ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Yurdagül ACAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN
2010

TEZ ONAYI

Yurdagül ACAR tarafından hazırlanan " **GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI "** adlı tez çalışması 24/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç.Dr. Ayhan ESİ

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ
Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü

Üye: Doç.Dr. Ayhan ESİ
Adıyaman Üniversitesi Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Adıyaman Üniversitesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Vedia TOKER
Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Yurdagül ACAR

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ESİ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında Orlicz fonksiyonu yardımıyla bazı yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve bu dizi uzaylarının sağladığı bazı özellikler incelenmiştir.

2010. sayfa(21+v)

Anahtar Kelimeler: Fark dizi uzayı, Yarınorm, Tamlık, Orlicz Fonksiyonu.

ABSTRACT

Master Thesis

GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCES

Yurdagül ACAR

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Ayhan ESİ

In this thesis we introduce some new generalized spaces using by an Orlicz function and examine properties of these sequence spaces.

2010, pages (21+v)
Key Words: Difference sequence space, Seminorm, Complete, Orlicz function.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca yardımlarını benden esirgemeyen hocam sayın Doç. Dr. Ayhan ESİ'ye, benden her konuda desteğini esirgemeyen çok değerli arkadaşım Eda EREN'e, Gaziantep Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışan hocamız İlknur BALTACI 'ya ve okul hayatım boyunca yanımda olup maddi manevi destek gösteren çok sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

w	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar cümlesi
Δ	Fark operatörü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
c_0	Kompleks terimli sıfır dizileri uzayı
l_∞	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi

1. GİRİŞ

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım1.1. X$\neq \emptyset$ bir cümle ve K kompleks sayıların bir cismi olsun. Eğer

$$+: \quad X \times X \longrightarrow X, \qquad \cdot : K \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyosa, X cümlesine K cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir.$\forall \lambda, \mu \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

(L1) $x{+}y = y{+}x$,

(L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır,

(L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır,

(L5) $1.x = x$,

(L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

(L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$.

Tanım1.2. X$\neq \emptyset$ $X \times X$ üzerinde tanımlanmış aşağıdaki şartları sağlayan pozitif reel değerli d fonksiyonuna X cümlesi üzerinde bir metrik denir. $\forall x, y, z \in X$ için,

(m_1) $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$,

(m_2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (m_1 ve m_2 pozitif değerlilik),

(m_3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği),

(m_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

Diğer bir ifade ile (m_1), (m_2), (m_3) ve (m_4) şartlarını sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna metrik denir.

Tanım1.3. Bir X cümlesi üzerinde bir d metriği verildiği zaman (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

Tanım1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, s) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $s \in X$ varsa (x_n) dizisi X'de yakınsaktır denir ve $x_n \longrightarrow s$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ şeklinde gösterilir.

Tanım1.5. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.$\|, \| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm, $(X, \|, \|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir: $\forall x, y \in X$ için

(N1):$\|x\| \geq 0$,

(N2):$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(N3):$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (α skaler),

(N4):$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(N3) Şartı $\|\alpha x\| =|\alpha|^p . \|x\|$ $(\alpha \in K)$ şeklinde olursa bu takdirde X'e bir $p-normlu$ uzay denir.

Tanım1.6. Eğer (N2) şartı sadece $x = 0 \implies \|x\| = 0$ şartı sağlanıyorsa, X 'e K cismi üzerinde bir yarınormlu uzay denir.

Tanım1.7. Bir $(X, \|, \|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım1.8. $(X, \|, \|)$ bir normlu uzay olsun X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \to \mathbb{C} \quad \tau_k(x) = x_k \qquad k = (1, 2, 3, ...)$$

dönüşümü sürekli ise X'e bir BK uzayı denir.

Tanım1.9. Bir X vektör uzayının bir Y alt cümlesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, \;\; 0 \leq \lambda < 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi 'konvekstir' denir.

Tanım1.10. Bir M Orlicz fonksiyonu sürekli, azalmayan, konveks $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \to \infty$ iken $M(x) \to \infty$ şartlarını sağlayan $[0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı fonksiyondur.

Tanım1.11. Bir M Orlicz fonksiyonu, eğer $M(2t) \leq KM(t)$ $(t \geq 0)$ olacak şekilde sabit bir $K > 0$ sayısı varsa, t'nin tüm değerleri için $\triangle_2$ $-$şartını sağlayan bir fonksiyondur.

Tanım1.12. X lineer topolojik uzay, $g : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer g aşağıdaki şartları sağlıyorsa g' ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de bir paranormlu uzay denir:

(P_1) $g(\theta) = 0$,

(P_2) $g(x) = g(-x)$,

(P_3) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$,

(P_4) $\lambda \to \lambda_0$, $x \to x_0 \to \lambda x \to \lambda_0 x_0$.

Bu çalışma boyunca aşağıdaki eşitsizlik sık sık kullanılacaktır. $p = (p_k)$, $0 < \inf p_k = h \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olacak şekilde reel sayıların bir pozitif dizisi ve $K = \max(1, 2^{H-1})$ olsun. Bu taktirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için a_k, $b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq K(|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k})$$

eşitsizliği sağlanır.

