T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ABDULLAH GÖV

SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU ve ÖZDEĞERLERİNİN ASİMPTOTİK İFADESİ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF.DR. MANAF MANAFLI

ADIYAMAN
HAZİRAN-2011

TEZ ONAYI

Abdullah GÖV tarafından hazırlanan "Sınır Şartlarında Spektral Parametre Bulunan Diferansiyel Operatörün Green Fonksiyonu ve Özdeğerlerinin Asimptotik İfadesi " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Adıyaman Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

22/ 06 /2011

Danışman : *Prof.Dr. Manaf MANAFLI* ………………………..

Jüri Üyeleri :

BAŞKAN : Prof.Dr. Manaf MANAFLI ………………………..
Adıyaman üniversitesi, Matematik ABD

ÜYE : Yrd.Doç.Dr. Abdullah KABLAN …………………………
Gaziantep Üniversitesi, Matematik ABD

ÜYE : Yrd.Doç.Dr. Muhammed ALTUN ………………………..
Adıyaman üniversitesi, Matematik ABD

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç.Dr. Mustafa ÖZDEN …………………….
Enstitü Müdürü

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU ve ÖZDEĞERLERİNİN ASİMPTOTİK İFADESİ

Abdullah GÖV

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2011-41 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümünde; tez için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde; sınır şartlarında spektral parametre bulunan diferansiyel operatörün Green fonksiyonu ve özdeğerlerinin asimptotik ifadesi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Operatör, Sınır-Değer Problemi, Spektral parametre, Green fonksiyonu, Özdeğer, Özfonksiyon, Asimptotik İfade, Spektrum.

Danışman: Prof.Dr. Manaf MANAFLI

ABSTRACT

(M.Sc. Thesis)

THE GREEN FUNCTION and THE ASYMPTOTIC EXPRESSION OF DIFFERENTIAL OPERATOR with SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS

Abdullah GÖV

Adıyaman University
Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics

June 2011-41 page

This thesis consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter deal with preliminaries, fundamental and theorems that will be needed for this thesis.

In the third chapter; The establishment of Green function and the asymtotic expression of eigenvalue of differential operators with spectral parameter in the boundary conditions are examined.

Key Words: Differential Operators, Boundary Value Problem, Spectral Paremeter, Green Function, Eigenvalue , Eigenfunction, Asymptotic Expression, Spectrum

Supervisor: Prof.Dr. Manaf MANAFLI

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde, bana yardımcı olan, bilgi ve birikimlerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI' ya üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan ve beni destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Abdullah GÖV

Haziran-2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
A^{-1}	A operatörünün tersi
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	A operatörünün değer kümesi
H	Hilbert uzayı
$\ell(y)$	diferansiyel ifade
$U(y)$	y üzerinde belirtilmiş sınır şartı
L	diferansiyel operatör
λ	özdeğer
$\Delta(\lambda)$	karakteristik determinant
W_m^n	Sobelev uzayı
G	Green fonksiyonu
$C^{(n)}$	$n.$ mertebesine kadar tüm türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Sınır şartlarında spektral parametre bulunan diferansiyel operatörlerin spektral özellikleri 20. yüzyılın başlarında Birkhoff G.D. $[1,2]$ ve Tamarkin Y.D. $[3]$ tarafından öğrenilmiştir. Bu çalışmalarda incelenen diferansiyel operatörler için regüler sınır şartları belirlenmiş bir kısım operatörlere karşılık gelen özfonksiyonlar ve genelleştirilmiş fonksiyonların tamlığı ispat edilmiştir. Bu çalışmalarda aynı zamanda regüler problemler için Green fonksiyonu kurulmuş ve bunu baz alarak özfonksiyon ve genelleştirilmiş fonksiyonlar üzerine açılım formülleri ispat edilmiştir.

Adi diferansiyel denklemlerle ilgili çeşitli problemler şimdiye kadar aralıksız olarak öğrenilmektedir. Bu konuda temel sonuçlar Naimark M.A. $[5]$ ve Allan M.Krall $[17]$ tarafından ifade edilmiştir.

Son dönemlerde diferansiyel operatörlerin spektral özellikleri ile ilgili çalışmalara ilgi daha çok artmıştır $\left(Bak.[6,7,10,11,12,13,14,15,16,18]\right)$.

Bu tez çalışmasında

$$L: \qquad y''(x)+\left\{\lambda^2-q(x)\right\}y(x)=0$$

$$y(0)=y(1);\, y'(1)=y'(0)-2\alpha\lambda y(0)$$

biçiminde sınır şartlarında spektral parametre bulunan diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin asimptotik durumu ve Green fonksiyonunun kurulması problemi incelenmiştir. Burada $q(x)\in W_2^1[0,1]$ kompleks değerli bir fonksiyon, α kompleks sayı ve λ spektral parametredir.

İlk bölümde bu çalışmada öncelikle bakılan problemin incelenmesi için gerekli tanım, teorem ve yöntemler üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde ise birinci bölümdeki bilgilerden yararlanarak yukarıda bahsettiğimiz problem incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

2.1. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN TEMEL NİCELİKLERİ VE TANIMI

2.1.1. Lineer Vektör Uzayın ve Lineer Operatörün Genel tanımı

$x, y, ...$ elemanlarından oluşan kümeye R diyelim. R kümesi aşağıdaki gibi oluşturulursa R 'ye *lineer vektör uzayı* adı verilir.

1°. Herhangi iki $x, y \in R$ için aşağıdaki özelliklere sahip R de $x+y$ toplamı vardır.

(a_1). Her $x, y \in R$ için $x+y \in R$,

(b_1). Her $x, y \in R$ için $x+y = y+x$,

(c_1). Her $x, y \in R$ için $(x+y)+z = x+(y+z)$,

(d_1). Her $x \in R$ için $x+0$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in R$ vardır,

2°. Her $x \in R$ ve her λ reel(kompleks) sayısı için aşağıdaki özelliklere sahip R de λx çarpımı vardır.

(a_2). Her $x \in R$ için $\lambda x \in R$,

(b_2). Her $x \in R$ için $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

(c_2). Her $x \in R$ için $1 \cdot x = x$,

(d_2). Her $x \in R$ için $0 \cdot x = 0$,

(e_2). Her $x \in R$ için $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,

(f_2). Her $x \in R$ için $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \lambda x$.

(-1) x elemanı $-x$ ile gösterilir ve $(c_2),(f_2)$ ve (d_2), özeliklerinden,

$$x+(-x) = (1+(-1))x = o \cdot x$$

elde edilir. R uzayındaki $x, y, ...$ elamanlarına R uzayında birer *vektördür* denir. Bu tanımdaki $x, y, ...$ elemanları tamamen keyfidir ve $x+y$ toplamının genel kavramının nasıl olduğu ile alakasızdır ve bir x elemanının λ sayısı ile çarpımı belirli durumlarda açıklanmıştır. Bu kavramların durumları sağlaması üste yapılan açıklamaları getirir. Bu durumların, vektörlerin toplamını, skalerle çarpımını sağlayan ve belirtilen bu işlemler için elemanların kümesini oluşturan herhangi iki işlem bir lineer vektör uzayı olarak kabul edilebilir.

Eğer R uzayındaki skalerle çarpım sadece reel sayılarda ise R'ye *reel uzay*, skalerle çarpım kompleks sayılarda ise R'ye *kompleks uzay* adı verilir. Aksi bir durum belirtilmedikçe R kompleks uzay olarak alınabilir.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$$

şeklindeki bir toplamaya $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin bir *lineer kombinasyonu* denir. Bu lineer kombinasyonun sıfıra eşit olması durumunda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sayıları sıfır ise kombinasyon aşikardır, aksi taktirde aşikar olmayandır. Aşikar olmayan kombinasyon sıfıra eşit olduğunda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ lerden en az bir tanesi sıfırdan farklı ise, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine *lineer bağımlıdır* ve yine aşikar olmayan kombinasyon sıfıra eşit olduğunda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ lerin hepsi aynı anda sıfıra eşit olursa, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine *lineer bağımsızdır* denir.

Bir R uzayı içindeki lineer bağımsız vektör sayısı n tane den fazla değilse, R uzayına *n boyutlu* veya *sonlu boyutludur* denir. Aksi taktirde R de keyfi çoklukta lineer bağımsız vektör sayısı varsa R uzayına *sonsuz boyutludur* denir. n tane lineer bağımsız vektörün bulunduğu bir sisteme R nin bir tabanı denir.

R nin elemanlarının her lineer kombinasyonu R'nin elemanlarının da bir lineer kombinasyonu ise R nin sonlu boyutlu(sonsuz boyutlu) R' alt kümesine R nin *alt uzayı* denir.

D, R lineer uzayının bir alt kümesi olsun. D nin her x elemanını R nin bir $x' = A(x)$ elemanına eşleyen bir A fonksiyonuna R uzayında bir *operatör* denir. Burada D kümesine operatörün *tanım kümesi* ve $x \in A$ olmak üzere bütün Ax elemanlarının oluşturduğu kümeye de operatörün *değer kümesi* denir.

Genellikle $A(x)$ yerine Ax ve A operatörünün D de olduğunu belirtmek için D yerine D_A yazılır.

D_A bir alt uzay ve $x, y \in D_A$ olmak üzere, herhangi bir λ sayısı için,

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

$$A(x+y)=A(x)+A(y)$$

bağıntıları sağlanıyor ise A operatörüne *lineerdir* denir.

R uzayındaki A ve B operatörleri eşittir ancak ve ancak aynı D tanım kümesinde tanımlanmış ve $\forall x \in D$ için $Ax = Bx$ dir.

Eğer $D_B \subset D_A$ operatörleri D_B içinde eşit ve $\forall x \in D_B$ için $Ax = Bx$ ise A operatörü B operatörünün *genişletilmesidir* denir ve $A \supset B$ veya $B \subset A$ şeklinde gösterilir. Bu durumda B operatörü A dan D_B ye olan operatörün kısıtlanmışıdır. Burada sadece lineer operatörleri ele aldık. Kolaylık olsun diye, bundan sonra *lineer operatör* yerine *operatör* terimini kullanacağız.

2.1.2. Lineer Diferansiyel İfadeler

$$\ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y \tag{2.1}$$

biçiminde verilmiş eşitliklere *lineer diferansiyel ifadeler* denir. Burada $p_0(x), p_1(x),..., p_n(x)$ fonksiyonları katsayılar olmak üzere n sayısı diferansiyel ifadenin mertebesidir. Ayrıca burada $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x),..., p_n(x)$ fonksiyonlarının sabit, kapalı ve sonlu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olduğu kabul edilecektir.

