencilerdeki zihinsel bulguların açıklanabilmesi için beş zihinsel çerçeve çalışması şu şekilde sunulabilir.

- İki değişkenin eş zamanlı değişiminin hayali. (Bir değişken ile diğer değişkenleri koordinat eksenine alır)
- Bir değişkenin diğerlerini nasıl etkilediğinin hayali. (Bir değişken ile diğer değişkenin değişimi yönünü bulur)
- Değişim miktarının hayali. (Bir değişkenin değişim miktarı ile diğer değişkenlerin ilişkisini belirler)
- Değişim oranını hayali. (Bağımsız değişkendeki değişim durumuna göre fonksiyondaki değişim oranını belirler)
- Fonksiyondaki durumu kesintisiz bir şekilde doğru olarak çizer.(Ani hız değişimini belirler)

Carlson bu çerçeve çalışmasını kullanarak 2002 yılında yüksek performans gösteren matematik öğrencileriyle sürekli değişen dinamik fonksiyonel durumları

öğrencilerin nasıl anladığı nasıl yorumladığı ile ilgili bir araştırma yapmıştır. Carlson bu araştırmada şu sonuçlara varmıştır:

- Bir değişkenin değerini diğer değişkenle koordine edebildiler.
- Bir değişkenin değişim yönünü diğer değişkenle koordine edebildiler.
- Bir değişkenin değişim miktarı ile diğer bir değişkeni koordine edebildiler.
- Bağımsız değişkenin değişimindeki değişim oranını koordine edemediler.
- Bağımsız değişkenin sürekli değişimindeki anlık değişim oranını koordine edemediler.
- Bir eğriyi pürüzsüz bir şekilde çizemediler ve eğrinin dönüm noktalarını belirleyemediler.

Köklü 2007 yılında matematik derslerinde başarılı olan iki üniversite öğrencisiyle iki değişkenli değişkenlerin eş zamanlı değişim durumlarını incelemek üzerine bir araştırma yaptı. Öğrenciler iyi matematik notlarına sahip olmalarına rağmen sorulan soruları analiz edebilmekte zorlanmışlar. Köklü bu araştırmaya göre şu sonuçlara varmıştır:

- Öğrencilerin sahip oldukları bilgi ezbere dayalıdır.
- Formüllere göre bir sonraki adımı tanımlıyorlar.
- Şekilleri grafiğe aktarıırken gördükleri gibi direkt çiziyorlar.
- Hayal edebilme düşünceleri oldukça zayıftır.
- İlköğretimde değişken kavramının müfredatlara eklenmelidir.

## BÖLÜM III

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışmanın amacı; başarılı bir matematik öğretmen adayının kovaryasyonel uslamlama yeteneklerinin bir özel durum çalışması ile tanımlanması, açıklanması ve analiz edilmesidir.

Bu çalışma Adıyaman Üniversitesi İlköğretim matematik öğretmenliği 3. sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Öğrenciyle görüşme yapılarak veriler toplanmış, sonra detaylı bilgi için analiz edilmiştir. Bu sayede aşağıdaki soruların cevabını bu araştırmada bulacağız;

- Matematik öğretmen adayları dinamik fonksiyonel durumları nasıl açıkladığını?
- Matematik öğretmen adayları grafik çiziminde bu bilgileri nasıl kullandığını?
- Matematik öğretmen adayları dinamik fonksiyonların grafiğini nasıl çizdiğini?

Bu bölümde yukarıda belirtilen amaca ulaşmak için yapılan çalışmalar sunulmuştur.

#### 3.1 Yöntem

Yapılandırmacı yaklaşım teorisi matematik eğitimi araştırmalarının büyük bir bölümünü kapsar. Yapılandırmacı yaklaşım insan davranışlarının ayrıntılı bir şekilde anlaşılması ile ilgilidir. Paul Ernest'e göre (1998), “yapılandırmacı yaklaşımın geniş bir alanda kabul görmesi, özellikle matematik eğitimi alanında nitel metotlara doğru bir değişim getirmiştir”. Bu yöntem, istatistiksel ve deneysel yöntemlere karşı oluşan antipatiden dolayı geniş bir kullanım alanına sahip olup (Cohen ve Manion, 1989), özellikle 1920’li yıllardan sonra sosyoloji ve antropolojide çok kullanılmaya başlanmış ve 1980’li yıllardan itibaren de eğitim araştırmalarında giderek yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır (Merriam, 1988; Bachor, 2000; Yıldırım ve Şimşek, 2003; Ekiz, 2003; Çepni, 2005). Bu yöntem daha çok, bireysel, grup veya topluluk hakkındaki detayları ortaya çıkarıp, rapor etmek için kullanılmaktadır. Bu yöntemin en önemli avantajı, araştırmacıya özel bir durum ve olay üzerinde yoğunlaşma ve çalışmada yer alan değişik faktörleri tanımlama fırsatı vermesidir.

Ayrıca, tek bir birey veya grubun tek bir özelliğiyle veya perspektifiyle ilgilenmesidir. Bireysel yürütülen çalışmalar için uygun bir yöntem olduğu düşünülen bu yaklaşımın “nasıl” ve “niçin” sorularını temel alan, araştırmacının kontrol edemediği bir olgu ya da olayı derinliğine incelemesine olanak veren bir araştırma yöntemi olduğu ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2003). Bu tür çalışmalarda bilginin doğruluğunu sınamak ve genelleme yapmak mümkün değildir. Zaten amaç, genelleme yapmak değil, özel durumları ayrıntılı olarak ele alıp yansıtmaya çalışmaktır. Bir başka deyişle amaç “yalnız parça bütünde gizli değildir, aynı zamanda bütüne ait gerçeklik de parçada gizlidir” düsturundan hareketle olaylara ve durumlara bütüncül bir bakış açısıyla yaklaşmaktır.

Bu çalışmada özel durum çalışması (case study) kullanılmıştır. Stake (1995), özel durum çalışmalarında yapılandırmacı yaklaşımın önemini şöyle vurgular:

“Case araştırma çalışmaları tanımları ve bilgilendirici yorumları bizimle paylaşır. Yapılandırmacı bakış okuyucuları kendileri için yeni bir materyal üretmeye teşvik eder. Okuyucu belirli durumları, olayları takip eder. Sadece tanımlar değil durumu, yorumları en iyi şekilde tanımlar.” (s102)

Gillham (2000) bir “özel durum çalışması” için şunlardan söz etmiştir:

- ✓ Sadece ortamında anlaşılabilir veya çalışılabilir
- ✓ Hâlihazırda, burada ve şu anda oluşabilen
- ✓ Ortamıyla birleşen ve dolayısıyla ince sınırlarının çizimi çok zor olan
- ✓ Gerçek dünyanın içine gömülmüş insan faaliyetlerinin her biri.

Bir durum, tek bir birey, aile ya da bir sınıf olarak seçilebilen bir grup, bir kurum ya da bir toplum olabilir. Durumların seçimi, sizin ne istediğinize bağlı olarak değişir (Gillham, 2000, s.1). Bir durum çalışması modeli, durumun derin bir anlayışını elde etmek için kullanılır. Sonuçlardan ziyade sürece, belirli bir değişkenden ziyade bir ortama, ispattan ziyade keşfe odaklanmıştır.(Merriam, 1998, s.19). Durum çalışması, araştırmacının olaylar üzerinde az miktarda bir kontrole sahip olduğunda, nasıl ve niçin soruları araştırıldığında ve gerçek hayat ortamları içindeki güncel olgular üzerine odaklanıldığında tercih edilen bir stratejidir.

(Yin,2003, s.1). Bu çalışmada, durum, öğrencilerden her biri olarak düşünülmüştür. Her durumun yani her öğrencinin fikirlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Araştırmacının kontrol edemediği bir olgunun ya da olayın derinlemesine incelemesi yapılacağı için araştırmamızda “durum çalışması” yöntemi kullanılmıştır.

Bu araştırmada kullanılan özel durum çalışması diğer araştırma metotlarına göre dört yönden farklıdır.

- **Fazla konsantrasyon:** Deneyimleri yansıtır. Çünkü özel durum çalışması, soyut bir çalışmadan daha dikkatli daha canlı, daha yoğundur.
- **İyi bir yapı:** Diğer araştırmalarda elde edilen formal bilgilerden daha açık daha fark edilebilir bilgi içerir.
- **Okuyucuyu daha fazla geliştirir:** Okuyucu anlatılanlardan ve kendi deneyimlerinden yeni bir özel durum çalışması meydana getirebilir.
- **Okuyucu, popülasyon hakkında fikir sahibi olur:** Geleneksel araştırma yönteminin aksine, araştırılan popülasyon hakkında genel bilgiler verir.

### **3.2 Araştırma Prosedürleri**

Bu araştırmaya katılan öğrenciler Adıyaman üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliği 3. sınıf öğrencileri arasından seçildi. Bu öğrenciler analitik geometri I, analitik geometri II, analiz I, analiz II, analiz III derslerini almış öğrencilerdir.

Öğrenci Seçimi: Öğrenci seçiminde ki ilk aşamada not ortalamaları 4 üzerinden 3,5 ve üstü olan yüksek performans gösteren 7 öğrenci belirlendi. Seçilen öğrencilere Arizona Devlet Üniversitesi'nde (Arizona State University) geliştirilen Precalculus Concept Assessment (Analiz Öncesi Kavram Değerlendirmesi) testi uygulanarak bu testte en iyi dereceyi alan 2 öğrenci belirlendi. Bu iki öğrenci ile yapılan derinlemesine özel durum çalışmasında öğrencilerden bir tanesi özel durumundan dolayı çalışmayı tamamlayamayarak ayrılmak zorunda kaldığından diğer öğrenci ile 1 ay boyunca derinlemesine klinik görüşmeler yapıldı.

### **3.3. Veri Toplama**

#### **3.3.1. Klinik Görüşmeler**

Burada araştırılan durum, klinik görüşmeler esnasında öğrenciler sorulan problemler üzerinde çalışırken, öğrencilerin stratejileri, düşünce becerileri ve eşzamanlı değişim durumlarının uslanılması hakkında bilgi toplanmasıdır. Öğrencilerden dinamik fonksiyonel durumları yorumlamaları istenmiştir.

Bu görüşmelerde dikkate alınan kısım; öğrencinin verdiği cevapların doğru ya da yanlış olmasından ziyade verdiği cevaba nasıl ulaştığı, üzerinde çalıştığı fonksiyon durumlarındaki değişkelerin eşzamanlı değişimini nasıl uslandırdığı yani bir başka deyişle nasıl muhakeme ettiğidir. Sorulan sorular üzerinde çalışırken, öğrencinin düşünme ve muhakeme yani uslanma yollarını her yönü ile anlamak için, öğrenciden çalışmanın her aşamasında sesli düşünmesi istenildi.

Bu araştırmada öğrencilere görüşme sırasında sormak için hazırlanan sorular, daha önceden seviyelerine uygun şekilde hazırlandı. Golden'e göre; "Yapılandırılmış sorular, görüşmede matematiksel davranışların bir problem çözücü(öğrenci) ve görüşmeci (görüşmeyi planlayan ) arasında bir ya da daha fazla sorular sorularak planlanmış durumdur (sayfa 519)".

Görüşmelerin hepsinde, öğrencinin konuşmaları kaydedildi ve kopyalandı. Öğrenciye, sorulara verdiği cevapların doğru ya da yanlış olmasının sorun olmayacağını ve bu çalışmanın hiçbir yerinde isminden bahsedilmeyeceğine dair bilgi verildi.

#### **3.3.2. Görüşme İçeriği**

**Arka plan soruları:** Arka plan soruları ilk görüşmede öğrenciye dair geçmişteki deneyimleri hakkında bilgi alabilmek için sorulur. Böylece öğrencinin okuduğu okullar, lise ve üniversitedeki matematik seviyesi, geleceğe dair düşünceleri, planları belirlenir. Bazı sorular öğrenciyi daha iyi tanıyabilmek hazırlanmıştır.

**Görüşme soruları:** Görüşme soruları, öğrencideki eş zamanlı değişimin uslanılması hakkındaki düşüncelerini ve becerilerini keşfetmek amacıyla hazırlanmıştır. Öğrenci bu bölümde dinamik fonksiyonel durumu hayal etmeye çalışmış ve yorumlamıştır. Soruların çoğu literatür ve diğer araştırma çalışmalarına

uygun olarak seçilmiştir. Her bir kâğıtta bir soru olmak üzere toplam 15 soru vardır. Araştırma sırasında, öğrenci soruyu alıp okuduğunda sesli düşünmesini ve her yaptığını anlatması istedim. Öğrencinin verdiği cevaplar adım adım çalışmada yer almıştır. Sorulan soruların iki türü vardır; a) Temsili sorular, b) Yorumlayıcı sorular.

Temsili sorularda, öğrenciye dinamik fonksiyonel bir durum verilir. Bu durumu grafiksel bir yapı içerisinde çizmesi istenir. Monk (1992), bu durumu şöyle açıklar. “öğrenciler pointwise(noktasal bakış) yöntemi yerine genel bir bakış yöntemini kullanarak dinamik fonksiyonel durumları, kişisel çizgilerden uzak belli bir koordinat sistemi ile çizmeliyler.”

Yorumlayıcı sorularda, öğrenciye bir fonksiyonel olayı temsil eden bir şekil verilir. Öğrenciden şekli kullanarak grafiği çizmesi istenir. Sonra öğrenciye, grafiğin genel şekli, değişen kalıbı, artış ve azalış aralıklarını sorulur.

### **3.4. Veri Analizi**

Bu bölümde klinik görüşmelerden toplanan bilgiler analiz edilmiştir. Araştırma sorularının önerileri dikkate alınarak, nitel bilgi analiz tekniği kullanılmıştır. Öğrencilerin kullandığı kelimeler ve cevaplar öğrencilerin gerçek yaşamda kullandıkları dinamik fonksiyonel durumlar hakkında destekleyici nitelikte olup olmadığı araştırılmıştır. Bogdan ve Biklen’e göre (1998) ; “Bu görüşmelerden elde edilen bilgiler tekrarlanan aktivitelere, kelimelere göre düzenlenir. Bilgilerin parçalarından her biri araştırmacı tarafından geliştirilerek kodlanır. Bu kodlar bilgilerin sıralanmasında kategorilendirilir”.

Kategorilerin yapısını, teorik çalışma ve öneriler birbiri ile karşılaştırılarak kategori oluşturur (Merriam,1998). Bu çalışmada hem elde ettiğim kaynakları kategorilendirdim, hem de görüşme bilgilerinden elde ettiklerimi yapılandırdım. Carlson (1998) tarafından tanımlanmış ve yapılandırılmış kategorileri kullandım. Zihinsel aktivite bütün kategorileri ile bu çalışmanın teorik bölümünün bir kısmı bu çalışmada kullandım.



Tablo 2. Zihinsel Aktiviteler

Zihinsel Aktiviteler	Zihinsel Aktivitelerin Tanımı
Zihinsel Aktivite 1	Bir değişkenin diğer değişkene göre değişiminin fark eder.
Zihinsel Aktivite 2	Bir değişkenin diğer değişimler içinde değişim oranının yönünü bulur.
Zihinsel Aktivite 3	Değişim miktarını belirler.
Zihinsel Aktivite 4	Fonksiyonda ki değişim oranının koordine eder.
Zihinsel Aktivite 5	Fonksiyonda ki ani değişim oranının koordine eder.

## BÖLÜM IV

### 4. VERİ ANALİZİ, BULGULAR ve YORUM

#### 4.1. Selinin Durumu

##### 4.1.1. Giriş

Selin, aslen Mardin Midyatlıdır. Bu çalışmayı yaparken Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği 3. sınıf öğrencisidir. İlkokulu İstanbul'da okumuş. Matematiğe olan ilgisi ilköğretim 4. sınıfta başlamış, sonra annesinin rahatsızlığından dolayı Şırnak Silopi' ye göç etmişler. Farklı bir şehre gelmek yeni bir ortama yeni arkadaşlara alışmak oldukça zor olmuş. Bu yıllar matematiğe olan ilgisini daha da artırmış, çünkü içinde matematik korkusu olmadığı için ortaokulda matematik öğretmeni dersi düz anlatım yöntemiyle anlatmasına rağmen çabucak anlıyor sınavlardan hep iyi notlar alıyormuş. Selin lise yıllarındayken gerçek karakterinin ve kişiliğinin oluşmasında kendisine ilham veren kişinin Şırnak Silopi düz lisesinde edebiyat öğretmenin olduğunu belirtiyor. Selin ÖSS (Öğrenci Seçme Sınavı) sınavına son yıl hazırlanmış. Çok istediği eczacılık ve fizik tedavi bölümlerini puanı yetmediği için yazamamış. Fen edebiyat matematik bölümünü derslerinin ağır olması ve öğretmen olabilmek için “formasyon” alınması gerektiğinden dolayı istemeyerek şu an okuduğu bölümü tercih etmiş. Selin “Aldığım puandan dolayı aynı zamanda da gelecekte garanti meslek olsun diye bu bölümü yazdım” diyor. Geleceğe dair planların ne diye sorduğumda, Selin “Akademik kariyer düşünmüyorum. İngilizcem zaten hiç yok sadece tek hedefim KPSS sınavında yüksek puan alıp Mardin Midyat da ki okulların herhangi birinde görev almak” olarak ifade etti.

Selin'in matematik hakkında düşüncelerini daha iyi öğrenebilmek için ona bazı sorular sordum. İlk olarak matematiğin tanımını söylediğimde, sadece matematik sayılardır açıklamasını yaptı. Sonra matematiğin günlük hayatta nerelerde kullanıldığını sordum. Selin, “Üniversiteye gelinceye kadar sadece soruları çözmek için gerekli olduğuna inanıyordum ama gördüğüm, öğrendiğim kadarıyla her yer

matematikle işliyormuş. Örneğin, yürüyen merdivenlerin çalışma prensibi üslü sayılara bağlıymış.” dedi

Fonksiyon denilince ne aklına geliyor diye sorduğumda, Selin, “Kıyma makinesi... Yani eti veriyoruz kıyma çıkarıyor” cevabını verdi. Matematiksel fonksiyon nedir? Sorusuna ise “ matematikle ilgili olan fonksiyondur semboller kullanılır” cevabını verdi.

Bu sorulardan sonra birkaç fonksiyon örneği yazmasını istedim. Selin bir süre düşündükten sonra “Direkt semboller geliyor aklıma” diyerek aşağıda şekil 4.1. de ki örnekleri yazdı.



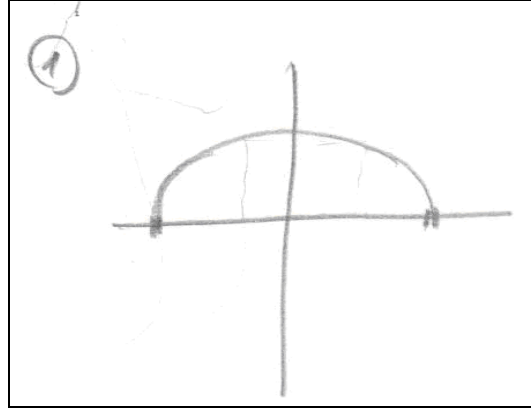
A rectangular box containing four handwritten mathematical functions. On the left side, the first function is  $f(x) = x^3 + 3$  and the second is  $g(x) = x^2 - 1 + 2x$ . On the right side, the third function is  $h(x) = 1 - x$ .