1.2.FARK DİZİ UZAYLARI

Fark dizi uzayları ilk kez 1981 yılında Kızmaz, tarafından tanımlanmış ve çeşitli topolojik özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde bu uzaylara değineceğiz . l_∞, c ve c_0 sırasıyla sınırlı diziler uzayı,yakınsak diziler uzayı ve sıfıra yakınsak diziler uzayı olmak üzere $x = (x_{k)}$ dizisinin bu uzaylardaki normu $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$, $k \in \mathbb{N}$ ile Banach uzaylarıdır. Kızmaz 1981 yılında $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$l_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\}$,

$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$

ve

$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$ dizi uzaylarını tanımlamıştır. Şimdi de bu fark dizi uzaylarının bazı önemli teoremlerini ispatları ile verelim.

Teorem1.2.1. $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta)$ fark dizi uzayları, kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzaydır.

İspat: $X = l_\infty$ için ispat yapalım. $x, y \in l_\infty(\Delta)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde

$$\Delta(\alpha x_k + \beta y_k) = (\alpha x_k + \beta y_k) - (\alpha x_{k+1} + \beta y_{k+1}) = (\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) + (\beta y_k - \beta y_{k+1})$$

$$= \alpha\Delta(x_k) + \beta\Delta(y_k)$$

olduğundan $\Delta(\alpha x_k + \beta y_k) \in l_\infty(\Delta)$ elde edilir. Dolayısıyla $l_\infty(\Delta)$ lineer uzaydır. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem1.2.2. $c_0(\Delta), c(\Delta), l_\infty(\Delta)$ fark dizi uzayları $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer normlu uzaylardır.

İspat: Bu normun norm özelliklerini araştıralım:

(N1) $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ olduğundan $|x_1| \geq 0$ ve $\|\Delta x\|_\infty \geq 0$ olduğundan toplamları da sıfırdan büyüktür. Dolayısıyla $\|x\|_\Delta > 0$ dır.

(N2) $\|x\|_\Delta = 0 \Leftrightarrow x = 0$ olduğunu gösterelim. $|x_1| + \|\Delta x\|_\infty = 0$ olduğundan $|x_1| = 0$ ve $\|\Delta x\|_\infty = 0$ olmalıdır. $|x_1| = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ dır. $\|\Delta x\|_\infty = \sup_k \Delta x$ ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olduğundan $x_1 - x_2 = 0$ olduğundan $x_2 = 0$ dır.$x_2 - x_3 = 0$ olduğundan $x_3 = 0$ dır. Buna böyle devam edilirse $x_k - x_{k+1} = \Delta x_k = 0$. Böylece istenen sağlanır.

(N3) $|\alpha x_1| + \|\alpha \Delta x\|_\infty = |\alpha| |x_1| + |\alpha| \|\Delta x\|_\infty$ olduğundan $|\alpha| (|x_1| + \|\Delta x\|_\infty) = |\alpha| \|x\|_\Delta$. O halde $\|\alpha x\|_\Delta = |\alpha| \|x\|_\Delta$ elde edilir.

(N4) $|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1|$

$\|\Delta(x+y\|_\infty \leq \|\Delta x\|_\infty + \|\Delta y\|_\infty$ olduğundan

$|x_1 + y_1| + \|\Delta(x+y\|_\infty \leq |x_1| + \|\Delta x\|_\infty + |y_1| + \|\Delta y\|_\infty$

olduğundan

$\|x+y\|_\Delta \leq \|x\|_\Delta + \|y\|_\Delta$

elde edilir. Bu da istenen üçgen eşitsizliği özelliğidir.

Teorem 1.2.3. $l_\infty(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ dizi uzayları Teorem1.2.2 deki norm ile birlikte birer Banach uzayıdırlar.

İspat: $(x^n), l_\infty(\Delta)$ 'da bir Cauchy dizisi olsun. $x^n = (x_1^n, x_2^n, ...) \in l_\infty(\Delta)$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x^n - x^m\| = |x_1^n - x_1^m| + \|\Delta x^n - \Delta x^m\|_\infty \to 0 \ \ (n, m \to \infty) \qquad ....(*)$$

yazılır. Böylece $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_1^n - x_1^m| \longrightarrow 0$, $n, m \longrightarrow \infty$ elde edilir. Buradan $x_k^n = (x_k^1, x_k^2, ...)$ dizisinin kompleks sayılarda Cauchy dizisi olduğu görülür. $\mathbb{C}$ tam olduğundan bu dizi bir x_k noktasına yakınsar. O halde

$$\lim_n x_k^n = x_k, \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

yazalım. O halde (*) den dolayı $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ vardır, böylece bütün $n, m \geq N$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|x_1^n - x_1^m| < \varepsilon, \qquad \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - (x_k^n - x_k^m)\right| < \varepsilon$$

ve

$$\lim_m |x_1^n - x_1^m| = |x_1^n - x_1| \leq \varepsilon$$

$$\lim_m \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - (x_k^n - x_k^m)\right| = \left|x_{k+1}^n - x_{k+1} - (x_k^n - x_k)\right| \leq \varepsilon$$

$$\sup_k \left|x_{k+1}^n - x_{k+1} - (x_k^n - x_k)\right| \leq \varepsilon$$

yazabiliriz.Sonuç olarak her $n \geq N$ için $\|x^n - x\|_\Delta \leq 2\varepsilon$ elde ederiz.