Her $y \in C^{(n)}$ için $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi iyi tanımlanmış ve $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

2.1.3. Sınır Şartları

y fonksiyonu ve onun ilk $(n-1)$. ardıl türevlerinin $[a,b]$ kapalı aralığının a ve b noktalarındaki sınır değerlerini

$$y_a, y_a', ..., y_a^{(n-1)}; y_b, y_b', ..., y_b^{(n-1)} \tag{2.2}$$

biçiminde gösterelim. $U(y)$, (2.2) değerlerle

$$U(y)=\alpha_0 y_a+\alpha_1 y_a'+...+\alpha_{n-1}y_a^{(n-1)}+\beta_0 y_b+\beta_1 y_b'+...+\beta_{n-1}y_b^{(n-1)} \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan bir lineer form olsun. (2.3) deki ifadeye $U(y)$ ‘nin *sınır değer ifadesi* denir. $y(x)\in C^{(n)}$ olduğunda $U_v(y)=0$, $v=1,2,...,m$ ifadeleri sınır değer ifadeleri olduğunda

$$U_v(y)=0,\ \ v=1,2,...,m \tag{2.4}$$

biçimindeki şartlara y fonksiyonlarını sağlaması gereken *sınır şartları* denir. D ile (2.4) biçimindeki sınır şartlarını sağlayan bütün $y\in C^{(n)}$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi gösterelim. D nin $C^{(n)}$ de bir lineer uzay olduğu açıktır ve (2.4) koşullarının olmaması veya bütün katsayılarının sıfır olması durumunda ise $C^{(n)}$ ile çakışır.

Belirlenmiş bir $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile (2.4) deki şartlarla tanımlanmış özel bir D alt uzayı verilsin. $\forall y\in D$ fonksiyonu için $u=\ell(y)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu bağıntı tanım kümesi D olan bir lineer operatördür ve L ile gösterilir ve

$$u=\ell(y)$$

biçiminde yazılır.

L operatörü $\ell(y)$ diferansiyel ifadeden ve (2.4) sınır şartlarından oluşturulan ifadeye *diferansiyel operatör* denir. Bu yolla herhangi bir diferansiyel ifadeden (2.4) sınır şartlarının farklı seçilmesine bağlı olarak birçok diferansiyel operatör elde edilebilir. Eğer özel olarak (2.4) sınır şartları olmasa, bu takdirde tanım bölgesi $D=C^{(n)}$ olan ve L_1 ile göstereceğimiz diferansiyel operatörü elde ederiz. Bu durumda L_1 aynı $\ell(y)$ diferansiyel ifadeden oluşturulmuş bütün diğer L operatörlerinin genişletilmişi olacaktır. Burada L_1 en geniş kümesine sahip operatör değildir, fakat yukarıda bahsedilen bütün operatörler L_1 operatörünün kısıtlanışıdır.

$U_v(y)$ formları lineer kombinasyon olarak açıklanabilir. $U_v(y)=0$ koşulları kalan koşullardır. Bu yüzden $U_v(y)$ olarak kabul edilen formlar lineer bağımsızdır. Bu formların katsayı matrisinin rankı m ye eşittir. $m=2n$ için (2.4) eşitlikleri

$$y_a=y_a'=y_a^{(n-1)}=y_b=y_b'=y_b^{(n-1)}=0$$

olur. Bunu $\ell(y)$ diferansiyel ifadeden elde edilen operatör ortaya çıkarır. Bu operatör

L_0 ile gösterilir.

2.1.4. Homojen Sınır Değer Problemi

$$\ell(y)=0, \tag{2.5}$$

$$U_v(y)=0, \qquad v=1,2,...,m \tag{2.6}$$

şartlarını sağlayan ve $y \in C^{(n)}$ fonksiyonunu belirleyen probleme *homojen sınır değer problemi* denir. Eğer L, (2.6) sınır şartları ve $\ell(y)$ diferansiyel ifadesiyle oluşturulan bir operatör ise, o zaman homojen sınır değer problemi ; L operatörünün D tanım kümesinde L yi sıfır yapacak bir y fonksiyonunun bulunmasıdır.

Herhangi bir homojen sınır değer probleminin en az bir $y=0$ çözümünün var olduğu açıktır. Bu çözüme *aşikar çözüm* denir. Bir homojen sınır- değer problemi aşikar olmayan çözümlere (sıfır olmayan çözümlere) sahip olabilir.

Şimdi hangi şartlar altında homojen sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümlere sahip olduğunu bulalım.

$y_1, y_2, ..., y_n$; $\ell(y)=0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsunlar. O zaman herhangi lineer diferansiyel denklemlerin bilinen teorisinden, $\ell(y)=0$ denkleminin herhangi bir çözümü (bu aynı zamanda homojen sınır değer probleminin de çözümüdür), $c_1, c_2, ..., c_n$ ler keyfi sabitler olmak üzere

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n \tag{2.7}$$

biçiminde yazılabilir. Bu sabitleri belirlemek için (2.7) çözümü (2.6) sınır şartlarında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&c_1U_1(y_1)+c_2U_2(y_2)+...+c_nU_n(y_n)=0\\
&c_1U_2(y_1)+c_2U_2(y_2)+...+c_nU_2(y_n)=0\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&c_1U_m(y_1)+c_2U_m(y_2)+...+c_nU_m(y_n)=0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Şimdi bu denklem sisteminin katsayılar matrisi aşağıdaki gibi olan matrisin rankı r olsun.

$$U=\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \cdots & U_m(y_n) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Dolayısıyla, $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitleri için (2.8) denklem sisteminin $(n-r)$ tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bunlar sınır değer probleminin $(n-r)$ tane y çözümüne denk gelecektir. Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

I. Eğer U matrisinin rankı r ise, homojen sınır değer problemi $(n-r)$ tane lineer bağımsız çözüme sahiptir.

II.(a). Homojen sınır değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir, ancak ve ancak U matrisinin rankı olan r ℓ diferansiyel ifadesinin mertebesinden daha küçüktür.

(b). $m<n$ için, homojen sınır değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir.

(c). $m=n$ için, U matrisinin determinantı sıfıra eşittir ancak ve ancak homojen sınır- değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir.

U matrisinin rankına sınır değer probleminin *rankı* denir ve $y_1, y_2, ..., y_n$ çözüm sisteminin seçimine bağlı değildir.

U matrisinin mertebesi sistemin $y_1, y_2, ..., y_n$ gibi bir sistemden $y_1, y_2, ..., y_n$ gibi bir diğerine geçiş

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\,, \qquad i=1,2,...,n$$

determinantı sıfır olmayan $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,...,n}$ lineer dönüşümüyle belirlenir. Bu geçişte U matrisi $\left(a_{i,j}\right)$ $(i=1,2,...,n)$ matrisi ile çarpılır ve o zaman U nun rankı değişmez.

U matrisinin rankı sınır değer probleminin rankı olarak adlandırılır. Tanım, homojen sınır değer probleminin verilmesiyle aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$U_1(y), U_2(y), ..., U_n(y)$ fonksiyonları, $C^{(n)}$ içinde lineer bağımsız fonksiyonlar olsun ($C^{(n)}$, içinde normu $|y|=\sum_{k=0}^{n} \max_{a\le x\le b}\left|y^{(k)}(x)\right|$). Burada $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi *n*. mertebedendir. O zaman genelleştirilmiş homojen sınır değer problemiyle

$$\ell(y)=0, \quad U_v(y)=0, \quad v=1,2,...,n$$

şartlarını sağlayan $y \in C^{(n)}$ fonksiyonunu belirleyen problem ortaya çıkar.

2.2. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZFONKSİYONLARI

L operatörünün tanım kümesinde bulunan $y \neq 0$ fonksiyonu için

$$Ly = \lambda y \tag{2.10}$$

eşitliği sağlanıyorsa λ değerine L operatörünün *özdeğeri,* y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşı gelen *özfonksiyon* denir.

$\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile

$$U_1(y) = 0, ..., U_n(y) = 0 \tag{2.11}$$

sınır şartlarından oluşan L diferansiyel operatörüne bakalım.

y özfonksiyonu L operatörünün tanım kümesine ait olduğundan (2.11) şartını sağlaması gerekir. Ayrıca $L(y) = \lambda y$ dir ve buradan (2.10) eşitliği,

$$\ell(y) = \lambda y \tag{2.12}$$

denklemine denktir. Dolayısıyla, L operatörünün özdeğerleri öyle λ değerleridir ki; bu değerler için

$$\ell(y) = \lambda y, \quad U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m \tag{2.13}$$

homojen sınır-değer problemi aşikar olmayan çözümlere sahiptir ve bu aşikar olmayan çözümlerin her biri λ lara karşı gelen özfonksiyonlardır.

Aynı λ özdeğerine karşı gelen özfonksiyonların lineer kombinasyonları da yine aynı özdeğere karşı gelen bir özfonksiyondur.

Herhangi bir c sabiti için $Ly_1 = \lambda y_1$ ve $Ly_2 = \lambda y_2$ ise,

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

elde edilir.

Verilmiş λ özdeğerleri için (2.12) homojen denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı en fazla n tane olabileceğinden, aynı özdeğere karşı gelen özfonksiyonların tümü, boyutu $\leq n$ olan bir uzay oluşturacaktır. Bu uzayın boyutu tabii ki; verilmiş bir λ özdeğeri için (2.13) sınır değer probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya *özdeğerin katı* denir.

Özdeğerleri belirlemek için bazı şartlar bulmaya çalışacağız. Bu amaçla

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), ..., y_n(x,\lambda) \tag{2.14}$$

ile (2.12) denkleminin aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlayan temel çözümlerini gösterelim.

$$y_j^{(v-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0 & ; \ j \neq v \\ 1 & ; \ j = v \end{cases} \qquad j = 1, 2, ..., n \tag{2.15}$$

Lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili genel teoremlerinden, $[a.b]$ kapalı aralığındaki her bir x için (2.14) deki λ parametreli fonksiyonlar tam ve analitiktirler. (2.4) sonuçlarından, (2.13) sınır-değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir ancak ve ancak,

$$U = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \cdots & U_m(y_n) \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı olan r sayısı n daha küçüktür.

Eğer $m < n$ ise $r < n$ olur. Bu durumda (2.13) sınır-değer problemi herhangi bir λ için aşikar olmayan çözüme sahiptir. $m < n$ ise herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

Eğer $m \geq n$ ise U matrisinin rankı n den daha küçük olacaktır ancak ve ancak bütün n-inci mertebe minörlerinin yok olmasıdır. Burada bu minörlerin her biri λ nın analitik fonksiyonu olan integraldir. Böylece aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

1°. U matrisinin $n.$ mertebeden minörlerinin hepsi sıfıra denktir. Bu takdirde az önceki sonuçtan, herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

2°. U matrisinin en az bir $n.$ mertebeden minörü sıfırdan farklı ise bu durumda da sadece bu minörlerin sıfırları özdeğer olabilir. Ayrıca belli bir minörün sıfırı, U matrisinin diğer bütün $n.$ mertebeden sıfır olmayan minörlerini özdeş sıfır yapıyor ise özdeğer olabilir.

Şimdi sıfır olmayan bir integral fonksiyonunun en fazla sayılabilir çoklukta sıfırı vardır (hepsi sıfır olmak zorunda değildir) ve bu sıfırlar sonlu bir limit noktasına sahip değildir. Böylece 2° durumunda, L operatörünün en fazla sayılabilir çoklukta sıfırı vardır (hepsine sahip olmayabilir) ve bu özdeğerlerin sonlu bir limit noktası yoktur.

Sonuç olarak, aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.2.1. Herhangi bir L diferansiyel operatörü için sadece iki durum söz konusudur:

1°. Her λ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

2°. L operatörü en fazla sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir (belirli durumlarda, hepsi değil) ve bu özdeğerlerin sonlu bir limit noktası yoktur.