**Şekil 4.1.** Selin’in verdiği sembolik fonksiyon örnekleri

Selin’in fonksiyonlar hakkında ne kadar bilgisi olduğunu daha iyi anlayabilmek için hazırladığım bazı grafikleri göstererek hangilerinin fonksiyon olduğuna karar vermesini istedim.

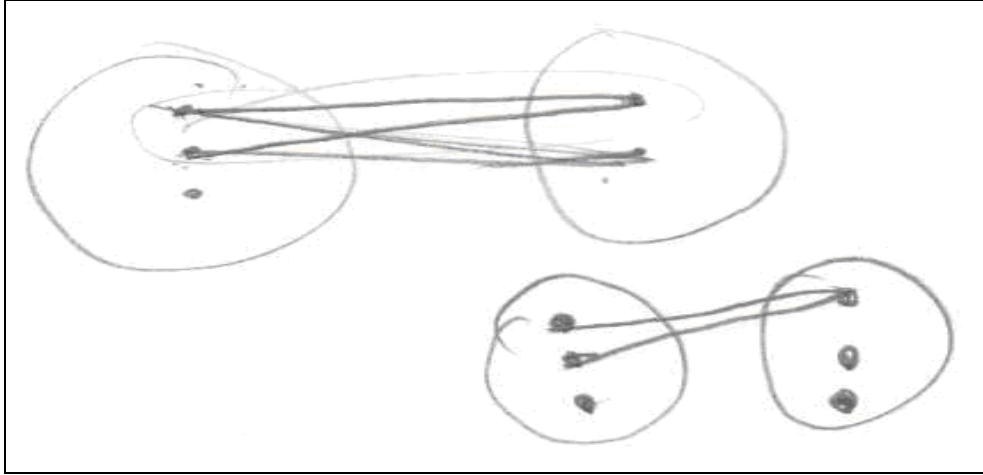
Şekil 4.2. de ki grafik gösterilerek Selin’e bu grafiğin bir fonksiyon ifade edip etmediği soruldu. Selin bir süre düşündükten sonra:

“Evet fonksiyondur. Çünkü fonksiyonda tanım kümesindeki 2 farklı eleman değer kümesindeki aynı elemana gidemez. Yani iki annenin ortak bir çocuğu olamaz” dedi.



**Şekil 4.2.** Selin'e gösterilen ilk grafik

Selin yukarıda yer alan ifadelerini aşağıda çizdiği şekillerle şematik olarak da açıklamaya çalıştı. Şemaları isimlendirmede görülen Selin'e bu kümelerin neleri gösterdiği sorulunca, ilk çizdiği kümenin anne kümesi, ikinci çizdiğinin ise çocuk kümesi olduğunu ifade etti.



**Şekil 4.3.** Selin'in Venn şeması gösterimi

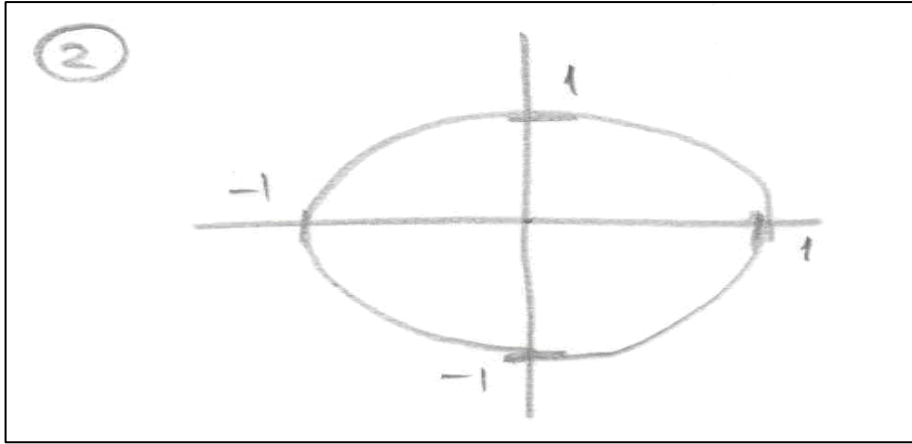
Selin'e yukarıda şekil 4.3 te görülen grafikte tanım kümesinde  $x$  aldığımızda  $y$ ,  $-x$  aldığımızda da değer kümesinde aynı elemana karşılık gelip gelmediği sorulduğunda Selin:

“ımmmmm aslında buna göre benim söylediğimin tersi olmalı yani; tanım kümesindeki bir eleman  $(x)$ , değer

kümesindeki iki elemana gidemez olması lazım ve aynı zamanda değer kümesinde boş eleman kalmayacak şekilde eşleşme olmalıdır. Yani sorumuzda tanım kümesinde  $x=2$  ve  $x=-2$ , değer kümesinde örneğin  $y=1$  diyebiliriz. Dolayısıyla bu bir fonksiyondur” dedi.

Selin in yukarıdaki ifadeleri dikkate alındığında fonksiyon tanımı ile ilgili bazı problemlere sahip olduğu anlaşılmaktadır. Bu problemlerin kalıcı problemler mi yoksa anlık yanılgılar mı olduğunu daha iyi anlamak için başka grafiklerinde Selin tarafından yorumlanması istendi. Şekil 4.4 de ki grafik Selin’e gösterilip bu grafiğin bir fonksiyon gösterip göstermediği sorulduğunda, Selin grafiği görür görmez “Bu bir birim çember grafiği” ifadesini kullandı. Selin daha sonra:

“Önceki tanımlarımızdan yola çıkarsam  $x = 0$  iken  $y$  hem  $-1$  hem  $1$  olduğundan bu grafik fonksiyon ifade etmez” dedi.

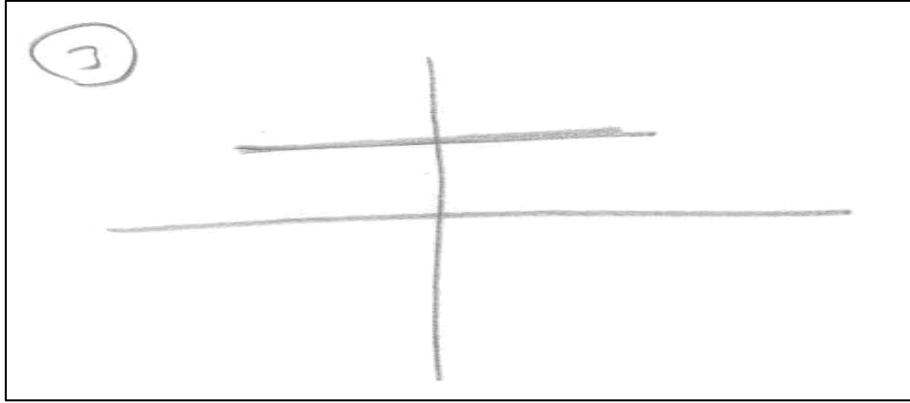


**Şekil 4.4.** Selin’e gösterilen ikinci grafik

Verdiği cevaba bakılırsa Selin’in fonksiyon tanımını bu grafiği yorumlarken doğru şekilde kullandığı söylenebilir. Selin benzer şekilde aşağıda şekil 4.5 de görülen grafiğin de bir fonksiyon gösterdiğini şöyle ifade etti:

“Evet eder. Burada  $x$ ’in bir sürü değeri var  $x=-3$ ,  $x=-1$ ,  $x=4$  değerlerine karşılık  $y$  de tek bir noktaya gitmiş. Bu grafik bir

fonksiyondur. Daha önce söylediğimiz özellikleri sağlıyor.” dedi.



Şekil 4.5. Selin’e gösterilen üçüncü grafik



Şekil 4.6. Selin’e gösterilen 4. grafik

Şekil 4.6 da ki 4.grafiği incelerken Selin şu cümleleri kullandı:

“y hep sıfır hep aynı değere gitmiş.  $x=2$  olsun  $y= 0$  olur.

Bundan dolayı fonksiyon ifade eder” dedi.

Burada Selin  $y'$  nin diğer değerlerini göz ardı ederek fonksiyon tanımını uygulamada var olan problemini bir kez daha göstermiş oldu. Selin’e grafiksel gösterimin yanı sıra sembolik gösterimlerde de problemler yaşamadığını anlayabilmek için  $x = 2$  ve  $y = 2$  ifadelerinin fonksiyon gösterip göstermediği sorulduğunda Selin:

“ $x = 2$  ifadesi bir fonksiyon gösterir. Aynı şeyler. Hayır burada imm..... Evet ifade eder.  $y = 3$  te aynı şekilde... tabii ki fonksiyondur bu”

Buradan anlaşılıyor ki Selin gibi öğrenim gördüğü bölümde çok başarılı olan ve karmaşık ve üst düzey fonksiyon sorularını çözebilen bir öğrenci dahi fonksiyon tanımını farklı durumlara uygulayarak bu durumların fonksiyon ifade edip etmediklerine doğru karar verememektedir. Bu durum Selin’in fonksiyonlarla ilgili bilgilerinin ezbere dayalı olduğunu göstermektedir. Yapılan çeşitli araştırma çalışmalarında (Carlson et al, 2002; Monk, 1992) rutin problemlerde çok iyi olan ve okul başarıları yüksek olan öğrencilerin bile fonksiyon grafiklerinin oluşturulması, grafiklerin yorumlanması ve fonksiyon tanımının uygulanmasında sorunlar yaşadıkları ortaya konulmuştur.

#### 4.1.2. Özel Durum Çalışmasının Analizi

Bu bölümde; yüz yüze yapılan karşılıklı birçok görüşmeyle öğrenciye çeşitli sorular soruldu. Öğrencinin her bir soruyu tek başına yorumlaması sağlandı. Öğrencinin verdiği cevaplar kayıt cihazı ile kaydedilirken, aynı zamanda düşünceleri not edildi. Sorulan sorular öğrencinin dinamik fonksiyonel durumları anlaması ve grafik çizme yeteneğini kavramaya yöneliktir. Öğrenci grafiğini çizdiğinde dikkat edilmesi gereken ayrıntılar öğrenciye soruldu aynı zamanda öğrencinin çizdiği grafiği yorumlaması istenmiştir. Buradaki amaç ilköğretim matematik öğretmen adaylarının analiz edebilme kabiliyetlerini anlamaya yöneliktir. Bunun için zihinsel becerilerine göre verilen cevaplar 5 zihinsel aktiviteye göre yorumlanmıştır.

Başlamadan önce Selin’e araştırma için asıl önemli olan sorulan sorulara verdiği cevapların doğru ya da yanlış olmasından ziyade soruları cevaplarırken kullandığı düşünce yolu olduğu belirtildi.

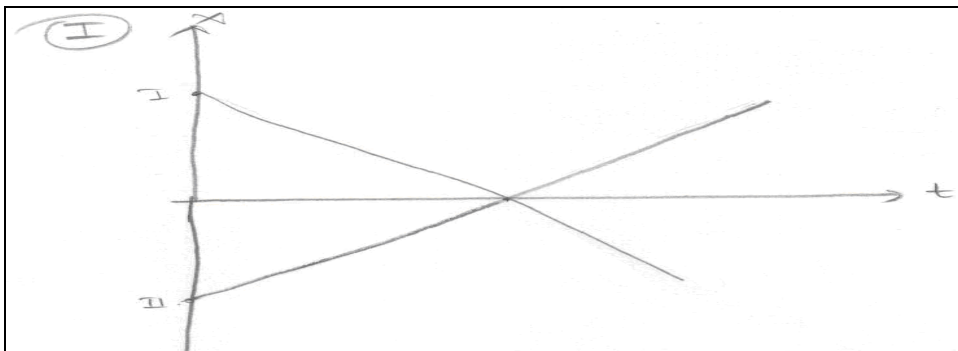
Şekil 4.7 de görülen 1. soruda iki insan arasındaki mesafe zaman grafiğini çizmesi istendi.

Bir odanın zıt köşelerinde duran iki kişi birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar. Her ikisi de yavaşlayarak yürüyor. Birbirlerine yaklaşıyorlar. Sonra birbirlerini geçiyorlar ve her ikisi de hızlanarak köşelere geçiyorlar. Bu iki kişi arasındaki mesafenin zamana bağlı grafiğini çiziniz. Grafiği açıklayınız.

#### Şekil 4.7. Soru 1

Soruyu önce sesli bir şekilde okuyan Selin daha sonra içinden bir kez daha okudu. Dikey eksen çizerek  $x$  diye adlandırdı, sonra yatay eksenini çizerek  $t$  diye adlandırdı. Sonra Selin'e  $X$  olarak adlandırdığının ne olduğu sorulduğunda, Selin şekil 4.8 de görülen grafiği çizerek:

“Mesafe tabii ki. Bu birinci kişi olsun (grafik üzerinde, yukarıdan aşağıya  $x$  eksenine doğru doğrusal azalan bir düz bir çizgi çiziyor), bu ikinci kişi olsun (grafik üzerinde aşağıdan yukarı  $x$  eksenine doğru doğrusal artan bir düz bir çizgi çiziyor). Başlangıçta aralarında belli bir mesafe var daha sonra yavaşladıkları için aradaki mesafe sıfıra yaklaşıyor. Immm.....[Selin bir süre düşündükten sonra] yan yana geldiklerinde aralarındaki mesafe sıfır ( $x$  ekseninde), sonra her ikisi de hızlanmış” dedi.



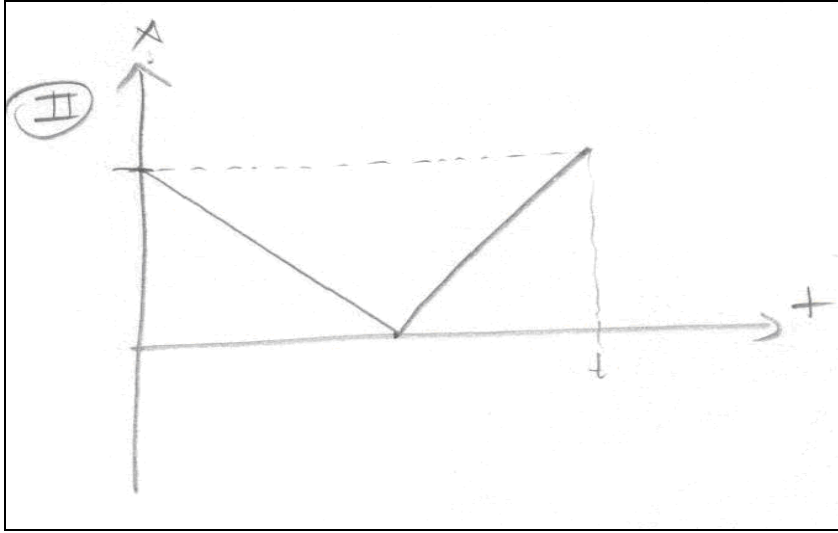
#### Şekil 4.8. Selin'in 1. soru için çizdiği ilk grafik

Çizdiği şekle dikkatlice bakan Selin'e kaç değişkenimiz olduğu sorulduğunda Selin, “iki değişken, yani mesafe ve zaman” karşılığını verdi. İki değişkenin



olduğunu söyleyen Selin'e, bu iki kişi arasındaki mesafe ve zaman grafiğini çizmesi için neden iki ayrı çizgi çizdiği soruldu. Biraz düşündükten sonra Selin şekil 4.9 da görülen 2. grafiği çizme ihtiyacı duydu ve ifadesinde:

“Çizmem gereken direkt zaman ve aralarında mesafe grafiği olmalı. Tekrar bir grafik çizmem gerek. Önce aralarında belli bir mesafe var, birbirlerine yaklaşıncaya aradaki mesafe azalır (grafik üzerinde x ekseninden başlayan y eksenine doğru doğrusal azalan bir çizgi çizdi). Sonra belli bir yerden sonra aynı yerde çakıştıkları için mesafe sıfır olur sonra zıt yerlere geçerler mesafe artar ( y ekseninden başlayan x eksenine doğru doğrusal artan bir çizgi çizdi).”



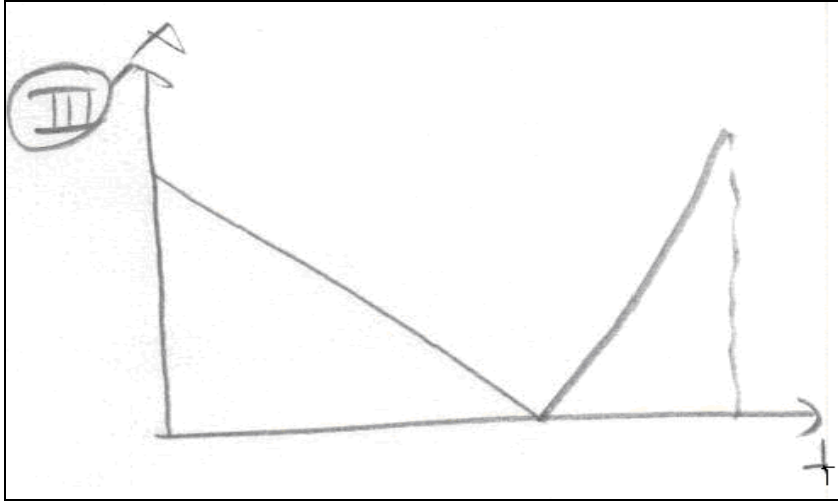
**Şekil 4.9.** Selin'in 1. soru için çizdiği 2. grafik

Selin iki değişkeni kullanarak iki insan arasındaki mesafenin zamana bağlı değişimini tek bir grafikte bu şekilde gösterdi. Selin'e çizmiş olduğu bu grafikte yavaşlayarak birbirine yaklaşma ile hızlanarak birbirinden uzaklaşma durumlarını nasıl açıklayabileceği soruldu. Soruyu tekrar okuyan Selin düşünmeye başladı. Ve gülümseyerek üçüncü bir grafik çizmek istediğini söyledi. Dikey ve yatay eksenleri çizerek dikey eksenini x (mesafe) ve yatay eksenini t (zaman) olarak adlandırdı. Selin yeni çizdiği grafiği (şekil 4.10) şu şekilde açıkladı:

“Yavaşlayarak yürüdükleri için (x eksenini üzerinden t eksenine doğru, doğrusal azalan bir düz bir çizgi çizdi), ilk kısımda ikinciye göre daha çok zaman geçer yani zaman için içine giriyor (t eksenini üzerinden başlayarak x eksenine doğru doğrusal artan bir çizgi çizdi), bundan dolayı hızlanarak yürüdükleri için ikinci kısımda daha dik bir doğru olur” dedi.

Selin’e ikinci kısımda neden daha dik bir doğru çizdiği sorulduğunda Selin:

“Tabii ki ikinci kısımda hızlanarak gittikleri için yani hız arttıkça yolumuz sabit olduğu için zaman daha kısa olacak.” cevabını verdi.