Böylece $x^n \longrightarrow x$ $(n \longrightarrow \infty)$ olacak şekilde bir $l_\infty(\Delta)$ dizi uzayında $x = (x_k)$ dizisi vardır. Şimdi $x \in l_\infty(\Delta)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |\Delta x_k| &= |x_k - x_{k+1}| = \left|x_k - x_k^N + x_k^N - x_{k+1}^N + x_{k+1}^N - x_{k+1}\right| \\ &\leq \left|x_k^N - x_{k+1}^N\right| + \left\|x^N - x\right\|_\Delta = O(1) \end{aligned}$$

olur ki bu da $x = (x_k) \in l_\infty(\Delta)$ olduğunu gösterir.

Lemma: $\sup_k |\Delta x| < \infty$ olması

(i) $\sup_k k^{-1} |x_k| < \infty$,

(ii) $\sup_k |x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}| < \infty$

olmasını gerektirir.

İspat: $\sup_k |\Delta x| < \infty$, yani $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olsun.

$$|x_1 - x_{k+1}| = \left|\sum_{v=1}^{k} (x_v - x_{v+1})\right| \leq \sum_{v=1}^{k} |x_v - x_{v+1}| = O(k),$$

ve

$$|x_k| \leq |x_1| + |x_1 - x_{k+1}| + |x_k - x_{k+1}|$$

olduğundan bu gösterir ki,

$$\sup_k k^{-1} |x_k| < \infty,$$

olup **(i)** sağlanır.

$$\left|x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}\right| = \left|k(k+1)^{-1}(x_k - x_{k+1}) + (k+1)^{-1} x_k\right| = O(1).$$

ifadesinden **(ii)** elde edilir.Şimdi de **(i)** ve **(ii)** nin sağlandığını gösterelim.

$$\left|x_k - k(k+1)^{-1} x_{k+1}\right| \geq k(k+1)^{-1} |x_k - x_{k+1}| - (k+1)^{-1} |x_k| .$$

$\sup_k |\Delta x| < \infty$ olduğunu gösterir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Genelleştirilmiş fark dizi uzayları birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu araştırmalara Et ve Çolak (1990), Et ve Esi (2000), Esi ve Tripathy (2007), Esi ve Tripathy (2008), Esi (2009) örnek olarak verilebilir.

Şimdi de fark dizi uzaylarının genelleştirmeleri olan genelleştirilmiş fark dizi uzaylarına bakalım. $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ ve $v = (v_k)$ kompleks sayıların sıfırdan farklı bir dizisi olmak üzere

$$(\Delta_v x_k) = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$$

ve X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere

$$\Delta_v(x) = \{x = (x_k) : \Delta_v x_k \in X\}$$

dizi uzayının bazı topolojik özellikleri 1989 yılında Çolak tarafından incelendi. Daha sonra Et ve Çolak (1990) $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$

$$\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

ve

$$\Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$$

olmak üzere

$$l_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in l_\infty\},$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

ve

$$c_o(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_o\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğunu gösterdiler. Daha sonra

$v = (v_k)$ sıfırdan farklı bir kompleks terimli herhangi bir dizi olmak üzere yukarıdaki dizi uzayları Et ve Esi (2000) tarafından

$$\Delta_v^m(l_\infty) = \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in l_\infty\},$$

$$\Delta_v^m(c) = \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c\},$$

ve

$$\Delta_v^m(c_o) = \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c_o\}$$

dizi uzaylarına genelleştirildi. Burada $m \in \mathbb{N}$,

$\Delta_v^0 x = (v_k x_k), \Delta_v^m x_k = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$

$\Delta_v x = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$

ve

$\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi bu dizi uzaylarının sağladığı bazı özelliklere bakalım. Aşağıda vereceğimiz teoremlerde Z ile l_∞, c ve c_o'dan birini temsil edecektir.

Teorem 2.1. Z bir vektör uzayı ise $\Delta_v^m(Z)$'de bir vektör uzayıdır.

İspat: $x, y \in \Delta_v^m(Z)$ ve α bir skaler olsun. Kompleks veya reel terimli tüm dizilerin uzayı w bir vektör uzayı ve $\Delta_v^m(Z) \subset w$ olduğundan $x, y \in \Delta_v^m(Z)$ ve $\alpha \in K$ için $x + y \in \Delta_v^m(Z)$ ve $\alpha x \in \Delta_v^m(Z)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$x, y \in \Delta_v^m(Z)$ olsun. Bu takdirde $\Delta_v^m x_k, \Delta_v^m y_k \in Z$ dir. Z bir lineer uzay olduğundan

$\Delta_v^m x_k + \Delta_v^m y_k \in Z$ dir. Δ^m lineer operatör olduğundan

$\Delta_v^m x_k + \Delta_v^m y_k = \Delta_v^m(x_k + y_k) \in Z$

$x + y \in \Delta_v^m(Z)$ elde edilir.

$x \in \Delta_v^m(Z)$ ise $\Delta_v^m x_k \in Z$ dir. Z liner uzay olduğundan $\alpha \Delta_v^m x_k \in Z$ olup $\alpha x \in Z$

ve $\alpha x \in \Delta_v^m(Z)$ dir.

Teorem 2.2. $Z, \|.\|$ ile normlu uzay ise $\Delta_v^m(Z)$'de

$$\|x\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^{m} |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\|$$

normu ile normlu uzaylardır.

İspat: N_1)

$$\|x\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^{m} |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\| \geqslant 0$$

olduğu aşikardır.