Özel olarak $m = n$ durumunu inceleyelim. Bunun için

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

olduğunu kabul edelim. Burada $\Delta(\lambda)$, λ nın tam, analitik fonksiyonudur ve $\Delta(\lambda)$ ya L operatörünün (veya $Ly = 0$ sınır-değer probleminin) *karakteristik determinantı* denir. Bununla ilgi olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.2.2. L operatörünün özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun sıfırlarıdır. Eğer $\Delta(\lambda) = 0$ oluyorsa, herhangi bir λ sayısı L operatörünün özdeğeridir. Ancak, $\Delta(\lambda)$ sıfırdan farklı ise L operatörü sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir ve bu özdeğerlerin sonlu bir limit noktası yoktur.

Herhangi bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun katlı sıfırı olabilir. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.3. λ_0, $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının v katlı sıfırı ise, o zaman λ_0 özdeğerinin katı v den daha büyük olamaz.

İspat: Karakteristik determinantı $\Delta(\lambda_0)$ olan matrisin rankı r olsun. Bu durumda λ_0 özdeğerinin katı $(n - r)$ ye eşittir. Diğer taraftan, $\lambda = \lambda_0$ için $\Delta(\lambda)$ determinantının bütün türevleri $(n-r-1)$. mertebeye kadar sıfıra eşit olur. Dolayısıyla λ_0, v katlı sıfır ise $n-r-1 \le v-1$ ve $n-r \le v$ olur. Özellikle $v=1$ ise $n-r \le 1$ olur. Diğer taraftan, $\Delta(\lambda_0)=0$ olduğundan $n-r \ge 1$ olur. Böylece $n-r=1$ olur. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.4. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının basit sıfırı ise, bu takdirde L operatörünün λ_0 özdeğeri tek katlıdır. Bir özdeğer $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının basit sıfırı ise bu özdeğere *basit özdeğer* denir.

2.3. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN GREEN FONKSİYONU

L operatörü için tanımlı Green fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlayan $G(x,\xi)$ fonksiyonu olarak tanımlanır.

1°. $G(x,\xi)$, $[a,b]$ kapalı aralığındaki bütün x ve ξ değerleri için sürekli ve x' e göre $(n-2)$. mertebeye kadar sürekli türevlere sahip,

2°. (a,b) aralığında herhangi ξ sabit değeri için $G(x,\xi)$ fonksiyonu, $(n-1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip ve n. türev x' e göre $[a,b)$ ve $(\xi,b]$ biçimindeki her bir aralıkta sürekli, $(n-1)$. türevde ise $x=\xi$ de sıçrama sürekliliğine sahip ve sıçrama miktarı $\dfrac{1}{P_0(\xi)}$ dir. Yani

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{P_0(\xi)}$$

dir.

3°. Her bir $[a,b)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında x' in bir fonksiyonu olarak düşünülen $G(x,\xi)$ fonksiyonu, $\ell(G)=0$ denklemini ve $U_v(G)=0$, $v=1,2,\dots,n$ sınır şartlarını sağlar.

Teorem 2.3.1. $Ly=0$ sınır-değer problemi sadece aşikar çözüme sahip ise, bu takdirde L operatörü sadece ve sadece bir tane Green fonksiyona sahiptir.

İspat: $y_1, y_2, ..., y_n$ $Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla G fonksiyonu $[a,\xi)$ aralığında bu denklemi sağlar. Böylece $a_1, a_2, ..., a_n$ ler ξ' nın belirli fonksiyonu olduğunda

$$G(x,\xi) = a_1 y_1(x) + ... + a_n y_n(x) \quad (a \le x < \xi)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$G(x,\xi) = b_1 y_1(x) + ... + b_n y_n(x) \quad (\xi < x \le b)$$

elde edilir. $G(x,\xi)$ fonksiyonunun sürekli ve onun $x = \xi$ daki ilk $(n-2)$ türevlerinden aşağıdaki denklemler elde eldir.

$$\left[a_1 y_1(\xi) + ... + a_n y_n(\xi)\right] - \left[b_1 y_1(\xi) + ... + b_n y_n(\xi)\right] = 0,$$

$$\left[a_1 y_1^{'}(\xi) + ... + a_n y_n^{'}(\xi)\right] - \left[b_1 y_1^{'}(\xi) + ... + b_n y_n^{'}(\xi)\right] = 0,$$

$$. \quad \cdots \quad . \qquad . \quad \cdots \quad .$$

$$\left[a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + ... + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)\right] - \left[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + ... + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)\right] = 0.$$

Bunun yanı sıra,

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi + 0, \xi) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{P_0(\xi)}$$

koşulu

$$\left[a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + ... + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)\right] - \left[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + ... + b_n y_n^{(n-1)}(\xi)\right] = \frac{1}{P_0(\xi)}$$

ifadesine denktir.

$$c_v = b_v - a_v, \quad v = 1, 2, ..., n$$

ifadeleri yerine yazılırsa, c_v için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\left.\begin{array}{c} c_1 y_1(\xi) + ... + c_n y_n(\xi) = 0, \\ c_1 y_1'(\xi) + ... + c_n y_n'(\xi) = 0, \\ ... \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + ... + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0, \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = +\dfrac{1}{P_0(\xi)}. \end{array}\right\} \qquad (2.17)$$

Yukarıdaki denklem sisteminin determinantı, $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonlarının $x=\xi$ deki Wranskiyenine eşittir.

Böylece, (2.17) denklem sistemi daima bir çözüme sahiptir ve c_v fonksiyonları sadece (2.17) sistemi tarafından belirlenir. a_v ve b_v fonksiyonlarını belirlemek için, sınır şartları yerine yazılır; $U_v(y)$ formu

$$U_v(y) = U_{va}(y) + U_{vb}(y) \tag{2.18}$$

biçiminde yazılır. Burada $U_{va}(y)$ $y_a, y_a', \dots y_a^{(n-1)}$ ve $U_{vb}(y)$ $y_b, y_b', ..., y_b^{(n-1)}$ lerin hepsinin toplamıdır. Böylece,

$$U_v(G) = a_1 U_{va}(y_1) + ... + a_n U_{va}(y_n) + b_1 U_{vb}(y_1) + ... + b_n U_{vb}(y_n) = 0$$

yazılır. a_k katsayıları yerine, $a_k = b_k - c_k$ yazılırsa

$$b_1 U_{vb}(y_1) + ... + b_n U_{vb}(y_n) + (b_1 - c_1) U_{va}(y_1) + ... + (b_n - c_n) U_{va}(y_n) = 0$$

elde edilir. Böylece, (2.18) den,

$$b_1 U_v(y_1) + ... + b_n U_v(y_n) = c_1 U_{va}(y_1) + ... + c_n U_{va}(y_n) \tag{2.19}$$

elde edilir. (2.19) denklem sisteminde $v = 1, 2, ..., n$ yerine yazılırsa

$$\det\left|U_i(y_j)\right| \neq 0, \quad i, j = 1, 2, ..., n \tag{2.20}$$

(2.20) den ve (2.19) den $b_1, b_2, ..., b_n$ bilinmeyenlerinin bulunduğu denklem sisteminin determinantı sıfırdan farklı olur. Dolayısıyla, denklem sistemi bir tek $b_1, b_2, ..., b_n$ için çözüme sahiptir. Ayrıca a_v fonksiyonları sadece $a_v = b_v - c_v$ tarafından belirlenir. Böylece Green fonksiyonunun varlığı ve tekliği ispatlanmış olur.

2.3.1. Green Fonksiyonu Anlamında Bir Diferansiyel Operatörün Tersi

$Ly = 0$ denkleminin sadece $y = 0$ aşikar çözümünün olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, L^{-1} ters operatörü ve L operatörünün Green fonksiyonu mevcuttur.

Eğer $L^{-1} f = y$ mevcut ise, o zaman

$$Ly = f \tag{2.21}$$

dır. Yani, y

$$\ell(y) = f \tag{2.22}$$

denkleminin bir çözümüdür ve

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., n \tag{2.23}$$

sınır şartları sağlanır.

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, çözümün mevcut olduğu ve bu çözümün Green fonksiyonu sayesinde belirlenebileceğini göstermiş olduk. Dolayısıyla, aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 2.3.2. $Ly = 0$ denklemi sadece aşikar çözüme sahip ise, bu takdirde $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $Ly = f$ denklemi bir çözüme sahiptir ve bu çözüm aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{2.24}$$

Buradaki $G(x,\xi)$ fonksiyonuna L operatörünün *Green fonksiyonu* denir.

İspat: (2.24) formülü kullanarak $y(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. (2.22) ve (2.23) şartlarından görülür ki $y(x)$, $Ly = f$ denkleminin bir çözümüdür.

$G(x,\xi)$ fonksiyonu yukarı doğru $(n-2)$. sıra içinde sürekli türeve sahiptir. Böylece (2.24) içinde x integral işareti altında $(n-2)$ kere türevlenebilir. Buradan

$$y^v(x) = \int_a^b \frac{\partial^v G(x,\xi)}{\partial x^v} f(\xi) d\xi, \quad v = 1, 2, ..., (n-2) \tag{2.25}$$

elde edilir. Bu durumda $y(x)$ fonksiyonu ve onun $[a,b]$ kapalı aralığı içinde yukarı doğru $(n-2)$. sıradaki $y^v(x)$ in türevleri süreklidir.

Diğer taraftan , $\dfrac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$ fonksiyonu $x = \xi$ da süreksizdir. Böylece $y^{(n-1)}$ veya $y^{(n)}$ hesabı içinde ön hazırlığa yönlendirmeksizin herhangi bir integral işareti altında türevlenemez. (2.23) formülünde $v = n-2$ için, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$y^{n-2}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi) d\xi$$

(a,x) ve (b,x) aralıklarından herhangi biri için integrali ve onların türevleri x te süreklidir. Bunun yanı sıra integral işareti altında x ve x' in alt (veya üst) limitleri farklıdır.

$$y^{n-1}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi+\left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x-0} f(x)$$

$$+\int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi-\left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x+0} f(x) \qquad (2.26)$$

$\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-2}}$, $x=\xi$ da süreklidir, iki integral terimi birbirini götürdüğünden ve kalan terimler aşağıdaki gibi olur.

$$y^{n-1}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi+\int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi \qquad (2.27)$$

Buradan

$$y^{n-1}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi \qquad (2.28)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki (2.27) formülünü yeniden düzenlersek

$$y^{n}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)d\xi+\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0} f(x)$$

$$+\int_a^x \frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)d\xi - \left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x+0} f(x) \qquad (2.29)$$

elde edilir. Green fonksiyonun tanımındaki 2° şartından dolayı,

$$\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0} f(x)-\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x+0} = \frac{1}{P_0(x)}$$

elde edilir. Böylece 2.29) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$y^{n}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)d\xi+=\frac{1}{P_0(x)} \qquad (2.30)$$

$U_v(y)$ formları, sadece $y(x)$ in fonksiyon değerlerini ve onun $x=a$ ve $x=b$ noktalarındaki türevleri olmak üzere, $(n-1)$ mertebeye kadar olan türevlerini içerir. Buradan (2.24), (2.25) ve (2.28) den

$$U_v(y)=\int_a^b U_v(G)\,f(\xi)\,d\xi=0$$

elde eldir. Dolayısıyla, Green fonksiyonu tanımından, $U_v(G)=0$ dır. Böylece $y(x)$ fonksiyonunun (2.23) sınır şartlarını sağladığını göstermiş olduk. Bunu $\ell(y)=f$ denkleminde de gösterelim. (2.24), (2.25), (2.28) ve (2.30) ifadelerinde $f(x)$ fonksiyonu ve onun $\ell(y)$ içindeki türevleri için yerine yazılırsa,

$$\ell(y)=\int_a^b \ell(y)(G)\,f(\xi)\,d\xi+f(x)$$

elde edilir. Ancak son formül içindeki integral kaybolmaz. Çünkü; hipotezden dolayı, $G(x,\xi)$ fonksiyonu, x te bir fonksiyon $[a,\xi]$ ve$[\xi,b]$ aralıklarının her birinde $\ell(y)=0$ denklemi vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bütün $f(x)$ fonksiyonları sürekli olmak üzere,

$$Af(x)=\int_a^b k(x,\xi)\,f(\xi)d\xi$$

biçiminde tanımlanmış bir A operatörüne *integral operatör,* buradaki $k(x,\xi)$ fonksiyonuna ise integral operatörün *çekirdeği* denir.

