ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BULANIK FARK DİZİLERİNİN BAZI SINIFLARI

Eda EREN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN
2010

TEZ ONAYI

Eda EREN tarafından hazırlanan " **ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BULANIK FARK DİZİLERİNİN BAZI SINIFLARI"** adlı tez çalışması 24/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK **LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç.Dr. Ayhan ESİ

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ
Fırat Üniversitesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç.Dr. Ayhan ESİ
Adıyaman Üniversitesi Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
Adıyaman Üniversitesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Vedia TOKER
Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BULANIK FARK DİZİLERİNİN BAZI SINIFLARI

Eda EREN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ESİ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında bulanık sayı dizilerinin Orlicz fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bazı yeni sınıfları oluşturulup ve bu bulanık sayı dizilerinin oluşturduğu sınıfların sağladığı bazı özellikler çalışılmıştır.

2010, Sayfa (18+v)
Anahtar Kelimeler: Bulanık Sayılar. Bulanık Cümleler, Fark Dizisi, Orlicz Fonksiyonu.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME CLASSES OF DIFFERENCE FUZZY NUMBERS DEFINED BY AN ORLICZ FUNCTİON

Eda EREN

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Ayhan ESİ

In this thesis, we introduce some new classes of sequences of fuzzy numbers using by Orlicz function and examine some properties of resulting sequence classes of fuzzy numbers.

2010, pages (18+v)
Key Words: Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets, Difference Sequence, Orlicz Functions.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca benden yardımlarını esirgemeyen hocam sayın Doç. Dr. Ayhan ESİ' ye, bu güne kadar her konuda bana destek olan çok değerli arkadaşım Yurdagül ACAR'a, Gaziantep Üniversitesi'nde görev yapmakta olan ve tezimin yazım aşamasında benden desteğini esirgemeyen Ar.Gör. İlknur BALTACI'ya ve okul hayatım boyunca yanımda olup maddi manevi destek gösteren çok sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$w(F)$	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bütün bulanık diziler uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar cümlesi
Δ	Fark operatörü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$c_0(F)$	Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
$l_\infty(F)$	Kompleks terimli sınırlı bulanık diziler uzayı
$c(F)$	Kompleks terimli yakınsak bulanık diziler uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$L(\mathbb{R})$	Üstten yarı sürekli, normal ve konveks bulanık sayıların cümlesi

1. GİRİŞ

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ikinci bölümde kullanacağımız bazı temel tanımları vereceğiz.

Bulanık cümle kavramı ilk kez 1965'te Zadeh tarafından ortaya konuldu. Daha sonra birçok araştırmacı, potansiyeli nedeniyle, ortaya konulan bu kavram hakkında çalışmalar ve genellemeler yapmıştır. Burada kullanılan matematik hemen hemen tüm bilim dallarında kullanılabilen geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Bu da birçok araştırmacıda bulanık sayıların farklı sınıflarını tanıtma isteği uyandırmıştır. Matloka (1986) bulanık sayıların sınırlı ve yakınsak dizilerini tanımlamış ve bunların bazı özellikleri üzerinde çalışmıştır. Daha sonra Nanda (1987) bulanık sayı dizileri üzerinde çalışmıştır. Diamond ve Kloeden (1994), Savaş (2000), Esi (2006, 2008, 2009, 2010) ve daha birçok kişi bu konu üzerinde çalışmalar yapmıştır.

D, reel eksen $\mathbb{R}$'nin tüm kapalı ve sınırlı aralıklarının cümlesi olsun. $X, Y \in D$ için, $X = [a_1, b_1]$, $Y = [a_2, b_2]$ olmak üzere,

$$\delta(X, Y) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$$

şeklinde tanımlanır. (D, δ) bir tam metrik uzaydır.

Bir X bulanık reel sayısı $\mathbb{R}$'nin bir bulanık alt cümlesidir öyleki $X : \mathbb{R} \to I \ (= [0, 1])$ olmak üzere her bir t reel sayısını, üyelik derecesi olan $X(t)$ ile eşler.

Tüm üstten yarı-sürekli, normal ve konveks bulanık sayılarının cümlesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Bu yüksek lisans tez çalışmasında bir X bulanık reel sayısı ile $X \in L(\mathbb{R})$ sayısı kastedilmektedir.