N_2) $\|x\|_{\Delta_v} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\| = 0$

olsun. Bu takdirde $x_1 = x_2 = ... = x_m = 0$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \binom{m}{0} x_k v_k - \binom{m}{1} x_{k+1} v_{k+1} + ...(-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} v_{k+m} \right\| = 0$$

$k = 1$ için

$$\binom{m}{0} x_1 v_1 - \binom{m}{1} x_2 v_2 + ... + (-1)^m \binom{m}{m} x_{m+1} v_{m+1} = 0$$

$\binom{m}{m} x_{m+1} v_{m+1} = 0$' dır. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $v_k \neq 0$ olduğundan $x_{m+1} = 0$ elde edilir.

Böyle devam edilirse her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ olur ki buradan $x = \theta$ dır. Tersine $x = \theta \Longrightarrow \|x\|_{\Delta_v} = 0$ dır.

N_3)

$$\|\alpha x\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^{m} |\alpha x_i v_i| + \|\Delta_v^m \alpha x\|$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{i=0}^{m} |x_i v_i| + \left\| \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} x_{k+j} v_{k+j} \right\| \right)$$

$$= |\alpha| \, \|\Delta_v^m x\|$$

N_4)

$$\|x + y\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^{m} |x_i v_i + y_i v_i| + \|\Delta_v^m(x + y)\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\| + \sum_{i=1}^{m} |y_i v_i| + \|\Delta_v^m y\|$$

$$\leqslant \|x\|_{\Delta_v} + \|y\|_{\Delta_v}.$$

Teorem 2.3. $(Z, \|,\|)$ bir Banach uzayı olsun. Bu takdirde $\Delta_v^m(Z)$'de $\|x\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^{m} |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\|$ de normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat: $x^s = (x_1^s, x_2^s ...) \in \Delta_v^m(Z)$ olmak üzere (x^s), $\Delta_v^m(Z)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Burada $s, t \to \infty$ için

$\|x^s - x^t\|_{\Delta_v} \to 0$ dır. O halde

$$\left\|x^s - x^t\right\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^{m} \left|x_i^s - x_i^t\right| + \left\|\Delta_v^m(x_k^s) - \Delta_v^m(x_k^t)\right\| \to 0 \quad (s, t \to \infty)$$

olur. Böylece $(x_i^1, x_i^2, ...)$, $(i \leqslant m)$ ve $(\Delta_v^m(x_k^1), \Delta_v^m(x_k^2), ...)$ sırasıyla $\mathbb{C}$ ve Z'de Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ ve Z tam olduklarından bu dizi $\mathbb{C}$ ve Z'de yakınsaktır. $\mathbb{C}$ de $x_i^s \to x_i, (i \leqslant m)$ ve Z'de $\Delta_v^m(x^s) \to (y_k), (s, t \to \infty)$ olsun.

$$x_k = v_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-i-1}{m-1} y_i$$

$$= v_k^{-1} \sum_{i=1}^{k} (-1)^m \binom{k+m-i-1}{m-1} y_{i-m}$$

olmak üzere $y_k = \Delta_v^m x_k$ diyelim. Burada $y_{1-m} = y_{2-m} = ... = y_o = 0$ olarak alınmıştır. Eğer $x \in D\Delta_v^m(Z)$ ise yeteri kadar büyük k'lar için örneğin $k \geqslant 2m$ için, sağlanacak şekilde bir tek $y = y_k \in Z$ vardır.

Burada $D\Delta_v^m(Z) = \{x = (x_k) : x \in \Delta_v^m(Z), x_1 = x_2 = ... = x_m = 0\}$'dır. Diğer taraftan $x \in \Delta_v^m(Z)$ ise $x' = (x'_k) \in D\Delta_v^m(Z)$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} x_k & k \leq m \text{ ise} \\ x'_k & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir. O halde

$$\Delta_v^m(x^s) = (\Delta_v^m(x_k^1), \Delta_v^m(x_k^2), ...)$$

dizisi Z'de $\Delta_v^m(x)$'e yakınsar. Buradan $s \to \infty$ için

$$\|x^s - x\|_{\Delta_v} \to 0$$

Böylece $\Delta_v^m(Z)$ Banach uzayı olur.

Teorem 2.4. $(Z, \|.\|)$ normlu bir BK uzayı ise $\Delta_v^m(Z)$ de $\|x\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^{m} |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\|$ normu ile ile bir BK uzayıdır.

İspat: Z Banach uzayı ise $\Delta_v^m(Z)$'de bir önceki teoremden dolayı bir Banach uzayıdır. Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n \to \infty$ için

$\|x_k^n - x_k\|_{\Delta_v} \to 0$ olsun. Bu takdirde $k \leq m$ için

$|x_k^n - x_k| \to 0, (n \to \infty)$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\|\Delta_v^m(x_k^n - x_k)\| \to 0, \ \ (n \to \infty) \quad \text{buradan } \forall k \in N \text{ için } \ |x_k^n - x_k| \to 0,$$

elde edilir. Bu nedenle $\Delta_v^m(Z)$ bir BK uzayıdır.

Teorem 2.4. $X \subset Y$ ise $\Delta_v^m(X) \subset \Delta_v^m(Y)$ dir. Eğer $X \subset Y$ kesin ise $\Delta_v^m(X) \subset \Delta_v^m(Y)$ de kesindir.