2.3.2. $L-\lambda I$ Operatörünün Green Fonksiyonu

L nin, $\ell(y)$ ifadesi ile $U_v(y)=0$, $v=1,2,...,n$ sınır şartlarından oluşturulan bir diferansiyel operatör olduğunu kabul edelim. Burada $L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu ifadesi için bir açılım bulmak istiyoruz. Bir başka deyişle, $L-\lambda I$ operatörünün tersinin formunu bulmak istiyoruz. $y_v=y_v(x,\lambda)$ $(v=1,2,...,n)$ ile $\ell(y)=\lambda y$ denkleminin (2.15) başlangıç şartlarını sağlayan çözüm sistemini gösterelim.

$$\ell(y)-\lambda y=f$$

denklemi için parametrelerin değişimi metodu kullanılarak

$$y(x)=\sum_{v=1}^{n} C_v^{'} y_v(x)+\int_a^x f(\xi)\left(\sum_{v-1}^{n}\frac{W_v(\xi)}{W(\xi)}\right)d\xi \tag{2.31a}$$

$$y(x)=\sum_{v=1}^{n} C_v^{n} y_v(x)-\int_x^b f(\xi)\left(\sum_{v-1}^{n}\frac{W_v(\xi)}{W(\xi)}\right)d\xi \tag{2.31b}$$

elde edilir. Burada $C_1^{'},...,C_n^{'},C_1^{n},...,C_n^{n}$ birer sabit ve $y_1,y_2,...,y_n$ fonksiyonlarının Wronskiyeninin determinantı W ile gösterilirse ve $W_1,W_2,...,W_n$, W de birer kofaktör olmak üzere

$$W=\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ . & . & ... & . \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

elde edilir. (2.31a) ve (2.31b) deki ifadeler toplanır ve çıkan sonuç 2 ye bölünürse, $C_1,C_2,...,C_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x)=\sum_{v=1}^{n} C_v y_v(x)+\int_a^b g(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.32}$$

elde edilir. Ayrıca, aşağıdaki fonksiyon elde edilir.

$$g(x,\xi)=\pm\frac{1}{2W(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \cdots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ . & . & ... & . \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \cdots & y_n(\xi) \end{vmatrix} \tag{2.33}$$

Buradaki fonksiyon, $x>\xi$ iken pozitif işaretli ve $x<\xi$ negatif işaretlidir.

Şimdi (2.32) deki y fonksiyonu $U_v(y)=0$, $v=1,2,...,n$ sınır şartlarını sağlamalıdır. Yani sınır-değer probleminin çözümü:

$$\ell(y)=\lambda y+f\ ;\quad U_v(y)=0,\qquad v=1,2,...,n$$

biçimindedir. Bu da

$$\sum_{j=1}^{n} C_j U_v(y_j)+\int_a^b f(\xi)U_v(g)d\xi=0$$

olmasını gerektirir. (2.32) içinde C_j yerine yazılırsa

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi,\lambda) f(\xi)\,d\xi \tag{2.34}$$

denklemin çözümü elde edilir. Bununla birlikte

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)}H(x,\xi,\lambda) \tag{2.35}$$

olduğundan

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ . & . & \cdots & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{2.36}$$

ve

$$H(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ . & . & \cdots & . & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_1) & & U_n(y_1) & U_n(g) \end{vmatrix} \tag{2.37}$$

elde edilir.

Eğer λ, L operatörünün bir özdeğeri değilse, bu takdirde $\Delta(\lambda)\neq 0$ ve (2.34) ve (2.35) formülleri anlamlıdır. (2.34) formülü $G(x,\xi,\lambda)$ nin $L-\lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu olduğunu gösterir. Böylece

$L-\lambda I$ operatörünün $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu (2.33) ve (2.35-2.37) formülleri kullanılarak elde edilir.

Not: Yukarıdaki temel tanım, teorem ve diğer ifadeler $[5]$ den alınmıştır.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1. SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİNİN ASİMPTOTİK İFADESİ

Bu bölümde bakılan sınır değer problemiyle, ayrıca bu problemin oluşturduğu operatörün özdeğerlerinin asimptotik ifadesinin bulunulmasıyla ilgileneceğiz.

Fiziğin birçok problemlerinde sık sık karşılaşılan aşağıdaki diferansiyel operatöre bakalım.

$$L: \qquad y''(x)+\{\lambda^2 - q(x)\}y(x)=0 \tag{3.1}$$

$$y(0)=y(1); y'(1)=y'(0)-2\alpha\lambda y(0) \tag{3.2}$$

Burada $q(x)\in W_2^1[0,1]$ kompleks değerli bir fonksiyon, α kompleks sayı ve λ spektral parametredir.

(3.1) ve (3.2) den oluşan sınır değer probleminin incelenmesi için $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonları (3.1) denkleminin

$$\theta(x,\lambda):\ \theta(0,\lambda)=1\ ,\ \theta'(0,\lambda)=0$$

$$\varphi(x,\lambda):\ \varphi(0,\lambda)=0\ ,\ \varphi'(0,\lambda)=1 \tag{3.3}$$

şartlarını sağlayan herhangi iki çözümü olsun. O zaman verilen x için $\theta(x,\lambda)$, $\theta'(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi'(x,\lambda)$ fonksiyonları λ için tam fonksiyonlardır. $(Bak.[4])$.

Kolaylık olsun diye bundan sonraki işlemlerde $\theta(1,\lambda)$, $\theta'(1,\lambda),\varphi(1,\lambda)$, $\varphi'(1,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla $\theta,\theta',\varphi,\varphi'$ olarak ifade edilecektir.

Şimdi, (3.1) denkleminin çözümleri olarak kabul edilen $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ çözümlerinin lineer bağımsız olup olmadığına bakalım.

$$W\{\theta(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\}=\begin{vmatrix}\theta(x,\lambda) & \varphi(x,\lambda)\\ \theta'(x,\lambda) & \varphi'(x,\lambda)\end{vmatrix}$$

$$W\{\theta(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\}=\theta(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}W\{\theta(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\} =\frac{\partial}{\partial x}\{\theta(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}W\{\theta(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\}=0$$

elde edilir. Bu durumda $W\{\theta(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\}$ sabittir, yani x ‘e bağımlı değildir. (3.3) şartlarından dolayı

$$W\{\theta(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\}=\begin{vmatrix}\theta(0,\lambda) & \varphi(0,\lambda)\\ \theta'(1,\lambda) & \varphi'(1,\lambda)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

bulunur. O halde $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Buradan C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere (3.1) denkleminin genel çözümü:

$$y(x,\lambda)=C_1\theta(x,\lambda)+C_2\varphi(x,\lambda) \tag{3.5}$$

biçiminde olur. Buradan

$$y'(x,\lambda)=C_1\theta'(x,\lambda)+C_2\varphi'(x,\lambda)$$

elde edilir.

Şimdi biz (3.1) diferansiyel denklemi ve (3.2) sınır şartlarından yola çıkarak λ özdeğerlerini bulalım.

(3.2) de verilen sınır şartları (3.5) denkleminde kullanılırsa

$y(0)=y(1)$ olduğundan

$$C_1\theta(0,\lambda)+C_2\varphi(0,\lambda)=C_1\theta(1,\lambda)+C_2\varphi(1,\lambda)$$

elde edilir. Buradan

$$C_1(1-\theta(1,\lambda))-C_2\varphi(1,\lambda)=0 \tag{3.6}$$

elde edilir.

$y'(1)=y'(0)-2\alpha\lambda y(0)$ olduğundan

$$C_1\theta'(1,\lambda)+C_2\varphi'(1,\lambda)=C_1\theta'(0,\lambda)+C_2\varphi'(0,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(0,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(0,\lambda)$$

elde edilir. Buradan

$$C_1\left(\theta'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\right)+C_2\left(\varphi'(1,\lambda)-1\right)=0 \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) denklemlerinden

$$\begin{cases} C_1\left(1-\theta(1,\lambda)\right)-C_2\varphi(1,\lambda)=0 \\ C_1\left(\theta'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\right)+C_2\left(\varphi'(1,\lambda)-1\right)=0 \end{cases} \tag{3.8}$$

sistemi elde edilir. Bu homojen denklem sistemininin katsayılar matrisinin esas determinantı olan $F(\lambda)$, sadece λ ya bağlıdır. (3.8) homojen denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümlerinin bulunabilmesi için ancak ve ancak, katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} \left(1-\theta(1,\lambda)\right) & -\varphi(1,\lambda) \\ \left(\theta'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\right) & \left(\varphi'(1,\lambda)-1\right) \end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\theta(1,\lambda)\right)\left(\varphi'(1,\lambda)\right)+\varphi(1,\lambda)\left(\theta'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\right)=0$$

bulunur. Buradan

$$F(\lambda)=\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)=2 \tag{3.9}$$

denklemi elde edilir.

Özdeğerlerin asimptotik ifadesini vermek için her reel olmayan λ lar için, $\lambda=\sigma+i\tau,\ \tau\geq 0$ iken $0\leq \arg\lambda\leq\pi$ olarak verilsin. O zaman $|\lambda|\to\infty$ iken, $([4],\ s.292)$

$$\left.\begin{aligned} \theta=\cos\lambda+O\left(|\lambda|^{-1}e^{\tau}\right) \quad &, \quad \theta'=-\lambda\sin\lambda+O\left(e^{\tau}\right) \\ \varphi=\lambda^{-1}\sin\lambda+O\left(|\lambda|^{-2}e^{\tau}\right), &\quad \varphi'=\cos\lambda+O\left(|\lambda|^{-1}e^{\tau}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

elde edilir. Şimdi $|\sin\lambda|>Ae^{\tau}$ durumunda

$$\left\{\sin^2\lambda+O\left(|\lambda|^{-1}e^{\tau}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=\sin\lambda\left\{1+O\left(\frac{e^{\tau}}{\lambda\sin^2\lambda}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sin\lambda\left\{1+O\left(|\lambda|^{-1}\right)\right\}$$

yazılır.