Bir X bulanık reel sayısının $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $\alpha-$seviye cümlesi $[X]^\alpha = \{t \in \mathbb{R} : X(t) \geq \alpha\}$ şeklinde tanımlanır. Örneğin $\alpha = 0$ için, ki bu kuvvetli $0-$seviye kapanışıdır, cümlenin kapanışı $\{t \in \mathbb{R} : X(t) > 0\}$ olur. $L(\mathbb{R})$'nin lineer yapısı α-seviyeli cümle şeklindeki terimler için X ve Y bulanık reel sayılar olmak üzere toplama $X + Y$ ve skalerle çarpma μX, $\mu \in \mathbb{R}$ özelliklerini sağlar, şöyle ki her bir $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$[X + Y]^\alpha = [X]^\alpha + [Y]^\alpha,$$

$$[\mu X]^\alpha = \mu[X]^\alpha.$$

$$d : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere,

$$d(X,Y) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \delta([X]^\alpha, [Y]^\alpha)$$

şeklinde tanımlansın.

O halde d, $L(\mathbb{R})'$de bir metrik ifade eder. $L(\mathbb{R})$, d metriği ile bir tam metrik uzaydır.

Eğer $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ ile

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} \bar{1}, \; t = r \text{ ise} \\ \bar{0}, t \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlanıyorsa reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$, $L(\mathbb{R})'$ye gömülebilir.

$L(\mathbb{R})$ cümlesinin toplamaya ve çarpmaya göre etkisiz elemanları sırasıyla $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ dir.

r, $\mathbb{R}$'de ve X de $L(\mathbb{R})$'de olmak üzere rX,

$$rX(t) = \begin{cases} X(r^{-1}t), r \neq 0 \text{ ise} \\ 0, \quad r = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer her $X, Y, Z \in L(\mathbb{R})$ için $d(X+Z, Y+Z) = d(X,Y)$ ise $L(\mathbb{R})$'de bir d metriğine öteleme invaryant metrik denir. d metriği aşağıdaki özelliklere sahiptir:

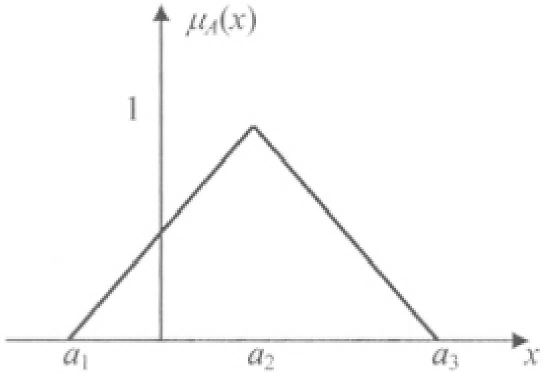
$c \in \mathbb{R}$ için

$$d(cX, cY) = |c|\, d(X,Y)$$

ve

$$d(X+Y, Z+W) \leq d(X,Z) + d(Y,W).$$

Tanım 1.1. (Üçgen Bulanık Sayı) Bulanık sayıların üç nokta ile temsil edilen $A = (a_1, a_2, a_3)$ şeklidir. Aşağıdaki ifade bu sayının üyelik fonksiyonu olarak tanımlanır:



Şekil 1.1 Üçgen Fuzzy Sayısı $A = (a_1, a_2, a_3)$

$$\mu_{(A)}(x) = \begin{cases} 0\ , & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}\ , & a_1 \leq x < a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}\ , & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0\ , & x > a_3 \end{cases}$$

Şimdi $\alpha-$seviye işlemiyle bu üçgen için aralıklar oluşturulup, A^α aralığı $\forall\alpha \in [0,1]$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{a_1^{(\alpha)} - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha\ ,\ \frac{a_3 - a_3^{(\alpha)}}{a_3 - a_2} = \alpha$$

Buradan

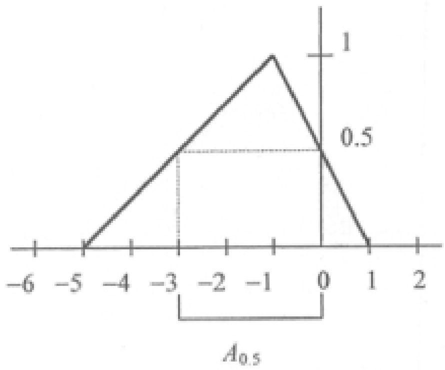
$$a_1^{(\alpha)} = (a_2 - a_1)\alpha + a_1$$
$$a_3^{(\alpha)} = -(a_3 - a_2)\alpha + a_3$$

elde edilir. Böylece

$$A^\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3]$$

olur.

Örnek 1.1. Bir üçgen bulanık sayı $A = (-5, -1, 1)$ olsun ve üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.