İspat: $x \in \Delta_v^m(X)$ olsun. Bu taktirde $\Delta_v^m(x_k) \in Y$ dir.Bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $X = c$, $Y = l_\infty$ olsun ve $x = (1, 0, 1, 0, ...)$, $v = (1, 1, 1, ...)$ seçelim. Böylece

$$\Delta_v^m(x_k) = (-1)^{k+1} 2^{m-1} x \in \Delta_v^m(l_\infty) - \Delta_v^m(c)'dir.$$

3. ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ SEMİNORMLU GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Bu kısımda yüksek lisans çalışmamızın orjinal kısmı olan ve önceki bölümde verdiğimiz fark dizi uzaylarını daha genel durumda veren yeni genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını tanımlayacağız.

Bir $p = (p_k)$ dizisi pozitif reel sayıların kesin sınırlı bir dizisi ve $s \geqslant 0$ bir reel sayı olsun. X de $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde q yarınormuyla verilmiş bir yarınormlu uzay olsun. $w(X)$, X üzerinde tanımlanmış bütün dizilerin uzayı olsun. $v = (v_k)$ kompleks sayıların sıfırdan farklı herhangi bir sabit dizisi olsun. M Orlicz fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki yeni dizi uzaylarını tanımlayalım:

$$c\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right] = \left\{ \begin{array}{c} x = (x_k) \in w(X) : \lim_k k^{-s} \left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k - l)}{r}\right)\right]^{p_k} \\ = 0, \quad l \in X, \text{ ve } \exists\, r > 0 \end{array} \right\},$$

$$c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right] = \left\{ \begin{array}{c} x = (x_k) \in w(X) : \lim_k k^{-s} \left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k)}{r}\right)\right]^{p_k} \\ = 0, \ \exists\, r > 0 \end{array} \right\}$$

ve

$$l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right] = \left\{ \begin{array}{c} x = (x_k) \in w(X) : \sup_k k^{-s} \left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k)}{r}\right)\right]^{p_k} \\ < \infty \ \text{ ve } \exists r > 0 \end{array} \right\}.$$

Bazı iyi bilinen uzaylar m, v, M, p, q ve s'nin özelleştirilmesiyle aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

a) Eğer $M(x) = x$, $m = 1$, $v = (v_k) = (1, 1, ...)$, $q(x) = |x|$, ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ $s = 0$ ise Kızmaz, (1989) tarafından tanımlanan ve çalışılan $c(\Delta)$, $c_o(\Delta)$, $l_\infty(\Delta)$ uzayları elde edilir.

b) Eğer $M(x) = x$, $m = 0$, $v = (v_k) = (1, 1, ...)$, $q(x) = |x|$ ve $s = 0$ ise Maddox (1970) tarafından tanımlanan ve çalışılan $c(p)$, $c_o(p)$, $l_\infty(p)$ uzayları elde edilir.

c) Eğer $M(x) = x$, $q(x) = |x|$, $s = 0$ ve $p_k = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ise Et ve Esi, (2000) tarafından tanımlanan $c(\Delta_v^m)$, $c_o(\Delta_v^m)$, $l_\infty(\Delta_v^m)$ uzayları elde edilir.

d) Eğer $M(x) = x$, $m = s = 0$, $v = (v_k) = (1, 1, ...)$, $q(x) = |x|$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ için ise c, c_o, l_∞ klasik dizi uzayları elde edilir.

Temel Sonuçlar

Aşağıdaki teoremleri ispatlayalım:

Teorem 3.1. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $c\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$, $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ ve $l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$, $\mathbb{C}$ üzerinde lineer uzaylardır.

İspat: İspatı sadece $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ için verelim diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir. $x, y \in c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ olsun, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{(\Delta_v^m x_k)}{r_1}\right)\right)\right]^{p_k} \to 0 \ (\ k \to \infty)$$

ve

$$k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{(\Delta_v^m y_k)}{r_2}\right)\right)\right]^{p_k} \to 0 \ (k \to \infty)$$

olacak şekilde r_1, r_2 pozitif sayıları vardır. Şimdi $r_3 = \max(2\left|\lambda\right| r_1, 2\left|\mu\right| r_2)$. M azalmayan konveks fonksiyon ve q yarınorm olduğundan

$$\begin{aligned}
k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m(\lambda x_k + \mu y_k)}{r_3}\right)\right)\right]^{p_k} &\leq k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m(\lambda x_k)}{r_3}\right) + q\left(\frac{\Delta_v^m(\mu y_k)}{r_3}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&\leq Kk^{-s}\left[M\left(q\frac{(\Delta_v^m x_k)}{r_1}\right)\right]^{p_k} + Kk^{-s}\left[M\left(q\frac{(\Delta_v^m y_k)}{r_2}\right)\right]^{p_k} \\
&\to 0 \ (k \to \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(\lambda x_k + \mu y_k) \in c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ elde ederiz. O halde $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ lineerdir.

Teorem 3.2. $c\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$, $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ ve $l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ dizi uzayları

$$h(x) = \inf\left\{r^{p_n/H} > 0 : \sup_k k^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k)}{r}\right)\right] \leq 1, s \geqslant 0, \exists\ r > 0, n \in \mathbb{N}\right\}$$

ile paranormlu uzaylar olup, burada $H = \max(1, \sup_k p_k < \infty)$ dır.