Kabul edelim ki;

$$F(\lambda)=\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)=\theta+\varphi'+2\alpha\lambda\varphi$$

olsun. Biz göstereceğiz ki her bir genel fonksiyonun sonsuz reel sıfırları vardır. $\lambda_0,\lambda_1,...$ ve $\mu_0,\mu_1,...$ lere karşılık gelen sıfırlar olsunlar. (3.10) denkleminin sonucu olarak, her büyük $|\lambda|$ için

$$F(\lambda)=2\cos\lambda+2\alpha\sin\lambda+O\left(|\lambda|^{-1}e^{\tau}\right)$$

olur.

Şimdi λ nın reel olduğunu kabul edelim. $\lambda\to\infty$ giderken $F(\lambda)\pm 2$ değerleri arasında gidip gelir. $\lambda\to-\infty$ giderken $\lambda=i\lambda$ sadece sanal ve

$$F(\lambda)\sim 2\cosh\lambda+2\alpha\sinh\lambda\to\infty$$

olur. Buradan alıyoruz ki $F(\lambda)\pm 2$ fonksiyonlarının sıfırlarının kümesi $F(\lambda)-2$ fonksiyonunun en az bir λ_0 noktasını kapsayacaktır; fakat λ_0 ın sağındaki $F(\lambda)$ nın ± 2 değerlerini alıp almayacağı belli değildir.

λ ile ilgili kısmın esas denklemi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left\{\lambda^2-q(x)\right\}\psi=0$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{\partial^3\psi(x,\lambda)}{\partial x^2\partial\lambda}+\left\{\lambda^2-q(x)\right\}\frac{\partial\psi(x,\lambda)}{\partial\lambda}=-2\lambda\psi(x,\lambda) \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial\psi(0,\lambda)}{\partial\lambda}=0\ ,\qquad \frac{\partial\psi'(0,\lambda)}{\partial\lambda}=0 \tag{3.12}$$

elde edilir. Buradan (3.11) denkleminin genel çözümünü bulalım.

Önce (3.11) denkleminin homojen olan kısmını çözümünü bulalım.

$H(x,\lambda)=\dfrac{\partial\psi(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ olarak işaretlenirse, (3.11) denkleminin homojen kısmı

$$\frac{\partial^2 H(x,\lambda)}{\partial x^2}+\left\{\lambda^2-q(x)\right\}H(x,\lambda)=0 \tag{3.13}$$

şeklini alır. C_1 ve C_2 keyfi sabitler ve $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ (3.13) denkleminin iki çözümü olmak üzere (3.13) denkleminin genel çözümü:

$$H_h(x,\lambda)=C_1\theta(x,\lambda)+C_2\varphi(x,\lambda)$$

biçiminde olur.

Şimdi (3.11) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümünü bulalım.

C_1 ve C_2 sabitleri x 'e bağlı birer fonksiyon olarak düşünülürse, (3.11) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü:

$$H_ö(x,\lambda)=C_1(x)\theta(x,\lambda)+C_2(x)\varphi(x,\lambda) \tag{3.14}$$

biçiminde olur. Buradan

$$\begin{cases} C_1'(x)\theta(x,\lambda)+C_2'(x)\varphi(x,\lambda)=0 \\ C_1'(x)\theta'(x,\lambda)+C_2'(x)\varphi'(x,\lambda)=-2\lambda\psi(x,\lambda) \end{cases} \tag{3.15}$$

elde edilir. Böylece (3.15) den

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi(x,\lambda) \\ -2\lambda\psi(x,\lambda) & \varphi'(x,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \theta(x,\lambda) & \varphi(x,\lambda) \\ \theta'(x,\lambda) & \varphi'(x,\lambda) \end{vmatrix}}=2\lambda\varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda)$$

$$C_1(x)=C_1+2\lambda\int_0^x\varphi(\xi,\lambda)\psi(\xi,\lambda)d\xi$$

bulunur. Benzer şekilde

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} \theta(x,\lambda) & 0 \\ \theta'(x,\lambda) & -2\lambda\psi(x,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \theta(x,\lambda) & \varphi(x,\lambda) \\ \theta'(x,\lambda) & \varphi'(x,\lambda) \end{vmatrix}}=2\lambda\theta(x,\lambda)\psi(x,\lambda)$$

$$C_2(x)=C_2-2\lambda\int_0^x\theta(\xi,\lambda)\psi(\xi,\lambda)d\xi$$

bulunur. $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ fonksiyonları (3.14) de yerlerine yazılırsa, (3.11) homojen olmayan diferansiyel denkleminin genel çözümü:

$$H(x,\lambda)=C_1\theta(x,\lambda)+C_2\varphi(x,\lambda)+2\lambda\int_0^x\{\theta(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\psi(\xi,\lambda)d\xi \tag{3.16}$$

biçiminde olur. Buradan (3.12) den

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda}=-2\lambda\int_0^x\{\theta(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\theta(\xi,\lambda)d\xi \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\varphi(\xi,\lambda)d\xi \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.18) denkleminin her iki tarafının x e göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial\varphi'(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta'(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\varphi(\xi,\lambda)d\xi \tag{3.19}$$

elde edilir.

(3.17-3.19) denklemlerinden $x=1$ iken

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\partial\theta(1,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial\varphi'(1,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial\left(2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right)}{\partial\lambda}$$

$$=\frac{\partial\theta(1,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial\varphi'(1,\lambda)}{\partial\lambda}+2\alpha\varphi(1,\lambda)+2\alpha\lambda\frac{\partial\varphi(1,\lambda)}{\partial\lambda}$$

$$=-2\lambda\int_0^1\{\theta\varphi(\xi,\lambda)-\varphi\theta(\xi,\lambda)\}\theta(\xi,\lambda)d\xi+$$

$$+2\lambda\int_0^1\{\theta'\varphi(\xi,\lambda)-\varphi'\theta(\xi,\lambda)\}\varphi(\xi,\lambda)d\xi+$$

$$+4\alpha\lambda^2\int_0^1\{\theta\varphi(\xi,\lambda)-\varphi\theta(\xi,\lambda)\}\varphi(\xi,\lambda)d\xi$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}=-2\lambda\int_0^1\{-\varphi\theta^2(\xi,\lambda)+(\theta+\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)\varphi(\xi,\lambda)\theta(\xi,\lambda)-(\theta'+2\alpha\lambda\theta)\varphi(\xi,\lambda)\}d\xi \tag{3.20}$$

Yardımcı Teorem 3.1. (3.1) ve (3.2) sınır değer probleminin λ özdeğerlerininin iki katlı olması için gerek ve yeter şart

$$\theta'(1,\lambda)=-2\alpha\lambda\,,\quad \varphi(1,\lambda)=0 \tag{3.21}$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki; λ, (3.1) ve (3.2) sınır değer probleminin iki katlı özdeğeridir. Bu durumda aynı özdeğere iki lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$

özfonksiyonları karşılık gelir. Dolayısıyla bu özfonksiyonların lineer kombinasyonu (3.1) denklemini ve (3.2) sınır koşullarını sağlar. Özel olarak $y_1(x)=\theta(x,\lambda)$ ve $y_2(x)=\varphi(x,\lambda)$ olarak alınırsa (3.3) koşulundan (3.21) eşitlikleri elde edilir.

Tersine kabul edelim ki; sınır değer probleminin λ özdeğeri için (3.21) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda λ nın iki katlı özdeğer olduğunu gösterelim. (3.21) eşitlikleri ve (3.4) den

$$\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)=1 \tag{3.22}$$

elde edilir. Diğer yandan Yardımcı Teorem1.3.1. den $F(\lambda)=2$ dir. Buradan (3.22) gereğince

$$F^2(\lambda)=\left[\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)\right]^2=4=4\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)$$

olur ve (3.21) den

$$\left[\theta(1,\lambda)+\varphi'(1,\lambda)\right]^2=4\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)$$

$$\theta(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)$$

eşitliği elde edilir. $F(\lambda)=2$ eşitliğinden de

$$\theta(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)=1$$

sonucuna varılır. (3.3), (3.21) ve (3.22) den (3.2) koşullarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla, bu çözümler lineer ve λ, (3.1) ve (3.2) sınır değer probleminin iki katlı özdeğeridir. □

Yardımcı Teorem 3.2. Eğer $|F(\lambda)|<2$ ise $\theta'+2\alpha\lambda\theta\neq 0$ ve $\varphi\neq 0$ olmak üzere $\theta'+2\alpha\lambda\theta$ ile $\varphi(1,\lambda)$ zıt işaretlidirler.

İspat: $|F(\lambda)|<2$ eşitsizliğinden (3.9) denklemi kullanılarak

$$[\theta+\varphi'+2\alpha\lambda\varphi]^2=\theta^2+(\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)^2+2\theta(\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)<4(\theta\varphi'-\theta'\varphi)$$

$$\theta^2+(\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)^2+2\theta(\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)<4(\theta\varphi'-\theta'\varphi-2\alpha\lambda\theta\varphi+2\alpha\lambda\theta\varphi)$$

$$=4\theta(\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)-4\varphi(\theta'+2\alpha\lambda\theta)$$

bulunur. Buradan

$$\left[\theta-(\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)\right]^2<-4\varphi(\theta'+2\alpha\lambda\theta)$$

elde edilir. Buradan $\theta'+2\alpha\lambda\theta$ ile φ zıt işaretlidirler. □

Şimdi (3.20) denkleminden

$$\frac{dF}{d\lambda}=-2\lambda\left\{-\varphi\int_0^1\left\{\theta(\xi,\lambda)-\frac{(\theta+\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)}{2\varphi}\varphi(\xi,\lambda)\right\}^2 d\xi\right.$$

$$\left.-\frac{4-(\theta-\varphi'-2\alpha\lambda\varphi)^2}{4\varphi}\int_0^1\varphi^2(\xi,\lambda)d\xi\right\} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23) denklemi sıfırdan farklı ve φ ile zıt işaretlidir. Böylece $F(\lambda)$ bu noktada maksimuma ve minimuma sahip olamaz.

Eğer $F'(\lambda)\neq 0$ ise $F(\lambda)$ λ_0 da 2 değerinden -2 değerine kadar sürekli azalır. $F(\mu_0)=-2$ olduğunu kabul edelim. μ_0 da genel eğri olan $y=F(\lambda)$ ile kesişen doğru $y=-2$ doğrusudur. Böylece genellikle μ_0 dan sonra sırasıyla μ_1 ve λ_1 gelir. Genel olarak

$$\lambda_0<\mu_0\leq\mu_1<\lambda_1\leq\lambda_2<\mu_2\leq\mu_3<\ldots$$

ifadesi yazılabilir. Yukarıdaki ifadelerden $\lambda_0<\lambda<\mu_0$ için $\varphi>0$ ve $\mu_1<\lambda<\lambda_1$ için $\varphi<0$ dır ve bu şekilde devam eder.