Şekil 1.2 Üçgen Fuzzy Sayısının $\alpha = 0.5$ kesimi $A = (-5, -1, 1)$

$$\mu_{(A)}(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -5 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, -5 \leq x < -1 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}, -1 \leq x \leq 1 \\ 0, \quad x > 1 \end{cases}$$

Bu bulanık sayıdan elde edilen $\alpha-$seviye aralığı

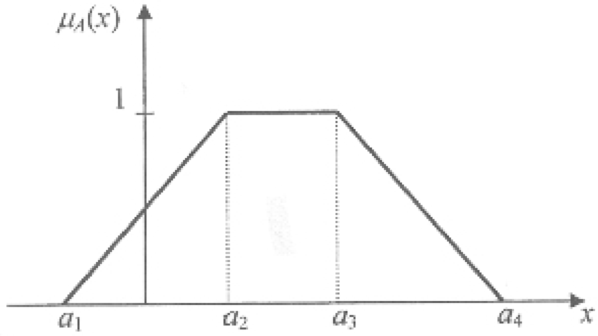
$$\begin{aligned} \frac{x+5}{4} &= \alpha \Rightarrow x = 4\alpha - 5 \\ \frac{1-x}{2} &= \alpha \Rightarrow x = -2\alpha + 1 \end{aligned}$$

$$A^{\alpha} = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [4\alpha - 5, -2\alpha + 1]$$

olur.

Bulanık sayıların başka bir şekli de yamuk bulanık sayıdır. Bu şekilde tanımlanan bulanık sayı üyelik derecesi maksimum olan birkaç nokta olabileceği gerçeğinden yola çıkılarak oluşturulmuştur.

Tanım 1.2. (Yamuk Bulanık Sayı) Bulanık sayıların dört nokta ile temsil edilen $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ şeklidir. Bu bulanık sayının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.



Şekil 1.3 Yamuk Fuzzy Sayısı $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$$\mu_{(A)}(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}\ ,\ a_1 \le x < a_2 \\ 1\ ,\ a_2 \le x \le a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}\ ,\ a_3 < x \le a_4 \\ 0\ ,\ x > a_4 \end{cases}$$

Bu bulanık sayıdan elde edilen $\alpha-$seviye aralığı $\forall\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$A^{\alpha} = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4]$$

olur.

Tanım 1.3. Bulanık sayıların bir $X = (X_k)$ dizisi pozitif doğal sayılar cümlesi $\mathbb{N}$'den, $L(\mathbb{R})$'ye bir X fonksiyonudur. X_k, bulanık sayı dizisinin $k \in \mathbb{N}$'deki değerini gösterir ve buna dizinin genel terimi ya da k.terimi denir. Tüm $X = (X_k)$ bulanık sayı dizilerinin cümlesini $w(F)$ ile gösterelim.

Tanım 1.4. Bulanık sayıların bir $X = (X_k)$ dizisi sınırlıdır eğer $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ cümlesi sınırlı ise. Sınırlı bulanık dizilerin cümlesini $l_\infty(F)$ ile gösterelim.

Tanım 1.5. Bulanık sayıların bir $X = (X_k)$ dizisi, $\forall\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olacak şekilde $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ şartını sağlayan $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcutsa bu diziye X_0'a yakınsaktır denir ve bu yakınsaklık $\lim_k X_k = X_0$ şeklinde gösterilir. Yakınsak bulanık sayıların cümlesini $c(F)$ ile gösterelim.

Tanım 1.6. Bir M Orlicz fonksiyonu sürekli, azalmayan, konveks $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \to \infty$ iken $M(x) \to \infty$ şartlarını sağlayan $[0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı fonksiyondur.

Bir M Orlicz fonksiyonuna, eğer $M(2x) \le BM(x)$ $(x \ge 0)$ olacak şekilde sabit bir

$B > 0$ sayısı varsa, x'in tüm değerleri için $\triangle_2$ $-$şartını sağlıyor denir.

Lindenstrauss ve Tzafriri (1967) Orlicz fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki l_M dizi uzayını tanımlamışlardır:

$$l_M = \left\{ x = (x_k) : \sum_k M\left(\frac{|x_k|}{r}\right) < \infty, \; \exists \, r > 0 \right\}.$$

Ayrıca l_M'nin aşağıda tanımlanan norm ile bir Banach uzayı olduğunu göstermişlerdir:

$$\|x\| = \inf \left\{ r > 0 : \sum_k M\left(\frac{|x_k|}{r}\right) \leq 1 \right\}.$$

Uyarı 1.1. Bir M Orlicz fonksiyonu, $0 < \lambda < 1$ olmak üzere $\forall \lambda$ için $M(\lambda x) \leq \lambda M(x)$ eşitsizliğini sağlar.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında aşağıdaki eşitsizlik sık sık kullanılacaktır. $p = (p_k)$, $0 < \inf p_k = h \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi ve $K = \max(1, 2^{H-1})$ olsun. Bu takdirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq K(|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}) \qquad (1)$$

eşitsizliği sağlanır.

2. ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BULANIK FARK DİZİLERİNİN BAZI SINIFLARI

Çalışmamızın bu kısmında bulanık sayıların aşağıdaki fark dizi sınıflarını tanımlayıp, bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz. $X = (X_k)$ bulanık sayıların bir dizisi, M bir Orlicz fonksiyonu, $p = (p_k)$ pozitif sayıların her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \inf p_k = h \leq p_k \leq \sup p_k = H < \infty$ olacak şekilde bir dizisi ve $\Delta X_k = X_k - X_{k+1}$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} c_0^F[M,\Delta,p,s] &= \{X = (X_k) \in w(F) : \lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= 0,\ \exists \rho > 0, s \geqslant 0\ \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^F[M,\Delta,p,s] &= \{X = (X_k) \in w(F) : \lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= 0,\ \exists \rho > 0, s \geqslant 0\ \} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} l_\infty^F[M,\Delta,p,s] &= \{X = (X_k) \in w(F) : \sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &< \infty,\ \exists \rho > 0, s \geqslant 0\} \end{aligned}$$

cümle sınıflarını tanımlayabiliriz.

Bu tanımladığımız bulanık sayı dizilerinin sınıflarında M, p ve s'nin özelleştirilmesi ile bazı bilinen bulanık sayı dizilerinin sınıflarını elde ederiz.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$, $M(x) = x$ ve $s = 0$ alarak, Başarır ve Mursaleen (2003) tarafından oluşturulmuş olan aşağıdaki sınıfları elde ederiz.

$$c_0^F[M,\Delta,p,s] = c_0^F[\Delta] = \{X = (X_k) \in w(F) : \lim_k d(\Delta X_k, \bar{0}) = 0\},$$

$$c^F[M,\Delta,p,s] = c^F[\Delta] = \{X = (X_k) \in w(F) : \lim_k d(\Delta X_k, X) = 0\}$$

ve

$$l_\infty^F[M,\Delta,p,s] = l_\infty^F[\Delta] = \{X=(X_k)\in w(F) : \sup_k d(\Delta X_k,\bar{0}) < \infty\}.$$

Eğer her $k\in\mathbb{N}$ için $\triangle X_k = X_k$ ve $p_k = 1$, $M(x) = x$ ve $s = 0$ alınırsa Nanda (1987) tarafından tanımlanıp çalışılmış olan c_0^F, c^F ve l_∞^F sınıfları elde edilir.

Örnek 2.1. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $s=0$, $M(x)=x$ ve $p_k=1$ olsun. $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$k=i^2 \text{ için, } i\in\mathbb{N},\ X_k=\bar{0}$$

$$\text{ve } k\neq i^2 \text{ iken } X_k(t)=\begin{cases}\bar{1}, & 0\le t\le k^{-1} \text{ için}\\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

O halde

$$[X_k]^\alpha=\begin{cases}[0,0], & k=i^2 \text{ için },\ i\in\mathbb{N}\\ [0,k^{-1}], & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$[\triangle X_k]^\alpha=\begin{cases}[-(k+1)^{-1},0],\ k=i^2 \text{ için },\ i\in\mathbb{N}\\ [0,k^{-1}], k=i^2-1 \text{ için },\ i\in\mathbb{N}, i>1 \text{ ile}\\ [-(k+1)^{-1},k^{-1}],\ \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

olur. Böylece $[\triangle X_k]^\alpha \longrightarrow \bar{0}, (k\longrightarrow\infty)$ yani

$$(\triangle X_k)\in c_0^F[M,\Delta,p,s]\subset c^F[M,\Delta,p,s]\subset l_\infty^F[M,\Delta,p,s]$$

ve dolayısıyla

$$X=(X_k)\in c_0^F[M,\Delta,p,s]\subset c^F[M,\Delta,p,s]\subset l_\infty^F[M,\Delta,p,s]$$

elde edilir.

Bu kısımda bulanık sayı dizilerinin $c_0^F[M,\Delta,p,s], c^F[M,\Delta,p,s]$ ve $l_\infty^F[M,\Delta,p,s]$ sınıflarının sağladığı bazı sonuçlar ispat edilecektir.