İspat: İspatı sadece $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ için verelim. Diğerlerinin ispatı da aynı yolla yapılır. Her $x \in c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ için $h(x) = h(-x)$ ve $h(\theta) = 0$ olduğu açıktır. $x, y \in c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ olsun. Dolayısıyla

$$\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{r_1}\right)\right)\right] \leq 1$$

ve

$$\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m y_k}{r_2}\right)\right)\right] \leq 1$$

olacak şekilde r_1 ve r_2 sayılarını bulabiliriz. $r = r_1 + r_2$ olsun

$$\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m (x_k + y_k)}{r}\right)\right)\right]$$

$$\leq \sup_k k^{-s} M\left(\frac{r_1}{r_1+r_2} q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{r_1}\right) + \frac{r_2}{r_1+r_2} q\left(\frac{\Delta_v^m y_k}{r_2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{r_1}{r_1+r_2}\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{r_1}\right)\right) + \frac{r_2}{r_1+r_2}\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m y_k}{r_2}\right)\right) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$h(x+y) = \inf\left\{r^{p_n/H} : \sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m (x_k + y_k)}{\rho}\right)\right)\right] \leq 1, \rho > 0, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \inf\left\{r_1^{p_n/H} : \sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m (x_k)}{r_1}\right)\right)\right] \leq 1, s > 0, r_1 > 0, n \in \mathbb{N}\right\} \\
&+ \inf\left\{r_2^{p_n/H} : \sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m (y_k)}{r_2}\right)\right)\right] \leq 1, s \geq 0, r_2 > 0, n \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

$$= h(x) + h(y)$$

olduğu görülür. Skaler çarpımın sürekliliği için $\lambda \neq 0$ herhangi bir kompleks sayı olsun.

$$h(\lambda x) = \inf\left\{r^{p_n/H} : \sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m \lambda x_k}{r}\right)\right)\right] \leq 1, s \geq 0, r > 0, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \inf\left\{ (t\,|\lambda|)^{p_n/H} : \sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{t} \right)\right)\right] \leq 1, s \geq 0, t > 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Burada $t = \frac{r}{|\lambda|}$ dir. $|\lambda|^{p_n} \leq \max(1, |\lambda|^H)$ olmasını kullanarak

$|\lambda|^{p_n/H} \leq (\max(1, |\lambda|^H))^{1/H}$

elde edilir. Dolayısıyla

$$h(\lambda x) \leq (\max(1, |\lambda|^H))^{1/H}. \inf\left\{ t^{p_n/H} : \sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{t} \right)\right) \leq 1, s \geq 0, t > 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= (\max(1, |\lambda|^H))^{1/H}.h(x)$$

elde edilir. Bundan dolayı $h(x)$ sıfıra yakınsadığı zaman $h(\lambda x)$ de sıfıra yakınsar. O halde $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ uzayı paranormlu uzaydır.

Teorem 3.3. (X, q) yarınormlu tam uzay olsun. Teorem 3.2 de tanımlanan h paranormuyla $c\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$, $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ ve $l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ uzayları tam uzaylardır.

İspat: İspatı $c_0\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ için yapalım. Diğerlerinin ispatı da benzer şekilde yapılabilir. (x^i), $c_0\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$'da bir Cauchy dizisi olsun. $x_0 > 0$ sabit ve verilen bir $0 < \varepsilon < 1$ için $\frac{\varepsilon}{tx_0} > 0$ ve $x_0 t \geq 1$ olacak şekilde bir $t > 0$ sayısını seçelim

$h(x^i - x^j) \to 0 \; i, j \to \infty$

Bu taktirde

$$h(x^i - x^j) < \frac{\varepsilon}{x_0 t}, \; i, j \geq n_0$$

olacak şekilde bir n_0 tamsayısı vardır. O halde h 'nın tanımından

$$\inf\left\{ r^{p_n/H} : \sup_k k^{-s} M\left[q\left(\frac{\Delta_v^m (x_k^i - x_k^j)}{r} \right)\right] \leq 1, s \geq 0, r > 0, n \in \mathbb{N} \right\} < \frac{\varepsilon}{x_0 t}$$

ve

$$\sup_k k^{-s} M\left[q\left(\frac{\Delta_v^m (x_k^i - x_k^j)}{h(x^i - x^j)} \right)\right] \leq 1, \; \forall \; i, j \geq n_0$$

elde ederiz. Buradan

$$M\left[q\left(\frac{\Delta_v^m(x_k^i - x_k^j)}{h(x^i - x^j)}\right)\right] \leq 1,\ \forall\ i,j \geq n_0$$

bulunur. $t > 0$ için $M(\frac{tx_0}{2}) \geq 1$ ile şunu elde ederiz:

$$M\left[q\left(\frac{\Delta_v^m(x_k^i - x_k^j)}{h(x^i - x^j)}\right)\right] \leq M(\frac{tx_0}{2})$$

M Orlicz fonksiyonu sürekli olduğundan

$$q\left(\Delta_v^m x_k^i - \Delta_v^m x_k^j\right) < \frac{tx_0}{2}.\frac{\varepsilon}{tx_0} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

elde edilir. Bu ise $(\Delta_v^m x^i)$ dizisinin (X,q)'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X,q)'nun tamlığından bu dizi X'de yakınsaktır. Farzedelim ki her $k \in \mathbb{N}$ ve $i \to \infty$ için $\Delta_v^m x_k^i \to x_k$ olsun. Bundan dolayı her $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$ için n_0 gibi pozitif tamsayı vardır öyle ki $\forall i,j \geq N_0$ için $q\left(\Delta_v^m x_k^i - \Delta_v^m x_k^j\right) < \varepsilon$ olur. M'nin sürekliliğini kullanarak

$$\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x^i - \lim_{j\to\infty} \Delta_v^m x_k^j}{r}\right)\right) \leq 1$$

elde ederiz. Böylece

$$\sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x^i - \Delta_v^m x_k^j}{r}\right)\right) \leq 1$$

olur. r'lerin infimumunu alıp $\forall i \geq n_0$ ve $j \to \infty$ olursa

$$h(x^i - x) = \inf\left\{r^{p_n/H} : \sup_k k^{-s} M\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x^i - x_k}{r}\right)\right) \leq 1, s \geq 0, r > 0, n \in \mathbb{N}\right\} < \varepsilon$$

olur. Böylece $x^i \to x$ dir. Şimdi $(x^i) \in c_0\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ ve $(x_k) = (x_k - x_k^i) + (x_k^i)$ olduğundan uzayın lineerliğini kullanarak $(x_k) \in c_0\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ elde ederiz.

Teorem 3.4 $Z; l_\infty$, c veya c_0 uzaylarından herhangi biri olmak üzere, M_1 ve M_2, iki Orlicz fonksiyonu olsun. Aşağıdaki kapsamalar sağlanır.

(a) $Z\left[\Delta_v^m, M_1, p, q, s\right] \subset Z\left[\Delta_v^m, M_2 o M_1, p, q, s\right]$

(b) $Z\left[\Delta_v^m, M_1, p, q, s\right] \cap Z\left[\Delta_v^m, M_2, p, q, s\right] \subset Z\left[\Delta_v^m, M_1 + M_2, p, q, s\right]$.

İspat: **(a)** İspatı sadece $Z = c_o$ için yapalım diğerleri benzer şekilde yapılabilir. $x = (x_k) \in c_o\left[\Delta_v^m, M_1, p, q, s\right]$ olsun. $0 < \varepsilon < 1$ ve $r > 0$ sayısı verilsin.

$b = \max\left(1, \sup\left[M_2\left(\frac{1}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right)\right]^{p_k}\right)$ olmak üzere,

$$A = \left\{k \in \mathbb{N} : k^{-s}\left[M_1\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{r}\right)\right)\right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{b}\right\}$$

olacak şekilde $\mathbb{N}$'nin bir A alt cümlesini seçelim.

$$y_k = (k^{-s})^{1/p_k} M_1\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{r}\right)\right)$$

alınırsa $y_k^{p_k} < \frac{\varepsilon}{b} < 1$ olduğundan $y_k < 1$ dir. Böylece M_2 'nin konveksliğini kullanarak

$$(M_2 o M_1)\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{r}\right)\right) = M_2\left(\frac{y_k}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right)$$

$$\leq y_k M_2\left(\frac{1}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right)$$

Dolayısıyla

$$k^{-s}\left[M_2(y_k)\right]^{p_k} \leq k^{-s}\left[M_2\left(\frac{y_k}{(k^{-s})^{1/p_k}}\right)\right]^{p_k} \leq k^{-s} b y_k^{p_k} \leq b y_k^{p_k} < \varepsilon$$

elde edilir. O halde $(M_2 o M_1)(\frac{q(\Delta_v^m x_k}{r}) < \varepsilon$ olur. Buradan $x = (x_k) \in c_o\left[\Delta_v^m, M_2 o M_1, p, q, s\right]$ elde edilir.

(b) İstenen kapsama aşağıdaki eşitsizlikten kolayca elde edilir.

$$k^{-s}\left[(M_1 + M_2)\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq K k^{-s}\left[M_1\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} + K k^{-s}\left[M_2\left(q\left(\frac{\Delta_v^m x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}.$$

Teorem 3.5. M bir Orlicz fonksiyonu olsun, $c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right] \subset c\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right] \subset l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ dir ve bu kapsamalar kesindir.

İspat: İlk kapsam açıktır. İkinci kapsamayı ispatlayacağız. $x = (x_k) \in c\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ olsun. M azalmayan konveks bir fonksiyon ve q bir yarınorm olduğundan

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k)}{r}\right)\right]^{p_k} \leq Kk^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k - l}{r}\right)\right]^{p_k} + Kk^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{l}{r}\right)\right)\right]^{p_k}$$

yazabiliriz. q bir yarınorm olduğundan bir K_l tamsayısı vardır öyle ki $q(l) \leq K_l$ dir. Böylece

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k)}{r}\right)\right]^{p_k} \leq Kk^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k - l}{r}\right)\right]^{p_k} + Kk^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{K_l}{r}\right)\right)\right]^{p_k}.$$

elde edilir. Teoremdeki kapsama kesinliğini göstermek için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1. $Z = \mathbb{C}, x = (x_k) \in l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right], M(x) = x, q(x) = |x|, s = 0, v = (v_k) = (1, 1, ...)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olsun. $x = (k^m) \in l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ fakat $\Delta_v^m k^m = (-1)^m m!$ olduğundan $x = (k^m) \notin c_o\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ dir. Bu kısıtlamalar altında $x = (-1)^k$ dizisini düşünürsek $x \in l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ fakat $x \notin c\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ dir.