**Şekil 4.10.** Selin’in 1. soru için çizdiği 3. grafik

İkinci grafiği çizdiğinde emin olmasına rağmen 3. grafiğinde kendinden daha emin gözüküyordu. Çizdiği grafik değişkenlerin birbiriyle olan durumunun farkında olduğunu gösteriyor. Carlson’a göre (2002), öğrenci eksenleri doğru etiklediğinde ve sözlü ifadeleri de yaptıklarını desteklediğinde bu durum öğrencinin değişkenlerin farkına vardığını açıkça gösterir.

Selin tüm grafiklerinde eksenleri doğru etikledi. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerde yeterliydi. Soruda iki kişi arasındaki mesafenin zamana bağlı değişimi soruluyordu. Selin, eksenleri çizdi, x eksenini zaman (bağımsız değişken), y eksenini

mesafe (bağımlı değişken) olarak isimlendirdi. Sözlü bir ifadesinde örneğin (1. sorunun 2. grafiğinde), “...birbirlerine yaklaşınca aradaki mesafe kısalır...”. Bu durum onun zihinsel aktivitesinde değişkenlerin farkında olduğunu açıklıyor.

Dahası onun bu davranışları zihinsel aktivitenin değişim yönüne de sahip olduğunu gösteriyor. Detayına indiğimizde çizdiği grafiklerinde artış ve azalış olan bölümleri görmek mümkün ( 2. şekli çizerken), “...birbirlerine yaklaşınca aradaki mesafe azalır sonra belli bir yerden sonra aynı yerde çakıştıkları için mesafe sıfır olur sonra zıt yerlere geçerler mesafe artar” ifadesi de bu durumu destekliyor. Sonuç olarak Selinin sözlü ifadeleri ve çizdiği grafiklerden Carlson’ın zihinsel aktivite aşamalarından 2. olan *değişim yönünün koordinasyonu* aşamasını açıkça gösterdiği anlaşılmaktadır.

Mesafenin zamana göre değişimin de değişim miktarının koordinasyonunu sözlü olarak ifadelerinde ima etmesine rağmen (örneğin “...Yavaşlayarak yürüdükleri için .... daha çok zaman geçer ...bundan dolayı hızlanarak yürüdükleri için .....” ) değişim miktarındaki artış ve azalışları yani değişim miktarının koordinasyonunu çizdiği grafiklerde doğru bir şekilde gösteremedi. İlki uzun, ikincisi kısa iki çizgi kullandı. Yavaşlayarak yürümeyi azalan düz bir çizgi ile, hızlanarak yürümeyi ise artan düz bir çizgi ile ifade etti

Burada “...yavaşlayarak yürüdükleri için daha çok zaman geçer...” ile “...hızlanarak yürüdükleri için daha az zaman alır...” gibi ifadelerinde mesafedeki değişim miktarını hayal edebildiği doğrultusunda ipuçları vermesine rağmen doğru grafiği çizememesi Carlson’un zihinsel aktivite aşamalarından 3. olan *değişim miktarının koordinasyonu* aşamasını tam olarak gösteremediği açıkça görülmektedir.

Açıklamalarına tekrar baktığımızda ‘Yavaşlayarak yürüdükleri için, ilk kısımda ikinciye göre daha çok zaman geçer yani zaman işin içine giriyor, bundan dolayı hızlanarak yürüdükleri için ikinci kısımda daha dik bir doğru olur.’ Art arda sıraladığı cümlelerinde zihinsel aktivitenin değişim oranını yapısını sözel olarak ifade etmesine rağmen çizdiği grafiklerinde bunu kanıtlayamadı. Eğrisel çizgileri kullanmadı. Zamana bağlı mesafenin değişim oranını farklı grafiklerle gösterdi.

Çizdiği grafikleri göz önüne bulduğumuzda İki insan arasındaki mesafe değişimini sürekli koordineli bir şekilde zihninde canlandıramadı. Onların yavaşça birbirlerine yaklaşmalarını azalan düz bir çizgi ile göstermesine rağmen onların hızlıca birbirlerinden uzaklaşmalarını artan düz bir çizgi ile gösterdi.

Bu çizgilerde yavaşlayarak gitmeyi ve hızlanarak gitmeyi nasıl gösterebiliriz diye sorduğumda ‘ilk kısımda ikinciye göre daha çok zaman geçer yani zaman işin içine giriyor, bundan dolayı hızlanarak yürüdükleri için ikinci kısımda daha dik bir doğru olur.’ cevabını verdi. Açık bir şekilde hızlanarak’ ve ‘yavaşlayarak’ yürümek terimleri dinamik bir durumun varlığının belirtisidir. O mesafe zaman grafiklerinde bu iki durumu fark edemedi ve grafiklerinde biri diğerinden kısa birbirleriyle zıt iki çizgi kullandı. Zamana bağlı yavaş yavaş değişimin farkına varamadı. Bundan dolayı zihinsel aktiviteleri bu grafiği çizmesi için yeterli hayal gücünü sağlayamadı.

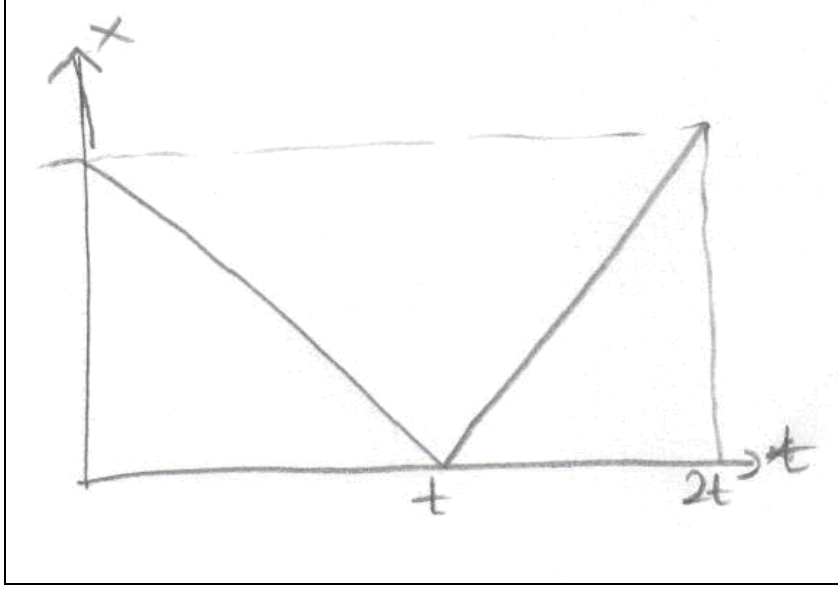
İlk soruya benzer şekilde ikinci soruda da iki durum veriliyor. Yine bu iki kişi arasındaki mesafenin zamana bağlı fonksiyonunun grafiğini ( şekil 4.11 ) tekrar çizmesi isteniyor.

Odanın zıt köşelerinde duran bu aynı iki kişi tekrar birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar. Fakat bu kez tüm yol boyunca her ikisi de aynı hızda ilerliyor, birbirlerine yaklaşıyor ve birbirlerini geçerek köşelere geçiyorlar. Bu iki kişi arasındaki mesafenin zamana bağlı grafiğini çiziniz. Grafiği açıklayınız.

#### **Şekil 4.11. Soru 2**

Selin soruyu okur okumaz kendinden emin bir şekilde hemen şekil 4.12 de ki grafiği çizmeye başladı. Çizdiği grafiği anlatmasını istedim? Selin:

“Bu sefer hız sabit olduğu için aynı zamanda gelip gidecekler.” dedi



**Şekil 4.12.** Selin'in 2. soru için çizdiği grafik

Burada Selin in çizdiği grafikte mesafe zaman arasında lineer bir ilişki olduğu görülüyor. Selin her iki eksenini de doğru etiketledi. Grafiği direkt çizdi. Bundan dolayı bu soruda zamana bağlı mesafe değişimini çizerken zihinsel aktivitelerinin hepsine sahip olduğunu görüyoruz.

Benzer bir şekilde üçüncü soruda da (şekil 4.13) daha önceki ilk iki soru da olduğu gibi bu iki kişi arasındaki mesafenin zamana bağlı fonksiyonunu temsil eden tekrar bir grafik çizmesi isteniyor.

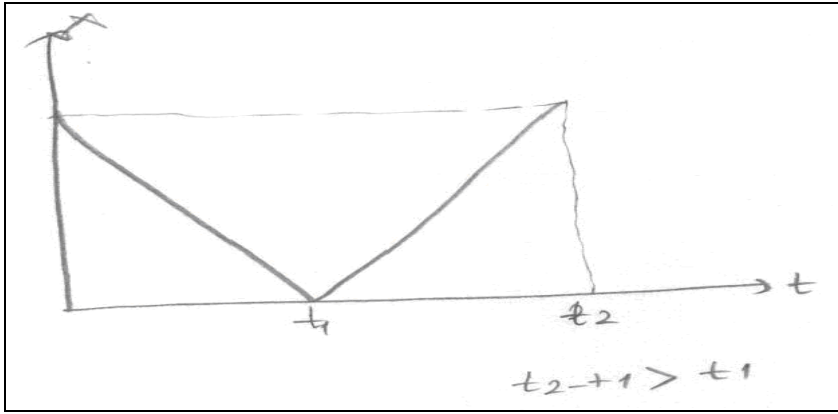
Odanın zıt köşelerinde duran bu aynı iki kişi birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar. Fakat bu kez her ikisi de hızlanarak yürüyor, aralarındaki mesafe azalıyor. Birbirlerine yaklaşıp geçince her ikisi de yavaşlayarak köşelere geçiyorlar. Bu iki insan arasındaki mesafenin zamana bağlı grafiğini çiziniz. Grafiği açıklayınız

**Şekil 4.13.** Soru 3

Soruyu okuyan Selin eksenleri çizdi (şekil 4.14). Dikey eksenini  $x$  (mesafe), yatay eksenini  $t$ (zaman) diye adlandırdı. Sonra Selin grafiği çizerken:

“aralarında belli bir mesafe var hızlanarak gelmişler sonra aralarındaki mesafe sıfıra yaklaşıyor ve yan yana geldiklerinde aralarındaki mesafe sıfır ( x eksenini üzerinde), sonra her ikisi de tekrar yavaşlayarak geri dönmüşler buldukları yere” dedi.

Seline ilk kısımdaki  $t_1$  ile ikinci kısımdaki  $t_2$  arasında nasıl bir fark olduğunu sorduğumda, “ilk kısımda hızlanarak gittiklerinden geçen zaman  $t_1$  iken ikinci kısımda yavaşlayarak gittikleri için geçen zaman daha fazla olmalı. Yani  $t_2 - t_1$  büyüktür  $t_1$  olmalıdır” dedi.



**Şekil 4.14.** Selin'in 3. soru için çizdiği grafik

Seline bu iki doğrunun birbirinden farkı nedir diye sorduğumda ilk kısmın yavaşlayarak, ikinci kısmın hızlanarak gitmelerini temsil ettiğini söyledi. Bunun üzerine Seline yavaşlayarak gitmeyi bu grafikte nasıl gösterdiğini bana anlatmasını istedim. “ikinci kısımdaki  $t_2 - t_1$ , ilk kısımdaki  $t_1$  den büyüktür, çünkü ikinci kısımdaki zaman daha fazla” dedi.

Çizdiği grafik değişkenlerin birbiriyle olan durumunun farkında olduğunu gösteriyor. Selin, eksenleri çizdi, x eksenini zaman ( bağımsız değişken), y eksenini mesafe ( bağımlı değişken) olarak isimlendirdi. Eksenleri etiketlemesi zihinsel aktivitesinde değişkenlerin farkında olduğunu gösteriyor. Selin bu soruda mesafe kelimesini kullanmadı hızdan mesafeye geçişi zihninde yaptı.

Dahası onun bu davranışları zihinsel aktivitenin değişim yönüne de sahip olduğunu gösterir. Detaylı incelediğimizde, çizdiği grafiklerde artış ve azalış olan bölümleri görmek mümkündür. Sözlü ifadesinde de “aralarında belli bir mesafe var hızlanarak gelmişler sonra aralarındaki mesafe sıfıra yaklaşıyor ve yan yana geldiklerinde aralarındaki mesafe sıfır ( x eksenini üzerinde), sonra her ikisi de tekrar yavaşlayarak geri dönmüşler buldukları yere” bu durumu destekliyor. Sonuç olarak onun cümleleri ve grafiklerinden bağımsız değişkenin değişimini düşünürken bağımlı değişkenin değişimi düşünmesi değişim yönünün farkında olduğunu açıkça gösteriyor.

Mesafe değişimini sözlü olarak ifade etmesine rağmen örneğin “...ilk kısımda hızlanarak ..... , ikinci kısımda yavaşlayarak gittikleri için zaman daha fazla olmalı” derken, burada “...yavaşlayarak yürüdükleri için daha çok zaman geçer...” ile “hızlanarak yürüdükleri” ifadelerinde mesafe değişimini hayal edebildi. Ancak değişim miktarındaki artış ve azalışları doğru şekilde grafikte gösteremedi. Tekrar baktığımızda “...ilk kısımda hızlanarak gittiklerinden geçen zaman  $t_1$  ise ikinci kısımda yavaşlayarak gittikleri için zaman daha fazla olmalı. Yani  $t_2 - t_1$  büyüktür  $t_1$  olmalıdır”. Art arda sıraladığı cümlelerinde zihinsel aktivitenin değişim oranını yapısını sözel olarak ifade etmesine rağmen çizdiği grafiklerinde bunu kanıtlayamadı. Eğrisel çizgileri kullanmadı. Zamana bağlı mesafenin değişim oranını farklı grafiklerle gösterdi.

Çizdiği grafikleri göz önüne bulduğumuzda İki insan arasındaki mesafe değişimini sürekli koordineli bir şekilde zihninde canlandıramadı. Onların hızlıca birbirlerine yaklaşmalarını azalan düz bir çizgi ile göstermesine rağmen onların yavaşça birbirlerinden uzaklaşmalarını artan düz bir çizgi ile gösterdi.

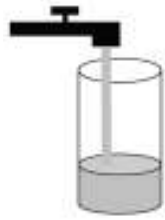
Seline birbirinin aynı gibi görünen bu iki doğrunun birbirinden farkı nedir diye sorduğumda, ilk kısımda yavaşlayarak, ikinci kısımda hızlanarak gitmelerini temsil ettiğini söyledi. Bunun üzerine Seline yavaşlayarak gitmeyi bu grafikte nasıl gösterdiğini bana anlatmasını istedim. İkinci kısımdaki  $t_2 - t_1$ , ilk kısımdaki  $t_1$  büyüktür, ikinci kısımdaki zaman daha fazla dedi. Açık bir şekilde “hızlanarak” ve “yavaşlayarak” yürümek terimleri dinamik bir durumun varlığın belirtisidir. O

mesafe zaman grafiklerinde bu iki durumu fark edemedi ve grafiklerinde biri diğerinden kısa birbirleriyle zıt iki çizgi kullandı. Zamana bağlı yavaş yavaş değişimin farkına varamadı. Bundan dolayı zihinsel aktiviteleri bu grafiği çizmesi için yeterli hayal gücünü sağlayamadı. Selin bu soruda zihinsel aktivitelerin 2.si olan *değişim yönünün koordinasyonuna* sahiptir. Carlson (2002) ve Saldanha & Thompson (1998) 'a göre bir nesnenin hayal edilebilmesi için dinamik durumların zihinsel rolü üzerine odaklanmak gerekir. Burada nesne deyince matematiksel nesne örneğin değişkenlerdir.

İlk görüşmeden sonra Selinle diğer soruları cevaplamak üzere iki gün sonra ikinci görüşmeyi yaptık. Sorulara başlamadan önce Selin ilk görüşmedeki sorular hakkında kaygılı olduğunu söyledi. Ben tekrar burada yaptığım görüşmelerdeki amacımın sorulara verdiği cevabın doğru ya da yanlış olmasından ziyade onun düşünce becerilerini anlamak için uğraştığımı söyledim.

İkinci görüşme soruları dinamik fonksiyonel durumlarla ilgilidir. Burada verilen durumları okuyup grafiğini çizmesi ve bu grafiği açıklanması istenmiştir. Bu bölümün ilk sorusu şekil 4.15 te verilmiştir.

Başlangıçta boş olan bu tanka sabit oranda su doldurulduğunu hayal et. Tankın içerisindeki su miktarı ile yükseklik arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



**Şekil 4.15.** Soru 4

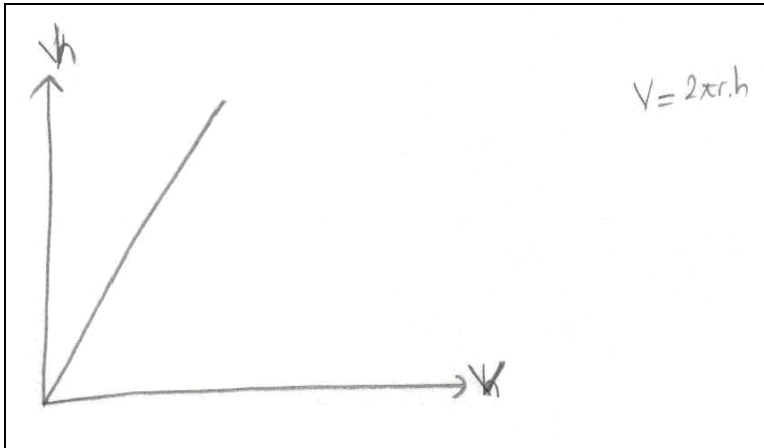
Selin soruyu okuduktan sonra dikey eksene  $h$  (yükseklik) yatay eksene  $v$  (su miktarı) olarak isimlendirerek şekil 4.16 da ki grafiği çizmeye başladı. Selinin eksenleri rastgele mi ya da belli bir yapıya göre mi isimlendirdiğini öğrenebilmek için Seline neden dikey eksene  $h$  yatay eksene  $v$  dediği sorulduğumda “Daha kolay



olur herhâlde” dedi. Bunun üzerine neden daha kolay olduğunu açıklaması istenince Selin:

“Sabit oranda su akıtıldığı için su miktarı belirli bir oranda olacak ondan dolayı.  $V$  sabit olduğu için  $x$  ekseninde olmalı. Sonra gittikçe yükseklik artacak. Silindirin hacmi  $2\pi r h$  yarıçapına da bağlı düzgün bir artış olur. Kaptaki düzgün dolayısıyla düzgün bir artış, doğrusal olmalı. Yani su miktarı arttıkça yükseklik de artacak” dedi.

Seline hacim formülünü yazmasındaki temel amacın ne olduğu sorulduğunda “acaba su miktarı ( $v$ ), yükseklikten ( $h$ ) dan başka değişkenlere bağlı mı diye yazdım” dedi.