TEMEL SONUÇLAR

Teorem 2.1. Eğer d öteleme invaryant bir metrik ise o halde $c_0^F[M,\Delta,p,s], c^F[M,\Delta,p,s]$ ve $l_\infty^F[M,\Delta,p,s]$ toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalıdır.

İspat: d öteleme invaryant bir metrik olduğundan

$$d(\Delta X_k + \Delta Y_k, \bar{0}) \leq d(\Delta X_k, \bar{0}) + d(\Delta Y_k, \bar{0}) \tag{2}$$

şartını sağlar ve bir λ skaleri için

$$d(\lambda \Delta X_k, \bar{0}) = |\lambda| \quad d(\Delta X_k, \bar{0}) \tag{3}$$

olur.

$X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k) \in l_\infty^F[M, \Delta, p, s]$ olsun. O halde

$$\sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta X_k, \bar{0})}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

ve

$$\sup_k k^{-s} \left[M \frac{d(\Delta Y_k, \bar{0})}{\rho_2} \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde ρ_1, ρ_2 pozitif sayılarını bulabiliriz.

Şimdi $\rho_3 = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ olsun. (1) ve (2) özellikleri ile M 'nin azalmayan, konveks bir fonksiyon olmasından

$$k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta X_k + \Delta Y_k, \bar{0})}{\rho_3} \right) \right]^{p_k}$$

$$\leq k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta X_k, \bar{0})}{\rho_3} \right) + M \left(\frac{d(\Delta Y_k, \bar{0})}{\rho_3} \right) \right]^{p_k}$$

$$\leq k^{-s} \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{d(\Delta X_k, \bar{0})}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} M \left(\frac{d(\Delta Y_k, \bar{0})}{\rho_2} \right) \right]^{p_k}$$

$$\leq K k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta X_k, \bar{0})}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + K k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\Delta Y_k, \bar{0})}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} < \infty.$$

Böylece $X+Y \in l_\infty^F[M, \Delta, p, s]$ olur. Şimdi $X = (X_k) \in l_\infty^F[M, \Delta, p, s]$ ve $0 < |\lambda| < 1$ için $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. (3) özelliği ve uyarı göz önüne alınarak

$$k^{-s} \left[M \left(\frac{d(\lambda \Delta X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

$$\leq k^{-s}\left[|\lambda|\, M\left(\frac{d(\Delta X_k,\bar{0})}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq k^{-s}\,|\lambda|^{p_k}\left[M\left(\frac{d\left(\Delta X_k,\bar{0}\right)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq |\lambda|^{h}\, k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k,\bar{0})}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty.$$

bulunur. Böylece $\lambda X \in l_{\infty}^{F}[M,\Delta,p,s]$ olur. Diğer durumların ispatı yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.2. *M bir Orlicz fonksiyonu olsun. O halde $c_0^F[M,\Delta,p,s] \subset c^F[M,\Delta,p,s] \subset l_{\infty}^{F}[M,\Delta,p,s]$ olur.*

İspat: $c_0^F[M,\Delta,p,s] \subset c^F[M,\Delta,p,s]$ olduğu açıktır. $c^F[M,\Delta,p,s] \subset l_{\infty}^{F}[M,\Delta,p,s]$ olduğunu ispatlamalıyız. $X=(X_k) \in c^F[M,\Delta,p,s]$ olsun. O halde

$$\lim_k k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k} = 0, s \geq 0.$$

olacak şekilde $\rho > 0$ sayısı vardır. $\rho_1 = 2\rho$ alarak ve (1) özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k,\bar{0})}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} \quad &\leq \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{p_k} K k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^{p_k} K k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k,\bar{0})}{\rho}\right)\right]^{p_k} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $X=(X_k) \in c^F[M,\Delta,p,s]$ olduğundan, $X=(X_k) \in l_{\infty}^{F}[M,\Delta,p,s]$ olur.

Teorem 2.3. $c_0^F[M,\Delta,p,s]$, $c^F[M,\Delta,p,s]$ ve $l_{\infty}^{F}[M,\Delta,p,s]$ sınıfları $H = \max(1,\sup_k p_k)$ olmak üzere

$$g(X,Y) = \inf\{\rho^{\frac{p_n}{H}} > 0 : \left\{\sup_k\left[k^{-s}\left(M\left(\frac{d(\Delta X_k,\Delta Y_k)}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{\frac{1}{H}} \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$$

metriği ile tam metrik uzaylardır.