Kabul edelim ki λ, $F(\lambda)-2$ fonksiyonunun en az ikinci mertebeden olan bir sıfır noktası olsun. Bu taktirde, $\theta+\varphi'+2\alpha\lambda\varphi=2$ ve $\varphi\neq 0$ olduğunda (3.23) denklemi gereğince,

$$\frac{dF}{d\lambda}=-2\lambda\left\{-\varphi\int_0^1\left\{\theta(\xi,\lambda)-\frac{(\theta+\varphi'+2\alpha\lambda\varphi)}{2\varphi}\varphi(\xi,\lambda)\right\}^2 d\xi\right\}$$

elde edilir. Böylece $\varphi=0$ olur. Benzer şekilde $\theta'+2\alpha\lambda\theta\neq 0$ ise (3.23) denklemi gereğince

$$\frac{dF}{d\lambda}=-2\lambda\left\{(\theta'+2\alpha\lambda\theta)\int_0^1\left\{\varphi(\xi,\lambda)+\frac{(\varphi+\theta'+2\alpha\lambda\theta)}{2(\theta'+2\alpha\lambda\theta)}\theta(\xi,\lambda)\right\}^2 d\xi\right\}$$

elde edilir. Böylece $\theta'+2\alpha\lambda\theta=0$ olur.

$\theta\varphi' = 1, \quad \theta - 2 = -\varphi' = -1/\theta, \quad (\theta - 1)^2 = 0, \quad \theta = 1$ ve buradan $\theta' = -2\alpha\lambda$ dır.

$$\theta' = -2\alpha\lambda, \ \varphi = 0, \ \theta = 1, \ \varphi' = 1 \tag{3.24}$$

koşullarında $F(\lambda) - 2$ nin ikinci mertebeden sıfır olması için gerek şarttır ve (3.24) gereğince onlar açık bir şekilde yeterli şartıdır.

Şimdi (3.20) ün her iki tarafını λ ya göre diferansiyeller ve $\lambda = \lambda_0$ alınırsa

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial \lambda^2} = 2\lambda_0 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \varphi(1,\lambda_0)}{\partial \lambda} \theta^2(\xi,\lambda_0) + \left(\frac{\partial \theta'(1,\lambda_0)}{\partial \lambda} + 2\alpha\lambda_0 \frac{\partial \theta(1,\lambda_0)}{\partial \lambda} \right) \varphi^2(\xi,\lambda_0) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \theta(1,\lambda_0)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi'(1,\lambda_0)}{\partial \lambda} + 2\alpha\lambda_0 \frac{\partial \varphi(1,\lambda_0)}{\partial \lambda} \right) \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0) \right\} d\xi \tag{3.25}$$

elde edilir. Ayrıca (3.17-3.19) bağıntılarında (3.24) deki değerler yerlerine yazılırsa aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\frac{\partial \theta(x,\lambda_0)}{\partial \lambda} = -2\lambda_0 \int_0^1 \varphi(\xi,\lambda_0)\theta(\xi,\lambda_0)\, d\xi \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \theta'(x,\lambda_0)}{\partial \lambda} = -2\lambda_0 \int_0^1 \left\{ 2\alpha\lambda_0 \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0) - \theta^2(\xi,\lambda_0) \right\} d\xi \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \varphi(x,\lambda_0)}{\partial \lambda} = 2\lambda_0 \int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\, d\xi \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial \varphi'(x,\lambda_0)}{\partial \lambda} = 2\lambda \int_0^1 \left\{ 2\alpha\lambda_0 \varphi^2(\xi,\lambda_0) - \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0) \right\} d\xi \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.26-3.29) değerleri (3.25) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial \lambda^2} = -2\lambda_0 \int_0^1 \left\{ 2\int_0^1 \left(\varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right) \theta^2(\xi,\lambda_0) + \left(2\int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right) \varphi^2(\xi,\lambda_0) \right.$$

$$\left. + 2\lambda_0 \left(\int_0^1 -2\theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right) \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0) \right\} d\xi$$

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial \lambda^2} = -4\lambda_0 \int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi . \int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi - 4\int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi . \int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi$$

$$+ 8\lambda_0 \int_0^1 \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi . \int_0^1 \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi$$

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial \lambda^2} = 8\left[\left(\int_0^1 \theta(\xi,\lambda_0)\varphi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi\right)^2 - \int_0^1 \varphi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi . \int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi\right] \tag{3.30}$$

ifadesi bulunur. Dolayısıyla

$$\left(\int_0^1 \theta(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\lambda_0 dx\right)^2 - \left(\int_0^1 \varphi^2(x,\lambda_0)\lambda_0 dx\right)\left(\int_0^1 \theta^2(x,\lambda_0)\lambda_0 dx\right) < 0$$

olur ki bu da (3.30) ün sıfırdan küçük olduğunu gösterir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1. $F(\lambda)\pm 2$ fonksiyonu katı ikiden büyük sıfırlara sahip değildir.

Sonuç 3.2. λ_0, $F(\lambda)-2$ fonksiyonunun iki katlı sıfırıdır gerek ve yeter şart $F(\lambda)$ bu noktada maksimuma sahiptir. λ_0, $F(\lambda)+2$ fonksiyonunun iki katlı sıfırıdır gerek ve yeter şart $F(\lambda)$ bu noktada minimuma sahiptir.

Yukarıdakiler baz alınarak incelenen sınır değer problemin asimptotik ifadesini bulalım. (3.9) gereğince

$$F(\lambda)-2 = -4\sin^2\frac{1}{2}\lambda + 2\alpha\sin\lambda + O\left(|\lambda|^{-1}e^{\tau}\right) \tag{3.31}$$

bulunur.
Rouchè teoremi tarafından uygulanan λ-düzleminin içinden geçen düzeç $\lambda = (2n+1)^2\pi^2$ ve sağ taraftaki karşılıklı yarım kare eksenlere paralel kenarlara sahiptir. $F(\lambda)-2$ fonksiyonunun iç düzecinin $\sin^2\frac{1}{2}\lambda$ de eşit sayılara sahip olduğu görülür. Bu fonksiyon $\lambda = 0$ da bir basit sıfıra ve $\lambda = 4m^2\pi^2$, $(m=1,2,...,n)$ de çift sıfıra sahiptir ve bu yüzden sıfırların sayısı $2n+1$ dir. $F(\lambda)-2$ fonksiyonunun en büyük sıfırı bu bölge içinde λ_{2n} den (3.31) gereği reel λ için λ_{2n} ve λ_{2n-1} sıfırlarının her ikisi $4n^2\pi^2$ sayısına tahmini eşittir.

Özdeğerlerin asimptotik ifadesini bulmak için, dikkat edilmelidir ki;

$$\theta(x,\lambda)=\cos\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\{\lambda(x-y)\}q(y)\theta(y,\lambda)dy, \tag{3.32}$$

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\{\lambda(x-y)\}q(y)\varphi(y,\lambda)dy \tag{3.33}$$

ve

$$\varphi'(x,\lambda)=\cos\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \cos\{\lambda(x-y)\}q(y)\varphi(y,\lambda)dy \tag{3.34}$$

dir.

λ bir pozitif reel sayı olmak üzere (3.32) denkleminden

$$\theta(x,\lambda)=\cos\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\{\lambda(x-y)\}q(y)\cos\lambda y dy+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \sin\{\lambda(x-y)\}q(y)dy\int_0^y \sin\{\lambda(y-t)\}q(t)\cos\lambda t dt+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{3.35}$$

(3.33) denkleminden

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \sin\lambda(x-t)\sin\lambda t q(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \sin\{\lambda(x-y)\}q(y)dy\int_0^y \sin\lambda(y-t)q(t)\cos\lambda t dt+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{3.36}$$

(3.34) denkleminden de

$$\varphi'(x,\lambda)=\cos\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \cos\{\lambda(x-y)\}q(y)\sin\lambda y dy+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \cos\{\lambda(x-y)\}q(y)dy\int_0^y \sin\{\lambda(y-t)\}q(t)\sin\lambda t dt+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{3.37}$$

elde edilir.

Şimdi (3.35-3.37) ifadelerinin $x=1$' deki değerleri bulunup (3.9) denkleminde yerlerine yazılıp gerekli dönüşümler yapıldığında

$$F(\lambda)=2\cos\lambda+2\alpha\sin\lambda+\frac{\sin\lambda}{\lambda}\int_0^1 q(y)dy+\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1\{\cos\lambda(1-2y)-\cos\lambda\}q(y)dy$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 q(y)dy\int_0^y \sin\{\lambda(y-t)\}\sin\{\lambda(1-y+t)\}q(t)dt+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)=2$$

$$F(\lambda)=2\cos\lambda+2\alpha\sin\lambda+\frac{1}{\lambda}\left[(\sin\lambda-\alpha\cos\lambda)\int_0^1 q(y)dy+\alpha\int_0^1\cos\{\lambda(1-2y)\}q(y)\,dy\right]$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\left[\int_0^1 q(y)\,dy\int_0^y\sin\{\lambda(y-t)\}.\sin\{\lambda(1-y+t)\}q(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+2\alpha\int_0^1\sin\{\lambda(1-y)\}q(y)\,dy\int_0^y\sin\{\lambda(y-t)\}\sin\lambda t.q(t)\,dt\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)=2 \qquad (3.38)$$

denklemi elde edilir. Buradan

$q(x)\equiv 0$ durumunda

$$2\cos\lambda+2\alpha\sin\lambda=2 \qquad (3.39)$$

$$\sqrt{1+\alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cos\lambda+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\sin\lambda\right)=1$$

elde edilir.

Burada $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\sin\phi$ ve $\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\cos\phi$ olarak işaretlenirse, $\tan\phi=\frac{1}{\alpha}$ olur.

Buradan

$$\sin(\lambda+\phi)=\sin\phi$$

$$\sin(\lambda+\phi)-\sin\phi=0$$

bulunur. Buradan

$$2\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2}+\phi\right)=0 \qquad (3.40)$$

bulunur. (3.40) deki eşitliğin sağlanması için aşağıdaki iki durum söz konusudur:

1) $\frac{\lambda}{2}+\phi=\frac{\pi}{2}+\pi n\Rightarrow\lambda_n=\pi(1+2n)-2\phi \quad (n\in\mathbb{Z})$.

2) $\frac{\lambda}{2}=\pi n\Rightarrow\lambda_n=2\pi n \quad (n\in\mathbb{Z})$.

$q(x)\neq 0$ durumunda, $-\pi<\delta_n<\pi$ olmak üzere $\lambda_n=2\pi n+\delta_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ olsun.

Dolayısıyla $\alpha\neq 0$ durumunda, $F(\lambda)=2$ denklemi δ_n için aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$F(\lambda)=-4\sin^2\frac{\lambda}{2}+2\alpha\sin\lambda+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left[(\sin\lambda-\alpha\cos\lambda)\int_0^1 q(y)dy+\alpha\int_0^1\cos\{\lambda(1-2y)\}q(y)dy\right]+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\left[\int_0^1 q(y)dy\int_0^y\sin\{\lambda(y-t)\}.\sin\{\lambda(1-y+t)\}q(t)dt+\right.$$

$$\left.+2\alpha\int_0^1\sin\{\lambda(1-y)\}q(y)dy\int_0^y\sin\{\lambda(y-t)\}\sin\lambda t.q(t)dt\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \qquad (3.41)$$

Böylece, $\alpha\neq 0$ ve $q(x)\neq 0$ durumunda

1) $-\pi<\delta_n<\pi$ olmak üzere, $\lambda_n=2\pi n+\pi-2\phi+\delta_n$, $(n\in\mathbb{Z})$ olsun. Dolayısıyla

$$\sin\left(\pi n+\frac{1}{2}\pi-\phi+\frac{1}{2}\delta_n\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\pi n+\frac{1}{2}\delta_n\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin\left(-\phi+\frac{1}{2}\delta_n\right)\cos\left(\frac{1}{2}\delta_n\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\delta_n\right)\cos\phi+\sin\left(\frac{1}{2}\delta_n\right)\sin\phi=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\delta_n\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta_n\right)+\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta_n\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\delta_n\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ bulunur.