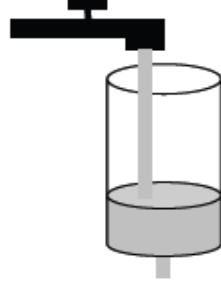
**Şekil 4.16.** Selin’in 4. soru için çizdiği grafik

Burada Selin in çizdiği grafikte yükseklik su miktarı arasında lineer bir ilişki olduğu görülüyor. Selin her iki eksenini de doğru etiketledi. Bağımsız değişkeni su miktarı, bağımlı değişkeni yükseklik olarak belirledi buradan bağımsız değişkenin değişimini düşünüyorken bağımlı değişkenin değişimi düşünmesi değişim yönünün farkında olduğunu açıkça gösteriyor. Su miktarına bağlı yükseklik değişimini doğrusal olarak hayal etti. Birbiri ardı sıra kullandığı sözel ifadeleriyle grafiği doğru çizdi. Grafiği hemen çizmesi zihninde bunu hızlıca tasarladığı anlamına geliyor yani

ani değişime de sahip olduğunu görüyoruz. Bundan dolayı bu soruda su miktarı ile yükseklik değişimini çizerken zihinsel aktivitelerinin 5 ine de sahip olduğunu görüyoruz.

Benzer bir su akıtma sorusu (şekil 4.17) ikinci görüşmenin ikinci sorusu olarak Seline soruldu.

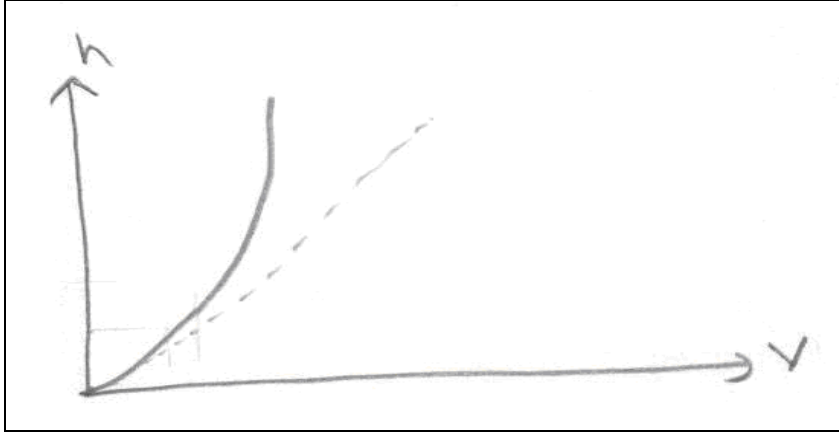
Tankın tam alt kısmında ortasında delik var. Tank başlangıçta boş ve sabit bir hızla su ile doluyor. Tankın içerisindeki su yüksekliği ile tanktan ayrılan su miktarı arasında belirli bir oran var. Tankın içerisindeki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



#### Şekil 4.17. Soru 5

Soruyu iki kez okuyan Selin, “yükseklik arttıkça akış hızı da artacak” dedi. Bu cümleyi ile ne anlatmak istediği sorulduğunda. Selin “Suyun potansiyel enerjisi direkt kinetik enerjiye dönüşecek” dedi. Bu cevabı duyunca bu düşüncesini sorunun içindeki herhangi bir cümleden çıkarıp çıkarmadığını sordum. Selin:

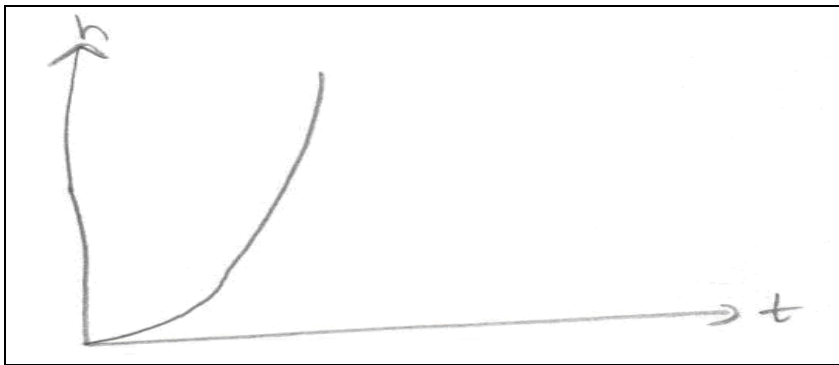
“Fizik bilgilerimden “yükseklik arttıkça kaptan ayrılan su miktarı artacak bundan dolayı akış hızı da artacak. Belli bir miktarda su dışarı akıtılıyor. Doğrusal olmaz yapmak istediğim tanktan ayrılan su miktarı ( $v$ ) arttıkça, su yüksekliği ( $h$ ) biraz daha az artması... immmmm. Eski grafiğim düz idi bu biraz daha içe olmalı burada deliği de hesaba kattım evet”.



**Şekil 4.18.** Selin'in 5. soru için çizdiği ilk grafik

Selin şekil 4.18 de ki grafikte kaptan ayrılan su miktarı ile yükseklik arasındaki ilişkiyi gösterdi. Tankın içindeki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkinin nasıl olduğu sorulduğunda, Selin önce düşündü sonra yeni bir grafik çizmek için eksenleri etiketledi (Şekil 4.19) x eksenine zaman y eksenine tankın içindeki su miktarı dedi sonra:

“...ımm sabit bir artışı olmaz. Çünkü bu tanktan belli bir miktar su dışarı akıyor. Bu yüzden direkt bir artış yani doğrusal olmaz. İmmm böyle olmalı [şekil 4.19 da ki grafiği göstererek]”.

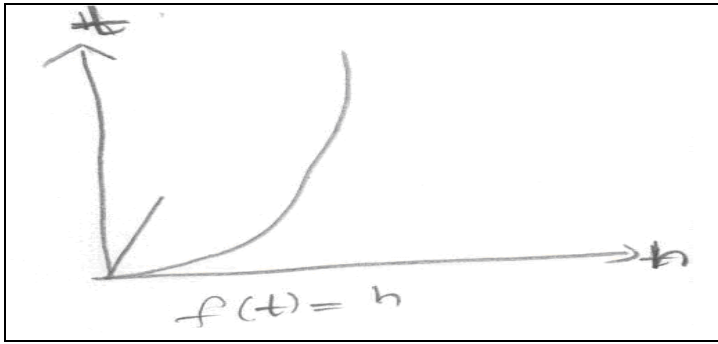


**Şekil 4.19.** Selin'in 5. soru için çizdiği 2. grafik

Bu çizimden sonra Seline “peki parabol neden böyle de tersi değil?” diye sorduğumda Selin:

“Yapmak istediğim zaman (t) artıkça, su yüksekliğin (h) ona göre biraz daha az artacak. Yani çizdiğimin tam tersini yapmalıydım evet değişkenlerin yerini değiştirirsem daha rahat olacak.”

Bu yönlendirici sorudan Selin doğru grafiğin bunun tam tersi olacağını anladı ancak grafiğin tersini bilmediği için değişkenlerin yerini değiştirdi (şekil 4.20). Değişkenlerin yerlerini neden değiştirdiğini sorduğumda Selin: “daha rahat çizmek için” dedi.



**Şekil 4.20.** Selin’in 5. soru için çizdiği 3. grafik

Çizdiği grafik hakkında yorum yapabilmesi için Seline “Burada hangisi hangisinin fonksiyonu” diye sorduğumda “Yüksekliğin (h) ın zamana (t) ye bağlı değişimi” dedi. Bunun üzerine “Burada zaman mı yüksekliğin fonksiyonu, yükseklik mi zamanın fonksiyonu” diye sorduğumda yüksekliğin zamanın bir fonksiyonu olduğunu ifade etti. Selinin bu konudaki sahip olduğu bilgiden emin olabilmek için şu soruyu sordum: “y x’in bir fonksiyonu denildiği zaman ya da t k’nın bir fonksiyonu denildiği zaman nasıl gösterirsin?” Bu soruya karşılık Selin aşağıda şekil 4.21 de ki ifadeleri yazdı.

$y = f(x)$ $f(x) = y$	$f(t) = h$ $f(h) = t$
-----------------------	-----------------------

**Şekil 4.21.** Selin'in "y x'in bir fonksiyonu ya da t k'nın bir fonksiyonu" ifadelerinin sembolik gösterimi

O halde buradan hareketle  $F(t)=h$  için,  $h$  t'nin bir fonksiyonudur. Burada Selin'in zihni zamana bağlı yükseklik değişimini düşüncesine odaklandığı için bir türlü çizdiği son grafikteki  $f(h)=t$  yi kabullenip yazamadı.

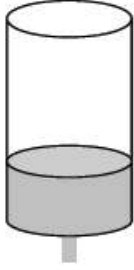
Selin değişkenlerin farkında bunun yanında değişim yönünü sözlü olarak ifade edebiliyor ilk olarak zihninde tasarladığı hayal olan su yüksekliği ile su miktarı arasındaki ilişkiyi çizdiği grafikte gösterdi. Burada eksenleri çizdi x eksenine su miktarı y eksenine yükseklik diye adlandırdı. 'Suyun potansiyel enerjisi direkt kinetik enerjiye dönüşecek' kullandığı sözel ifadesinde fizik dersinde öğrendiği bu bilgiyi kullanıyordu buradan Selin yorumlarını biraz formüle dayalı yaptığını anlıyoruz. Örneğin 'yükseklik arttıkça kaptan ayrılan su miktarı artacak bundan dolayı akış hızı da artacak. Belli bir miktarda su dışarı akıtılıyor. Doğrusal olmaz yapmak istediğim su miktarı (v ) arttıkça, su yüksekliği (h) biraz daha az artması imk. Eski grafiğim düz idi bu biraz daha içe olmalı evet.'

Sonra su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi nasıl grafikte çizeriz dedim 'Yapmak istediğim zaman (t), arttıkça tankın içindeki su miktarının (h ) ona göre biraz daha az artacak.' Selin grafiği tamamladı. Sonra çizdiği parabolün neden tersi değil de öyle olduğunu sordum? Bu yönlendirici sorudan Selin doğru grafiğin bunun tam tersi olacağını anladı ancak grafiğin tersini bilmediği için değişkenlerin yerini değiştirdi. Bunun üzerine Selin'e "Çizdiği en son grafikte zaman mı yüksekliğin bir fonksiyonu yoksa yükseklik mi zamanın bir fonksiyonu?" diye sordum. Selinin çizdiği en son grafikte x ekseninde h, y ekseninde t vardı. Bağımlı değişken t, bağımsız değişken h idi. Burada Selin zihni zamana bağlı yükseklik değişimini düşüncesine odaklandığı için bir türlü çizdiği son grafikteki  $f(h)=t$  yi kabullenip

yazamadı. Selin kıvrak zekâsını göstererek grafiği doğru çizmişti ama sorduğum sorularda tereddütler yaşadığı için zihinsel aktivite 4'e sahiptir.

İkinci görüşmenin son sorusu yine dinamik fonksiyonel olaylarla ilgili olarak aşağıda şekil 4.22 de verilmiştir.

Tankın altında tam ortasında bir delik olduğunu düşün. Tank tam dolu iken delik açılıyor. Su tanktan ayrılıyor. Tanktan ayrılan su ile su yüksekliği arasında bir oran var. Tankın içerisindeki su miktarı azalıyor. Tankın içindeki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



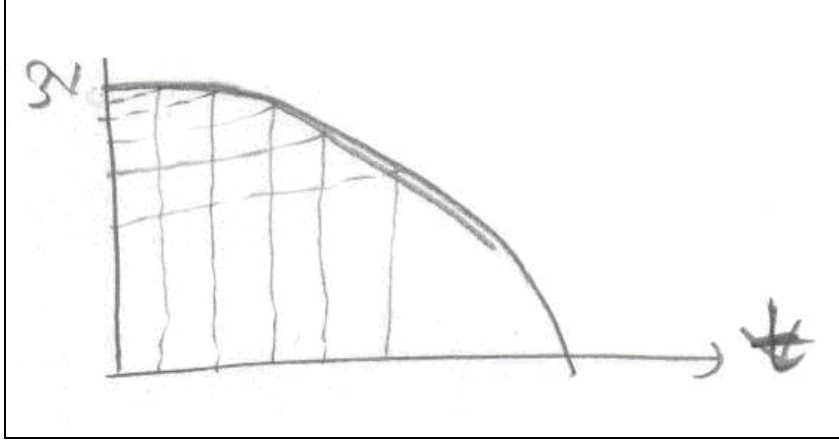
#### Şekil 4.22. Soru 6

Selin bu soruyu iki kez okuduktan sonra bir öncekinden daha karışık olduğunu söyledi. Biraz düşündü. Ben de düşüncelerini sözlü ifadelerle kullanmasını istedim. Selin:

“İmm burada yükseklik arttıkça tankın akış hızı artar, burada yükseklik azaldığı için akış hızı da azalacak, su miktarı ile zaman grafiği isteniyor. Eksenleri çizelim, dikey eksene su miktarı ( $v$ ) yatay eksene zaman ( $t$ ) olsun belirli bir seviyeden başlıyor tabii ki doğrusal bir azalma olmayacak” dedi.

Neden böyle olduğunu sorduğumda ‘çünkü yükseklik azaldığı için akış hızı da azalacak ve ayrılan su miktarı biraz daha az olacak diğerine göre doğrusal bir azalma olmayacak parabolik olmalı zamanla tanktan ayrılan su miktarı daha az ve

zamanla hacimdeki azalma da daha az olacak. Başlangıçta kabı 3V kabul edersek bu zamanla azalarak azalacak.’dedi Selin.



**Şekil 4.23.** Selin’in 6. soru için çizdiği 1. grafik

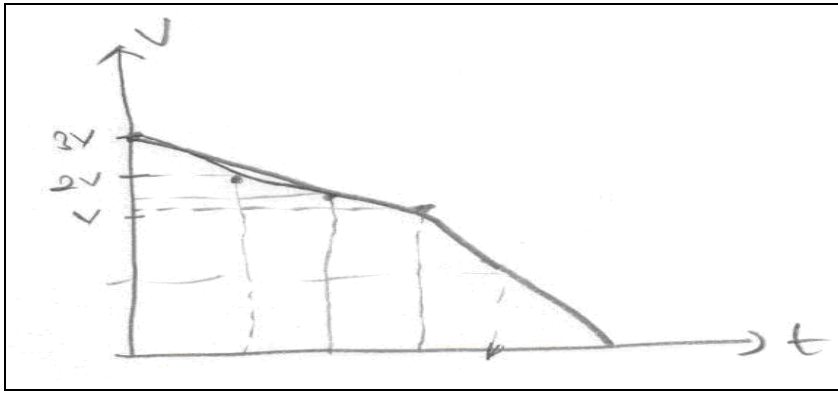
Grafiği (Şekil 4.23) çizdikten sonra Seline “Bu grafikte onu gösteriyorsun peki hacmin zamanla daha da azalarak düştüğünü ve ya su miktarının azalarak düştüğünü matematikten anlamayan birine bunu nasıl anlattırısın yani bu grafikte gösterdiğini nasıl izah edersin ?” diye sordum. Böylece Selinin gerçekte zihninden hangi düşünceden yola çıkarak bu yorumları yaptığını öğrenebilecektim. Selin:

“Bu suyun belirli bir potansiyel enerjisi vardır. Kap boşalırken Potansiyel enerji kinetik enerjiye dönüşecek.  $E_p = E_k$  olacak buradan potansiyel enerji  $mgh$  dır. Kinetik enerji  $\frac{1}{2} mv^2$  dır.  $m$  ler birbirini götürür.  $2gh = v^2$  bu da yükseklik azalırsa hızda ona bağlı olarak azalacağı anlamına gelir.”

$$E_p = E_k$$
$$mgh = \frac{1}{2} mv^2$$
$$2gh = v^2$$

Buradan öğrencinin yaptığı “Tanktan ayrılan su ile su yüksekliği arasında bir oran var” ifadesine yaptığı yorumu formüle bağlı olarak belirttiğini rahatlıkla anlıyoruz. “peki dediğin şeyi yani zamanla ayrılan su miktarı yavaşlayarak azalmaya başlayacak şimdi bunu kabul ediyorum peki bu grafiğin onu gösterdiğini nasıl ispatlarsın ?” diye sordum Selin:

“ilk önceki ayrılan su miktarı daha azmış gibi gözüktü grafikte söylediğimle çelişiyor bir tane daha çizmem lazım .” dedi.

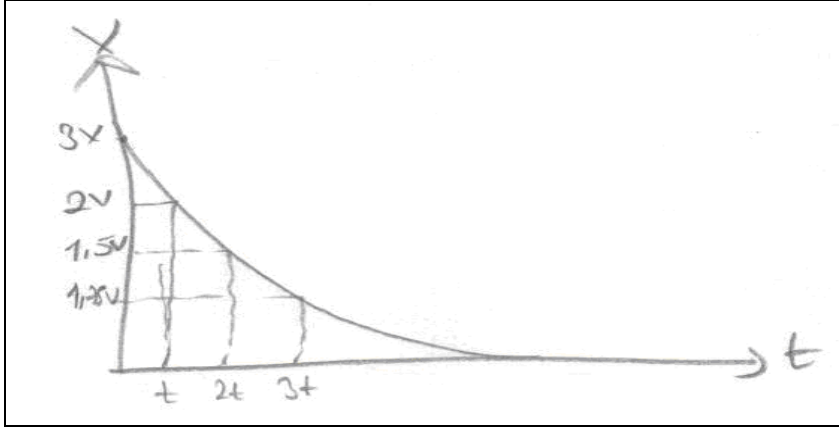


**Şekil 4.24.** Selin’in 6. soru için çizdiği 2. grafik

Selin düşünceleri doğrultusunda şekil 4.24 de ki grafiği çizdi ancak önceki grafiği ile karşılaştırdığında ikisinin de aynı olduğunu gördü. Bunun üzerine şu ifadeleri kullandı: “...imm değişkenlerin yerlerini mi değiştirsem acaba. Sonunda buldum evet” dedi. Şekil 4.25 de ki grafiği çizen Selin yine eksenleri çizdi adlandırdı çizimi yaparken şu şekilde anlattı:

“burası  $t = 0$  iken  $3v$  olsun,  $t$  anında  $2v$  olsun,  $2t$  anında bu azalma miktarı daha da azalmıştır  $1,5 v$  olsun,  $3t$  zamanında bu daha da azalır  $1,25v$  olsun. Zamanı aynı şekilde arttırdığımda, hacimde azalmalar daha da azalıyor.”