İspat: $c_0^F[M,\Delta,p,s]$ sınıfını ele alalım. (X^i), $c_0^F[M,\Delta,p,s]$'de bir Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ ve r, $x_0 > 0$ sabitleri verilsin. O halde her bir $\frac{\varepsilon}{r x_0} > 0$ ve $\forall i,j \geq n_0$ için

$$g(X^i, X^j) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$$

şartını sağlayan bir n_0 pozitif tam sayısı mevcuttur. g'nin tanımından $\forall i, j \geq n_0$ için

$$\left\{\sup_k \left[k^{-s}\left(M\left(\frac{d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j)}{g(X^i, X^j)}\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{\frac{1}{H}} \leq 1.$$

yazılabilir. Böylece $\forall i, j \geq n_0$ için

$$\sup_k \left[k^{-s}\left(M\left(\frac{d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j)}{g(X^i, X^j)}\right)\right)\right]^{p_k} \leq 1$$

olur. $\forall i, j \geq n_0$ ve $k \geq 0$ için

$$k^{-s}\left(M\left(\frac{d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j)}{g(X^i, X^j)}\right)\right) \leq 1$$

elde edilir. O halde

$r > 0$ ve $k^{-s}M(\frac{rx_0}{2}) \geq 1$ için

$$k^{-s}\left(M\left(\frac{d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j)}{g(X^i, X^j)}\right)\right) \leq k^{-s}M(\frac{rx_0}{2})$$

elde edilir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $k^{-s} \neq 0$ olduğundan

$$M\left(\frac{d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j)}{g(X^i, X^j)}\right) \leq M(\frac{rx_0}{2})$$

olur. Bu ise

$$d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j) \leq \frac{rx_0}{2}.\frac{\varepsilon}{rx_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

sonucunu verir.

Böylece $(\Delta X_k^i)_i = (\Delta X_k^1, \Delta X_k^2, \Delta X_k^3, ...)$, $L(\mathbb{R})$'de bir Cauchy dizisi olur. $L(\mathbb{R})$ uzayı tam olduğundan, bu dizi yakınsaktır. Böylece her bir $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$ ve her $i \geq n_0$ için $d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j) < \varepsilon$ şartını sağlayan bir n_0 pozitif tam sayısı mevcuttur. M Orlicz fonksiyonunun sürekliliğini kullanarak

$$\left\{\sup_{k\geq 0} \left[k^{-s}\left(M\left(\frac{\lim_{j\to\infty} d(\Delta X_k^i, \Delta X_k^j)}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

bulunur. Böylece

$$\left\{\sup_{k\geq 0}\left[k^{-s}\left(M\left(\frac{d(\Delta X_k^i,\Delta X_k)}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{\frac{1}{H}}\leq 1$$

olur. Böyle ρ sayıların infimumunu alarak $\forall i\geq n_0$ için

$$\left\{\inf \rho^{\frac{p_n}{H}}>0:\left\{\sup_{k}\left[k^{-s}\left(M\left(\frac{d(\Delta X_k^i,\Delta X_k)}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{\frac{1}{H}}\leq 1\right\}<\varepsilon$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$g(X,\bar{0})\leq g(X,X^i)+g(X^i,\bar{0})$$

ve $X=(X_k)\in c^F[M,\Delta,p,s]$ elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.4. $\inf_k p_k=h>0$ ve $\sup_k p_k=H<\infty$ olsun. O halde

(a) $c^F[M,\Delta]\subset c^F[M,\Delta,p,s]$,

(b) M, Δ_2-şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. O halde $c^F[\Delta,p,s]\subset c^F[M,\Delta,p,s]$ olur.

İspat: **(a)** Kabul edelim ki $X=(X_k)\in c^F[M,\Delta]$ olsun. M bir Orlicz fonksiyonu olduğundan, $\exists\rho>0$ için

$$\lim_k M\left(\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right)=M\left[\lim_k\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right]=0$$

olur. $\inf_k p_k=h>0$ olduğundan $\lim_k\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right)\right]^h=0$ dır. $\forall k>k_0$ olacak şekilde $\exists k_0$, $0<\varepsilon<1$ için

$$M\left[\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right]^h<\varepsilon<1$$

ve $p_k\geq h$ olduğundan $\forall\ k\in\mathbb{N}$ için

$$M\left[\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right]^{p_k}\leq M\left[\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right]^h<\varepsilon<1$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_k M\left[\frac{d(\Delta X_k,X_0)}{\rho}\right]^{p_k}=0$$

olur. (k^{-s}) sınırlı olduğundan,

$$\lim_k k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0$$

olur. Böylece $X=(X_k)\in c^F[M,\Delta,p,s]$ olduğu ispatlanır.

(b) $X=(X_k)\in c^F[\Delta,p,s]$ olsun.O halde $k\to\infty$, $S_k=k^{-s}[d(\Delta X_k, X_0)]^{p_k}\longrightarrow 0$ olur. $\varepsilon>0$ ve $0<\delta<1$ olacak şekilde δ seçilirse $0\le t\le\delta$ için $M(t)<\varepsilon$ olur. Şimdi her k için

$$y_k=\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}$$

gösterimi ile

$$k^{-s}[M(y_k)]^{p_k}=k^{-s}[M(y_k)]^{p_k}\Big|_{y_k\le\delta}+k^{-s}[M(y_k)]^{p_k}\Big|_{y_k>\delta}$$

ifadesini yazalım.

Uyarıyı kullanarak $y_k\le\delta$ için $k^{-s}[M(y_k)]^{p_k}\le k^{-s}\max(\varepsilon,\varepsilon^h)$ elde edilir. $y_k>\delta$ için

$$y_k\le\frac{y_k}{\delta}<1+\frac{y_k}{\delta}$$

yazabiliriz. Böylece M azalmayan ve konveks olduğundan

$$M(y_k)<M(1+\frac{y_k}{\delta})\le\frac{1}{2}M(2)+\frac{1}{2}M(2)y_k\delta^{-1})$$

olur. M, Δ_2-şartını sağladığından

$$M(y_k)=\frac{B}{2}\frac{y_k}{\delta}M(2)+\frac{B}{2}\frac{y_k}{\delta}M(2)=B\frac{y_k}{\delta}M(2)$$

elde edilir.

$$k^{-s}[M(y_k)]^{p_k}_{y_k>\delta}\le k^{-s}\max(1,[BM(2)\delta^{-1}]^H[y_k]^{p_k})$$

ve

$$k^{-s}[M(y_k)]^{p_k}\le k^{-s}\max(\varepsilon,\varepsilon^h)+\max(1,[BM(2)\delta^{-1}]^H)S_k$$

olup $\varepsilon\longrightarrow 0$ ve $k\longrightarrow\infty$ limitleri alındığında $X=(X_k)\in c^F[M,\Delta,p,s]$ olduğu görülür.

Teorem 2.5. M, M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları ve $s_1, s_2 \geq 0$ olsun. O halde

(a) $c^F[M_1, \Delta, p, s] \cap c^F[M_2, \Delta, p, s] \subset c^F[M_1 + M_2, \Delta, p, s]$,

(b) $s_1 \leq s_2$ iken $c^F[M, \Delta, p, s_1] \subset c^F[M, \Delta, p, s_2]$ olur.

İspat: (a) $X = (X_k) \in c^F[M_1, \Delta, p, s] \cap c^F[M_2, \Delta, p, s]$ olsun. O halde

$$\lim_k k^{-s} \left[M_1\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} = 0$$

$$\lim_k k^{-s} \left[M_2\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde $\exists \rho_1, \rho_2 > 0$ sayıları vardır. $\rho = \rho_1 + \rho_2$ olsun. (1) eşitsizliğini kullanarak

$$\left[(M_1 + M_2)\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right]^{p_k} = \left[M_1\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right) + M_2\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \left[\frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} M_1\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_1}\right) + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} M_2\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[M_1\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_1}\right) + M_2\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \\
&\leq K\left[M_1\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} + K\left[M_2\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}
\end{aligned}$$

bulunur. (k^{-s}) sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}
k^{-s}\left[(M_1 + M_2)\left[\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right]\right]^{p_k} &\leq Kk^{-s}\left[M_1\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} \\
&\quad + Kk^{-s}\left[M_2\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}
\end{aligned}$$

olup böylece $X = (X_k) \in c^F[M_1 + M_2, \Delta, p, s]$ elde edilir.

(b) $s_1 \leq s_2$ olsun. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $k^{-s_2} \leq k^{-s_1}$ olur. $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, p, s_1]$ olsun.

$$k^{-s_2}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq k^{-s_1}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

olduğundan $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, p, s_2]$ elde edilir.

Teorem 2.6. M bir Orlicz fonksiyonu olsun. O halde

(a) $0 < \inf_k p_k \leq p_k \leq 1$ olsun,o halde $c^F[M, \Delta, p, s] \subset c^F[M, \Delta, s]$,

(b) $1 \leq p_k \leq \sup_k p_k < \infty$ olsun, o halde $c^F[M, \Delta, s] \subset c^F[M, \Delta, p, s]$,

(c) $0 < p_k \leq q_k$ ve $(\frac{q_k}{p_k})$ sınırlı olsun, o halde $c^F[M, \Delta, q, s] \subset c^F[M, \Delta, p, s]$ dır.

İspat: (a) $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, p, s]$, her k için $0 < \inf_k p_k \leq p_k \leq 1$ olduğundan

her $k \in \mathbb{N}$ ve $\exists \rho > 0$ için

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right] \leq k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Böylece $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, s]$ olur.

(b) Her k için $1 \leq p_k \leq \sup_k p_k < \infty$ ve $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, s]$ olsun. O halde her $0 < \varepsilon < 1$ için öyle bir k_0 pozitif tamsayısı vardır ki her $k \geq k_0$ için,

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{(d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right] \leq \varepsilon < 1$$

olur. Bu da $\exists \rho > 0$ için

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq k^{-s}\left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]$$

eşitsizliğini sağlar. Buradan $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, p, s]$ dır.

(c) $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, q, s]$ olsun. $w_k = \left[M\left(\frac{d(\Delta X_k, X_0)}{\rho}\right)\right]^{q_k}$ ve $T_k = \frac{q_k}{p_k}$ yazılır öyle ki, her k için $0 < T < T_k \leq 1$ olur. (u_k) ve (v_k) dizileri şu şekilde tanımlansın; Eğer $w_k \geq 1$ ise $u_k = v_k$ ve $v_k = 0$, eğer $w_k < 1$ ise $u_k = 0$ ve $w_k = v_k$ olsun. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$w_k = u_k + v_k \ , \ w_k^{T_k} = u_k^{T_k} + v_k^{T_k}$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$u_k^{T_k} \leq u_k \leq w_k \text{ ve } v_k^{T_k} \leq v_k^T$$

olur. Böylece

$$k^{-s}w_k^{T_k} = k^{-s}[u_k^{T_k} + v_k^{T_k}] \leq k^{-s}w_k + k^{-s}v_k^T$$

elde edilir. $T < 1$ ve $T^{-1} > 0$ olduğundan her k için

$$k^{-s}v_k^T = (k^{-s}v_k)^T(k^{-s})^{1-T} \leq \left(\left[\left(k^{-s}v_k\right)^T\right]^{\frac{1}{T}}\right)^T \left(\left[(k^{-s})^{1-T}\right]^{\frac{1}{1-T}}\right)^{1-T}$$

olur ve Hölder Eşitsizliği'nden ifade

$$\leq \left(k^{-s}v_k\right)^T$$

elde edilir. Böylece

$$k^{-s}w_k^{T_k} \leq k^{-s}w_k + (k^{-s}v_k)^T$$

olup buradan $X = (X_k) \in c^F[M, \Delta, p, s]$ olur.

KAYNAKLAR

Başarır, M. and Mursaleen M. 2003.On difference sequence spaces of fuzzy numbers**.** *The Journal of Fuzzy Mathematics* 1-7

Diamond, P. and Kloeden P. 1994. Metric spaces of fuzzy sets, Theory and Applications. World Scientific, Singapore

Esi, A. 2008. On some classes of generalized difference sequences of fuzzy numbers defined by Orlicz functions. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics* 53-64.

Esi, A. 2006. On some paranormed sequence spaces of fuzzy numbers defined by Orlicz functions and statistical convergence. Mathematical Modelling and Analysis,1(4), 379-388.

Esi, A. 2009. Strongly almost convergent classes of sequences of fuzzy numbers generated by infinite matrices defined by a modulus function. Advances in Fuzzy Mathematics, Vol:4(1), 31-39.

Esi, A. 2010. The classes of strongly $V_{\lambda}^{F}(A,p)-$summable sequences of fuzzy numbers. New York J. Math. 16, 13-21.

Matloka, M. 1986. Sequences of fuzzy numbers. Busefal 28-37.

Nanda, S. 1987.On sequences of fuzzy numbers . Fuzzy Sets and Systems 123-126.

Savaş, E. 2000 A note on sequence of fuzzy numbers, Information Sciences, 297-300.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets. Inform Control, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Eda EREN

Doğum Yeri: Gaziantep

Doğum Tarihi: 09\08\1986

Medeni Hali: Bekâr

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Gaziantep Merkez Anadolu Lisesi

Lisans: İnönü Üniversitesi, Matematik Bölümü

Katıldığı Kongreler: Ayhan ESİ, Eda EREN Yeditepe Üniversitesi Matematik Lisansüstü Çalıştayları-1, Sunumlu Konuşmacı