2) $-\pi<\delta<\pi$ olmak üzere, $\lambda_n=2\pi n+\delta_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ olsun. Dolayısıyla

$$2\cos\lambda+2\alpha\sin\lambda-2=0$$

$$\sqrt{1+\alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cos\lambda+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\sin\lambda\right)=1 \qquad \left(\tan\phi=\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\sin\frac{1}{2}\lambda.\sin\left(\frac{1}{2}\lambda+\phi\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin\frac{1}{2}\delta_n.\cos\left(\frac{1}{2}\delta_n+\phi\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin\frac{1}{2}\delta_n\left(\sin\frac{1}{2}\delta_n.\cos\phi+\cos\frac{1}{2}\delta_n.\sin\phi\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin^2\frac{1}{2}\delta_n+\sin\frac{1}{2}\delta_n.\cos\frac{1}{2}\delta_n.\tan\phi=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$2\sin\frac{1}{2}\delta_n.\cos\left(\frac{1}{2}\delta_n+\phi\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin\frac{1}{2}\delta_n.\cos\left(\frac{1}{2}\delta_n+\phi\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\cos\left(\frac{1}{2}\delta_n+\phi\right)=\cos\frac{1}{2}\delta_n.\cos\phi-\sin\phi.\sin\frac{1}{2}\delta_n$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\delta_n^2\right)\cos\phi+\left(\frac{1}{2}\delta_n-\frac{1}{6}\delta_n^3\right)\sin\phi$$

elde edilir. Böylece

$$\sin\frac{1}{2}\delta_n\left(\cos\frac{1}{2}\delta_n.\cos\phi+\sin\phi.\sin\frac{1}{2}\delta_n\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sin\frac{1}{2}\delta_n\left(\left(1-\frac{1}{4}\delta_n^2\right)\cos\phi+\left(\frac{1}{2}\delta_n-\frac{1}{6}\delta_n^3\right)\sin\phi\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\sin\frac{1}{2}\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan $\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ elde edilir.

Bulunan yukarıdaki ifadelerin hepsi (3.41) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$4\sin^2\frac{1}{2}\delta_n+4\alpha\sin\frac{1}{2}\delta_n.\cos\frac{1}{2}\delta_n+\frac{1}{2n\pi}\Big[\left(\sin\delta_n-\alpha\cos\delta_n\right)\int_0^1 q(y)\,dy+$$
$$+\alpha\int_0^1\cos\left\{\delta_n-2\left(2n\pi+\delta_n\right)y\right\}q(y)\,dy\Big]$$
$$-\frac{1}{16n^2\pi^2}\Bigg[\int_0^1 q(y)\,dy\int_0^y\left(\sin^2\left\{2n\pi(y-t)\right\}\right)q(t)\,dt+$$
$$+2\alpha\int_0^1-\sin\left\{2n\pi y\right\}q(y)\,dy\int_0^y\sin\left\{2n\pi(y-t)\right\}\sin\left\{2n\pi(t)\right\}q(t)\,dt\Bigg]=O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (3.42)$$

elde edilir. Burada

$$\cos\{4n\pi y+(2y-1)\}=\cos 4n\pi y.\cos(2y-1)\delta_n+\sin 4n\pi y.\sin(2y-1)\delta_n$$
$$=\cos 4n\pi y$$

olduğundan

$$\alpha\int_0^1 \cos\{\delta_n-2(2n\pi+\delta_n)y\}q(y)dy=\alpha\int_0^1 \cos 4n\pi y.q(y)dy \tag{3.43}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^y \sin 2n\pi t.\cos 2n\pi t.q(t)dt=\frac{1}{2n\pi}\int_0^y \sin 2n\pi t.q(t).d\sin 2n\pi t \tag{3.44}$$

$$2\sin\{2n\pi(y-t)\}\sin 2n\pi t=\cos\{2n\pi(y-2t)\}-\cos 2n\pi y$$

$$=\frac{1}{4n\pi}\int_0^y q(t).d\sin^2 2n\pi t$$

$$=\frac{1}{4n\pi}\sin^2 2n\pi t.q(t)\Big|_0^y$$

$$=\frac{1}{4n\pi}\sin^2 2n\pi y.q(y)-\frac{1}{4n\pi}\int_0^y \sin^2 2n\pi t.q'(t)dt \tag{3.45}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$-\int_0^y \cos 4n\pi t.q(t)dt=-\frac{1}{4n\pi}\int_0^y q(t).d\sin 4n\pi t$$

$$=-\frac{1}{4n\pi}q(t).\sin 4n\pi t\Big|_0^y \tag{3.46}$$

bulunur. Öyleyse

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^1 \sin 4n\pi y\int_0^y q(t)dt.q(y)dy=-\frac{\alpha}{8n\pi}\int_0^1 q(t)dt.q(y)d\cos 4n\pi y$$

$$=-\frac{\alpha}{8n\pi}\cos 4n\pi y\int_0^y q(t)dt.q(y)\Big|_0^1$$

$$=-\frac{\alpha}{8n\pi}\int_0^1 q(t)dt.q(1) \tag{3.47}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(q(y)\int_0^y q(t)\,dt\right)=q'(y)\int_0^y q(t)\,dt+q^2(y) \tag{3.48}$$

elde edilir. Ayrıca

$$-2\alpha\int_0^1 \sin 2n\pi y.q(y)\,dy\int_0^y \left(\sin 2n\pi y.\cos 2n\pi t-\sin 2n\pi t.\cos 2n\pi y\right)\sin 2n\pi t.q(t)\,dt$$

$$=2\alpha\int_0^1 \sin 2n\pi y.\cos 2n\pi y.q(y)\,dy\int_0^y \sin^2 2n\pi t.q(t)\,dt-$$

$$-2\alpha\int_0^1 \sin^2 2n\pi y.q(y)\,dy\int_0^y \sin 2n\pi t.\cos 2n\pi t.q(t)\,dt$$

$$=\alpha\int_0^1 \sin 4n\pi y.q(y)\,dy\int_0^y \frac{1-\cos 4n\pi t}{2}.q(t)\,dt-\alpha\int_0^1 \frac{1-\cos 4n\pi y}{2}.q(y)\,dy\int_0^y \sin 4n\pi t.q(t)\,dt$$

$$=\frac{\alpha}{2}\int_0^1 q(y)\,dy\int_0^y \left(\sin 4n\pi y-\sin 4n\pi y.\cos 2n\pi t-\sin 4n\pi t+\sin 4n\pi t.\cos 4n\pi t\right)q(t)\,dt \tag{3.49}$$

elde edilir.

Şimdi $a_n=2\int_0^1 q(y)\cos 2\pi n dy$ ve $b_n=2\int_0^1 q(y)\sin 2\pi n dy$ olarak işaretleyelim.

Dolayısıyla (3.42-3.49) den, $q(x)\in W_2^1[0,1]$ şartı dikkate alınıp $\left([4],s.297-298\right)$ deki işlemlerin benzeri yapılarak

$$\sin^2\frac{1}{2}\delta_n+\left(\alpha+\frac{a_0}{8n\pi}\right)\sin\frac{1}{2}\delta_n+\frac{1}{256n^2\pi^2}\left[a_0^2-a_{2n}^2-b_{2n}^2+32n\pi\left(\alpha a_0+4a_{2n}\right)\right]=O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.50}$$

Böylece (3.50) den

$$\sin\delta_n=\frac{-\alpha+a_0}{16n\pi}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{64n^2\pi^2}-\frac{3\alpha a_0}{32n^2\pi^2}+\frac{1}{256n^2\pi^2}\left(a_{2n}^2+b_{2n}^2\right)-\frac{1}{64n^2\pi^2}a_{2n}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\delta_n=\frac{-\alpha+a_0}{16n\pi}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{64n^2\pi^2}-\frac{3\alpha a_0}{32n^2\pi^2}+\frac{1}{256n^2\pi^2}\left(a_{2n}^2+b_{2n}^2\right)-\frac{1}{64n^2\pi^2}a_{2n}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.51}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.51) dikkate alınırsa

$$\lambda_n^2=4n^2\pi^2-\frac{\alpha+a_0}{4}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\frac{3\alpha a_0}{2}+\frac{1}{16}\left(a_{2n}^2+b_{2n}^2\right)-\frac{1}{4}a_{2n}}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.52}$$

elde edilir. Bulunan (3.52) deki ifade bakılan diferansiyel operatörün özdeğerlerinin asimptotik ifadesidir.

Yukarıdaki işlemler benzer şekilde, λ yerine $\lambda_n = 2\pi n + \pi - 2\phi + \delta_n$, $(n \in \mathbb{Z})$ yazılarak yapılabilir.

3.2. SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU

Bu bölümde bakılan sınır değer problemiyle, ayrıca bu problemin oluşturduğu operatörün Green fonksiyonunun kurulması ile ilgileneceğiz.

Fiziğin birçok problemlerinde sık sık karşılaşılan aşağıdaki diferansiyel operatöre bakalım.

$$L: \qquad y'' + \left(\lambda^2 - q(x)\right) y = f(x) \tag{3.53}$$

$$y(0) = y(1); y'(1) = y'(0) - 2\alpha\lambda y(0) \tag{3.54}$$

Burada $q(x) \in W_2^1[0,1]$ kompleks değerli bir fonksiyon, α kompleks sayı ve λ spektral parametredir.

(3.53) de verilen diferansiyel denklem ile periyodik sınır şartlarından oluşturulan diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun kurulması, $[4,5]$ kitaplarında ve birçok makalede yeterince incelenmiştir. Bizde de bakılan operatörün en önemli özelliği sınır şartlarında spektral parametre bulunmasıdır.

Teorem 3.2.1. Homojen olmayan (3.53) diferansiyel denkleminin genel çözümü $(y(x))$, ona karşı gelen $Ly = 0$ homojen denkleminin genel çözümü $(y_h(x))$ ile kendisinin herhangi bir özel çözümünün $(y_{ö}(x))$ toplamına eşittir, yani,

$$y(x) = y_h(x) + y_{ö}(x)$$

eşitliği doğrudur.