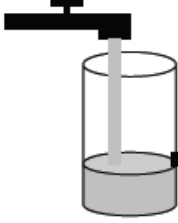


**Şekil 4.25.** Selin'in 6. soru için çizdiği 3. grafik

Selin her iki eksenini de doğru etiketledi. x eksenini bağımsız değişken zaman(t) y eksenini bağımlı değişken su miktarı(v) olarak adlandırdı. Selin'in değişim yönünün farkında olduğunu şu sözlü ifadesinden anlayabiliriz. "... yükseklik azaldığı için akış hızı da azalacak ve ayrılan su miktarı biraz daha az olacak diğerine göre doğrusal bir azalma olmayacak parabolik olmalı zamanla tanktan ayrılan su miktarı daha az ve zamanla hacimdeki azalma da daha az olacak. Başlangıçta kabı 3V kabul edersek bu zamanla azalarak azalacak.' ancak Selin bu yorumunu sorudan çıkarmadı çünkü azalarak azalmanın nasıl olduğunu anlatmasını istediğimde 'Bu suyun belirli bir potansiyel enerjisi vardır. Potansiyel enerji kinetik enerjiye dönüşecek.  $E_p = E_k$  olacak buradan potansiyel enerji  $mgh$  dir. Kinetik enerji  $\frac{1}{2}mv^2$  dir. m ler birbirini götürür.  $2gh = v^2$  bu da yüksekliğe azalırsa hızda ona bağlı olarak azalacağı anlamına gelir" dedi.

Selin azalarak azalan, artarak artan gibi kavramları zihninde çabuk düşünüp doğru yorumluyor ama grafiğe bunu tam anlamıyla emin olarak çizemiyor. Örneğin; 1. grafiği çizdikten sonra düşünüp çizdiği ikinci grafikte yine aynı 1. grafiğe benziyordu bunun yanında sorulan Yönlendirici sorulara karşı Selin doğru grafiğin çizdiği grafiğin tersi olduğunu anladı önceki soruda yaptığı gibi değişkenlerin yerini değiştirmek istedi ancak biraz düşününce noktalı çizimler kullanarak doğru grafiği buldu. Burada *miktar değişim koordinasyonuna* sahip olduğunu görüyoruz ve zihinsel aktivite 3'te olduğunu söyleyebiliriz.

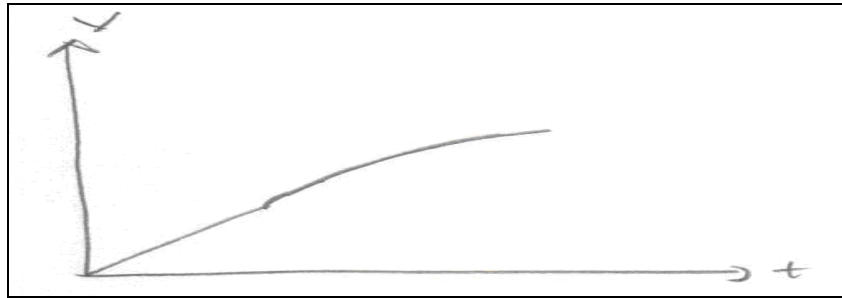
Su tankının kenarında küçük bir delik var. Şişenin başka hiçbir yerinde delik yok. Tank başlangıçta boş sonra sabit bir hızda su ile doluyor. Tanktan ayrılan su miktarı ile delik üzerinde su yüksekliği arasında belirli bir oran var. Tankın içerisindeki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



#### Şekil 4.26. Soru 7

Selin önce eksenleri çizdi (Şekil 4.27) dikey eksen su miktarı ( $v$ ), yatay eksen zaman ( $t$ ) diye etiketledi. “Önce deliğe kadar sabit bir artış olacak, delikten sonra bu artış miktarında bir azalma olacak” dedi. Böyle düşünmesinin nedenini sordum. Selin:

“bu delik tankın kenarında olduğu için bu deliğe kadar su miktarı ile zaman arasında doğrusal bir artış olacak yani hiçbir şey etkilemeyecek doluşunu. Deliği geçtikten sonra hem su içine aktığı için hem de delikten dışarıya su aktığı için bu içindeki su miktarı daha az bir artışla devam edecek.”



Şekil 4.27. Selin'in 7. soru için çizdiği 1. grafik

Selin bu grafiği doğru çizdi. Arka arkaya doğru cümleler kullanıp şekli de hemen çizmesi 5 zihinsel aktiviteye de sahip olduğunu gösterir.

Üçüncü görüşmemiz ikinci görüşmeden 2 gün sonra oldu. Seline sorulan sorular bir önceki görüşmedekilerle benzer nitelikteydi. Burada çeşitli durumlar verilerek iki değişkenli eş zamanlı değişim durumlarını yorumlayarak grafiklerini çizecekler ve böylece grafiklere bakarak iki değişkenli değişimlerin uslanılması konusunda ne kadar bilgi sahibi olduğunu anlayabileceğiz. Aşağıda bu görüşmenin ilk sorusu geliyor.

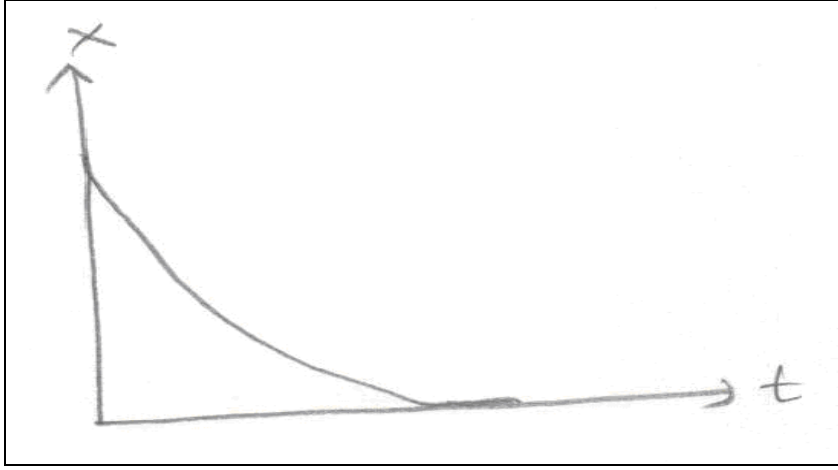
X kimyasalının %5 i her saniyede Y kimyasalına dönüşüyor. Y kimyasalı başka bir maddeye asla dönüşmüyor. X kimyasalının tamamı dönüşüme başlıyor. X kimyasalının miktarı ile zamana bağlı değişimini gösteren bir grafik çiziniz.

#### Şekil 4.28. Soru 8

Soruyu iki kez dikkatlice okuyan Selin eksenleri çizdi (şekil 4.29) yatay eksene zaman (t) dikey eksene x kimyasalını (x) yazdı sonra:

“Önceki miktarımız 100 olsun bunun yüzde 5 i 20 olur. 100’ün 20’si y ‘ye dönüşüyor geriye kalan miktar azaldığı için y ye dönüşen miktar da azalıyor bundan dolayı bu oran da azalacak zamana bağlı olarak azalan bir dönüşüm olmalıdır.” Dedi.

Grafiği çizdikten sonra x in hepsi dönüşüme katılıyor mu diye sordum. Selin: “tâbii ki soruda x kimyasalı y kimyasalına dönüşüyor ama y kimyasalı başka bir maddeye dönüşmüyor diyor” dedi.



**Şekil 4.29.** Selin'in 8. soru için çizdiği grafik

Selin soruyu okudu yorumladı ve doğru grafiği direkt çizdi. Buradan Selinin 5 zihinsel aktiviteye sahip olduğunu görüyoruz.

Benzer bir şekilde yeni 9. soru aşağıdaki şekil 4.30 da görüldüğü gibidir. Burada x kimyasalının değişim miktarı, ortalama hız ve ani hız değişimini hayal ederek zamana bağlı değişiminin grafiğini çizecektir.

X kimyasalının %5 i her saniyede Y kimyasalına dönüşüyor. Y kimyasalının %5' i de her saniyede X kimyasalına dönüşüyor. X kimyasalının tamamı dönüşüme başlıyor.

a) X kimyasalının değişim miktarının zamana bağlı değişimini gösteren bir grafik çiziniz.

b) Y kimyasalının değişim miktarının zamana bağlı değişimin gösteren bir grafik çiziniz.

**Şekil 4.30.** Soru 9

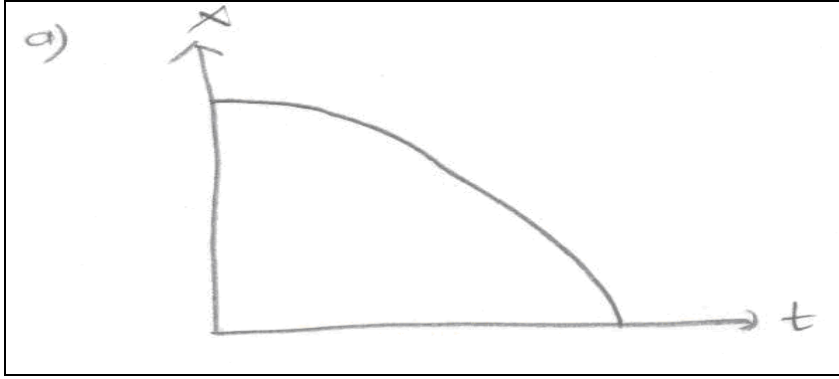
Soruyu okuyan Selin önceki sorudan daha karışık olduğunu söyledi. Kendinden emin gözüküyordu ve grafiği (şekil 4.31) çizmeye başladı. Selin:

“belirli bir x miktarı var 1. saniyede bu y ye dönüşüyor ikinci saniyede bu y miktarı yeniden x e dönüşüyor, bu dönüşüm hep sürüyor başlangıçta  $x=100$  alırsam, 100'ün yüzde 5 i 20 olur.”

100 ün yüzde 5 i 20 mi midir diye sorduğumda Selin:

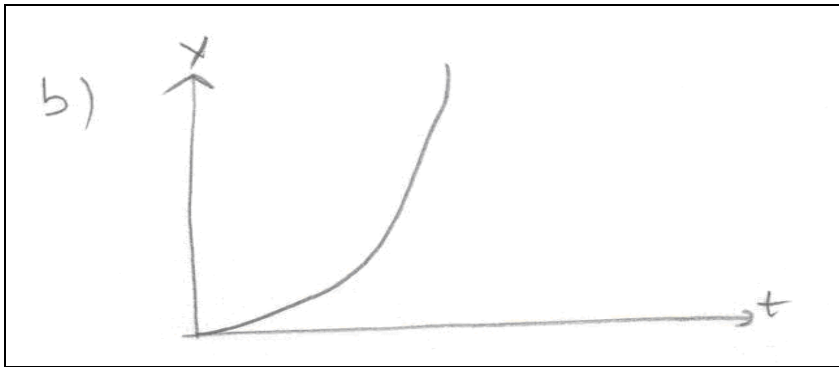
“ay evet ...ımm 5 tir. Evet, y 5 oldu. Şimdi y dönüşecek, 5’in yüzde 5 i 1 olur bu da dönüşecek oda 96 olur. Tekrar 96 in yüzde 5 i y ye dönüşecek 4,75 gibi.”

Peki, dönüşümün grafiği nasıl olur diye sorduğumda Selin: “Azalama olur. X kimyasalı artarak azalıyor. Evet.”



**Şekil 4.31.** Selin’in 9. sorunun (a) bölümü için çizdiği grafik

Sonra y kimyasalının zamanla değişimi nasıl olur? Diye sordum Selin: “y kimyasalı önce yoktu sıfırdan başlıyor yavaş yavaş x den y ye, y den x e dönüşüm olurken y miktarında da artış oluyor bence artan bir artış olacak”



**Şekil 4.32.** Selin’in 9. sorunun (b) bölümü için çizdiği grafik

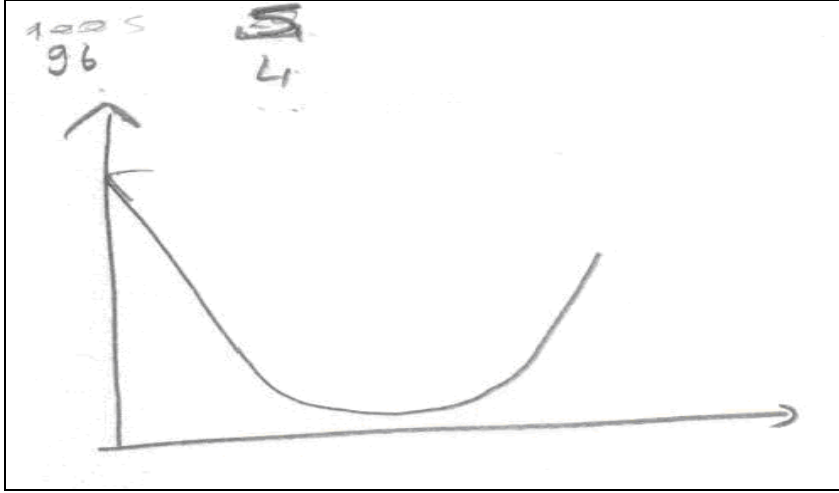
Selin y miktarının artacağını düşünerek bu grafiği (şekil 4.32) çizdi. Sonra Selin'e "çizdiğin grafikte bu noktalarda bütün x kimyasalı y ye dönüşüyor demişsin, dönüşebilir mi?" diye sorduğumda Selin: "hayır bütün x miktarı y ye dönüşemez çünkü y x e de dönüşüyor o halde burası sıfır da olmaz yeni bir grafik çizeyim. x miktarı azalıyor bu değer sabitlenmez" dedi. 'Neden ?' diye sordum Selin:

"sürekli azalıyor hiç bir zaman yüzde 5, ikinci yüzde 5 e eşit olmaz x eski miktarına dönmediği için belirli bir noktada sabitlenmez"

"Sabitlenmezse peki nereye gider?" diye sordum. Sessiz kaldı düşünüyordu. Soruyu tekrar okudu. Bunun üzerine tam olarak durumu net düşünmesi için şu cümleleri kullandım. "Peki, şöyle düşünelim başlangıçta senin 100 benim 0 liram olsun. Sen paranın yüzde 5 ini yanı 5 lirayı bana ver ben de sana 5 liranın yüzde 5 ini yanı 1 lirayı vereyim böylelikle senin paran 96 benim param 4 olur. Sonra sen 96 liranın yüzde 5 ini 4.80 ni bana ver benim param 8.80 olur. Senin paran 91.20 kalır. Zamanla senin paran azalırken benim param artıyor. Senin parandaki değişim önce 5 azalırken sonra 4.80 azalıyor. Benim paramdaki değişim önce 5 artıyorken sonra 4.80 artıyor." Dedim. Selin: "Acaba belirli bir noktada eşitlenirler mi ?" dedi.

"O para meselesinde zamanla ben sana vermeme rağmen benim param daha da artıyor seninki düşüyor benim sana verdiğim miktarda çoğalmaya başlıyor böyle bir durumda ne olur? Şu an kafanda resmettiğin şekil nasıl bir şekil?" Diye sorduğumda Selin: "Şu an düşünemiyorum sabitlenmez bu değer acaba belirli bir sureden sonra artış olur mu?" Dedi. Düşün ki öyle bir noktaya geliyoruz senin 55 liran kalıyor sürekli bana verdiğin için benim 45 senin ki iniyor 52 benim ki 48 sonra birbirimize verdiğimiz paralar denk oluyor mu?" Dedim. Selin: "Çok yaklaşıyor birbirine ama eşit olmaz."dedi. "Peki, bu eşit olmayacağını nasıl gösterirsin zamanla" dediğimde Selin:

"Imm ( dikey ve yatay eksenini çizdi). X' in değişimi önce azalacak sonra belli bir noktadan sonra artacak. Aslında tam anlamıyla düşünmekte zorlanıyorum böyle olabilir şekil." dedi.



**Şekil 4.33.** Selin'in 9. sorunun (a) bölümü için çizdiği 2. grafik

Grafiği (şekil 4.33) çizdikten sonra Seline “X yarı miktarından daha düşük seviyeye ulaşır mı? 100 gram ise 50 gramın altına düşer mi x?” Diye sordum. Selin: “Düşmez bence” dedi. “Ama bu çizdiğin grafikte düştü.” Dedim.

Burada Bağımsız değişken (zaman ) x eksenine, bağımlı değişken ( x ) diye y eksenine yazdı. Ancak burada x kimyasalının miktarı değil x kimyasalının değişim miktarı soruluyordu. Selin bunun farkına varamadı. Zaten dikey ekseni x in değişim miktarı yerine x yazarak isimlendirdiğini görüyoruz.

Dönüşüm konusunda daha iyi hayal edebilmek için kafasında hesaplar yaptı. Sonra x kimyasalının artarak azaldığını söyleyerek grafiğini çizdi. Zihninde düşündüklerini öğrenmek için sorulan yönlendirici sorularla x kimyasalının y kimyasalı ile dönüşümünü belli bir noktaya kadar hayal edebildi ama tam olarak x kimyasalının nereye kadar azalacağını *değişim miktarının koordinasyonunu ve ani değişim yönünü* belirleyemedi. Öğrenci statik bir durumda verilen yapıyı dinamik halde düşünemedi. Selin burada hem a için hem de b için çizdiği grafikte zihinsel aktivite 2'ye sahiptir. Carlson (2002), Monk (1994) ve Thompson (1994b) a göre iki değişkenli eş zamanlı değişimler hayal edilmesi için çok hızlı düşünmek gerekir. Confrey ve Smith'e göre, girdi değerinden çıktı değeri formül ve kurallara bağlı olarak bulunuyor. Bu statik bir durumdur. Öğrenci hayal edemiyor, bu yüzden araştırmacılar bu yaklaşımı eleştiriyorlar.

Üçüncü görüşmenin son sorusu şekil 4.34 de verilmiştir. İki değişkenli eş zamanlı değişimin grafiksel yapısı istenmiştir.

Bir göl içine bir çakıl taşı atıldığını düşün. Bu taş dışı doğru sabit bir hızla büyüyen dairesel dalgalanmalar oluşturur. Burada oluşan dairelerin alanlarına A dersek, A ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği çiziniz.

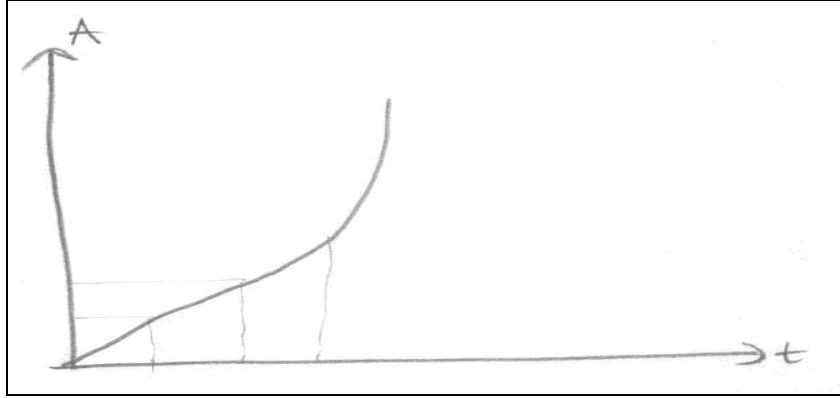
#### Şekil 4.34. Soru 10

Soruyu sessizce okuyan Selin “Bu alan gitgide azalır” dedi. Neden dairenin alanının gitgide azaldığını düşündüğünü sordum. “Aslında belirli bir süreden sonra bu dalgalanmalar söner. Bu alan zamanla daha fazla artacak” dedi. Neden bu kez artacağını düşündüğünü sordum. “Çünkü dairenin alan formülü  $\pi r^2$  olduğundan zamanla yarıçap artacağından  $r^2$  den dolayı alan da artıyor. Yani artan bir artma olacak” şeklinde açıkladı.

Düşüncelerini daha iyi anlamak için “Zamanla yarıçap sabit oranda mı artar, yarıçapta mı artarak artar?” diye sordum. Selin “Sabit oranda artmaz” dedi. Sorulara verdiği çelişkili cevaplardan dolayı soruda anlatılan durumu tam anlamıyla hayal edemediğinin farkına varınca Soruyu tekrar okumasını istedim. Soruyu okuyan Selin de taşlar biraz yerine oturmuş gibi gözüküyordu. İki kez şu cümleyi tekrar etti. “Hımm sabit bir hızda büyüyen dairesel dalgalanmalar oluşturur hımm.”

Bunun üzerine Selin’e “Yani zamanla yarıçap sabit artar mı diyorsun?” diye sordum. “Evet, ama alandaki artış miktarı daha fazla artar karesini aldığımız için zamanla artış miktarı artarak artar yarıçap sabit artsa bile  $r^2$  den dolayı artarak artar.” Dedi.





**Şekil 4.35.** Selin'in 10. soru için çizdiği grafik

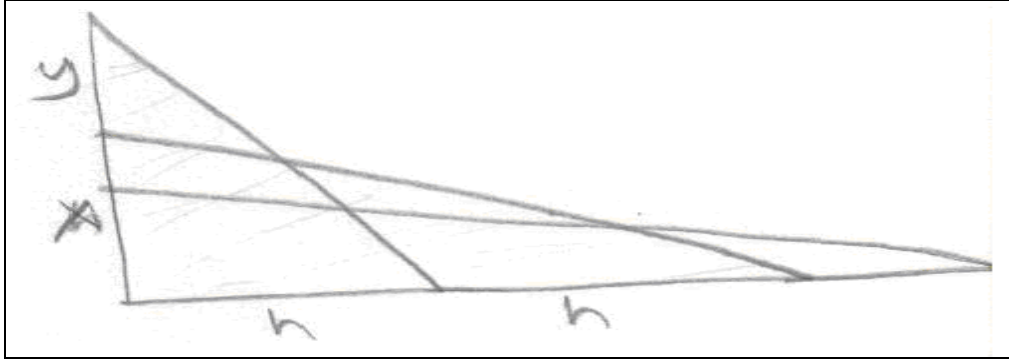
Burada Selin önce soruda anlatılan olayı hayal etmekte zorlandı. Sonra tekrar okuyunca “Hımm sabit bir hızda büyüyen dairesel dalgalanmalar oluşturur hımm.” dedi. Dalgalanmaların sabit bir hızda büyümesinin farkına vardı. Zamanla yarıçapın sabit artacağını düşündü ancak zamanla alan arasındaki artarak artar sözlü ifadesini  $\pi r^2$  formülünü kullanarak çıkardı. Kafasında bulunan zihinsel kuralı kullandı. Grafiği çizdi ancak ani değişimi kullanarak kafasında tam olarak hayali düşünüp şekli bu hayale göre direkt çizemedi. Carlson (2002)’a göre “ani hız değişimini zihinsel olarak açıklayabilmek için öğrenci, bir değişkeni düşünüyorken diğer değişkeni de aynı anda düşünür, sözlü ifadeleri bu durumu destekler ve öğrenci doğru grafiği hemen çizer”. Ama burada kurallınmış bir durum söz konusudur. Buradan Selinin zihinsel aktivite 3’te olduğunu söyleyebiliriz.

Dördüncü görüşmemiz üçüncü görüşmeden 1 hafta sonra olmuştur. Yine Selinin zihinsel becerileri hakkında bilgi sahibi olabilmek için çeşitli sorular soruldu. Bu sorular yine dinamik fonksiyonel durumlar ve onların grafiksel yapıları ile alakalıdır. Bu görüşmenin ilk sorusu aşağıdadır (şekil 4.36).

Ali duvara neredeyse dik durumda duran bir merdiven görür. Merdiveni bir miktar çeker. Her çekişinde merdiven bir miktar aşağıya gelmektedir. Böylece merdivenin üst kısmı da düşmektedir. Ali bunları kayıt eder ve bu sonuçları karşılaştırır. Sonuçlar aynı mıdır, büyük müdür, küçük müdür?

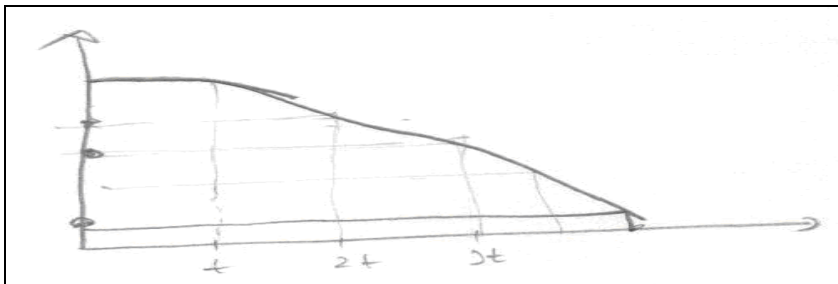
### Şekil 4.36. Soru 11

Soruyu iki kez okuyan Selin şu cümleleri söylemeye başladı. “Yataydaki çekiş miktarları aynı ve merdivenin dikeydeki düşüş miktarlarını kaydediyor. Bu düşüş miktarları her biri bir öncekinden aynı mıdır, büyük müdür, küçük müdür onu soruyor. Üçgenlerin benzerliğinden düşünersek teorem vardı” dedi ve bazı şekiller çizdi (Şekil 4.37).



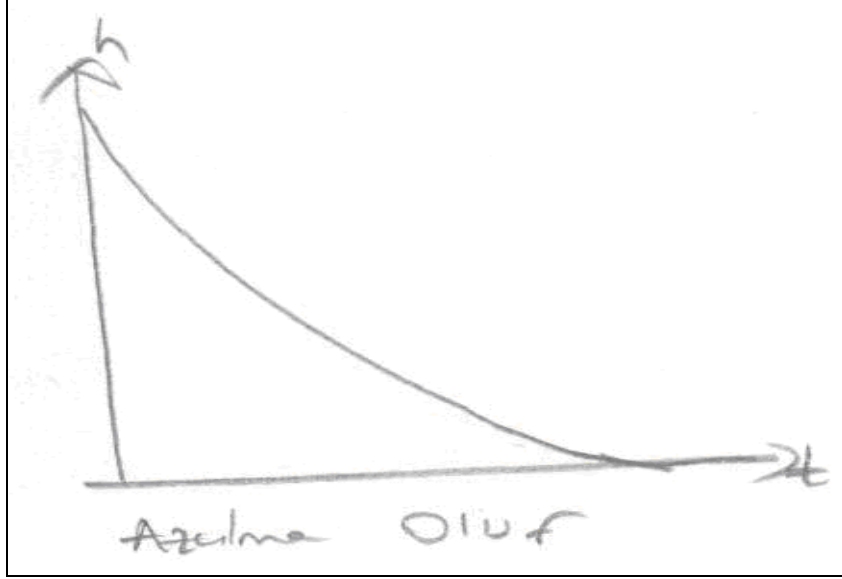
Şekil 4.37. Selin’in merdivenin düşüşü olayında zihinsel olarak görüntülediği şekil.

Hangi iki üçgen benzerliğini alırsın. İlk çektigindeki düşüş ikinciden az mıdır? Diye sordum. Selin “şekle göre değişir” dedi. Selin çizdiği şekle bakıyor olayı canlandırmaya çalışıyordu bunun üzerine büyük mü küçük mü diye anlamaya çalışırken “ölçekli mi çizdin?” diye sordum. Selin “açıya göre değişiyor bu açı azaldığı için buradaki uzunluk azalacak. Düşüş miktarı azalır bence. Şekillerden çıkardığım kadarıyla.” Selin den yorumunu grafiğe dökebilmesi için merdivenin yüksekliğinin zamana bağlı değişimini çizmesini istedim.



**Şekil 4.38.** Selin'in 11. soru için çizdiği 1. grafik

Grafiği çizen Selin zamanı sabit aldı. “düşüşler her defasında artarak azalır. Artış miktarında azalma olacak demiştim. Aslında yeniden bir grafik çizmem lazım. Azalarak azalan grafik bu olmalı.” Dedi ve yeniden bir grafik (şekil 4.39) çizdi.



**Şekil 4.39.** Selin'in 11. soru için çizdiği 2. grafik

Grafiği çizdikten sonra kendinden emin gözüküyordu. Bunun üzerine “her defasında düşmelerde azalma olacak demiştin bu grafik onu mu gösteriyor?” Diye sordum. “Evet” yanıtını verdi. Tekrarladım “O yorumu karşılık gelen grafik bu diyorsun” diye. “Evet” dedi.

Selin dikeydeki değişimi tam olarak hayal etmek için şekiller çizdi. Düşüş miktarını aslında önce sözlü ifadesinde belirttiği gibi “Düşüş miktarı azalır bence. Şekillerden çıkardığım kadarıyla.” Dedi sonra. “düşüşler her defasında artarak azalır. Artış miktarında azalma olacak demiştim” dedi ve doğru grafik çizdi sonra grafiği yorumlarken “aslında .....azalarak azalan grafik bu olmalı” dedi ve azalarak azalan bir grafik çizdi buradan tam olarak anlatılan olayı hayal edemediğini görüyoruz. Selin burada değişkenleri düşündü ve düşüş miktarını bağımlı değişken ve zamanı bağımsız değişken olarak aldı. Zamanı sabit miktarlarda artırarak düşüşteki azalmayı

gösterdi. Ancak bu azalmaları azalarak azalacak diye yorumladı. Burayı hayal etmekte zorlandı. Zihni izin vermedi. Buradan Selinin artı azalışları tam olarak doğru hayal edemediği için *miktar değişimi koordinasyonunun* olmadığını görüyoruz. Selin burada zihinsel aktivite 2'ye sahiptir. Aynı zamanda Selin burada çizim yaparken Ali'nin yatayda bir miktar çekip durup kaydetmesi sonra tekrar yatayda aynı miktar çekip durup kaydetmesini çizerken parçalı çizim yapılması gerektiğini vurgulamalıydı çünkü yapılan iş sürekli değil parça parça idi.

Bu sorudan sonra Seline tekrar ikinci bir soru (şekil 4.40) soruldu. Aslında bu bir önceki soruya benziyordu ama bazı değişiklikler vardı. Dikey değişim miktarı yerine merdivenin yükseklik değişim miktarı soruluyordu.

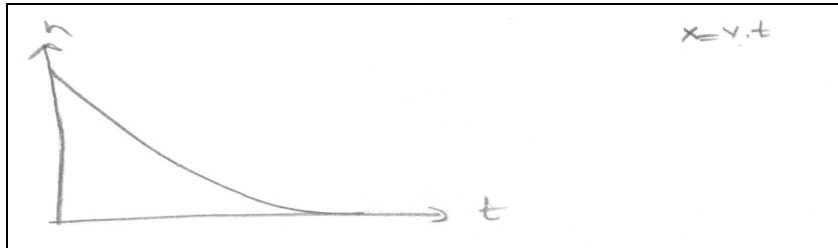
Şimdi Ali merdiven altına tekerlek koyar. Bu tekerlekleri motora bağlar. Çok düşük sabit bir hızla çeker. Bu durumda merdiven yükseklik değişimi hakkında ne söylenebilir?

Hızla yükselir mi, düşer mi, sabit bir hızla mı gider? Açıklayınız.

#### Şekil 4.40. Soru 12

Soruyu okur okumaz Selin “bu sefer merdivenin altına motor ve tekerlek bağlanıyor, motor bunu çok düşük ama sabit bir hızla çekiyor” diyerek düşünen Selin’e “Bu bir önceki senaryo ile aynı mı olur yoksa daha mı farklı olur” diye sordum. Selin:

“Burada direkt aklıma gelen sabit bir hızla çekildiği için sabit bir hızda ineceğidir. Hızı sabit olduğu için artan  $x$  miktarları da aynı olacak bundan dolayı bir öncekinden farklılık yaratmaz bir önceki ile aynı olur.”

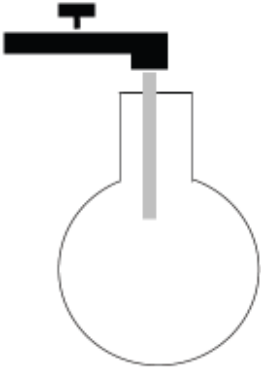


**Şekil 4.41.** Selin'in 12. soru için çizdiği grafik

Bir önceki sorusunda düşüncelerine ve çizdiği grafiğe güvenen Selin sadece durumları karşılaştırdı. Kullandığı sözlü ifadelerinde “Burada direkt aklıma gelen sabit bir hızla çekildiği için sabit bir hızda ineceğidir. Hızı sabit olduğu için artan  $x$  miktarları da aynı olacak bundan dolayı bir öncekinden farklılık yaratmaz bir önceki ile aynı olur.” Durumun bir önceki ile aynı olacağını belirleyince güvendiği grafiğini tekrar düşünmeden direkt çizdi. Buradan yine Selinin zihinsel aktivitesinin *miktar değişimi koordinasyonunda* yetersiz olduğunu söyleyebiliriz. Selin zihinsel aktivite 2'ye sahiptir.

Merdiven sorusundan sonra bu görüşmenin son sorusu şekil 4.42. de verilmiştir. Burada yine grafiksel yapı çizilmesi istenmiştir.

Bu şişeye sabit bir oranda su doldurulduğunu düşün. Şişenin içerisindeki suyun miktarı ile yüksekliği arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.

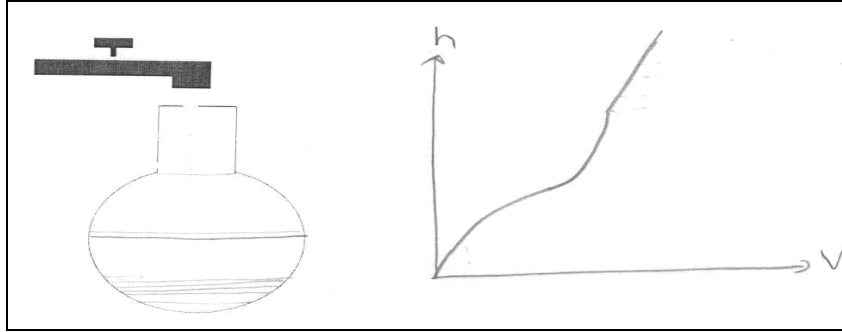


**Şekil 4.42.** Soru 13

Soruyu önce sesli sonra sessiz okuyan Selin:

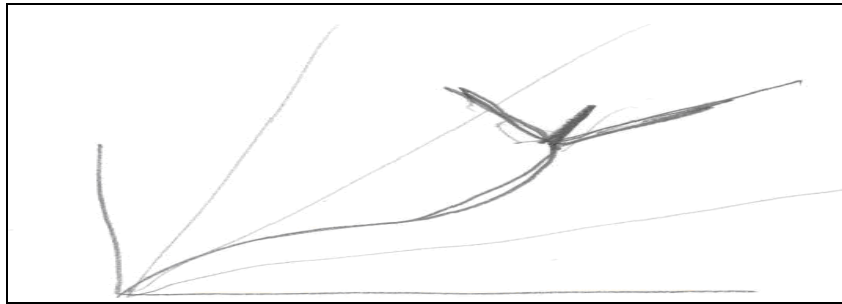
“Bu şişenin altı yuvarlak olduğu için şişedeki su miktarında sürekli bir artış olacak ama  $h$  miktarı üst tarafa göre daha az bir artış olacak  $h$  miktarında burada da su miktarı ile yükseklik arasındaki ilişki. Şuraya  $h$  ( dikey eksen

yükseklik), şuraya  $v$  ( yatay eksen su miktarı) dersek su miktarında ( $v$ ) da sürekli bir artış olacak. Kolay düşünebilmek için şişeyi üç kısma ayıralım. Şişenin altı yuvarlak olduğu için yarısına kadar artan  $h$  miktarında azalan bir artış olacak. Yarısından sonra tam tersi olacak tabii ki çizdiğimin de tam tersi olacak sonra şişenin 3. kısmına geldiğimizde şekli düz olduğu için  $h$  miktarı sabit olacak. Yani toparlarsam önce azalan bir artış belirli bir yere kadar böyle sonra tam tersi en son sabit olacak.”



**Şekil 4.43.** Selin'in 13. soru için çizdiği grafik

Selin'in 3. kısımdaki sabit artar dediği bölümü çizerken (şekil 4.43) ne düşündüğünü tam olarak anlamak için “Üçüncü kısmı çizerken eğimi nasıl anladın?” diye sordum. Selin: “Elime öyle denk geldi” Dedi. Bunun üzerine kafasında olayı daha iyi canlandırması ve farkı görebilmesi için ben çizmiş olsam benim de elime öyle geldi şöyle çizdim ve ya şöyle çizdim yani bu doğruların birbirinden farkı nedir (şekil 4.44 de ki grafiği göstererek) rastgele mi çiziyoruz grafiği mantığı ne olabilir” diye sordum. Selin:



**Şekil 4.44.** 13. soru ile ilgili olarak Selin'e araştırmacı tarafından gösterilen grafik

“Hayır, burada sabit artış olduğu için eğimleri değişmez. Şişedeki su miktarı ile h düzgün arttığı için ondan ögle çizdim” dedi.

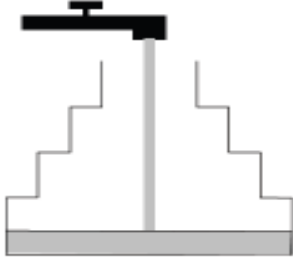
Selinin verdiği cevaba bakılırsa tam olarak nasıl çizdiğinden emin olmadığını anlıyoruz. Bunun üzerine Selin 3 kısım nasıl olur diye düşünebiliyordu ancak sabitlik için nasıl nereden başlayarak sabit olması gerektiği konusunda fikir söyleyemedi. tekrar sordum “Ama bu benim çizdiğim doğrular da düzgün artış buda, buda, buda (araştırmacı kendi çizdiği şekil 4.44 de ki grafiği göstererek)” dedim. Selin: “Bilmiyorum ben rastgele çizdim” dedi.

Burada Selin eksenleri doğru adlandırdı. Su miktarını bağımsız değişken, su yüksekliğini bağımlı değişken olarak seçti. Kullandığı “...su miktarında (v) da sürekli bir artış olacak” sözlü ifadesinden değişim yönü zihinsel aktivitesine sahip olduğunu görüyoruz. Grafiği üç parçaya bölüp incelemesi güzel bir fikirdi. Artarda kullandığı sözlü ifadeleri zihinsel aktivitesinde miktar değişimine sahip olduğunu gösteriyor ( ilk kısmın azalarak artacağını ikinci kısmın bunun tersi yani artarak artacağını üçüncü kısmın ise sabit oranda artacağını söyledi.)

Aynı zamanda bu davranışları doğru grafikte göstermesi zihinsel aktivitesinde oran değişimini hayal edebildiği ve grafiği direkt çizebildi. Ancak 3. kısımda bu sabit oranda artmasını grafikte çizerken eğimi nasıl kullandığı hakkında soru sorulduğunda “Bilmiyorum ben rastgele çizdim” dedi. Aslında 2.kısımın bittiği noktadaki eğimle 3.kısımın başladığı noktadaki eğim birbirine paralel olmalı yani eğimden yola çıktım ifadesini kullanması gerekirdi. Bundan dolayı tam bütünü düşünemediği için *ani değişim koordinasyonda* yetersiz olduğunu görüyoruz. Selin burada zihinsel aktivite 4'e sahiptir.

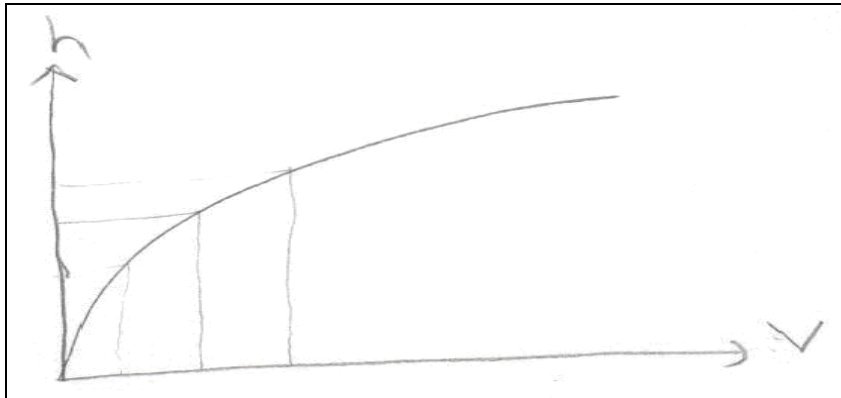
Beşinci görüşme dördüncü görüşmeden 3 gün sonra olmuştur. Yine verilen dinamik fonksiyonel durumların grafiklerinin çizilmesi istenmiştir. Beşinci görüşmenin ilk sorusu şekil 4.45 de görüldüğü gibidir.

Bu tanka sabit bir hızda su dolduğunu hayal et. Tankın içindeki su miktarı ile yüksekliği arasındaki ilişkiyi gösteren grafik çiziniz.



**Şekil 4.45.** Soru 14

Soruyu okuduktan sonra, eksenleri çizip dikey eksene yükseklik ( $h$ ), yatay ekseni su miktarı( $v$ ) diye adlandırdı. Hemen aşağıdaki (4.46) grafiği çizdi.



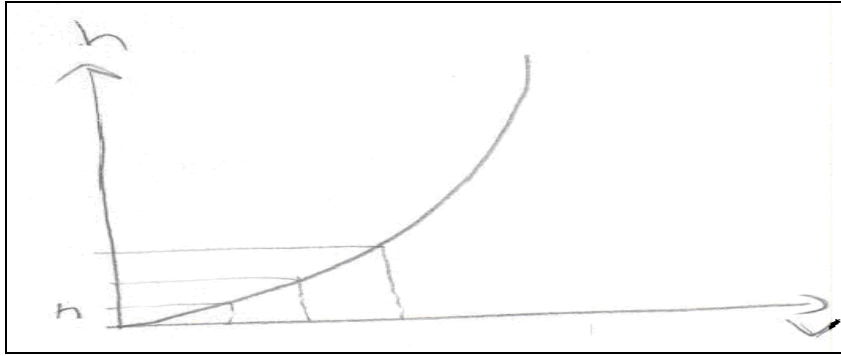


**Şekil 4.46.** Selin'in 14. soru için çizdiği 1. grafik

Çizdiği grafiği anlatmasını istedim. Selin:

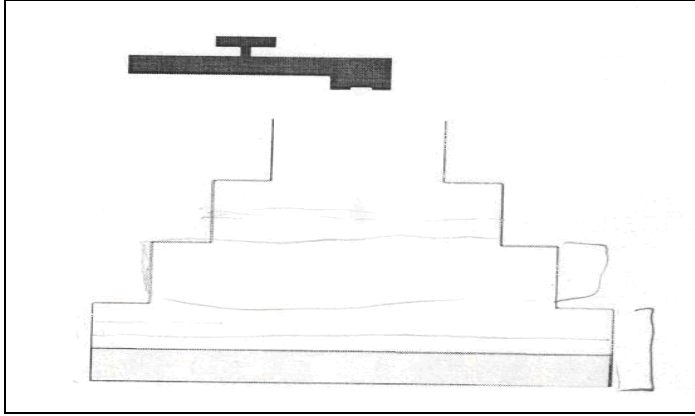
“En alttaki taban üsttekilere göre daha geniş olduğu için üstekilerdeki  $h$  da ki artış miktarı daha az olacak. İmm aslında Üste doğru  $h$  da ki artış miktarı artacak. Üstlerde daha az su dolmasına rağmen daha hızlı yükselecek. 2. bir grafik çizmem lazım.”

Selin biraz düşününce grafiğinin hatalı olduğunu anladı yeni bir grafik (şekil 4.47) için dikey eksene yükseklik ( $h$ ), yatay eksene su miktarı ( $v$ ) diye adlandırdı. Kafasında kurduğu şekli yorum yapmadan hemen çizdi.

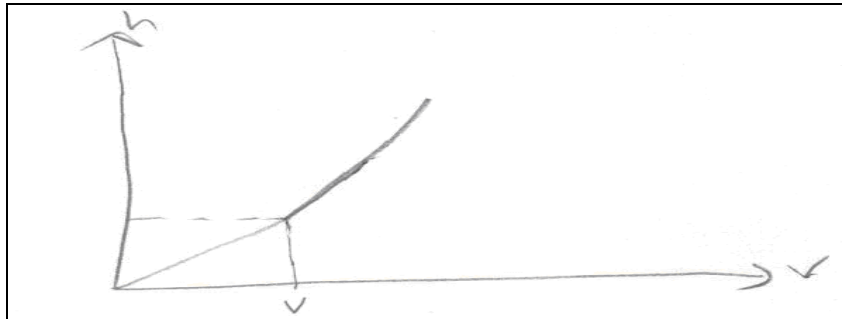


**Şekil 4.47.** Selin'in 14. soru için çizdiği 2. grafik

Selinin çizdiği bu grafiği daha iyi anlamak için koordinatları noktalama yaparak ve değerler vererek test ettiğini ancak neden parabolik bir grafik çizdiği sorulduğunda. Selin: “ $h$  miktarında artış olacak ama bu artma miktarında değişimler olduğu için parabolik çizdim” açıklamasını yaptı.



Seline biraz daha yardımcı olarak “merdivenlere geldiğimizde her bir basamağın kendi içerisinde ki artma miktarı artarak mı artar yani parabolik mi artar?” sorusu soruldu. Düşündü soruyu tekrar okudu. Anlaşılan tam olarak anlattığım durumu hayal edemiyordu. Seline biraz daha ipucu vererek “düşün ki benim elimimde 4 ayrı silindir var suyu doldurduğumda ilkinde artış parabolik mi olur?” sorusunu sordum. Selin gülümseyerek “doğrusal olur” dedi. Neden doğrusal olduğu sorulduğunda “genişliği her zaman aynı, akıttığı su miktarı aynı” olarak yanıtladı. Fakat çizdiği grafiğin neden parabolik olduğunu tekrar sorduğumda Selin çizmesi gereken doğru grafiğin doğrusal parçalardan oluşması gerektiğini yönlendirici sorular sayesinde buldu. 3. grafiği çizmek isteyen Selin ilk parçayı doğrusal, ikincisini ilkinde göre daha dik çizerek şekil 4.48 de ki grafiği oluşturdu. Neden ikincisinin daha dik olduğunu sorduğumda Selin: “Ee hani genişliği azalıyor, akıttığımız su miktarı değişmediği için yükseklik artar dikleşen bir doğrusal grafik olur” cevabını verdi.



#### Şekil 4.48. Selin'in 14. soru için çizdiği 3. grafik

Burada Selin yönlendirici sorularla 3 ayrı grafik çizerek gerçeğe yaklaşmıştır. Çizdiği son grafikte bağımsız değişkeni su miktarı, bağımlı değişkeni yükseklik olarak belirleyip yatay eksen su miktarı (V), dikey eksen yükseklik (h), olarak doğru adlandırmıştır. Değişim yönü koordinasyonuna sahip olduğunu “ Üste doğru h da ki artış miktarı artacak ” sözlü ifadesinden anlıyoruz. Değişim miktarı koordinasyonuna sahip olduğunu “genişliği her zaman aynı, akıttığı su miktarı aynı” sözlü ifadesinden anlaşılıyor. Selin ilk parçayı doğrusal, ikincisini ilkinine göre daha dik çizerek şekli tamamlamıştır. Selin'in değişim oranı koordinasyonuna sahip olduğunu “ Ee hani genişliği azalıyor, akıttığımız su miktarı değişmediği için yükseklik artar dikleşen bir doğrusal grafik ” sözlü ifadesinden anlıyoruz. Selin burada *ani değişim koordinasyonuna* sahip değildir çünkü grafiği tam anlamıyla tamamlamamıştır. Selin burada zihinsel aktivite 4'e sahiptir.

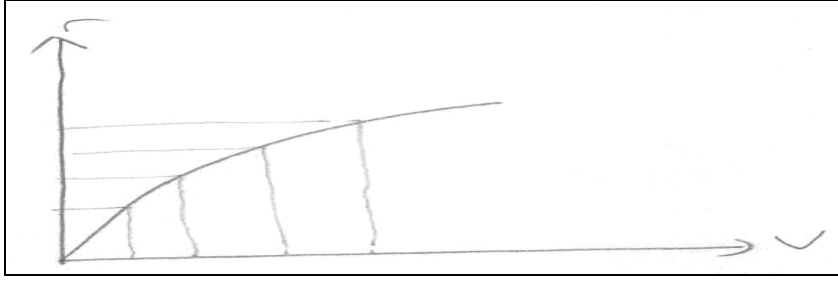
Beşinci görüşmenin ikinci sorusu aşağıda şekil 4.49 da iki değişkenli eş zamanlı değişimlerin grafiği ile ilgidir.

Bir balona sabit bir oranda hava pompalandığını hayal et. Balonun içindeki hava miktarı değişimi ile balonun yarıçapı arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.

#### Şekil 4.49. Soru 15

Soruyu okuyan Selin şekil 4.50 de ki grafiği çizerken düşüncelerini şu cümlelerle belirtti.

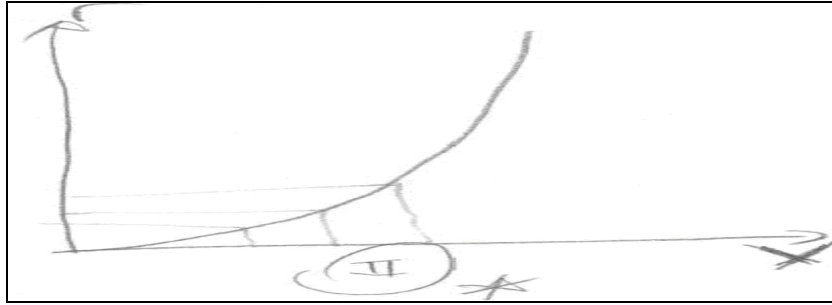
“Sabit bir oranda hava pompalandığını hayal edersek yarıçapında mutlaka bir artış olur ama bence bu artma miktarı zamanla azalarak artar. Çünkü sabit bir oranda hava pompalıyoruz balona ilkinine göre daha az bir artış olur. Balonun yarıçapı arttıkça azalan bir artış olacağını düşünüyorum parabolik olur.”



**Şekil 4.50.** Selin'in 15. soru için çizdiği 1. grafik

Peki, burada şekle baktığımızda hacimleri sabit mi aldın? diye sorduğumda

“Sabit oranda hava pompalanıyor ama hacim eşit olmaz çünkü yarıçap artıyor yarıçapta azalan bir artış olur. Sanırım ikinci grafiği çizmem lazım azalan bir artış grafiği çizmeliyim.”



**Şekil 4.51.** Selin'in 15. soru için çizdiği 2. grafik

Burada Selinin yaptığı yorum ve çizdiği ilk grafik doğru idi ama kendisine sorduğum “...baktığımızda hacimleri sabit mi aldın?” sorusundan dolayı grafikte eksik olacağını düşündü soruyu tekrar okudu düşüncelerini tekrar söyledi. “Sabit oranda hava pompalanıyor ama hacim eşit olmaz çünkü yarıçap artıyor yarıçapta azalan bir artış olur...” yorumlarının doğru olduğundan emindi. Ancak azalan bir artış için ilk çizdiği grafiğin tersi olacağını düşündü ve ikinci grafiği (şekil 4.51) çizdi. Çizdiği bu yeni grafikte değişkenlerin farkındaydı ve değişim yönünü doğru

kullandı ancak *değişim miktarı koordinasyonunda* yetersizdir. Selin burada zihinsel aktivite 2'ye sahiptir.

## 4.2.Bulgular ve Yorum

Araştırma sorularını temel alarak bu araştırmanın amacı başarı derecesi çok yüksek olan bir öğretmen adayının fonksiyon ortamında iki değişkenin eş zamanlı değişimini uslamlama yani muhakeme etme becerilerini anlamak tanımlamak ve analiz etmektir. Veri, derinlemesine klinik görüşmelerden elde edilmiştir. Bu görüşmelerdeki sorular öğrencinin düşünme ve muhakeme etme süreçlerini keşfetmek için tasarlanmıştır. Yapılan çalışmada Selin'e verilen dinamik fonksiyonel durumların grafiklerinin oluşturulması ve grafiklerden elde edilen bilgilerin yorumlanması ile ilgili sorular sorularak eşzamanlı değişimi nasıl uslamladığı anlaşılmaya çalışılmıştır. Klinik görüşmelerden elde edilen veri çalışmanın teorik çerçevesi ışığında analiz edilmiştir. Esas olarak, yukarı bahsedilen sorularda Selin'in gözlenebilir davranışları yani dinamik fonksiyon durumları için çizdiği grafikler ve sözlü ifadeleri detaylı bir şekilde incelenerek analiz edilmiştir. Başka bir deyişle, iki değişkenin eşzamanlı değişimlerinin koordinasyonunu içeren dinamik durumlarda Selin'in davranışları ve bu davranışlara karşılık gelen zihinsel aktiviteleri araştırılmıştır. Öğrenci karşılaştığı dinamik fonksiyon olaylarında bu olayları yorumlarken ve yorumladığı olayları grafiksel olarak gösterirken değişik davranışlar sergilediği gözlenmiştir. Araştırmanın sonucu olarak aşağıdaki genel bulgulara ulaşılmıştır.

### (a) Değişimin Koordinasyonu (Başlangıç Koordinasyonu)

Sorulan bütün sorulara verdiği cevaplarda, Selin'in zihinsel aktivitelerinin gözlenebilir ölçütü olan davranışlarının yani çizdiği grafik ve sözlü açıklamalarının 1. ve en temel aşama olan iki değişkenin birbirine göre değiştiğinin farkındalığını gösteren *değişimin koordinasyonu* aşamasına sahip olduğunu göstermektedir. Daha açık olarak, Selin bütün çizdiği grafiklerde eksenleri etiketlemiş ve sözlü ifadelerinde de bunu belirtmiştir. Örneğin 1. soruya verdiği yanıtta ki sözlü ifadesinde kullandığı "Çizmem gereken direkt zaman ve aralarında mesafe grafiği..." cümlesi, 6. soruya

verdiği yanıtta “Eksenleri çizelim, dikey eksene su miktarı (v) yatay eksene zaman (t) olsun” ve diğer sorulara verdiği cevaplarda ki benzer ifadeleri değişimi zihinsel olarak koordine ettiğinin göstergeleridir. Diğer bir deyişle, Selin’in bu ifadeleri bir değişken değişirken ötekinin de ona göre değiştiğinin farkında olduğunu açıkça göstermektedir.

### **(b) Değişim Yönünün Koordinasyonu**

Selin’in zihinsel aktivitelerinin gözlenebilir ölçütü olan davranışlarının yani çizdiği grafik ve sözlü açıklamalarının 2. aşama olan verilen dinamik durum içerisindeki bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre artarak veya azalarak değiştiğinin farkındalığını gösteren *değişim yönünün koordinasyonu* aşamasına sahip olduğunu göstermektedir. Birçok soruda çizdiği grafiklerde değişimin doğru yönünü gösteren azalan veya artan doğrular çizdiği gözlenmiştir. Selinin sözlü ifadeleri de bu yönde doğru ve uygun zihinsel görüntüler oluşturduğunun kanıtıdır. Örneğin 6. soruya verdiği yanıtta “...yükseklik arttıkça tankın akış hızı artar, burada yükseklik azaldığı için akış hızı da azalacak...” ifadesi ve 15. soruya verdiği yanıtta “Sabit bir oranda hava pompalandığını hayal edersek yarıçapında mutlaka bir artış olur” ifadesi değişim yönünü zihinsel olarak görüntülediğinin kanıtlarıdır. Bu tür ifadeleri hemen hemen soruların tamamında kullanmıştır. Yani bu ifadeler açıkça Selin’in değişimin yönünün farkında olduğunu göstermektedir.

### **(c) Değişim Miktarının Koordinasyonu**

Selin’in 3. aşama olan verilen dinamik durum içerisindeki bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre değişim miktarının farkındalığını gösteren *değişim miktarının koordinasyonu* aşamasında zorluklar yaşadığı gözlenmiştir. Çizdiği bazı grafikler ve sözlü ifadeleri bağımlı değişkenlerdeki değişimin miktarlarını zihinsel olarak doğru görüntüleyemediğini göstermektedir. Örneğin 14. soru için çizdiği grafik ve açıklama olarak kullandığı sözlü ifade “...h miktarında artış olacak ama bu artma miktarında değişmeler olduğu için parabolik çizdim...” Selin’in değişim miktarını zihinsel olarak canlandırmak için oluşturduğu zihinsel resimlerin yeterli olmadığını göstermektedir. Bir başka örnek olarak, 1. soru için çizdiği grafiklerde Selin’in zihinsel faaliyetlerinin yani uslamlamasının bağımlı değişkendeki değişim

miktarının doğru koordinasyonunu desteklemediği gözlenmiştir. Selin 1. soruda kullandığı sözlü ifadelerde “Yavaşlayarak yürüdükleri için...” ve “Tabii ki ikinci kısımda hızlanarak gittikleri için yani hız arttıkça yolumuz sabit olduğu için zaman daha kısa olacak” değişim miktarını algıladığının ipuçlarının verse de çizmiş olduğu grafikler bunu desteklememektedir.

Bu bulgulara ek olarak araştırmanın sonucunda aşağıdaki genel bulgulara da ulaşılmıştır.

1. **Başlangıç koordinasyonu tutarlı olarak sergilenmiştir.** Selin tutarlı olarak karşılaştığı bütün fonksiyon durumlarında bağımlı ve bağımsız değişkenleri doğru olarak algılamış ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre değiştiğinin farkındalığını belirtmiştir. Selin’in çizdiği grafikler ve sözlü ifadeleri zihinsel aktivitelerinin başlangıç koordinasyonunu desteklediğini ortaya koymuştur.
2. **Alâkasız veya doğru olmayan bilgilerin kullanımı.** Bazı durumlarda öğrencinin değişim yönünün koordinasyonunda zorluklar çektiği gözlenmiştir. Bu zorlukların kaynağı öğrencinin alâkasız veya doğru olmayan bilgileri kullanmada ısrarcı olmasıdır. Örneğin şekil 4.34 te görülen 10. soruda Selin “...Aslında belirli bir süreden sonra bu dalgalanmalar söner...” ifadesinde bir süre ısrar ettiği için soruda verilen fonksiyonel durumu zihinsel olarak hayal etmekte güçlükler çekmiştir. Benzer bir durulmada şekil 4.36 da görülen 11. soruya verdiği cevapta “...Üçgenlerin benzerliğinden düşünürsek... teorem vardı...” ifadesini kullanmış fakat uzun süre duruma uygulamakta güçlükler çekmiştir. Bu güçlüklerde değişim yönünü belirlemede engel teşkil etmiştir.
3. **Ezberlenmiş kurallar veya prosedürlere dayanma.** Selin’in bazı durumlarda ezberlenmiş kurallar veya prosedürleri uygulayarak verilen durumun grafiğini oluşturduğu gözlenmiştir. Örneğin Şekil 6.22 de ki 4. soru ya verdiği cevaptaki “...Kap boşalırken Potansiyel enerji kinetik enerjiye dönüşecek.  $E_p = E_k$  olacak buradan potansiyel enerji  $mgh$  dır. Kinetik enerji  $\frac{1}{2}mv^2$  dır. m ler birbirini götürür.  $2gh = v^2$  bu da yükseklik azalırsa hızda ona bağlı olarak azalacağı anlamına gelir...” şeklindeki sözlü ifadesinde söz konusu durumu zihinsel olarak canlandırma yerine bazı ezberlenmiş kuralları veya formülleri

kullanarak grafiğe ulaşmıştır. Bu tür davranışları Carlson (2002) yalancı analitik davranışlar (pseudo analytical behaviors) olarak tanımlamıştır.

4. **Cebirsel ifadeler veya sayısal değerler kullanma ihtiyacı.** Selin zaman zaman karşılaştığı durumu zihinsel olarak resimlemek yerine cebirsel ifadeler veya sayısal ifadelere ihtiyaç duymuştur. Örneğin şekil 4.30 da verilen soru 9 da verdiği cevapta "...başlangıçta  $X=100$  alırsam, 100'ün yüzde 5 i 20 olur... Evet, y 5 oldu. Şimdi y dönüşecek, 5'in yüzde 5 i 1 olur bu da dönüşecek oda 96 olur. Tekrar 96'in yüzde 5 i y ye dönüşecek 4,75 gibi..." ifadesinde Selin verilen fonksiyonel durumu bir bütün olarak zihinsel resimlemeyi gerçekleştiremediğinden temsili sayılar atayarak çözümlenmeye çalışmıştır. Bir başka örnek ise şekil 4.34 te verilen soru 10 da Selin verdiği cevapta "Çünkü dairenin alan formülü  $\pi r^2$  olduğundan zamanla yarıçap artacağından  $r^2$  den dolayı alan da artıyor" ifadesini kullanarak cebirsel bir ifadeye ihtiyaç duyduğunu belirtmiştir. Literatür taraması sonucu edinilen bilgiler (Leinhardt, Zaslavsky, and Stein, 1990; Vinner, 1981) geleneksel yöntemlerle öğrenen öğrencilerin verilen bir durumun grafiğini oluşturmak için bu tür cebirsel ifadeler ve sayısal ifadeler sıklıkla ihtiyaç duyduklarını göstermektedir.
5. **Doğrusallığa eğilim.** Selin'in bazı durumlarda soruyu okur okumaz doğrusal bir ilişki kurarak artan veya azalan doğrular çizdiği gözlenmiştir. Bazı durumlarda sonradan bu doğrusal grafikleri değiştirdiği gözlenirse de bu davranış doğrusal ilişki kurmanın zihinde otomatik bir davranış olduğunu göstermesi açısından önem taşımaktadır. Selin ilk 3 soruya verdiği cevaplarda bu tür grafikler çizmiş ve sözlü ifadeleri ile her ne kadar doğrusal bir ilişki olmadığı düşüncesini verse de bunu grafiksel olarak belirtememiştir.
6. **Yönlendirici soruları çıkış olarak görme.** Selin, şekil 4.17'de verilen 5. soru için ikinci grafiği çizdikten sonra, sorulan yönlendirici sorudan dolayı doğrusunun çizdiğinin tersi olduğunu anladı ancak tersini bilmediği için değişkenlerin yerini değiştirdi. Selin yine şekil 4.49'da verilen 15. sorunun grafiğini doğru çizmesine rağmen araştırmacının sorusundan dolayı, (doğru



çizdiyse neden soru sorsun düşüncesiyle) grafiği değiştirerek tersini çizdi. Buradan Selin'in bilgilerine tam anlamıyla güvenmediğini anlayabiliriz.

## BÖLÜM V

### 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

#### 5.1. Sonuç

Bu nitel özel durum çalışması sürekli dinamik fonksiyon durumlarında iki değişkenin eş zamanlı değişimlerini koordine ederken kullandığı uslamlama becerilerini göstermektedir. Okul hayatında yüksek performans gösteren, başarılı bir matematik öğretmen adayının sınavlarda yüksek notlar almasına rağmen sorulan sorulara verdiği cevapları detaylı incelediğimizde genelde ezbere dayandığı, alışılmış kurallar ve formüller kullanarak çözüm yolları aradığı açıkça görülmektedir. Bu çalışmada Selin, verilen bir fonksiyonel durumu statik olarak kavradı ve bir tanım kümesi boyunca sürekli değişen “*değişim oranı*” nı algılamakta zorluklar yaşadı bulgusuna ulaşılmıştır.

#### 5.2. Öneriler

Bu çalışma sınıf içi ders anlatım yöntemleri, müfredatta yer alacak aktivitelerin tasarımı, geliştirilmesi ve alternatif değerlendirme yöntemleri konularında önerilerde bulunmaktadır.

İlk olarak; edinilen fonksiyon kavramının öğrencinin değişkenlerin eşzamanlı değişimini zihinsel olarak resmetmelerinde veya hayal etmelerinde çok büyük bir rolü olduğu literatürde defalarca vurgulandığından, öğrencilerde dinamik fonksiyon kavramının geliştirilmesi için fonksiyon kavramının alternatif yollarla statik değil dinamik olarak öğretilmesi sağlanmalıdır. Bir başka deyişle; fonksiyon kavramının statik olarak öğretilmesi yerine, yani formülde girdiyi verip çıktı elde etme tekniğiyle öğretilmesi yerine, değişkenlerin birbirine göre değişimlerinin koordinasyonu şeklinde öğretilmesi yani fonksiyonların doğasında var olan değişimi tanımlama özelliğinin öğretilmesi, öğrencilerin fonksiyonların günlük hayatta kullanım alanlarını anlamalarına ve gerçek olaylarla ilişkilendirmelerine daha fazla katkı

sağlayacaktır. Bu tür bir öğretim öğrencilerde ezberleme yerine kavramsal anlamayı geliştirecektir.

İkinci olarak; dinamik yazılımlar gibi bilgisayar teknolojilerinin kullanımı öğrenci için daha fazla görsel destek sağlayarak fonksiyonların doğasında var olan değişimi gösterme özelliğinin öğrenci tarafından kavramsal olarak öğrenilmesine katkıda bulunacaktır.

Üçüncü olarak; Bu çalışma öğrencilerde değişkenlerin eş zamanlı değişimlerinin koordinasyonunda ki muhakeme veya usamlama becerilerinin gelişimi için müfredatta alternatif aktivitelerin geliştirilmesini önermektedir. Öğrenci için değişim fikrinin günlük hayatta kullanılabilir olduğu hissettirilmeli, ders anlatımlarında görsel materyaller kullanılmalı fonksiyon bilgileri daha geniş bir zamanda detaylandırılarak verilmelidir.

Son olarak; Bu çalışma öğrencilerin değişim konusundaki muhakeme yeteneklerinin doğru ve sağlıklı bir şekilde takip edilebilmesini sağlayacak alternatif ölçme ve değerlendirme yöntemlerinin geliştirmesini ve uygulanmasını önermektedir.

## Görüşme Soruları

1. Bir odanın zıt köşelerinde duran iki kişi birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar. Her ikisi de yavaşlayarak yürüyor. Birbirlerine yaklaşıyorlar. Sonra birbirlerini geçiyorlar ve her ikisi de hızlanarak köşelere geçiyorlar. Bu iki kişi arasındaki mesafenin zamana bağlı grafiğini çiziniz. Grafiği açıklayınız.

Hauger, G.S. (1998)

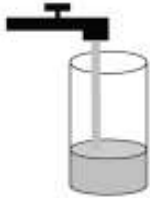
2. Odanın zıt köşelerinde duran bu aynı iki kişi tekrar birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar. Fakat bu kez tüm yol boyunca her ikisi de aynı hızda ilerliyor, birbirlerine yaklaşıyor ve birbirlerini geçerek köşelere geçiyorlar. Bu iki kişi arasındaki mesafenin zamana bağlı grafiğini çiziniz. Grafiği açıklayınız.

Hauger, G.S. (1998)

3. Odanın zıt köşelerinde duran bu aynı iki kişi birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar. Fakat bu kez her ikisi de hızlanarak yürüyor, aralarındaki mesafe azalıyor. Birbirlerine yaklaşıp geçince her ikisi de yavaşlayarak köşelere geçiyorlar. Bu iki insan arasındaki mesafenin zamana bağlı grafiğini çiziniz. Grafiği açıklayınız.

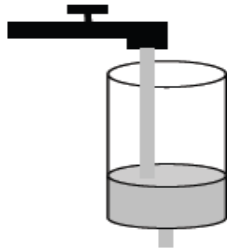
Hauger, G.S. (1998)

4. Başlangıçta boş olan bu tanka sabit oranda su doldurulduğunu hayal et. Tankın içerisindeki su miktarı ile yükseklik arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



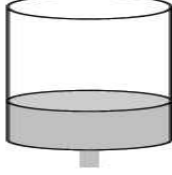
Thorton, R.K., Sipson, R. & Khul, D. (1995)

5. Tankın tam alt kısmında ortasında delik var. Tank başlangıçta boş ve sabit bir hızla su ile doluyor. Tankın içerisindeki su yüksekliği ile tanktan ayrılan su miktarı arasında belirli bir oran var. Tankın içerisindeki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



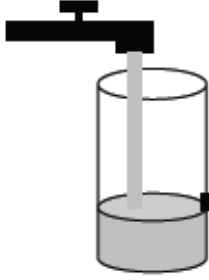
Thorton, R.K., Sipson, R. & Khul, D. (1995)

6. Tankın altında tam ortasında bir delik olduğunu düşün. Tank tam dolu iken delik açılıyor. Su tanktan ayrılıyor. Tanktan ayrılan su ile su yüksekliği arasında bir oran var. Tankın içerisindeki su miktarı azalıyor. Tankın içindeki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



Thorton, R.K., Sipson, R. & Khul, D. (1995)

7. Su tankının kenarında küçük bir delik var. Şişenin başka hiçbir yerinde delik yok. Tank başlangıçta boş sonra sabit bir hızda su ile doluyor. Tanktan ayrılan su miktarı ile delik üzerinde su yüksekliği arasında belirli bir oran var. Tankın içerisindeki su miktarı ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



Thorton, R.K., Sipson, R. & Khul, D. (1995)

8. X kimyasalının %5 i her saniyede Y kimyasalına dönüşüyor. Y kimyasalı başka bir maddeye asla dönüşmüyor. X kimyasalının tamamı dönüşüme başlıyor. X kimyasalının miktarı ile zamana bağlı değişimini gösteren bir grafik çiziniz.  
Thorton, R.K., Sipson, R. & Khul, D. (1995)

9. X kimyasalının %5 i her saniyede Y kimyasalına dönüşüyor. Y kimyasalının %5'ide her saniyede X kimyasalına dönüşüyor. X kimyasalının tamamı dönüşüme başlıyor.

a)X kimyasalının değişim miktarının zamana bağlı değişimini gösteren bir grafik çiziniz.

b)Y kimyasalının değişim miktarının zamana bağlı değişimin gösteren bir grafik çiziniz.

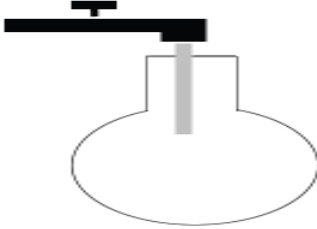
Thorton, R.K., Sipson, R. & Khul, D. (1995)

10. Bir göl içine bir çakıl taşı atıldığını düşün. Bu taş dışı doğru sabit bir hızla büyüyen dairesel dalgalanmalar oluşturur. Burada oluşan dairelerin alanlarına A dersek, A ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği çiziniz.

11. Ali duvara neredeyse dik durumda duran bir merdiven görür. Merdiveni bir miktar çeker. Her çekişinde merdiven bir miktar aşağıya gelmektedir. Böylece merdivenin üst kısmı da düşmektedir. Ali bunları kayıt eder ve bu sonuçları karşılaştırır. Sonuçlar aynı mıdır, büyük müdür, küçük müdür?  
Monk, S. (1992)

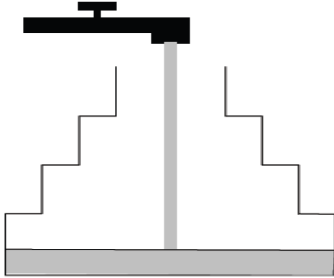
12. Şimdi Ali merdiven altına tekerlek koyar. Bu tekerlekleri motora bağlar. Çok düşük sabit bir hızla çeker. Bu durumda merdiven yükseklik değişimi hakkında ne söylenebilir? Hızla yükselir mi, düşer mi, sabit bir hızla mı gider? Açıklayınız.  
Monk, S. (1992)

13. Bu şişeye sabit bir oranda su doldurulduğunu düşün. Şişenin içerisindeki suyun miktarı ile yüksekliği arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.



Carlson, M. (1998)

14. Bu tanka sabit bir hızda su dolduğunu hayal et. Tankın içindeki su miktarı ile yüksekliği arasındaki ilişkiyi gösteren grafik çiziniz.



Thorton, R.K., Sipson, R. & Khul, D. (1995)

15. Bir balona sabit bir oranda hava pompalandığını hayal et. Balonun içindeki hava miktarı değişimi ile balonun yarıçapı arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çiziniz.

## 6. KAYNAKÇA

- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). **Development of the process conception of function.** *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.
- Carlson, M. (1998). **A cross-sectional investigation of the development of the function concept.** In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1, (7), (pp. 115-162). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, T., Larsen, S. and Hsu, E. (2002). "**Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study**". *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 33, No. 5, 352-378.
- Carlson, M., Larsen, S., & Jacobs, S. (2001). **An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation.** *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp.145-153), Snowbird, UT: PME-NA.
- Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). **Key aspects of knowing and learning the concept of function.** In A. Selden & J. Selden (Eds.), MAA Online, Research Sampler.
- Confrey, J., & Smith, E. (1994). **Exponential functions, rate of change, and the multiplicative unit.** *Educational Studies in Mathematics*, 26, 111-134
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). **Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions.** *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86
- Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions*. Thousand Oaks, CA.: SAGE Publications, Inc.
- Dubinsky, E. , & Harel, G. (1992). **The nature of the process conception of function.** In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, 25, 85-106. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Eisenhart, M.A. (1991). **Conceptual frameworks for research circa 1991:** Ideas

from a cultural anthropologist; Implications for Mathematics Education Researchers, in Underhill, R.G. (Ed.). *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of North American Chapter of the 142 International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Christiansburg, VA:Christiansburg Printing Company, Inc.

Goldin, G.A. (2000), **A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research**. In A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517- 545). N. Jersey:Lawrence Erlbaum Associates.

Guba, E. G. and Lincoln, Y. S. (1989). *Fourth generation evaluation*. Newbury Park: Sage

Hauger, G. S. (1995). *Rate of change knowledge in high school and college students*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco (April).

Hauger, G. S. (1997). *Growth of knowledge of rate in four precalculus students*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago (March 24-28).

Hauger, G. S. (1998). **High School and College Students' Knowledge of Rate of Change**. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing, MI.

Hauger, G.S. (2000). **Instantaneous rate of change: a numerical approach**. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 31, Number 6, (pp.891 –897).

Kaput, J. J. (1992). **Patterns in students' formalization of quantitative patterns**. In G. Harel & E.Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25 (pp. 290-318). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kaput, J. (1994). **Democratizing access to calculus: New routes to old roots**. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematics and Cognitive Science* (pp. 77-156). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Köklü , Ö. (2007). **An Investigation Of College Students' Covarational**

**Reasoning.** Doktora tezi, Florida State University.

- Monk, S. (1992). **Students' understanding of a function given by a physical model.** In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes, 25* (pp. 175-194). Washington, DC: Mathematical Association of America.143
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and standards for school mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Noh, J. (2004). **An Investigation of Secondary Teachers' Knowledge of Rate of Change In The Context of Teaching A Standards-Based Curriculum.** Unpublished doctoral dissertation, Western Michigan University, Kalamazoo, MI
- O'Callaghan, B. R. (1998). **Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions.** *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 21-40
- Orton, A. (1983a). **Students' understanding of integration.** *Educational Studies in Mathematics,14, 1-18.*
- Orton, A. (1983b). **Students' understanding of differentiation.** *Educational Studies in Mathematics, 14, 235-250.*
- Rubin, A. & Nemirovsky, R. (1991). Cars, Computers, and Air pumps: Thoughts on the roles of physical and computer models in learning the central concept of calculus. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Meeting of the North American Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA). Vol. 2,* (pp. 168-174).



## **ÖZGEÇMİŞ**

1984 yılında K.Maraş'ta doğdu. İlköğretimi K.Maraş Dumlupınar İlköğretim Okulunda birincilikle tamamladı. Liseyi K.Maraş Çukurova Elektrik Anadolu Lisesinde 2002 yılında bitirdi. Aynı yıl Gaziantep Üniversitesi Adıyaman Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne yerleşti. 2006 Eylül ayında Kars Digor Varlı İlköğretim okulunda çalışma hayatına başladı. 2007 yılında Şırnak Uludere Bulakbaşı İlköğretim okuluna atandı. 2008 yılında K.Maraş Dulkadiroğlu İlköğretim Okulunda göreve başladı. 2008–2009 Öğretim yılında Adıyaman Üniversitesi İlköğretim Matematik Eğitimi bölümünde yüksek lisansa başladı. Halen K.Maraş Dulkadiroğlu İlköğretim Okulunda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.