Teorem 3.6. $Z; l_\infty, c$ veye c_0 uzaylarından herhangi biri olmak üzere, $Z\left[\Delta_v^{m-1}, M, p, q, s\right] \subset Z\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ ve ayrıca genel olarak $i = 1, 2, ..., m-1$ için $Z\left[\Delta_v^i, M, p, q, s\right] \subset Z\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ dir.

Bu kapsama bağıntıları kesindir.

İspat: İspatı $Z = l_\infty$ için verelim. Diğerleri de benzer yolla ispatlanabilir. $x = (x_k) \in l_\infty\left[\Delta_v^m, M, p, q, s\right]$ olsun. O halde

$$\sup_k k^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k)}{r}\right)\right]^{p_k} < \infty.$$

M azalmayan konveks bir fonksiyon, q yarınorm ve Δ_v^m lineer olduğundan

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^m x_k)}{r}\right)\right]^{p_k} = k^{-s}\left[M\left(\frac{q(\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})}{r}\right)\right]^{p_k} < \infty.$$

$$\leq Kk^{-s}\left[M(q\frac{(\Delta_v^{m-1}x_k)}{r}\right]^{p_k}+Kk^{-s}\left[M(q\frac{(\Delta_v^{m-1}x_{k+1}}{r}\right]^{p_k}$$

Böylece $Z\left[\Delta_v^{m-1},M,p,q,s\right]\subset Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s\right]$ dir. Bu şekilde devam edersek $i=1,2,...,m-1$ için $l_\infty\left[\Delta_v^{i},M,p,q,s\right]\subset l_\infty\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s\right]$ elde ederiz. Şimdi bu kapsamaların kesin olduğunu örnekle gösterelim.

Örnek 3.2. $Z=\mathbb{C},M(x)=x,q(x)=x,s=0,\forall k\in\mathbb{N}$ için ve $v=1$ olsun. $x=(k^m)$ dizisini düşünelim, örneğin $X=c$ veya l_∞ için, $Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s\right]$'e ait olsun ama $Z\left[\Delta_v^{m-1},M,p,q,s\right]$'e ait olmasın. Yukarıdaki kısaltmalar altında $x=(x_k)=(k^{m-1})$ dizisini düşünelim. O halde $\Delta^m x_k=0$ ve $\Delta^{m-1}=(-1)^{m-1}(m-1)!$ olduğundan $x_k=(k^{m-1})\in c_o\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s\right]$ fakat $x=(x_k)=(k^{m-1})\notin c_o\left[\Delta_v^{m-1},M,p,q,s\right]$ dır.

Teorem 3.7.$Z;l_\infty$, c veya c_0 uzaylarından herhangi biri ve M bir Orlicz fonksiyonu olsun. O halde

(a) q_1 ve q_2 iki yarınormu için, eğer q_1 yarınormu q_2 yarınormundan kuvvetli ise $Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q_1,s\right]\subset Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q_2,s\right]$ dir.

(b) $1\leq\inf p_k\leq p_k\leq 1$ olsun. O halde $Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s\right]\subset Z\left[\Delta_v^{m},M,q,s\right]$,

(c) $1\leq p_k\leq\sup_k p_k\leq\infty$ olsun. O halde $Z\left[\Delta_v^{m},M,q,s\right]\subset Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s\right]$,

(d) $s_1\leq s_2$ olsun. O halde $Z=c_o,c,l_\infty$ için $Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s_1\right]\subset Z\left[\Delta_v^{m},M,p,q,s_2\right]$ dir.

İspat: Teoremin ispatı okuyucu tarafından kolaylıkla yapılabilir.

KAYNAKLAR

Çolak, R. 1989. *On some generalized sequences spaces, Commun Fac. Sci.* , Univ. Ank. Series A_1, V. 38, 35-46

Çolak, R. 1989. *On invariant sequence space*s, Erciyes Univ.Journal of Sci., 5,1-2 81-88

Esi, A. 2009. Strongly generalized difference $\left[V^{\lambda}, \Delta^{m}, p\right]-$ summable sequence spaces defin

ed by a sequence of Moduli, Nihonkai Mathematical Journal Vol:20 99-108.

Esi, A. and **Tripathy,** B.C. 2008 On Some Generalized new type difference sequence spaced defined by a Modulus function in a seminormed space, Fasciuli Mathematici, Fasc. Math., 40, 15-24

Esi, A. and **Tripathy,** B.C. 2007 Strongly Almost Convergent Generalized Difference Sequences Associated with Multiplier Sequences. Math. Slovaca, 57, 339-348.

Et, M. ve **Çolak, R**. 1995. On some generalized difference spaces, Soochow Journal of Mathematics, Vol 21(4) 377-386

Et, M. and Esi, A. On Kothe Teoplitz Duals of generalized difference sequences spaces 2000 *Bull. Malaysian Math Sci. Soc.(Second Series) 23, 1-8*

Kızmaz, H.1981 *On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull. Vol 24(2)*

Lindenstrauss, J. and **Tzafriri, L**.1967 On sequences spaces, Israel J. Math., 18, 2, 345-355.

Maddox. I.J. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Prees (1970).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Yurdagül ACAR

Doğum Yeri: Batman

Doğum Tarihi: 01\11\1983

Medeni Hali: Bekâr

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Batman Anadolu Lisesi

Lisans: İnönü Üniversitesi, Matematik Bölümü

Katıldığı Kongreler: Ayhan ESİ, Yurdagül ACAR Yeditepe Üniversitesi Matematik Lisansüstü Çalıştayları -1, Sunumlu Konuşmacı