(3.53) diferansiyel denkleminin homojen kısmının (3.4) şartları altında ($Ly = 0$) genel çözümünü (3.1) de,

$$y_h(x,\lambda)=C_1\theta(x,\lambda)+C_2\varphi(x,\lambda)$$

biçiminde elde etmiştik. (3.53) denkleminin herhangi bir $y_ö(x)$ özel çözümünü bulmak için, C_1 ve C_2 keyfi sabitlerini x'e bağlı olarak düşünüp, bunları

$$y(x,\lambda)=C_1(x)\theta(x,\lambda)+C_2(x)\varphi(x,\lambda) \tag{3.55}$$

fonksiyonu (3.53) denklemini sağlayacak şekilde seçelim. Bunun için önce y' ve y'' fonksiyonlarını (3.55) eşitliğinden aşağıdaki kuralla bulalım.

$$y'(x,\lambda)=C_1'(x)\theta(x,\lambda)+C_2'(x)\varphi(x,\lambda)+C_1(x)\theta'(x,\lambda)+C_2(x)\varphi'(x,\lambda)$$

Burada,

$$C_1'(x)\theta(x,\lambda)+C_2'(x)\varphi(x,\lambda)=0 \tag{3.56}$$

olduğunu kabul edelim. y'' ve (3.55) eşitliği (3.53) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$C_1'(x)\theta'(x,\lambda)+C_2'(x)\varphi'(x,\lambda)=f(x) \tag{3.57}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.56) ve (3.57) eşitliklerinden oluşacak olan sistemden Cramer yöntemiyle $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ fonksiyonları,

$$C_1(x)=C_1-\int_0^x \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt \tag{3.58}$$

$$C_2(x)=C_2+\int_0^x \theta(t,\lambda)\, f(t)\,dt \tag{3.59}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (3.58) ve (3.59) eşitlikleri (3.55) denkleminde yerine yazılırsa (3.53) denkleminin genel çözümü:

$$y(x,\lambda)=C_1\theta(x,\lambda)+C_2\varphi(x,\lambda)-\theta(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_0^x \theta(t,\lambda)\, f(t)\,dt \tag{3.60}$$

biçiminde olur.

Şimdi (3.60) denkleminde (3.54) de verilen sınır şartları kullanılırsa

$$\begin{cases} C_1\big(\theta(1,\lambda)-1\big)+C_2\varphi(1,\lambda)=\theta(1,\lambda)\displaystyle\int_0^1 \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt-\varphi(1,\lambda)\theta(t,\lambda)\, f(t)\,dt \\ C_1\big(\theta'(1,\lambda)+2\alpha\lambda\big)+C_2\big(\varphi'(1,\lambda)-1\big)=\theta'(1,\lambda)\displaystyle\int_0^1 \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt-\varphi'(1,\lambda)\theta(t,\lambda)\, f(t)\,dt \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix}\theta(1,\lambda)\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt-\varphi(1,\lambda)\theta(t,\lambda)f(t)dt & \varphi(1,\lambda)\\ \theta'(1,\lambda)\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt-\varphi'(1,\lambda)\theta(t,\lambda)f(t)dt & \varphi'(1,\lambda)-1\end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)}$$

$$C_1=\frac{\left(\begin{array}{c}\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt-\varphi(1,\lambda)\varphi'(t,\lambda)\int_0^1\theta(t,\lambda)f(t)dt-\theta(1,\lambda)\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt\\ +\varphi(1,\lambda)\int_0^1\theta(t,\lambda)f(t)dt+\varphi(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)\int_0^1\theta(t,\lambda)f(t)dt\end{array}\right)}{\Delta(\lambda)}$$

$$C_1=\frac{1.\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt-\theta(1,\lambda)\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt+\varphi(1,\lambda)\int_0^1\theta(t,\lambda)f(t)dt}{2-\theta(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi(1,\lambda)=\Delta(\lambda)}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$C_2=\frac{\left(-1+\varphi'(x,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi(x,\lambda)\right)\int_0^1\theta(t,\lambda)f(t)dt+\left(-\theta'(x,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(x,\lambda)\right)\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt}{\Delta(\lambda)}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}y(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Bigg[&\int_0^1\varphi(t,\lambda)f(t)dt\left(\theta(x,\lambda)-\theta^2(x,\lambda)-\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\right)\\ &+\int_0^1\theta(t,\lambda)f(t)dt\left(\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)+\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)(x,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)\right)\\ &-2\theta(x,\lambda)\int_0^x f(t)\varphi(t,\lambda)dt+2\varphi(x,\lambda)\int_0^x f(t)\theta(t,\lambda)dt\\ &+\theta^2(x,\lambda)\int_0^x f(t)\varphi(t,\lambda)dt-\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\int_0^x f(t)\theta(t,\lambda)dt\\ &+2\alpha\lambda\varphi(x,\lambda)\theta(x,\lambda)\int_0^x f(t)\varphi(t,\lambda)dt-2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)\theta(x,\lambda)\int_0^x f(t)\theta(t,\lambda)dt\Bigg]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Bigg[\int_0^x \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt\Big(\theta(x,\lambda)-\theta^2(x,\lambda)-\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

$$-2\theta(x,\lambda)+\theta^2(x,\lambda)+2\varphi(x,\lambda)+\varphi^2(x,\lambda)+\varphi'(x,\lambda)\theta(x,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi(x,\lambda)\theta(x,\lambda)\Big)$$

$$+\int_x^1 \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt\Big(\theta(x,\lambda)-\theta^2(x,\lambda)-\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\Big)\Bigg]$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Bigg[\int_0^x \theta(t,\lambda)\, f(t)\Big(\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)+2\varphi(x,\lambda)$$

$$-\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)\Big)+\int_x^1 \theta(t,\lambda)\, f(t)\,dt\Big(\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)$$

$$+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)\Big)\Bigg]$$

$$=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Bigg[\int_0^x \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt\Big(1-\theta(x,\lambda)\Big)$$

$$+\int_x^1 \varphi(t,\lambda)\, f(t)\,dt\Big(\theta(x,\lambda)-\theta^2(x,\lambda)-\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-2\alpha\lambda\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\Big)\Bigg]$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Bigg[\int_0^x \theta(t,\lambda)\, f(t)\Big(\theta(x,\lambda)\Big)+\int_x^1 \theta(t,\lambda)\, f(t)\,dt\Big(\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)$$

$$+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)+2\alpha\lambda\varphi^2(x,\lambda)\Big)\Bigg]$$

$$=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Bigg[\int_0^x f(t)\Big(\varphi(t,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)+\theta(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\Big)dt\Bigg]$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Bigg[\int_x^1 f(t)\Big(\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta^2(x,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

$$-2\alpha\lambda\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+\theta(t,\lambda)\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\theta(t,\lambda)\theta(x,\lambda)+\theta(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)$$

$$+2\alpha\lambda\theta(t,\lambda)\varphi^2(x,\lambda)\Big)dt\Bigg]$$

elde edilir. Burada

$$G_1(x,t;\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big[\varphi(t,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)+\theta(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\Big]$$

ve

$$G_2(x,t;\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big[\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta^2(x,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$
$$-2\alpha\lambda\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+\theta(t,\lambda)\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\theta(t,\lambda)\theta(x,\lambda)$$
$$+\theta(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)+2\alpha\lambda\theta(t,\lambda)\varphi^2(x,\lambda)\Big]$$

olarak işaretlenirse, aşağıdaki formda bir ifade elde edilir.

$$y(x,\lambda)=\int_0^1 G(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt=\int_0^x G_1(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt+\int_x^1 G_2(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt$$

Burada $G_1(x,t;\lambda)$ ve $G_2(x,t;\lambda)$ fonksiyonları $x\in[0,1]$ kapalı aralığında tanımlanmış ve sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, $x=t$ için $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonunun sağ ve sol türevleri vardır. Dolayısıyla

$$\frac{\partial}{\partial x}G_2(x,t;\lambda)|_{x\to t+0}-\frac{\partial}{\partial x}G_1(x,t;\lambda)|_{x\to t-0}=-1$$

olduğu elde edilir. Yani, $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonunun x' e göre türevi $x=t$ doğrusu üzerinde süreksizdir.

Bu durumda bakılan L diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun ifadesi:

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases}G_1(x,t;\lambda) & ,\ 0\le x\le t\\ G_2(x,t;\lambda) & ,\ t\le x\le 1\end{cases}$$

olmak üzere

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases}\big[\varphi(t,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)+\theta(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\big] & ,0\le x\le t\\ \big[\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta^2(x,\lambda)-\varphi(t,\lambda)\theta'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) & \\ -2\alpha\lambda\varphi(t,\lambda)\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+\theta(t,\lambda)\theta(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\theta(t,\lambda)\theta(x,\lambda) & ,t\le x\le 1\\ +\theta(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)+2\alpha\lambda\theta(t,\lambda)\varphi^2(x,\lambda)\big] & \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

KAYNAKÇA

[1] Birkhoff, G.D. On the asymptotic character of the solution of the certain linear differential equations containing parameter – Trans. Amer. Math. Soc., p. 219-231, 1908.

[2] Birkhoff, G.D. Boundary value and expantion problems of ordinary linear differential equations. – Trans. Amer. Math. Soc., 1908, p. 373-395.

[3] Тамаркин, Я.Д.О Некоторых общих задачах теории обыкновенных дифферен-циальных уравнений и о пазложении произвольных функций ряды. Петрогад,1917.

[4] Titchmarsh, E.C. Eigenfunctions Expansions Associated with Second-Order Differential Equations I, II., Clarendon Pres, Oxford, p. 290-299 , 1962.

[5] Naimark, M.A. Linear diferential operators part I, II. Ungar Pub. Co., New York, 1968.

[6] Fulton, C.T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, p. 293-308, 1977.

[7] Fulton, C.T. Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 87 (1980/81); no: 1-2, 1-34.

[8] Marchenko, Sturm-Liouville operators and applications, Naukova Dumko, Kiev 1977; English Trans., Oper. Theory Adv. Appl., vol.22, Birkhäuzer, Basel 1986.

[9] Levitan, B.M. Inverse Sturm-Liouville problems, Nauka, Moscow 1984; English Trans., VSP, Zeist 1987.

[10] Binding, P.A., Browne P.J. and Seddighi K. Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc.(2); **37** 57-72, 1993.

[11] Binding, P.A., Browne P.J. Application of two parameter eigencurves to Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., A **125** 1205-18, 1995.

[12] Binding, P.A., Browne P.J. Oscillation theory for indefinite Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., A **127** 1123-36, 1997.

[13] Browne, P.J. and Sleeman B.D. A uniqueness theorem for inverse eigenparameter-dependent Sturm-Liouville problems inverse problems, **13** 1453-62, 1997.

[14] Ben Amara, Zh and Skalikov A.A. The Sturm-Liouville problems with physical and spectral parameters in the boundary conditions. Math. Notes 66 127-34, 1999.

[15] Binding, P.A., Browne, P.J. and Watson, B.A. İnverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions. J. (2), London Math. Soc., **62** 161-82, 2000.

[16] Binding, P.A., Browne P.J. and Watson B.A. Transformations between Sturm-Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions. Bull. London Math. Soc., **33** 749-57, 2001.

[17] Allan M. Kral. Hilbert Space , Boundary value problems, and orthogonal polynomials. Operator theory: Advances & Appl. 133. Birkhauser, Basel, 2002.

[18] Binding, B.A. A hierarchy of Sturm-Liouville problems Math. Methods Apll. Sci., **26** 349-57, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Abdullah GÖV, Şanlıurfa'nın Suruç ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Suruç ilçesine bağlı Fatih Sultan Mehmet İlkokulu'nda, orta ve lise öğrenimini de Suruç Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2009 yılında da mezun oldu. Aynı yıl Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı.